京都大学防災研究所年報 第 67 号 B
DPRI Annuals, No. 67 B, 2024

領域アンサンブル変分法に向けた流れに依存する大規模混合手法

Flow-dependent Large-scale Blending for Limited-area Ensemble Data Assimilation

中下 早織 (1)・榎本 剛

Saori NAKASHITA(1) and Takeshi ENOMOTO

(1) 京都大学大学院 理学研究科

(1) Graduate School of Science, Kyoto University, Japan

Synopsis

We propose a new blending method to incorporate the information from the global model (GM) to alleviate the large-scale degradation of limited-area model data assimilation (LAM DA) due to limitations in the domain size and observations. Unlike the traditional large-scale blending (LSB) methods, our method is based on ensemble variational (EnVar) framework to account for the flow-dependent GM uncertainties. We compare the EnVar blending against other LSB methods using the cycled assimilation experiments with a nested system of one-dimensional chaotic models. Our proposed method outperforms the conventional DA and the other LSB method when dense and uneven observations are assimilated in the LAM domain. The dynamical incorporation of the GM information based on the GM uncertainty yields the improvement of analysis across the scales and produces stable analysis. This suggests that the EnVar-based blending is a promising alternative for the hierarchical phenomena with high variability.

キーワード： アンサンブルデータ同化，ネスティング，流れ依存性，階層構造

Keywords : ensemble data assimilation, nesting, flow dependency, hierarchical structure

1. はじめに

台風や梅雨前線帯低気圧などの生活圏に甚大な被害をもたらしうる極端気象は，惑星規模から総観規模の大規模な循環の中に埋め込まれたメソスケールから対流スケールの擾乱によって引き起こされることが多い．これらの階層構造を持つ気象擾乱を正確に予測するためには，それぞれの擾乱の発達メカニズムを理解した上で，発達に寄与する要因を正確に表現できる数値予報モデルを用いることが求められる．対流スケールの現象を数値予報モデル内で表現するには，少なくとも 1–4 km 程度の水平解像度が必要となる (Kanada and Wada 2016; Fukui and Murata 2021)．近年のスーパーコンピュータの開発の進展により，全球で 10 km 以下の高解像度で予測を行うことも可能となってきているが，多くの状況では，粗い解像度で計算する全球モデル（global model, GM）に計算領域を制限した領域モデル（limited-area model, LAM）を埋め込んだネスティングにより，同じ計算機資源でより高い解像度を実現する．LAM は GM から取得する水平境界条件（lateral boundary condition, LBC）を通じて領域外の情報を得るが，LAM の計算領域内では大規模な現象を十分に表現できない．現業数値予報センターでは，衛星観測の充実と，数値モ

デルとデータ同化システムの双方の精力的な開発により，GM による大規模な循環の予測性能は改善の一途を辿っている．一方 LAM に対するデータ同化システムでは，全球解析システムと比較すると利用している観測タイプが少なく，計算領域の制約から利用できる観測数も制限される．そのため LAM では GM と比較して大規模な構造の予測精度が下がることがある (Berre 2000; Guidard and Fischer 2008)．このような大規模な構造の誤差は，総観規模擾乱の位置ずれにつながり，LAM が本来持つ対流スケールの予測性能に悪影響を与える．

このような GM と LAM の間での大規模場のずれは，メソスケールから対流スケールの現象の不確実性を考慮する領域アンサンブル予測システムにも悪影響を与えうる．全球アンサンブル予測システムでは不確実性の源として，初期値，数値モデルの物理過程，下部境界条件（海面水温，陸面）に摂動を与えることが多いが，領域アンサンブル予測システムではこれらに加えて LBC の摂動を与えることも適切なアンサンブルのばらつきを担保する上で重要である (Saito et al. 2012)．しかし，LBC に対する摂動の与え方と LAM の初期値への摂動の与え方が異なると，LBC と計算領域内部の LAM が表現する場との間で不一致が生じうる．このような境界付近でのずれは偽の重力波を励起し，過大な地表気圧のスプレッドを生じさせることがある (Caron 2013)．さらに領域アンサンブル予測システムでは，多重スケールの不確実性を適切に表現できず，誤差に対してスプレッドの大きさを過小評価する傾向があるという課題も抱えている (Gainford et al. 2024)．対流スケールの現象は流れ場に大きく依存するため，対流スケールのデータ同化ではアンサンブルを利用して背景誤差の流れ依存性を取り入れることが望ましい (Gustafsson et al. 2018) が，上記のような課題から領域アンサンブル同化において多重スケールの構造をどのように取り扱うのが最適かについては未だ議論が続いている (Hu et al. 2023)．

これらの問題を解決するために，既存の全球解析または予測を利用して，LAM の解析における大規模な構造の表現精度を向上させる試みが近年研究されてきた．GM の力学的ダウンスケーリングにおいてはスペクトルナッジング (von Storch et al. 2000) が LAM の大規模場を制約する手法としてよく用いられるが，本研究では対流スケールのアンサンブル同化への応用を目的とするため，データ同化と併用される大規模場の混合（large-scale blending, LSB）手法に注目する．先行研究では，GM と LAM の解析または予測値をスケールに依存した重みを利用して組み合わせる LSB 手法と（以下，独立 LSB 手法），変分法の枠組みを利用した LSB 手法（以下，変分 LSB 手法）が提案されている．

独立 LSB 手法は，GM と LAM のそれぞれの同化システムでの解析ステップと，それぞれの場に対して空間フィルタを作用させてスケールごとに分割し，GM の大規模スケールと LAM の小規模スケールを組み合わせて新たな LAM の場を作成する混合ステップから構成される (Yang 2005)．解析ステップを先に行う解析混合手法 (ALSB) と，混合ステップを先に行う背景混合手法 (BLSB) がこれまでに提案されている．ALSB は解析ステップの後に混合を行うため，大規模場を強く制約できる一方で個々の同化システムで最適に推定された値が混合により最適値からずれるおそれがある．これに対し，BLSB は領域同化システムで決定される観測と背景場の間の適切な重みを保持することができる (Milan et al. 2023)．BLSB では混合ステップで導入される大規模場の制約を保つために，背景誤差共分散の重みをスケールごとに変化させる工夫が取り入れられている例もある (Bučánek and Brožková 2017)．これらの独立 LSB 手法は，予報初期のスピンアップ問題を緩和することで 24 時間後までの降水の短期予測を改善する (Wang et al. 2014a) ほか，熱帯低気圧の進路の系統誤差を減少させる (Hsiao et al. 2015) ことが報告されている．さらに領域アンサンブル予測では，独立 LSB 手法をアンサンブル初期値の作成に利用することで LBC での不一致を緩和する (Caron 2013) ことや，スプレッドと解析精度の間の関係を改善すること (Zhang et al. 2015; Gainford et al. 2024) が示されてきた．

変分 LSB 手法は，GM の大規模場の情報を解析時に取り込むことにより，データ同化の理論と整合的に大規模な構造を GM に制約することができる．Guidard and Fischer (2008, GF08) の定式化では，領域 3 次元変分法（3DVar）に GM 解析の大規模な構造からのずれを表す項（Jk）を付与することで拡張したコスト関数を定義し，その最適化によって大規模場の制約を実現する．また Dahlgren and Gustafsson (2012, DG12) は GF08 の手法に明示的な前処理を導

入するとともに，GM の予測値を Jk 項の定義に用いることで観測と GM の大規模構造との相関を緩和する改良を施した．GF08 と DG12 はともに高層観測に対する精度評価において，LSB を用いない従来手法よりも改善が見られることを示している．解析ステップと混合ステップが分かれている独立 LSB 手法とは対照的に，変分 LSB 手法は観測と同時に GM の大規模場の情報を同化するため，対流スケールの同化によって導入される大規模場のインクリメントを直接的に制約できる．例えば Vendrasco et al. (2016) は大気ドップラーレーダーで観測された動径風と反射強度を同化する際に Jk 項を導入することで，大規模な循環が制約されて力学場と水蒸気関連量との間のバランスが改善し，レーダー同化の精度が向上することを報告している．さらに Keresturi et al. (2019) は摂動観測を用いた領域アンサンブルデータ同化システムにおいて，LBC を与える GM アンサンブルのメンバーを利用したアンサンブル Jk 手法を提案し，大規模場の誤差の減少に加えて，独立 LSB 手法のアンサンブル予測に対する適用と同様に水平境界における摂動のずれの緩和やスプレッドと解析精度の間の関係の改善にも寄与することを示した．

これらの LSB 手法はそれぞれ別個に有用性が確かめられてきたが，同じ実験設定で直接比較を試みた研究はこれまでに存在しない．特に BLSB 手法と変分 LSB 手法は，それぞれ解析ステップの前または解析ステップと同時に混合を行うことで，ALSB 手法よりもデータ同化手法がベースとする最小分散推定や最尤推定からの逸脱を抑えることができるが, 混合のタイミングの違いが LAM への観測の同化に与える影響は明らかになっていない．混合のタイミングが解析に与える影響を統一的な枠組みで調べることは，衛星や地上レーダーなどが捉える GM では表現できない対流スケールの情報を同化できる LAM の強みを活かす上で有用な知見を与えると考えられる．

