

1次元フーリエ変換を用いた極を含む等緯度経度格子上での微分手法

Differentiation Methods in Longitude-Latitude Coordinates with Poles Using One-dimensional Fourier Transform

野村鈴音⁽¹⁾・榎本剛

Suzune NOMURA⁽¹⁾ and Takeshi ENOMOTO

⁽¹⁾京都大学大学院理学研究科

⁽¹⁾Graduate School of Science, Kyoto University

Synopsis

Computation of derivatives using one-dimensional Fourier transforms on a longitude-latitude grid poses a challenge at the poles. This is because the longitudinal derivative coefficient, which is inversely proportional to the radius of the latitudinal circle, diverges to infinity at the poles. To overcome this, a previous study employed a shifted equilateral grid excluding the poles, offsetting it by half a grid from the regular grid. Here, we present an alternative approach by deriving formulations for gradient, vorticity, divergence and laplacian that avoid problematic coefficients by replacing longitudinal with latitudinal derivatives. Our formulations enable accurate differentiation even at the poles and allow the regular grid, where the latitudinal circle closest to the pole is twice as far as that of the offset grid. Placing grid points at the poles allows direct calculation at poles and equator in general circulation models, simplifying analysis and avoiding post-processing.

キーワード: 高速フーリエ変換, 極問題, 微分, 球面座標系

Keywords: fast fourier transform, pole problem, differentiation, spherical coordinate

1. はじめに

フーリエ変換は、計算効率の良い数値アルゴリズムである高速フーリエ変換 (fast Fourier transform, FFT, Cooley and Tukey 1965) が存在するため、球面上の偏微分時間発展方程式の数値積分の計算量削減に有用である。フーリエ変換の基底は三角関数であるため、球面上で完全に直交しない。そのため、極に対するパリティを考慮して基底を工夫する手法 (Orszag 1974, Yee 1980, Cheong 2000, Yoshimura 2022) や、経度方向及び緯度方向に微分を行うことに主眼を置き1次元フーリエ変換を用いる手法 (Spotz et al. 1998) が考案されている。

本研究では、実装に加えて並列化が容易な後者の手法について改良を行った。後者の手法は、経度方向の微分が極で無限大に発散するという極問題を抱えている。これは、球面上で経度方向に微分は、緯度円に依存する係数を掛ける必要があり、1次元フーリエ変換

を用いた手法では、この係数を格子空間で掛けることで経度方向の微分を行うためである。この性質から、Spotz et al. (1998) では、極を含む等緯度格子 (Regular grid) を半格子ずらして作成する、極を含まない等緯度格子 (offset grid) を用いている。数値モデル内で極を含む等緯度経度格子を使用できれば、極を含む等緯度経度格子の形式で出力したい際に半格子ずらす後処理が不要となる。

本稿では、極で無限大に発散する係数を用いないことで極問題を解消する定式化を示す。第2節では、極問題が生じる勾配の経度成分、渦度・発散、ラプラシアン⁽¹⁾の極問題解消のための定式化を行う。第3節では微分精度を調べる。第4節では、微分の誤差特性について述べる。

2. 極問題解消のための定式化

本節では、極問題とその解消方法について述べる。

極問題は、スカラー函数 $f(\theta, \lambda)$ を球面上で経度方向に微分する場合に現れる。

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \quad (1)$$

ここで、 θ は余緯度、 φ は緯度である。このとき、係数の分母は、極で零となり、経度方向への微分が無限大に発散する。したがって、極問題を解消するには $1/\sin \theta$ のような係数が現れない定式化を行う必要がある。

2.1 勾配の経度成分

スカラー函数 $f(\theta, \lambda)$ の勾配は、

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad (2)$$

である。極問題は、経度成分に現れる。

ここで、絶対デカルト座標 (X, Y, Z) を導入すれば、球座標 (U, V, W) は座標系の変換行列 \mathbf{Q} を用いて絶対デカルト座標で記述できる (Swarztrauber 1981)。

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (3)$$

変換行列 \mathbf{Q} は、

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \lambda & \sin \theta \sin \lambda & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \lambda & \cos \theta \sin \lambda & -\sin \theta \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

である。北極における極問題を考えるために、 $\theta = 0$ での変換行列 \mathbf{Q}_{NP} を考える。

$$\mathbf{Q}_{\text{NP}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

式(3)に式(5)を代入すると、

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_{\text{NP}} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z \\ \cos \lambda X + \sin \lambda Y \\ -\sin \lambda X + \cos \lambda Y \end{pmatrix} \quad (6)$$

となる。球面上では、

$$\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda X + \sin \lambda Y \\ -\sin \lambda X + \cos \lambda Y \end{pmatrix} \quad (7)$$

であり、経度成分 V と緯度成分 W を経度の関数であると考えれば、次のような関係を導ける。

$$\begin{aligned} V(\lambda) &= -\sin \left(\lambda + \frac{\pi}{2} \right) X + \cos \left(\lambda + \frac{\pi}{2} \right) Y \\ &= W \left(\lambda + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)を式(2)に適用すれば、勾配の緯度成分を経度方

向に $\pi/2$ ずらすと経度成分になることがわかる。

以上より、北極 ($\theta = 0$) における勾配の経度成分は、北極における勾配の緯度成分を用いて、

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \Big|_{\theta=0, \lambda=\lambda'} = \frac{\partial f}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0, \lambda=\lambda'+\pi/2} \quad (9)$$

と表現することができ、極問題を解消できる。同様に、南極における勾配の経度成分は、次のように表せる。

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \Big|_{\theta=\pi, \lambda=\lambda'} = -\frac{\partial f}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi, \lambda=\lambda'+\pi/2} \quad (10)$$

式(9)と式(10)は、絶対デカルト座標において極で一意に定まるベクトルは、球面座標において一位に定まらず極に配置される格子点の数だけ表し方が存在するが、緯度成分と経度成分は回転の関係にあるために、経度成分を緯度成分で表現することにより、極問題を回避することが可能であることを示している。

2.2 渦度・発散

渦度 ζ と発散 δ は、速度 $\mathbf{v} = (u, v)^T$ を用いて次のように表せる。

$$\zeta = \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial (u \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) \quad (11)$$

$$\delta = \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial (v \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) \quad (12)$$

式(11)と式(12)は、 $1/\sin \theta$ の係数が現れるため、極で無限大に発散する。

(1) 渦度

渦度 ζ に生じている極問題を解消するために、循環 Γ を用いて式(11)を変形する。循環 Γ は、任意の閉じた曲線 l に沿った速度成分を閉曲線上で積分したものである。ストークスの定理を用いて、曲線 l に囲まれた面積 S で積分すれば、

$$\begin{aligned} \Gamma &= \oint_l \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \iint_S \zeta \, dS \end{aligned} \quad (13)$$

となる。ここで、 \mathbf{n} は曲線 l に囲まれた面の法線ベクトルである。

渦度は、微小面積 ΔS における循環 $\Delta \Gamma$ であるので、次のようになる。

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{\Delta\Gamma}{\Delta S} \\ &= \frac{\iint_S \frac{1}{\sin\theta} \left(\frac{\partial(u \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial v}{\partial\lambda} \right) \sin\theta \, d\theta \, d\lambda}{\iint_S \sin\theta \, d\theta \, d\lambda} \quad (14)\end{aligned}$$

北極における極問題を考えるために、式(14)に対して $\theta \rightarrow 0$ の極限をとった渦度 ζ_{NP} を考える。

$$\begin{aligned}\zeta_{\text{NP}} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta\Gamma}{\Delta S} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\theta \left(\frac{\partial(u \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial v}{\partial\lambda} \right) d\theta \, d\lambda}{\int_0^{2\pi} \int_0^\theta \sin\theta \, d\theta \, d\lambda} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\theta \left(\frac{\partial(u \sin\theta)}{\partial\theta} \right) d\theta \, d\lambda}{2\pi \int_0^\theta \sin\theta \, d\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{\int_0^{2\pi} [u \sin\theta]_0^\theta \, d\lambda}{[-\cos\theta]_0^\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\theta \int_0^{2\pi} u \, d\lambda}{(1 - \cos\theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{(1 + \cos\theta) \int_0^{2\pi} u \, d\lambda}{(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{(1 + \cos\theta) \int_0^{2\pi} u \, d\lambda}{\sin\theta} \quad (15)\end{aligned}$$

ここで、式(15)にロピタルの定理を適用すれば、

$$\begin{aligned}\zeta_{\text{NP}} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\theta \int_0^{2\pi} u \, d\lambda + (1 + \cos\theta) \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial\theta} \, d\lambda}{\cos\theta} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial\theta} \Big|_{\theta=0} \, d\lambda \quad (16)\end{aligned}$$

とでき、極問題を解消できる。同様に、南極における渦度 ζ_{SP} は、次のように表せる。

$$\zeta_{\text{SP}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial\theta} \Big|_{\theta=\pi} \, d\lambda \quad (17)$$