さらに，これらの LSB 手法が共通で抱える課題として，混合する GM の大規模場の情報の重みを場所ごとに決定できないという点が挙げられる．LSB 手法において GM と LAM のスケール分割を決める波長の閾値（カットオフ波長）を動的に定めるスキームは考案されている (Feng et al. 2020) が，カットオフ波長や GM と LAM の大規模場を混合する際の相対的な重みは高度にのみ依存する場合が多く，流れ場に応じた変化は考慮されていない．また GF08 と DG12 の変分 LSB 手法では，誤差共分散行列を気候学的統計から求めていることに加え，拡張したコスト関数の最適化問題を解きやすくするために，GM の誤差の空間相関に一様性や等方性，変数間相関を無視するなどの仮定を置いている．そのため，彼らの変分混合手法も日々の大気の流れに依存した誤差構造を反映できていない．Keresturi et al. (2019) のアンサンブル手法でも Jk 項を構成する誤差共分散行列を気候学的に求めているため，同じ問題を孕んでいる．LAM の予測だけでなく GM の予測誤差も日々の大気場に依存して変化するため，LSB 手法においても双方の背景誤差の流れ依存性を考慮して相対的な重みを決定することが望ましい．

これらの課題を踏まえて，本研究の目的は，BLSB 手法と変分 LSB 手法を直接比較し，それぞれの LSB 手法の特性と挙動の違いを明らかにすること，および背景誤差の流れ依存性が LSB 手法に与える影響を明らかにすることである．本研究では，GF08 と DG12 によって提案された変分 LSB 手法をアンサンブル変分法（EnVar）の枠組みに拡張し，観測の同化と同時に大規模場を制約するという変分 LSB 手法の強みを活かしつつ，GM と LAM の背景誤差の流れ依存性を考慮したアンサンブル変分 LSB 手法を提案する．提案手法は LAM が表現するメソから対流スケールの背景誤差に加えて，GM が表現する大規模場の背景誤差もアンサンブルによって推定することで, GM の大規模場と LAM が表現する場の相対的な重みを動的に場所ごとに決定することができる．提案手法を先行研究の BLSB 手法および変分 LSB 手法と比較し，LSB 手法に対する流れ依存性の影響を調べる．先行研究では現実大気の挙動を再現できる高次元モデルで LSB 手法の挙動を調べていることが多いが，本研究では一次元モデルによる理想化した実験において手法間比較を行うことで，変数間相関や地形の影響を含まない LSB 手法そのものの性質を明らかにする．

本論文の残りの構成は以下の通りである．まず，第 2 節で LSB 手法についてレビューするとともに，本研究で提案するアンサンブル変分法ベースの LSB 手法を示す．次に第 3 節で LSB 手法を比較する理想化実験のモデルと設定を示す．第 4 節では基準実験として GM と同じ観測を LAM に同化した場合の結果を示し，観測分布を変えた影響を第 5 節で調べる．最後に第 6 節で結論を示し，提案手法の課題と今後

の展望について議論する．

なお，本研究の実験を行う上で参考にした Kretchmer et al. (2015) は GM と LAM を同時に解析するアンサンブル同化手法を提案しているが，本研究では現業センターにおける全球解析の精度が十分に高いことと，LAM のみを保有している研究機関も多く存在することを考慮して，既存の全球解析または予測を利用して LAM の予測精度を改善させる手法に着目する．

2.　LSB 手法

本節では，提案するアンサンブル変分 LSB 手法を含む LSB 手法について記述する．まず，GF08 と DG12 によって提案された，GM の情報を加えた定常誤差共分散に基づく変分 LSB 手法を簡単に説明する．次に，本研究で提案するアンサンブル変分法に基づく拡張を導入する．本節の最後に，変分 LSB 手法と比較する BLSB 手法について簡単に説明する．

なお，本節において登場するベクトル空間の定義と表記を以下にまとめる．

- $\mathbb{R}^{N_\mathrm{G}}$: GM の状態空間;
- $\mathbb{R}^{N_\mathrm{L}}$: LAM の状態空間;
- $\mathbb{R}^{N_\mathrm{Ll}}$: 低解像度の LAM の状態空間;
- $\mathbb{R}^{p}$: 観測空間;
- $\mathbb{R}^{K}$: アンサンブル空間

低解像度の LAM の状態空間は LAM の大規模場のみを GM に制約するために定義する．

2. 1　変分 LSB 手法

GF08 は従来の 3DVar が扱う情報ソース（LAM の背景場 $\mathbf{x}^\mathrm{b}$，観測 $\mathbf{y}$）に加えて，GM 解析 $\mathbf{x}^\mathrm{A}$ を用いて定義される新たな情報ソース $H_1(\mathbf{x}^\mathrm{A})$ を定義した．ここで $H_1 : \mathbb{R}^{N_\mathrm{G}} \mapsto \mathbb{R}^{N_\mathrm{Ll}}$ は空間内挿および解像度切断によって GM の状態空間から低解像度 LAM の状態空間へ投影する演算子である．情報ベクトル

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^\mathrm{b} \\ \mathbf{y} \\ H_1(\mathbf{x}^\mathrm{A}) \end{pmatrix} \tag{1}$$

に対して，LAM 状態空間で定義される真値 $\mathbf{x}^\mathrm{t}$ からのずれを用いて以下の 3 種類の誤差を定義する．

- $\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{b} = \mathbf{x}^\mathrm{b} - \mathbf{x}^\mathrm{t}$: LAM の背景誤差;
- $\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{o} = \mathbf{y} - H(\mathbf{x}^\mathrm{t})$: 観測誤差，$H : \mathbb{R}^{N_\mathrm{L}} \mapsto \mathbb{R}^{p}$ は観測演算子を表す．
- $\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{v} = H_1(\mathbf{x}^\mathrm{A}) - H_2(\mathbf{x}^\mathrm{t})$: GM 解析の大規模場の誤差，$H_2 : \mathbb{R}^{N_\mathrm{L}} \mapsto \mathbb{R}^{N_\mathrm{Ll}}$ は解像度切断によって LAM 状態空間から低解像度 LAM 状態空間へ投影する演算子を表す．

H_1, H_2 は，LAM の非周期的な場を変換するために離散コサイン変換（DCT; Denis et al. 2002）を用いて定義する．

上記の誤差を用いて，情報ベクトル $\mathbf{z}$ の誤差共分散行列は以下のように表される．

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{b}(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{b})^\mathrm{T}] & E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{b}(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{o})^\mathrm{T}] & E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{b}(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{v})^\mathrm{T}] \\ E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{o}(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{b})^\mathrm{T}] & E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{o}(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{o})^\mathrm{T}] & E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{o}(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{v})^\mathrm{T}] \\ E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{v}(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{b})^\mathrm{T}] & E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{v}(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{o})^\mathrm{T}] & E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{v}(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{v})^\mathrm{T}] \end{pmatrix} \tag{2}$$

ここで $E[\mathbf{A}]$ はベクトル $\mathbf{A}$ の期待値を表す．$\mathbf{W}$ のブロック対角成分のうち，1 番目と 2 番目の要素はそれぞれ従来の 3DVar で用いられる背景誤差共分散と観測誤差共分散を表す．

$$\mathbf{B} \equiv E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{b}(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{b})^\mathrm{T}]$$
$$\mathbf{R} \equiv E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{o}(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{o})^\mathrm{T}]$$

同様に，GM 解析の大規模場の誤差共分散を表す 3 番目の要素を以下のように表記する．

$$\mathbf{V} \equiv E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{v}(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{v})^\mathrm{T}].$$

これらの定義を用いて，GF08 は以下の拡張コスト関数を構築した．

$$J(\boldsymbol{\varsigma}) = \frac{1}{2}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\varsigma})^\mathrm{T}\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\varsigma}) \tag{3}$$

ここで $\boldsymbol{\varsigma}$ は LAM の状態ベクトル $\mathbf{x}$ に対して定義される制御ベクトル

$$\boldsymbol{\varsigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ H(\mathbf{x}) \\ H_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \tag{4}$$

を表す．

コスト関数 (3) は背景場 $\mathbf{x}^\mathrm{b}$ に対するインクリメント方式に変換することができる．すなわち，

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathrm{b} + \delta\mathbf{x}, \tag{5}$$

と，情報ベクトルに対するイノベーション $\mathbf{d}$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{d}^\mathrm{o} \\ \mathbf{d}^\mathrm{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{y} - H(\mathbf{x}^\mathrm{b}) \\ H_1(\mathbf{x}^\mathrm{A}) - H_2(\mathbf{x}^\mathrm{b}) \end{pmatrix} \tag{6}$$

を用いて，

$$\mathbf{z} - \boldsymbol{\varsigma} = \mathbf{d} - \mathbf{T}\delta\mathbf{x}.$$

と変換する．行列

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{N_\mathrm{L}} \\ \mathbf{H} \\ \mathbf{H}_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

は制御変数の変換を定義する．$\mathbf{H}$ と $\mathbf{H}_2$ はそれぞれ H と H_2 の接線型演算子を，$\mathbf{I}_{N_\mathrm{L}}$ は LAM の状態空間 $\mathbb{R}^{N_\mathrm{L}}$ における恒等写像を表す．インクリメント $\delta\mathbf{x}$ を制御変数として，式 (3) は以下のように書き換えられる．

$$J(\delta\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{d} - \mathbf{T}\delta\mathbf{x})^\mathrm{T}\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{T}\delta\mathbf{x}) \tag{8}$$

さらに，GF08 は誤差共分散 $\mathbf{W}$ を簡単にするために 5 つの仮定を置いた（仮定の妥当性に関する説明は GF08 の第 2.2 節を参照）．

1. LAM の背景誤差と観測誤差は無相関である．

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{b}(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{o})^\mathrm{T}] = E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{o}(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{b})^\mathrm{T}] = \mathbf{0}$$

2. H_1 と H_2 に伴う変換誤差は無視できるほど小さい．

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{v} \approx \mathbf{H}_1\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{A}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{A}$ は GM 解析誤差を表す．

3. 全ての誤差はバイアスを持たない．

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{b}] = E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{o}] = E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{A}] = 0$$

この仮定により，大規模場の誤差と背景誤差または観測誤差の間の相関を GM と LAM の背景誤差 $\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{B}, \boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{b}$ および観測誤差 $\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{O}, \boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{o}$ を用いて表すことができる．

4. LAM の背景誤差と GM の観測誤差，LAM の観測誤差と GM の背景誤差はそれぞれ無相関である．

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{b}(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{O})^\mathrm{T}] = E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{O}(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{b})^\mathrm{T}] = \mathbf{0}$$
$$E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{o}(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{B})^\mathrm{T}] = E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{B}(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{o})^\mathrm{T}] = \mathbf{0}$$

5. GM と LAM の観測誤差は無相関である．

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{o}(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{O})^\mathrm{T}] = E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{O}(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{o})^\mathrm{T}] = \mathbf{0}$$

この仮定は GM と LAM が異なる観測を同化する場合には厳密に成り立つが，実用上は同じ観測を用いる場合にも相関を無視する．

これらの仮定を置くことで，GM の大規模場の誤差と LAM の観測誤差の間の相関を無視できる（$E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{o}(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{v})^\mathrm{T}] = E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{v}(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{o})^\mathrm{T}] = 0$）．さらに，GM の大規模場の誤差と LAM の背景誤差の間の共分散が GM と LAM の背景誤差の間の相関に比例すると仮定することができる．GM の大規模場の誤差と LAM の背景誤差の間の交差共分散を $\mathbf{E}^\mathrm{bv} = E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{b}(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{v})^\mathrm{T}]$ および $\mathbf{E}^\mathrm{vb} = E[\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{v}(\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{b})^\mathrm{T}]$ と表記することで，$\mathbf{W}$ を以下のように書き換える．

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{E}^\mathrm{bv} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}^\mathrm{vb} & \mathbf{0} & \mathbf{V} \end{pmatrix} \tag{9}$$

理論上は交差共分散 $\mathbf{E}^\mathrm{bv}, \mathbf{E}^\mathrm{vb}$ を無視することはできないが，GF08 は誤差統計の調査からこれらの交差共分散が他の誤差共分散と比較して無視できるほど小さいことを経験的に示した．最終的に，誤差共分散 $\mathbf{W}$ は $\mathbf{B}, \mathbf{R}, \mathbf{V}$ を対角成分に持つブロック対角行列となり，式 (8) は従来のコスト関数に新たな項が一つ加わる形となる．

$$J(\delta\mathbf{x}) = J_\mathrm{b}(\delta\mathbf{x}) + J_\mathrm{o}(\delta\mathbf{x}) + J_\mathrm{v}(\delta\mathbf{x}) \tag{10}$$

第一項

$$J_\mathrm{b}(\delta\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\delta\mathbf{x})^\mathrm{T}\mathbf{B}^{-1}\delta\mathbf{x} \tag{11}$$

は LAM の背景場からのずれを測り，第二項

$$J_\mathrm{o}(\delta\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{d}^\mathrm{o} - \mathbf{H}\delta\mathbf{x})^\mathrm{T}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{d}^\mathrm{o} - \mathbf{H}\delta\mathbf{x}) \tag{12}$$

は観測からのずれを測り，新たに加わる第三項

$$J_\mathrm{v}(\delta\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{d}^\mathrm{v} - \mathbf{H}_2\delta\mathbf{x})^\mathrm{T}\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{d}^\mathrm{v} - \mathbf{H}_2\delta\mathbf{x}) \tag{13}$$

は GM 解析からのずれを測る．GF08 および Keresturi et al. (2019) ではこの項を J_k と表記していたが，本節ではアンサンブルメンバーのインデックス k との混同を防ぐために J_v と表記する．

DG12 では GF08 と同じ定義および簡略化に従ってコスト関数を構築したが，大規模場の情報を GM 解析ではなく短期（6 時間）予報を用いて定義し，LAM に同化される観測と GM 解析に暗に含まれる同時刻の観測との間の相関（仮定 5）を和らげる工夫を施した．本研究でも DG12 の修正を適用し，$\mathbf{V}$ と $\mathbf{d}^\mathrm{v}$ を GM の短期予報を用いて定義し直す．

さらに DG12 はコスト関数 (10) の数値最適化を効率的に行うための制御変数変換による前処理を明示的に導入した．制御変数変換は以下で定義される．

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{L}^\mathrm{b}\chi \tag{14}$$

ここで $\mathbf{L}^{\mathrm{b}}$ は背景誤差共分散 $\mathbf{B}$ の平方根演算子を表す．

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}^{\mathrm{b}}(\mathbf{L}^{\mathrm{b}})^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

式 (14) は表記上は行列ベクトル演算であるが，実際には $\mathbf{L}^{\mathrm{b}}$ は誤差分散を表す対角行列と，空間相関や変数間バランス，スペクトル変換などを定義する複数の演算子に分解される．このような分解を行うには，逆変換や随伴演算子を陽に定義することが必要となる．$\mathbf{V}$ の平方根演算子も $\mathbf{B}$ と同様に定義される．

$$\mathbf{V} = \mathbf{L}^{\mathrm{v}}(\mathbf{L}^{\mathrm{v}})^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

式 (14,15,16) を用いて，変換された制御変数 χ に基づくコスト関数は以下の形式となる．

$$J_{\mathrm{b}}(\chi) = \frac{1}{2}\chi^{\mathrm{T}}\chi \tag{17}$$

$$J_{\mathrm{o}}(\chi) = \frac{1}{2}(\mathbf{d}^{\mathrm{o}} - \mathbf{HL}^{\mathrm{b}}\chi)^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{d}^{\mathrm{o}} - \mathbf{HL}^{\mathrm{b}}\chi) \tag{18}$$

$$J_{\mathrm{v}}(\chi) = \frac{1}{2}[(\mathbf{L}^{\mathrm{v}})^{-1}(\mathbf{d}^{\mathrm{v}} - \mathbf{H}_2\mathbf{L}^{\mathrm{b}}\chi)]^{\mathrm{T}}(\mathbf{L}^{\mathrm{v}})^{-1}(\mathbf{d}^{\mathrm{v}} - \mathbf{H}_2\mathbf{L}^{\mathrm{b}}\chi) \tag{19}$$

また，コスト関数の勾配とヘシアンはそれぞれ以下のように表される．

$$\nabla_{\chi}J = \chi + (\mathbf{HL}^{\mathrm{b}})^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{HL}^{\mathrm{b}}\chi - \mathbf{d}^{\mathrm{o}}) + [(\mathbf{L}^{\mathrm{v}})^{-1}\mathbf{H}_2\mathbf{L}^{\mathrm{b}}]^{\mathrm{T}}(\mathbf{L}^{\mathrm{v}})^{-1}\{\mathbf{H}_2\mathbf{L}^{\mathrm{b}}\chi - \mathbf{d}^{\mathrm{v}}\} \tag{20}$$

$$\nabla^2_{\chi}J = \mathbf{I}_{N_{\mathrm{L}}} + (\mathbf{HL}^{\mathrm{b}})^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{HL}^{\mathrm{b}} + \{(\mathbf{L}^{\mathrm{v}})^{-1}\mathbf{H}_2\mathbf{L}^{\mathrm{b}}\}^{\mathrm{T}}(\mathbf{L}^{\mathrm{v}})^{-1}\mathbf{H}_2\mathbf{L}^{\mathrm{b}} \tag{21}$$

2. 2　アンサンブル変分 LSB 手法

ここから，前節で導入した変分 LSB 手法をアンサンブルの枠組みに拡張する．EnVar のコスト関数は最適化のための前処理を行った後の 3DVar のコスト関数と類似の形式を取るため，アンサンブル空間での拡張コスト関数を式 (17,18,19) から変形して定義する．

EnVar はモンテカルロ法を用いて流れ依存する背景誤差共分散 $\mathbf{P}^{\mathrm{b}}$ を推定する．

$$\mathbf{P}^{\mathrm{b}} = \frac{1}{K-1}\mathbf{X}^{\mathrm{b}}(\mathbf{X}^{\mathrm{b}})^{\mathrm{T}}$$

ここで $\mathbf{X}^{\mathrm{b}}$ は $N_{\mathrm{L}} \times K$ 次の行列であり，k 番目の列ベクトルが k 番目の背景アンサンブルメンバーの摂動を表す．

$$\mathbf{X}^{\mathrm{b}} = [\mathbf{x}^{\mathrm{b}}_k - \overline{\mathbf{x}^{\mathrm{b}}}]_{k=1,\cdots,K}$$

$\overline{\mathbf{x}^{\mathrm{b}}} = \sum_{k=1}^{K}\mathbf{x}^{\mathrm{b}}_k/K$ はアンサンブル平均である．EnVar ではこのアンサンブル摂動を用いて制御変数変換を定義する．

$$\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}^{\mathrm{b}}} + \mathbf{X}^{\mathrm{b}}\mathbf{w}$$

$\mathbf{w}$ はアンサンブル摂動の線型結合の重みを表す K 次元のベクトルである．式 (17,18,19) において，$\mathbf{L}^{\mathrm{b}}$ を $(K-1)^{-1/2}\mathbf{X}^{\mathrm{b}}$ に，χ を $(K-1)^{1/2}\mathbf{w}$ に置き換えることで，$\mathbf{w}$ を制御変数とするアンサンブル空間でのコスト関数を定義する．

$$J_{\mathrm{b}}(\mathbf{w}) = \frac{K-1}{2}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{w} \tag{22}$$

$$J_{\mathrm{o}}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Y}^{\mathrm{b}}\mathbf{w} - \mathbf{d}^{\mathrm{o}})^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{Y}^{\mathrm{b}}\mathbf{w} - \mathbf{d}^{\mathrm{o}}) \tag{23}$$

$$J_{\mathrm{v}}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\{(\mathbf{L}^{\mathrm{v}})^{-1}(\mathbf{Z}^{\mathrm{b}}\mathbf{w} - \mathbf{d}^{\mathrm{v}})\}^{\mathrm{T}}\{(\mathbf{L}^{\mathrm{v}})^{-1}(\mathbf{Z}^{\mathrm{b}}\mathbf{w} - \mathbf{d}^{\mathrm{v}})\} \tag{24}$$