(2) 発散

発散 δ に生じている極問題は、渦度 ζ と同様の式変形を行うことで解消される。流束 Λ は、ガウスの発散定理を用いると、

$$\begin{aligned}\Lambda &= \iint_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA \\ &= \iint_S (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, dS \\ &= \iint_S \delta \, dS \quad (18)\end{aligned}$$

となる。ここで、 \mathbf{n} は閉曲面 A 上の点において、 A の外側を向く法線ベクトルである。 S は、閉曲面 A の内部の閉じた空間である。

発散は、微小面積 ΔS における循環 $\Delta\Lambda$ であるので、次のようになる。

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\Delta\Lambda}{\Delta S} \\ &= \frac{\iint_S \frac{1}{\sin\theta} \left(\frac{\partial(v \sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial u}{\partial\lambda} \right) \sin\theta \, d\theta \, d\lambda}{\iint_S \sin\theta \, d\theta \, d\lambda} \quad (19)\end{aligned}$$

北極における極問題を考えるために、式(19)に対して $\theta \rightarrow 0$ の極限をとった発散 δ_{NP} を考える。

$$\begin{aligned}\delta_{\text{NP}} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta\Lambda}{\Delta S} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\theta \left(\frac{\partial(v \sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial u}{\partial\lambda} \right) d\theta \, d\lambda}{\int_0^{2\pi} \int_0^\theta \sin\theta \, d\theta \, d\lambda} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\theta \left(\frac{\partial(v \sin\theta)}{\partial\theta} \right) d\theta \, d\lambda}{2\pi \int_0^\theta \sin\theta \, d\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{\int_0^{2\pi} [v \sin\theta]_0^\theta \, d\lambda}{[-\cos\theta]_0^\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\theta \int_0^{2\pi} v \, d\lambda}{(1 - \cos\theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{(1 + \cos\theta) \int_0^{2\pi} v \, d\lambda}{(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{(1 + \cos\theta) \int_0^{2\pi} v \, d\lambda}{\sin\theta} \quad (20)\end{aligned}$$

ここで、式(20)にロピタルの定理を適用すれば、

$$\begin{aligned}\delta_{\text{NP}} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\theta \int_0^{2\pi} v \, d\lambda + (1 + \cos\theta) \int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial\theta} \, d\lambda}{\cos\theta} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial\theta} \Big|_{\theta=0} \, d\lambda \quad (21)\end{aligned}$$

とでき、極問題を解消できる。同様に、南極における発散 δ_{SP} は、次のように表せる。

$$\delta_{\text{SP}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial\theta} \Big|_{\theta=\pi} \, d\lambda \quad (22)$$

2.3 ラプラシアン

ここでは、スカラーラプラシアン \mathbf{L}_s とベクトルラプラシアン \mathbf{L}_v の極問題について解説する。それぞれは、次のように表される (Swarztrunber 1993)。

$$\mathbf{L}_s f = \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) \quad (23)$$

$$\mathbf{L}_v \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{k} \times \nabla(\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{v}) \quad (24)$$

ここで、 \mathbf{k} は次の式(25)と式(26)を満たすベクトルである。

$$\mathbf{k} \times \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{v} = \zeta \quad (26)$$

(1) スカラーラプラシアン

スカラーラプラシアンは、式(23)より、勾配の発散である。余緯度 θ と経度 λ を用いて表せば、

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_s f &= \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \sin \theta \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \end{aligned} \quad (27)$$

となり、極で無限大に発散するように見えるが、勾配の極問題と発散の極問題は、解消済みであるので、スカラーラプラシアンの極問題もまた解決済みと言える。

(2) ベクトルラプラシアン

ベクトルラプラシアンは、式(24)に式(25)、(26)より、

$$\mathbf{L}_v \mathbf{v} = \nabla \delta + \mathbf{k} \times \nabla \zeta \quad (28)$$

となる。ここで、渦度 ζ と発散 δ はスカラー量であり、勾配 ∇ を作用させることでベクトル量となる。

極問題は、ベクトルラプラシアンを得るのに必要な渦度、発散、勾配の全てに生じる極問題はすでに第2.1節と第2.2節で解消しているため、ベクトルラプラシアンもまた極問題が解消される。

3. 実装

本節では、第2節で述べた極問題解消法を用いることにより、極あり等緯度経度格子で微分を行う。FFTライブラリは、FFTW 3.3.10を使用した。比較対象として、球面調和関数変換で用いた計算結果とする。