ただし観測空間と低解像度 LAM 空間でのアンサンブル摂動をそれぞれ $\mathbf{Y}^{\mathrm{b}} = \mathbf{HX}^{\mathrm{b}}$，$\mathbf{Z}^{\mathrm{b}} = \mathbf{H}_2\mathbf{X}^{\mathrm{b}}$ と定義する．

ここで，GM 予測の流れ依存する大規模場の誤差共分散 $\mathbf{P}^{\mathrm{v}}$ も GM アンサンブル予測からモンテカルロ法で推定する．

$$\mathbf{P}^{\mathrm{v}} = \frac{1}{K-1}\mathbf{Z}^{\mathrm{v}}(\mathbf{Z}^{\mathrm{v}})^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{Z}^{\mathrm{v}} = \mathbf{H}_1\mathbf{X}^{\mathrm{B}}$$

$\mathbf{X}^{\mathrm{B}}$ は $N_{\mathrm{G}} \times K$ 次の GM アンサンブル予測の摂動行列である．なお，ここで GM と LAM のアンサンブル予測は同じアンサンブル数であるという仮定をさらに置いている．この仮定は，境界付近のアンサンブルスプレッドを保持するために，LAM の個々のメンバーがそれぞれ異なる GM メンバーから LBC を取得する状況を鑑みると妥当である．

上記の推定を利用して，平方根演算子 $\mathbf{L}^{\mathrm{v}}$ を $(K-1)^{-1/2}\mathbf{Z}^{\mathrm{v}}$ に置き換える．式 (24) を評価するには，線型システム

$$(K-1)^{-1/2}\mathbf{Z}^{\mathrm{v}}\mathbf{r} = \mathbf{Z}^{\mathrm{b}}\mathbf{w} - \mathbf{d}^{\mathrm{v}} \tag{25}$$

の解 $\mathbf{r}$ を用いて $J_{\mathrm{v}} = \frac{1}{2}\mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}$ と計算する．しかし，$\mathbf{Z}^{\mathrm{v}}$ の逆行列は $N_{N_{\mathrm{L1}}} \neq K$ の時には一意に定まらず，さらに $N_{N_{\mathrm{L1}}} > K$ の時（高次元モデルにアンサンブル手法を適用する際には大抵成り立つ）には式 (25) が劣決定となる．そのため，Moore-Penrose 型逆行列 $(\mathbf{Z}^{\mathrm{v}})^{\dagger}$ を利用して，式 (25) の最小二乗解のうちノルム $\|\mathbf{r}\|$ が最小となる解を求める (Harville 2006).

$$\mathbf{r}_{\mathrm{ls}} = (K-1)^{1/2}(\mathbf{Z}^{\mathrm{v}})^{\dagger}(\mathbf{Z}^{\mathrm{b}}\mathbf{w} - \mathbf{d}^{\mathrm{v}}). \tag{26}$$

最終的に，GM の情報を加えた EnVar のコスト関数は式 (22, 23) と合わせて，

$$J(\mathbf{w}) = J_\mathrm{b}(\mathbf{w}) + J_\mathrm{o}(\mathbf{w}) + J_\mathrm{v}(\mathbf{w}) \tag{27}$$

$$J_\mathrm{v}(\mathbf{w}) = \frac{K-1}{2}\{(\mathbf{Z}^\mathrm{v})^\dagger(\mathbf{Z}^\mathrm{b}\mathbf{w} - \mathbf{d}^\mathrm{v})\}^\mathrm{T}(\mathbf{Z}^\mathrm{v})^\dagger(\mathbf{Z}^\mathrm{b}\mathbf{w} - \mathbf{d}^\mathrm{v}) \tag{28}$$

と定義される．式 (27) の勾配とヘシアンはそれぞれ，

$$\nabla_\mathrm{w} J = (K-1)\mathbf{w} + (\mathbf{Y}^\mathrm{b})^\mathrm{T}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{Y}^\mathrm{b}\mathbf{w} - \mathbf{d}^\mathrm{o}) + (K-1)[(\mathbf{Z}^\mathrm{v})^\dagger\mathbf{Z}^\mathrm{b}]^\mathrm{T}(\mathbf{Z}^\mathrm{v})^\dagger(\mathbf{Z}^\mathrm{b}\mathbf{w} - \mathbf{d}^\mathrm{v}) \tag{29}$$

$$\nabla^2_\mathrm{w} J = (K-1)\mathbf{I}_{N_\mathrm{L}} + (\mathbf{Y}^\mathrm{b})^\mathrm{T}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Y}^\mathrm{b} + (K-1)[(\mathbf{Z}^\mathrm{v})^\dagger\mathbf{Z}^\mathrm{b}]^\mathrm{T}(\mathbf{Z}^\mathrm{v})^\dagger\mathbf{Z}^\mathrm{b} \tag{30}$$

と表される．

アンサンブル数 K が状態変数次元 N_L および N_Ll よりも遥かに小さい場合，ヘシアン (30) を用いたさらに効率的な変数変換を適用することができる (Zupanski 2005).

$$\mathbf{w} = [\nabla^2_\mathbf{w} J]^{-1/2}\zeta$$

この変数変換を適用した後のコスト関数のヘシアンは，全ての演算子（H, H_1, H_2）が線型の場合には単位行列となり，$\mathbf{w}^\mathrm{a} = \arg\min_\mathbf{w} J(\mathbf{w})$ を解析的に求めることができる．

また，非線型演算子 H, H_1, H_2 を用いて接線型演算子を近似すると，接線型および随伴演算子を用いない形式でコスト関数とその勾配を定義できる．

$$J(\mathbf{w}) = \frac{K-1}{2}\mathbf{w}^\mathrm{T}\mathbf{w} + \frac{1}{2}[\mathbf{y} - H(\mathbf{x})]^\mathrm{T}\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{y} - H(\mathbf{x})] + \frac{K-1}{2}\{(\mathbf{Z}^\mathrm{v})^\dagger[H_1(\overline{\mathbf{x}^B}) - H_2(\mathbf{x})]\}^\mathrm{T}(\mathbf{Z}^\mathrm{v})^\dagger[H_1(\overline{\mathbf{x}^B}) - H_2(\mathbf{x})]$$

$$\nabla_\mathbf{w} J = (K-1)\mathbf{w} + (\mathbf{Y}^\mathrm{b})^\mathrm{T}\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{y} - H(\mathbf{x})] + (K-1)[(\mathbf{Z}^\mathrm{v})^\dagger\mathbf{Z}^\mathrm{b}]^\mathrm{T}(\mathbf{Z}^\mathrm{v})^\dagger[H_1(\overline{\mathbf{x}^B}) - H_2(\mathbf{x})]$$

ただし個々のアンサンブル摂動行列はそれぞれ

$$\mathbf{Y}^\mathrm{b} = [H(\mathbf{x}^\mathrm{b}_k) - H(\overline{\mathbf{x}^\mathrm{b}})]_{k=1,\cdots,K},$$

$$\mathbf{Z}^\mathrm{b} = [H_2(\mathbf{x}^\mathrm{b}_k) - H_2(\overline{\mathbf{x}^\mathrm{b}})]_{k=1,\cdots,K},$$

$$\mathbf{Z}^\mathrm{v} = [H_1(\mathbf{x}^\mathrm{B}_k) - H_1(\overline{\mathbf{x}^\mathrm{B}})]_{k=1,\cdots,K},$$

と表される．

解析アンサンブル摂動 $\mathbf{X}^\mathrm{a}$ は，$\mathbf{w} = \mathbf{w}^\mathrm{a}$ におけるヘシアン (30) がアンサンブル空間での解析誤差共分散の逆行列の推定になっている (Zupanski 2005) ことを利用して，背景アンサンブル摂動 $\mathbf{X}^\mathrm{b}$ から変換される．

$$\mathbf{X}^\mathrm{a} = (K-1)^{1/2}\mathbf{X}^\mathrm{b}[\nabla^2_\mathbf{w} J(\mathbf{w}^\mathrm{a})]^{-1/2}. \tag{31}$$

第 1 節でも述べたように，GF08 と DG12 は $\mathbf{V}$ の空間および変数間相関に更なる仮定を置いている．局所化を用いないアンサンブル変分 LSB 手法の定式化ではこのような仮定は不要であるが，状態空間において局所化を適用する場合にはこのような相関構造を考慮する必要があると考えられる．局所化の適用に向けた定式化の修正は今後の課題である．

2. 3　BLSB 手法

BLSB 手法はスケール選択型の混合ステップと解析ステップの段階的な適用によって構成される．混合ステップは変分 LSB 手法が用いる切断演算子 (H_1, H_2) と同様のフィルタリング演算子 (H'_1, H'_2) を用いて，GM を LAM の状態空間に投影することによって定義される (Milan et al. 2023).

$$\mathbf{x}^\mathrm{bld} = \mathbf{x}^\mathrm{b} + \delta\mathbf{x}^\mathrm{F} \tag{32}$$