球面調和関数変換ライブラリには、SPHEREPACK ver.3.2を使用した。SPHEREPACKは、等緯度経度格子上で変換するルーチンがついているため、これを使用して同じ格子を用いて比較を行うことにする。

3.1 設定

入力する変数は、浅水波モデルの標準実験(Williamson et al. 1992)のテストケース2のジオポテンシャル高度 h と東西風 u 、南北風 v とした(Fig.1)。

出力する変数は、入力変数に対して方程式の中でよく使用される微分量となる、勾配、風の緯度微分、渦度・発散、スカラーラプラシアン・ベクトルラプラシアンとした。

また、極以外では、極問題を考慮する必要はない。極以外においては、Spotz et al. (1998)で提案されている1次元フーリエ変換を用いた手法で微分を行う。

3.2 計算結果

フーリエ変換による微分結果はFig.2である。南北風は、南北一様であるため零に近い値となる。発散は、テストケース2では地衡流バランスしているため、零になる。このとき、極域でノイズが生じている。

Fig.3とFig.4は、フーリエ変換版と球面調和関数変換版の解析解からの誤差である。フーリエ変換版は極域のノイズが顕著であることに対して、球面調和関数変換版は横縞のノイズが顕著であり、両者で誤差のパターンが大きく異なる。

フーリエ変換版で、極域でノイズが増大する理由の一つは、緯度円の半径に依存する係数にある。この係数は、前述の通り、経度方向に微分すると出現する。したがって、経度微分において極域でノイズが増大する性質がある。

また、緯度方向の微分(勾配の緯度成分、風の緯度微分)、発散などでは、球面調和関数変換版よりフーリエ変換版の方がノイズが小さい傾向があり、球面上でフーリエ変換を用いた微分の有効性を示している。

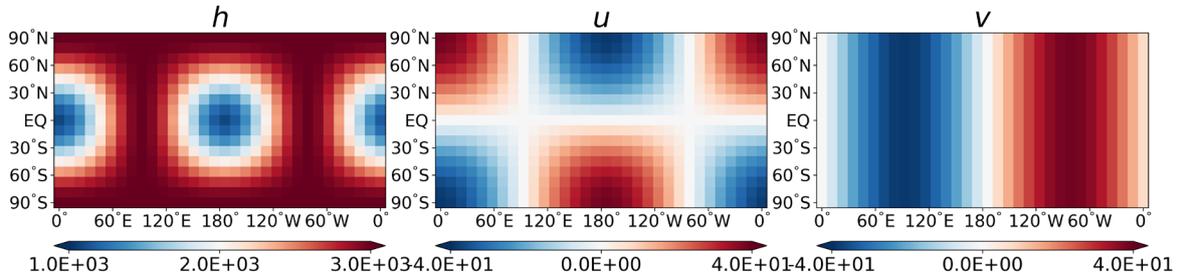


Fig. 1 Input fields of Geopotential height, u-wind, and v-wind (from left to right). The horizontal resolution is 17 grid points in the meridional direction and 32 grid points in the zonal direction.

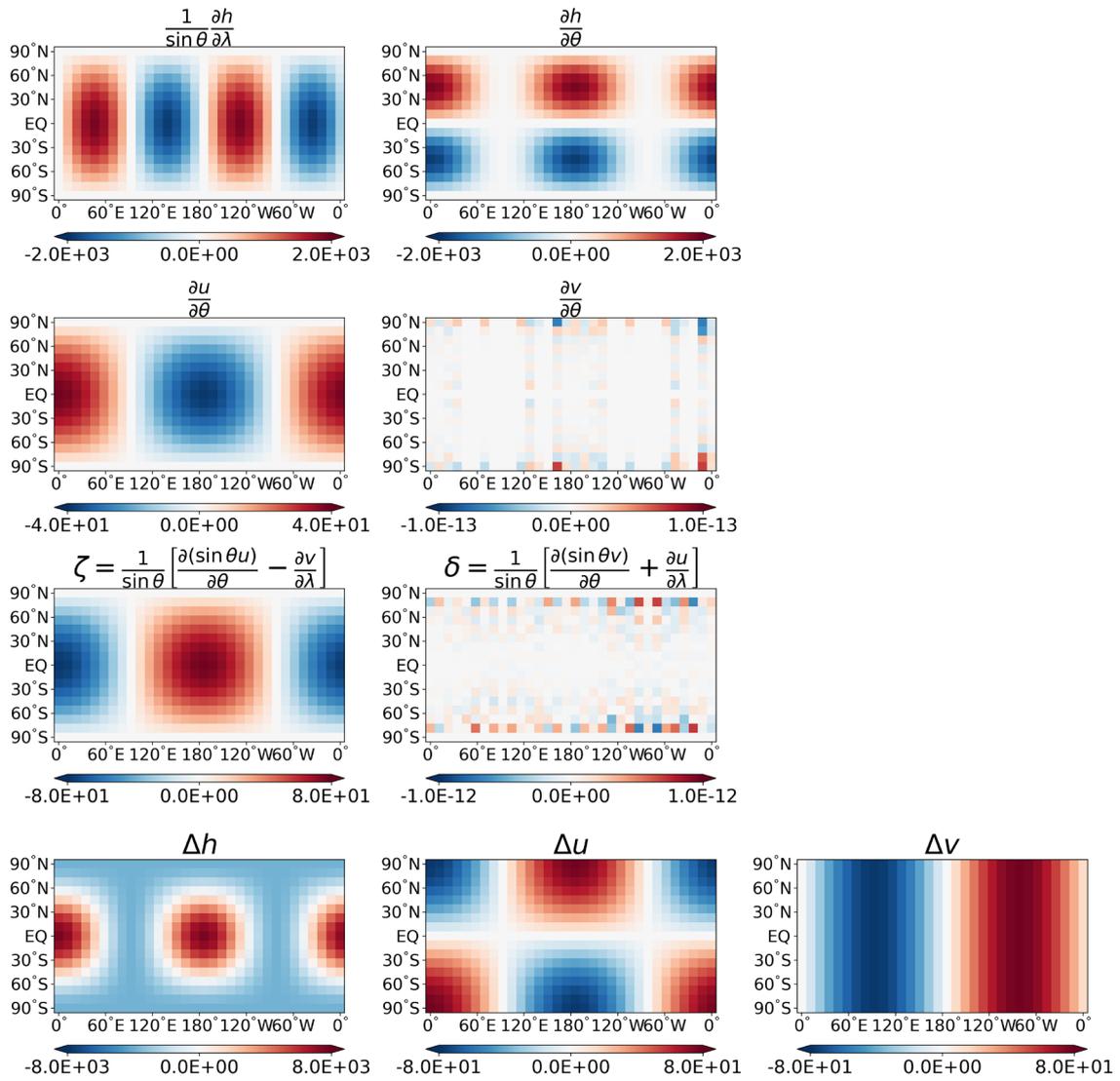


Fig. 2 Differentiation using Fourier transforms. Variables are the gradient, latitudinal derivative of wind, vorticity, divergence, scalar Laplacian, and vector Laplacian (from top to bottom). The horizontal resolution is the same as in Fig. 1.