ここで

$$\delta\mathbf{x}^\mathrm{F} = H'_1(\mathbf{x}^\mathrm{B}) - H'_2(\mathbf{x}^\mathrm{b}) \tag{33}$$

は GM の背景場に対する LAM の背景場の大規模構造のインクリメントである．混合ステップを適用した後，$\mathbf{x}^\mathrm{bld}$ を LAM 同化の新たな背景値として用いる．式 (33) における H'_1, H'_2 はデジタルフィルタ (Yang 2005; Wang et al. 2014b; Bucanek and Brozkova 2017), 陰的ローパスフィルタ (Wang et al. 2014a; Hsiao et al. 2015), スペクトルフィルタ (Zhang et al. 2015; Milan et al. 2023) などで定義されるが，本研究では異なるタイプの LSB 手法を直接比較するために，変分 LSB 手法と同じ DCT を用いて定義する．

3.　実験設定

本研究で提案するアンサンブル変分 LSB 手法を，Lorenz (2005) の一次元カオスモデルを用いた観測シ

ステムシミュレーション実験（OSSE）によって従来の LSB 手法及び LSB 手法なしの同化と比較する．

3. 1　ネスト Lorenz システム

Lorenz (2005) は，Lorenz (1995) で導入された一次元カオスモデル（Lorenz I）よりも大規模な波の力学を表現する Lorenz II モデルを導入した．Lorenz II モデルの運動方程式は以下で表される．

$$\frac{\mathrm{d}Z_n}{\mathrm{d}t} = [Z, Z]_{K,n} - Z_n + F \tag{34}$$

ここで $n = 1, \cdots, N$ は緯度円上に等間隔に分布する格子点の位置を表し，周期境界条件で表現される（$Z_{N+1} = Z_1$）．F は外部強制を表す．右辺第 1 項の表式は，以下の変形された移流項を表す．

$$[X, Y]_{K,n} = \begin{cases} \dfrac{\sum\nolimits'^{J}_{j=-J} \sum\nolimits'^{J}_{i=-J} (-X_{n-2K-i} Y_{n-K-j} + X_{n-K+j-i} Y_{n+K+j})}{K^2}, J = \dfrac{K}{2} & (K \text{ is even}) \\ \dfrac{\sum^{J}_{j=-J} \sum^{J}_{i=-J} (-X_{n-2K-i} Y_{n-K-j} + X_{n-K+j-i} Y_{n+K+j})}{K^2}, J = \dfrac{K-1}{2} & (K \text{ is odd}) \end{cases}$$

$$\sum\nolimits'^{N}_{n=1} X_n = \frac{X_1}{2} + \sum\nolimits^{N-1}_{n=2} X_n + \frac{X_N}{2}$$

パラメータ N/K が卓越波長を決め，式 (34) で $N/K = 30$ かつ $F = 15$ の時，$N = 40$，$F = 8$ の Lorenz I と同程度の卓越波長（4–5 モデル格子に相当）と誤差成長率（倍加時間がモデルの無次元時間単位の 0.5 倍）を持つ．

Lorenz III は多重スケールの変動を表現するために，Lorenz II に大規模な波（X）と小規模な波（Y）の相互作用を導入することで定式化された．

$$\frac{\mathrm{d}Z_n}{\mathrm{d}t} = [X, X]_{K,n} + b^2 [Y, Y]_{1,n} + c[Y, X]_{1,n} - X_n - bY_n + F \tag{35}$$

ここで b は小規模な波 Y の振幅と周期を，c は X と Y のカップリングの強さを定めるパラメータである．X と Y のスケール分割は以下の式で定義される．

$$X_n = \sum\nolimits'^{I}_{i=-I} (\alpha - \beta|i|) Z_{n+i}$$
$$Y_n = Z_n - X_n,$$

ここで I は空間フィルタの幅を表し，定数 α と β は合成波 Z_n の変動が幅 $n - I$ から $n + I$ の間で二次関数として表される時に $Z_n = X_n$ を満たす（$\sum'^{I}_{i=-I} (\alpha - \beta|i|) = 1$，$\sum'^{I}_{i=-I} i^2 (\alpha - \beta|i|) = 0$）ように定める．

$$\alpha = (3I^2 + 3)/(2I^3 + 4I)$$
$$\beta = (2I^2 + 1)/(I^4 + 2I^2).$$

Lorenz III の誤差成長率には大規模な波の成長率の寄与が大きく，その成長率は Lorenz II と同様に $N/K = 30$ かつ $F = 15$ の時に $N = 40$，$F = 8$ の Lorenz I の成長率とほぼ等しくなる．

本研究ではより複数のスケールの波を表現するように，Lorenz II と Lorenz III に移流項を増やす変更を行なった．

$$\frac{\mathrm{d}Z_n}{\mathrm{d}t} = \sum_{K \in \mathbb{Z}_{K2}} [Z, Z]_{K,n} - Z_n + F \tag{36}$$

$$\frac{\mathrm{d}Z_n}{\mathrm{d}t} = \sum_{K \in \mathbb{Z}_{K3}} [X, X]_{K,n} + b^2 [Y, Y]_{1,n} + c[Y, X]_{1,n} - X_n - bY_n + F \tag{37}$$

ここで $\mathbb{Z}_{K\{2,3\}}$ は移流の長さスケールを表現する整数の組を表す．移流項は任意の K に対して $\sum^{N}_{n=1} Z_n [Z, Z]_{K,n} = 0$ を満たすため，移流項を増やす変更は空間平均したエネルギー（$\mathrm{d} \left(\sum^{N}_{n=1} Z^2_n / 2N \right) / \mathrm{d}t$）の時間変化には影響しない．

OSSE を行うには，真値を作成するモデル，計算領域全体を低解像度で計算する全球モデル（GM），限定された計算領域を高解像度で計算する領域モデル（LAM）を設定する必要がある．本研究では，Lorenz III (37) を真値の作成と LAM に利用し，Lorenz II (36) を GM に利用する．

真値を作成するモデルのパラメータは $N = 960$，$\mathbb{Z}_{K3} = [32, 64, 128, 256]$，$I = 12$，$b = 10.0$，$c = 0.6$，$F = 15$ と設定する．時間刻み幅は $\Delta t = 0.05/36$ とする．総観規模の擾乱の誤差の倍加時間はおおよそ 1.5 日である (Simmons et al. 1995) ことから，36 ステップ（0.05 無次元時間）を 6 時間とする．真値は

正規乱数で生成した場から 100 日間（14400 ステップ）スピンアップした場を 0 日として，そこから 1 年間（52560 ステップ）積分して作成する．

ネスト Lorenz システムは Kretshmer et al. (2015) に基づいて構築する．GM のパラメータは $N_G = 240$, $\mathbb{Z}_{K2} = [8, 16, 32, 64]$, $F = 15$ とする．すなわち，GM の解像度は真値の 4 倍である．LAM は真値と同じパラメータを用いるが，計算領域は $n = [240, 480)$ に制限する ($N_L = 240$)．LAM の水平境界条件は Davies (1976) の緩和法を用い，境界から 10 格子分をスポンジ領域とする．スポンジ領域内の予測変数は，境界上で 1，スポンジ領域の内側の縁で 0 となる線形関数 $\gamma(n)$ による GM と LAM の線型結合で表現する．

$$Z_n^{\mathrm{b}} \to (1 - \gamma(n))Z_n^{\mathrm{b}} + \gamma(n)Z_n^{\mathrm{B}} \tag{38}$$

GM が定義されていない格子では，GM を空間方向に線形内挿して値を求める．水平境界条件に用いる GM は 6 時間毎に更新し，間の時刻は時間方向に線型内挿して求める．

3. 2　OSSE の設定

LAM の解析と予測に対する LSB 手法の影響を調べるために，GM の解析及び予測を後述する EnVar に統一し，LAM に対して以下の 6 つの実験を行う．

- 観測を 3DVar で同化する（3DVar）.
- 背景場の混合を行い，観測を 3DVar で同化する（BLSB+3DVar）.
- 変分 LSB 手法で観測と GM の大規模場を同時に同化する（Nested 3DVar）.
- 観測を EnVar で同化する（EnVar）.
- 背景場の混合を行い，観測を EnVar で同化する（BLSB+EnVar）.
- アンサンブル変分 LSB 手法で観測と GM の大規模場を同時に同化する（Nested EnVar）.

観測は全て真値の線型空間内挿に標準偏差 $\sigma_o = 1.0$ の正規乱数を加えて生成する．すなわち，観測誤差共分散は σ_o^2 を対角成分とする対角行列となる．GM に同化する観測は真値の格子点で 32 点ずつの間隔で一様に分布させ（全部で 30 点），6 時間毎に 1000 サイクル（250 日）分の解析を行う．GM の解析は 80 メンバーの EnVar で行う．80 メンバーで観測誤差を下回る十分な解析精度が得られるため，局所化は行わない．共分散膨張は乗算型で 10% とする．この値は解析誤差が最小になるように手で調整した．3DVar 実験における LAM の LBC は，GM のアンサンブル平均を用いて計算する．

観測分布への依存性を調べるために，以下の 5 種類の LAM 同化実験を行う．

1. GM と同じ観測のうち LAM の領域内の観測（7 点，$n = 256, 288, 320, 352, 384, 416, 448$）を用いる実験
2. LAM の領域左側に偏って分布する観測（30 点，$n = 241, 242, \cdots, 270$）を同化する実験
3. 領域中央に偏って分布する観測（30 点，$n = 345, 346, \cdots, 374$）を同化する実験
4. 領域右側に偏って分布する観測（30 点，$n = 448, 449, \cdots, 477$）を同化する実験
5. LAM の計算領域内を移動する観測（最大 30 点）を同化する実験

各実験の観測は GM と同様に 6 時間毎に 1000 サイクル同化する．実験 5 の観測は LAM の格子点をサイクル毎にランダムに選択し，その点を中心として左に 15 点，右に 14 点分を観測点として設定する（LAM の計算領域外に出た観測は同化されない）.

LSB 手法における大規模場は DCT を用いて，真値の格子点相当の波数 $k = 24$ で切断して定義する．この時低解像度 LAM 空間の格子点数は $N_{\mathrm{Ll}} = 12$ となる．この切断波数は真値の分散スペクトルに基づいて選択したが，切断波数を $12 \leq k \leq 30$ の間で変化させても LSB 手法の挙動に大きな変化は見られなかった．BLSB+3DVar 実験では LBC と同様に GM のアンサンブル平均から大規模場を抽出して利用する．

3DVar を用いた実験における LAM と GM の大規模場の定常背景誤差共分散 $(\mathbf{B}, \mathbf{V})$ は NMC 法 (Parrish and Derber 1992) を用いて構築した．ただし，NMC 法で得られる空間相関は小規模なノイズを含み，そのまま用いると構築される共分散行列の条件数が非常に大きくなるため，Gaspari and Cohn (1999) の 5 次の区分相関モデルでフィッティングを行い，大まかな特徴を保った滑らかな空間相関を推定した．また，誤差分散の大きさは解析誤差が最小になるように調整を行い，LAM の背景誤差標準偏差を 0.6，GM の大規模場の誤差標準偏差を 0.4 と設定した．

EnVar を用いた実験では GM と同じく，アンサンブル数を 80 とし局所化は作用させない．共分散膨張は EnVar と BLSB+EnVar で 5%，Nested EnVar で

25% と設定した．これらの値も GM の共分散膨張と同様に解析誤差が最小となるように手で調整している．Nested EnVar で共分散膨張の値を大きくしているのは，GM の大規模場を同時に同化することで情報量が増え，解析誤差分散が EnVar と比べてより減少しやすくなっているためである．

3. 3　評価手法

LAM に対する観測の同化が GM の解析に対して付加価値を持つかどうかを検証するために，GM 解析の LAM 領域への内挿値（以下，LAM 同化なし実験）および GM のダウンスケーリング予報（以下，Dscl 実験）を比較対象として精度評価を行う．

各実験の精度評価では，最初の 40 サイクル（10 日間）を除いた期間を比較対象とする．精度評価には，空間方向の二乗平均平方根誤差（RMSE）

$$\sqrt{\frac{1}{N_{\mathrm{L}}}\sum_{n\in[240,480)}(x^{\mathrm{a,f}}(t,n)-x^{\mathrm{t}}(t,n))^2} \tag{39}$$

時間方向の RMSE

$$\sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x^{\mathrm{a,f}}(t,n)-x^{\mathrm{t}}(t,n))^2} \tag{40}$$

および DCT で定義した誤差の時間平均したスペクトル密度 (Denis et al. 2002)

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1,T}\beta_k[\hat{x}^{\mathrm{a,f}}(t,k)-\hat{x}^{\mathrm{t}}(t,k)]^2 \tag{41}$$

$$\beta_k=\begin{cases}\frac{L}{2\pi} & k=0\\ \frac{L}{\pi} & k>0\end{cases}$$

を指標として用いる．ここで $x^{\mathrm{a,f}}(t,n)$ は時刻 t，格子 n における LAM の解析または予報を表し，$x^{\mathrm{t}}(t,n)$ は時刻 t，格子 n における真値を表す．EnVar 実験における $x^{\mathrm{a,f}}(t,n)$ はアンサンブル平均の値とする．また $\hat{x}$ は DCT で得られる波数空間の振幅を表し，式 (41) の係数 β における緯度円の長さ L は 2π とした．

上記の指標は解析値と解析からの延長予報に対して評価する．延長予報における LBC は同じ初期時刻からの GM の予報値を用いるため，LAM の領域内における GM の予報値の誤差も同時に示すことで，LAM の時間発展による誤差と LBC 由来の誤差の切り分けの目安とする．RMSE のサイクル平均を実験間で比較するときには，各 RMSE 時系列の差の自己相関を考慮した有意性判定 (Wilks 2011) を用いる．

さらに，LAM 同化なし実験を参照実験として，スキルスコアとそのスケール分割を以下の式で定義する．

$$\frac{\overline{\mathrm{MSE}_{\mathrm{ref}}}-\overline{\mathrm{MSE}_{\mathrm{exp}}}}{\overline{\mathrm{MSE}_{\mathrm{ref}}}} = \frac{\overline{\mathrm{MSE}^{k\le24}_{\mathrm{ref}}}-\overline{\mathrm{MSE}^{k\le24}_{\mathrm{exp}}}}{\overline{\mathrm{MSE}_{\mathrm{ref}}}}+\frac{\overline{\mathrm{MSE}^{k>24}_{\mathrm{ref}}}-\overline{\mathrm{MSE}^{k>24}_{\mathrm{exp}}}}{\overline{\mathrm{MSE}_{\mathrm{ref}}}} \tag{42}$$

ここで $\mathrm{MSE}_{[\mathrm{ref,exp}]}$ はそれぞれ参照実験と LAM 実験で評価した二乗平均誤差（式 (39) の平方根を取る前の値）を示し，$\overline{\mathrm{MSE}}$ は時間平均を表す．式 (42) は 1 に近いほど参照実験よりも精度が高く，負の時は参照実験よりも精度が悪化していることを示す．スケール毎のスキルスコアへの寄与は，LSB 手法の切断波数 $k=24$ を閾値として，DCT により誤差 $(x^{\mathrm{a,f}}(t,n)-x^{\mathrm{t}}(t,n))$ を $k\le24$ の大規模成分と $k>24$ の小規模成分に分割して評価する．スキルスコアの定義に RMSE ではなく MSE を用いるのは，スケール分割したスコアの和が全体のスコアに一致するようにするためである．DCT によって定義されるスケール毎の成分は互いに直交するため，スケール間の交差項を考慮する必要はない．

4.　LSB 手法への流れ依存性の影響

はじめに GM 解析と同じ一様な観測を用いた実験 1 の結果から，LSB 手法において流れ依存性を考慮した影響について調べる．

Figure 1 に各実験における解析 RMSE の時間変化を示す．LAM 同化なしを含む全ての実験において解析 RMSE が平均的に観測誤差標準偏差（点線）を下回っていることから，十分な解析精度が得られていることがわかる．一方で，EnVar，3DVar ともに LSB 手法を用いない従来の同化手法（青線）だと LAM 同化なし（黒線）よりも解析精度が悪化している．LAM 同化なし実験に対する EnVar の時間平均した RMSE の増加はわずかであり有意でない（p 値が 0.1 を上回る）が，3DVar は RMSE が大きく増加している．

LAM 同化なし実験に対するスキルスコア（Table 1）を比較すると，LAM に観測を同化した効果は中規模以下の解析精度に正のインパクトをもたらすが，LSB 手法を用いない実験では先行研究で指摘されていたように大規模な構造の精度が悪化していること

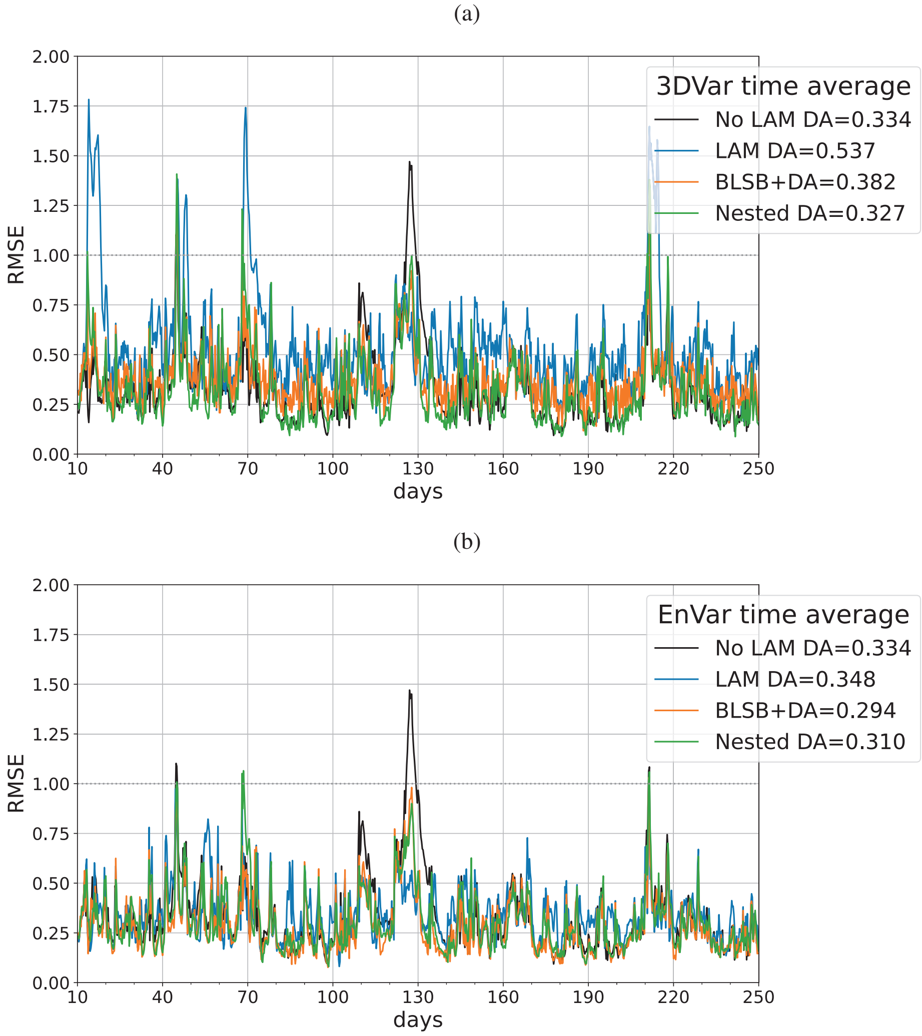

Fig. 1: Time development of analysis RMSE for (a) 3DVar and (b) EnVar experiments using uniform observations. The dotted lines at RMSE = 1 indicate the observation error standard deviation.