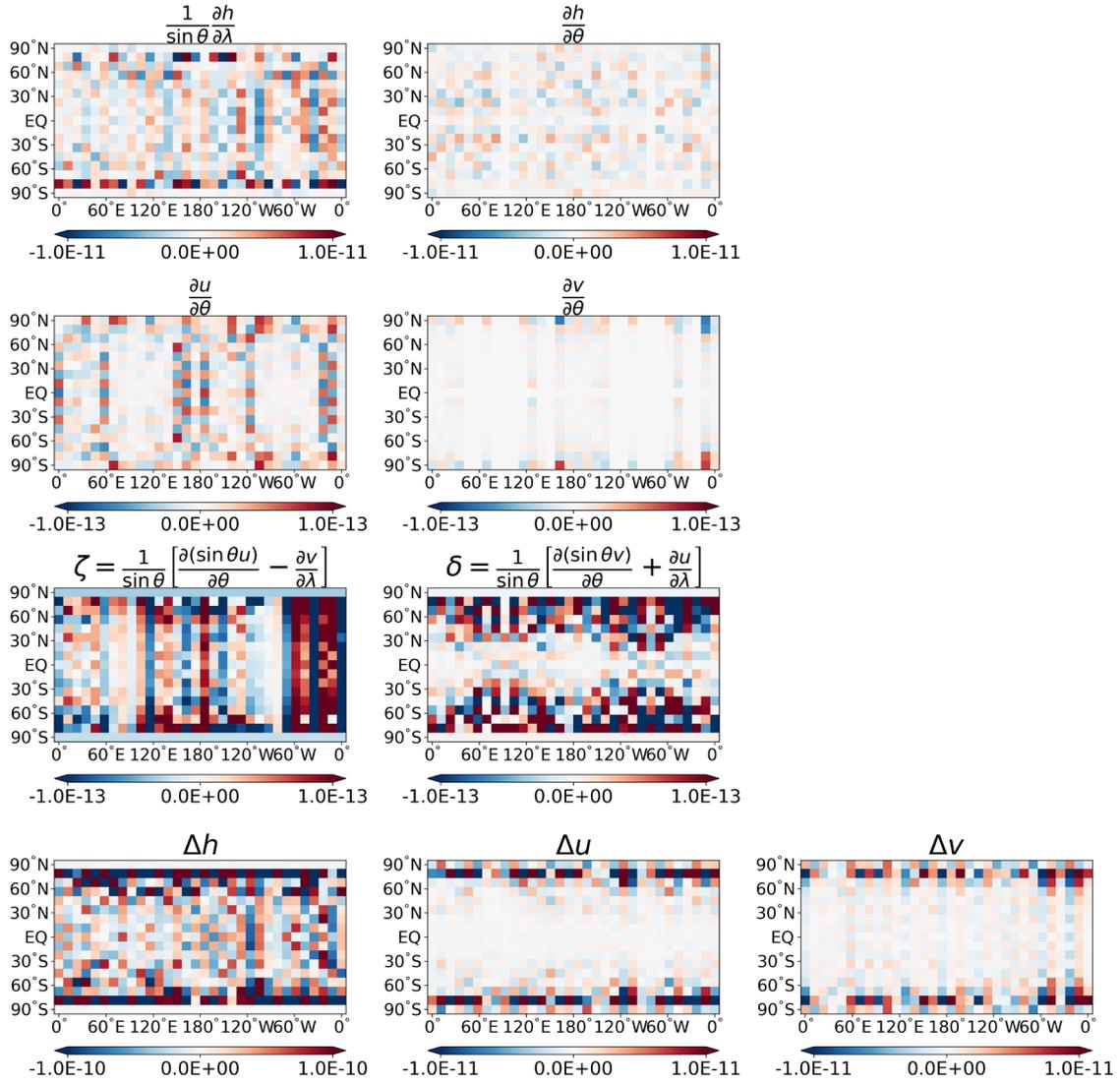


Fig. 3 As in Fig. 2, except that this figure shows the error to the analytical solution, obtained using the Fourier transform method.

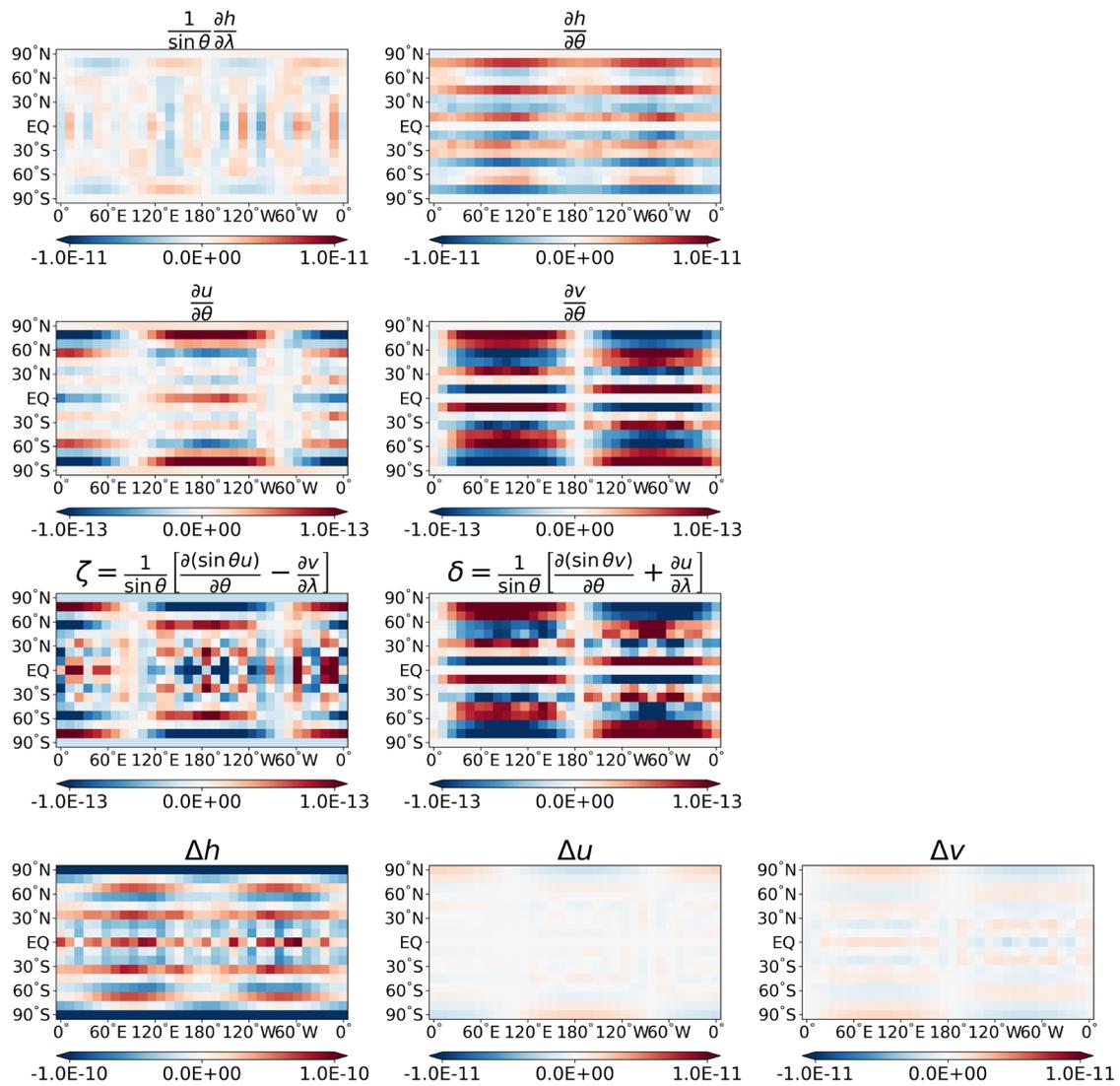


Fig. 4 As in Fig. 3, except that the method used here is the spherical harmonic transform.

4. 極域で増大するノイズ

本節では、第3節で述べた極域でノイズが増大することに着目し、極に格子点を配置した利点を考察する。

Spotz et al. (1998) では、極問題を回避するために、offset grid (極あり等緯度経度格子から半格子ずらした極を含まない等緯度経度格子) を用いている。

極域でノイズが増大する理由として、緯度円の半径に依存する係数があるが、offset gridと極あり等緯度経度格子の解像度が同じとき、極と極に最も近い格子点の距離は2倍異なる。そのため、極に格子点を配置することは、極域のノイズを軽減することにもつながるはずである。

そこで、複数の解像度で、offset gridと極あり等緯度経度格子で精度比較を行なった。計算の設定は、第3節と全て同じである。

1次元フーリエ変換による球面上での微分手法は、誤差に緯度依存性があるため、各緯度で誤差を絶対値を足し合わせ誤差の緯度依存性を2つの格子で比較した (Fig.5)。

極あり等緯度経度格子では、極に配置された格子点上で極問題を解消するための定式化から、微分を行っているため、ノイズが小さい。それに対して、offset gridでは極に最も近い格子点でノイズが最も大きくなっている。また、どちらの格子でも極に近づくほどノイズが増大する性質はあるが、最大のノイズをとるのはoffset gridである。

さらに、高解像度になるほど極域のノイズは顕著になる。したがって、Spotz et al. (1998) の1次元フーリエ変換を用いた球面上の微分で、極問題を解くことは、微分精度の観点からも重要である。

5. まとめと今後の展望

本研究では、Spotz et al. (1998) で提案された1次元フーリエ変換を用いた球面上の微分において、極問題を解消する定式化を考案し、その微分精度と、極で生じるノイズについて調べた。

極あり等緯度経度格子は、JRA-3Qをはじめとする再解析データでも使用されており、利便性が高い格子である。モデル内部でそのような格子が利用できることは、出力の際に後処理を減らすことにもなる。

1次元フーリエ変換を用いた球面上の偏微分時間発展方程式の数値積分は、波数空間における支配方程式を持たないために、擬スペクトル法で実装することになる。したがって、エイリアシングを防止するような操作が必要になる。