Table 1: Skill score for analysis MSE and contributions of different scales in the experiments with uniform observations. The values in parentheses indicate MSE for the experiment without LAM DA.

method ($\mathrm{MSE_{ref}}$)	all k (1.51e-01)	$k \leq 24$ (9.87e-02)	$k > 24$ (5.22e-02)
3DVar	−1.4	−1.6	0.18
BLSB+3DVar	−0.10	−0.38	0.27
Nested 3DVar	0.052	−0.22	0.27
EnVar	0.085	−0.21	0.29
BLSB+EnVar	0.28	−0.014	0.29
Nested EnVar	0.20	−0.073	0.27

がわかる．LAM 同化なし実験では大規模な構造の誤差（0.0987）が全体の誤差（0.151）の約 65% を占めており，LAM 同化実験ではさらに大規模な構造の誤差が支配的（90% 以上）であることから，大規模な構造の精度が全体の精度に大きく影響することがわかる．EnVar は RMSE の時間平均で見ると LAM 同化なし実験よりも解析精度が悪化しているが，スキルスコアはわずかに改善を示している．これは MSE で定義したスキルスコアが誤差の急増（例えば Fig. 1 の 130 日付近の LAM 同化なし実験の RMSE ピークなど）に敏感であるためであり，EnVar と LAM 同化なし実験の間の RMSE の差が小さいことから，EnVar と LAM 同化なし実験の間にはほとんど差がないことがわかる．したがって，背景誤差の流れ依存性を考慮する EnVar では定常な誤差共分散を用いる 3DVar よりも大規模な構造の改悪が抑えられている．これは EnVar の背景誤差が多重スケールの誤差相関を表現できているためと考えられる (Johnson et al. 2015)．それでも大規模な構造の精度悪化が観測の同化による中規模以下の精度改善を上回っており，LAM 同化における大規模な構造の精度悪化は，GM 解析に対する高解像度の LAM 解析の効果を打ち消しうることを示している．

LSB 手法を導入すると，EnVar 実験，3DVar 実験ともに解析精度が向上する（Fig. 1）．LSB を導入した 3DVar 実験（Fig. 1a の橙，緑線）は実験期間全体を通して解析精度を改善しており，特に Nested 3DVar（緑線）が安定して高い解析精度を示している．EnVar は 3DVar よりも解析精度が高いため，LSB 手法による精度の改善率は 3DVar と比べると小さい．それでも LSB を導入した EnVar 実験（Fig. 1b の橙，緑線）では，主に GM 解析の精度が安定して高い時期（80–110 日，150–200 日）に EnVar よりも高い解析精度を示している．

これらの精度改善は大規模場の精度悪化が緩和された（Table 1）ためであり，かつ中規模以下の解析精度は保たれていることから，期待される LSB 手法の効果が現れている．特に 3DVar 実験では，BLSB+3DVar で 53%，Nested 3DVar で 60%MSE が減少しており，LSB 手法が大きなインパクトを持っていることがわかる．この誤差の減少には大規模場の精度改善が大きく寄与しているが，中規模以下の解析誤差も 4% 減少しており（Table 1），大規模場の精度改善が LAM の同化性能にも正のインパクトを与えている．EnVar 実験では，BLSB+EnVar で 21%，Nested EnVar で 13%MSE が減少している．BLSB+EnVar は大規模場の精度悪化をほぼ 0 にしており，LAM への同化インパクトが明瞭に現れるようになったことで LAM 同化なし実験よりも 28%MSE を改善している．一方 Nested EnVar も大規模場の精度悪化を 1% 以下まで緩和するものの，中規模以下の解析精度が EnVar よりも 2% 悪化しており，全体としては LAM 同化なし実験に対する改善率が 20% となっている．

EnVar 実験と 3DVar 実験における BLSB と変分 LSB の挙動の違いをさらに調べるために，Fig. 2 に解析誤差の空間分布を，Fig. 3 に解析誤差のスペクトル分布を示す．LAM 同化なし実験（Figs. 2a, 2b の黒線）は LAM の計算領域の左側（$n = [240, 320]$ 付近）で比較的に解析精度が高く，右側（$n = [380, 450]$ 付近）で精度が低くなっている．GM 解析は等間隔で観測を同化しているため，この精度差はモデルのカオス性から偶然的に生じたものと考えられる．LAM 同化なし実験のアンサンブルスプレッド（Fig. 2b の黒破線）は観測位置で極小値を取り，観測位置の間で極大値を取る波構造をしている．また，平均的に解析誤差よりもスプレッドが小さいため，観測よりも予測に重みが大きい自信過剰と呼ばれる状態になっている．LAM 同化なし実験の誤差のスペクトル分布（Figs. 3a,3b の黒線）を見ると，Table 1 でも示されているように大規模な構造の誤差の寄与が支配的になっている．波数 30 付近の誤差のピークは，一様に 30 点置かれた観測を同化しているため観測位置で誤差が極小となり，波数 30 の構造を取りやすいことを反映している．

3DVar（Fig. 2a の青線）の LAM 同化なし実験に対する誤差の悪化は Fig. 1 でも見たように EnVar よりも顕著であり，特に領域左側で著しく誤差が増大している．誤差のスペクトル分布（Fig. 3a の青線）でもスケール全体を通して誤差の増大が顕著であり，中規模波長帯の同化による正のインパクトが空間分布にはほとんど現れていないことがわかる．LSB 手法の導入で解析精度は LAM 同化なし実験に近づくが，BLSB+3DVar（Fig. 2a の橙線）は観測の同化で大規模構造が再び乱されるために LAM 同化なし実験よりも大きな誤差を示している（Fig. 3a）．一方で Nested 3DVar（Fig. 2a の緑線）は観測と GM の情報を同時に同化することにより，大規模な構造の精度

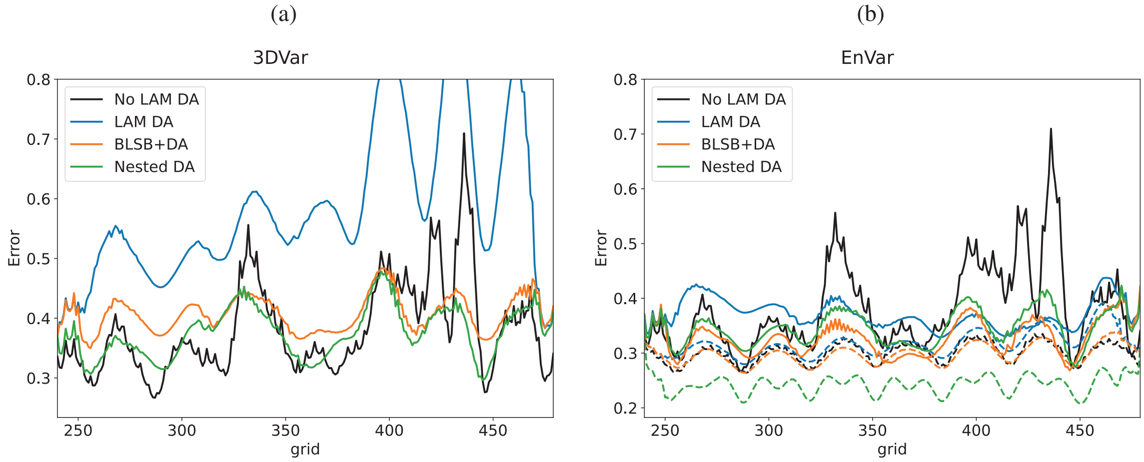

Fig. 2: Time averaged analysis error in state space for (a) 3DVar and (b) EnVar experiments. The dashed curves in (b) show time averaged analysis spread for each experiment.

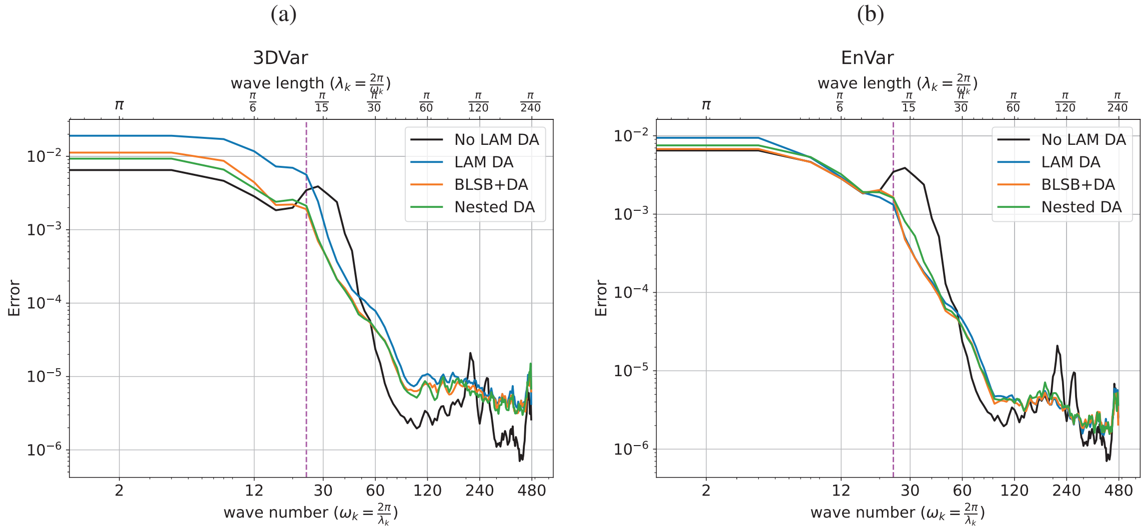

Fig. 3: Time averaged analysis error in spectral space for (a) 3DVar and (b) EnVar experiments. The bottom and top axes indicate wavenumber and wavelength defined in the global domain, respectively. The vertical magenta lines indicate the truncation wavenumber for the LSB experiments.