また、エイリアシングを防止する際に、極域のノイ

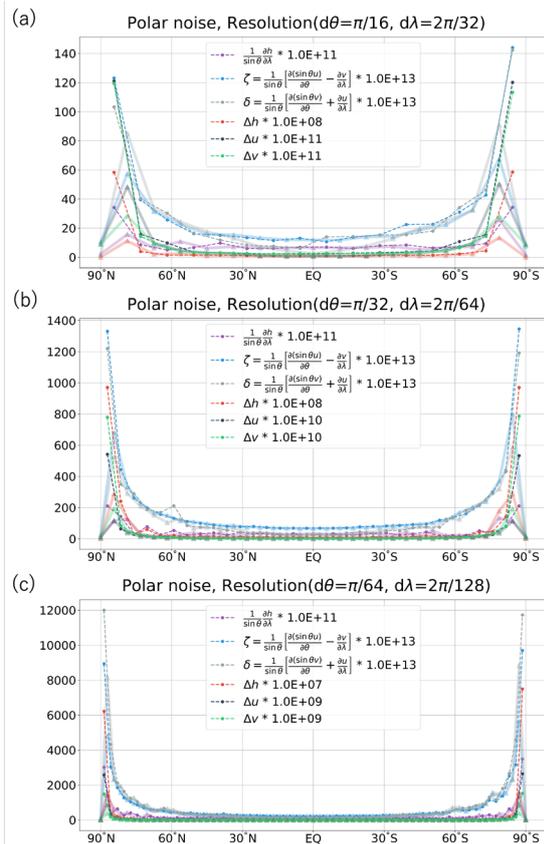


Fig. 5 Noise appearing near the poles in vorticity. The abscissa is latitude and the ordinate is the absolute value of the zonally summed error. The solid line represents the regular grid and the dashed line represents the offset grid. Horizontal resolution is (a) $\Delta\theta = \pi/16$, $\Delta\lambda = \pi/32$, (b) $\Delta\theta = \pi/32$, $\Delta\lambda = \pi/64$, (c) $\Delta\theta = \pi/64$, $\Delta\lambda = \pi/128$.

ズも除去するようなフィルタも考案されている。しかし、そのフィルタには球面調和関数変換が必要であるため、球面上の偏微分時間発展方程式の数値積分を、高精度・高計算効率に行うためにはフィルタの計算量削減についても考える必要がある。今後は、極あり等緯度経度格子を浅水波モデルに適用し、エイリアシング防止と極域ノイズ除去を行うフィルタの開発を進める予定である。

謝辞

本研究はJSPS科研費24H00021の助成を受けた。

参考文献

- Cheong, H.-B. (2000): Double Fourier Series on a Sphere: Applications to Elliptic and Vorticity Equations. *J. Comput. Phys.*, Vol. 157, No.1, pp. 327–349, 10.1006/jcph.1999.6385.
- Cooley, J. W., and J. W. Tukey (1965): An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier

- Series. Math. Comp., Vol. 19, No. 90, pp. 297–301, 10.2307/2003354.
- Orszag, S. A. (1974): Fourier Series on Spheres. Mon. Weather Rev., Vol. 102, No. 1, pp. 56–75, 10.1175/1520-0493(1974)102<0056:FSOS>2.0.CO;2.
- Spotz, W. F., M. A. Taylor, and P. N. Swarztrauber (1998): Fast Shallow-Water Equation Solvers in Latitude-Longitude Coordinates. J. Comput. Phys., Vol. 145, No.1, pp. 432–444, 10.1006/jcph.1998.6026.
- Swarztrauber, P. N. (1981): The Approximation of Vector Functions and their Derivatives on the Sphere. SIAM J.Math.Anal., Vol. 18, No. 2, pp. 191–210, <https://doi.org/10.1137/0718015>.
- Swarztrauber, P. N. (1993): The Vector Harmonic Transform Method for Solving Partial Differential Equations in Spherical Geometry. Mon. Weather Rev, Vol. 121, No. 12, pp. 3415–3437, [https://doi.org/10.1175/1520-0493\(1993\)121<3415:TVHTMF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1993)121<3415:TVHTMF>2.0.CO;2).
- Williamson, D. L., J. B. Drake, J. J. Hack, R. Jakob, and P. N. Swarztrauber (1992): A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry. J.Comput.Phys., Vol. 102, No. 1, pp. 211–224, 10.1016/S0021-9991(05)80016-6.
- Yee, S. Y. K. (1980): Studies on Fourier Series on Spheres. Mon. Weather Rev., Vol. 108, No. 5, pp. 676–678, [https://doi.org/10.1175/1520-0493\(1980\)108<0676:SOFOS>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1980)108<0676:SOFOS>2.0.CO;2).
- Yoshimura, H. (2022): Improved double Fourier series on a sphere and its application to a semi-implicit semi-Lagrangian shallow-water model. Geosci. Model Dev., Vol. 15, No. 6, pp. 2561–2597, 10.5194/gmd-15-2561-2022.

(論文受理日：2025年8月29日)