悪化を最小限に留め（Fig. 3a），領域左側の LAM 同化なし実験の誤差を観測の同化により改善している．EnVar により観測を同化している GM は予測誤差の時間変化を反映しているが，3DVar 実験では LAM が気候学的な背景誤差に依存しているため，適切な背景誤差の構造を捉えられず解析誤差が大きくなりやすい．このように GM と LAM の同化システムの間で明らかな差がある場合は，GM の情報を観測と同時に取り入れる変分 LSB 手法が有利に働くことが示唆される．

EnVar（Fig. 2b の青線）は LAM 領域の $n = 320$ 付近より右側の広い範囲で LAM 同化なし実験よりも高い精度を示すが，LAM 同化なし実験の精度が高い左側では LAM 同化なし実験よりも誤差が大きい．EnVar のアンサンブルスプレッド（Fig. 2b の青破線）は領域右側の方が左側よりもわずかに大きくなっていることから，右側では観測の情報を取り入れやすく誤差が下がっているが，左側では自信過剰な状態になっているためにこのような精度の差が生じている．誤差のスペクトル分布（Fig. 3b の青線）でも Table 1 で見られたような大規模場の精度悪化が明らかである．一方で LAM 同化なし実験に見られる波数 30 付近の誤差のピークは減少しており，LAM への同化の効果が主にこの波数帯に顕著に現

れていることを示している．BLSB+EnVar（Fig. 2b の橙線）は GM の背景場を取り入れることで領域左側の精度を EnVar よりも改善し，かつ高解像度で同化を行うことで領域全体で LAM 同化なし実験よりも高い解析精度を示している．アンサンブルスプレッド（Fig. 2b の橙破線）は EnVar よりも小さくなり LAM 同化なし実験とおおよそ同じ水準にあるが，解析誤差の減少の方がスプレッドの減少よりも大きいために，結果としてスプレッドの過小評価が緩和されている．誤差のスペクトル分布（Fig. 3b の橙線）では大規模場の誤差が LAM 同化なし実験とほぼ一致し，かつ波数 30 付近の誤差分布は EnVar とほぼ一致しているために，全体として LAM 同化なし実験よりも解析誤差が小さくなっている．一方で Nested EnVar（Fig. 2b の緑線）は BLSB+EnVar と同様に領域左側の精度を EnVar よりも改善するが，その改善度合いが BLSB+EnVar よりも小さく，また領域右側では EnVar よりも精度がやや悪化している．領域全体を通して LAM 同化なし実験の結果に近づいており，GM の情報を観測と同時に同化している影響が強く現れている．また，GM の情報を取り入れることで情報量が増え，第 3. 2 節でも言及したようにアンサンブルスプレッドが他の手法よりも大きく減少している（Fig. 2b の緑破線）．スプレッドの空間分布は他の実験が示す観測位置での極小値に加えて，低解像度 LAM 空間の格子位置（観測位置の中間に相当）でも極小値を持つ波構造をとっている．スプレッドを EnVar よりもさらに過小評価していることで，より観測の情報を取り入れづらく，LAM 同化なし実験に近い場を表現していると考えられる．誤差のスペクトル分布（Fig. 3b の緑線）から，観測の影響が入りづらく領域全体で誤差が増大していることによる大規模場の誤差の僅かな悪化と，LAM 同化なし実験の誤差ピークを反映して EnVar や BLSB+EnVar よりも波数 30 付近の誤差が増大していることがわかる．これらの結果から，BLSB+EnVar と Nested EnVar はともに LAM 解析の大規模場の誤差を緩和するが，Nested EnVar において LAM の背景場と観測，GM の大規模場の間のバランスを適切に評価するためには，スプレッドの過小評価を改善する必要があることが示唆される．なお，Nested 3DVar の誤差のスペクトル分布（Fig. 3a の緑線）において，Nested EnVar で見られるような波数 30 付近の誤差の増大がはっきりと見られないのは，気候学的に構築した誤差共分散 **V** が波数 30 に誤差のピークを持つという GM の特性を反映していないためと考えられる．

ここまでの解析誤差の比較から，先行研究でも示されてきたように，LAM 解析が GM 解析に対する付加価値を持つためには LSB 手法の導入が重要であることが明らかになった．この LSB 手法による解析精度の向上が予測精度の向上にどの程度寄与するのかを確かめるために，解析値からの予測の精度を比較する（Fig. 4）．Dscl 実験（黒線）の誤差成長は人工的な境界条件の影響で GM よりもやや早い．LAM 同化実験の予測誤差成長は，3DVar を除く全ての実験で Dscl よりも早い．初期時刻において Dscl（GM 解析）よりも高い精度を示しているのは BLSB+EnVar, Nested EnVar, Nested 3DVar であるが，95% 以上有意に精度が高いのは BLSB+EnVar と Nested EnVar である．しかし，Nested EnVar は 6 時間後には Dscl との精度差が有意でなくなり，18 時間後には Dscl を上回る平均誤差を示す（Fig. 4b）．一方で BLSB+EnVar は 24 時間後まで Dscl より 95% 以上有意に小さい予測誤差を示している．予測誤差の成長率は Nested EnVar よりも僅かに大きいが，初期の精度差が大きいため 24 時間後まで平均的に精度の高い予測ができている．アンサンブル予測平均（図略）もほぼ決定論予測と同じ誤差成長を示す．初期のアンサンブルスプレッドは Fig. 2b で示すように，BLSB+EnVar 以外は解析誤差よりも小さく，予測誤差と成長率がほぼ同じため，48 時間後まで EnVar と Nested EnVar は自信過剰になっている．

実験 1 の結果から，どちらの LSB 手法も LAM DA が持つ大規模場の誤差を軽減する効果を持つことが示された．定常な誤差共分散を利用する 3DVar では GM よりも解析精度が低いため，GM の情報を観測と同時に取り入れる Nested 3DVar が BLSB+3DVar よりも効果的に大規模場の誤差を軽減することができる．一方で EnVar の場合は，流れに依存する誤差共分散を用いることで 3DVar と比較して大規模場の解析精度の悪化が小さくなっているが，LSB 手法を導入することで GM 解析よりも精度の高い解析を得ることができる．しかし Nested EnVar は EnVar や BLSB+EnVar と比較して解析アンサンブルスプレッドが減少しやすく，自信過剰になりやすい．そのため BLSB+EnVar よりも GM のダウンスケーリングに対する予測精度の優位性が持続しづらいと考えられる．Nested EnVar の共分散膨張率は解析誤差が最

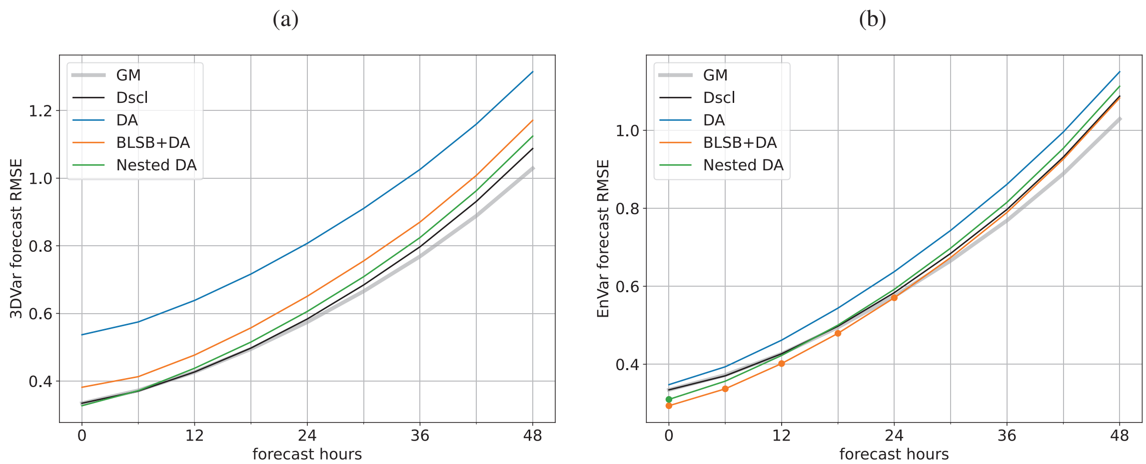

Fig. 4: RMSE of deterministic forecasts from (a) 3DVar and (b) EnVar experiments using uniform observations. Each curve shows averaged value for assimilation cycles. Circles indicate improvement over the downscaling with the significant level of 0.05. Thicker gray curves show the forecast RMSE of GM evaluated in the LAM domain. Horizontal axes indicate hours from analysis time.

小となるように調整しているが，現在の値より膨張率を大きくするとスプレッドの過小評価が緩和されるが解析誤差も大きくなっていく（図略）．Nested EnVar の解析アンサンブル摂動は式 (31) に従って更新しているため，より大規模な構造のスプレッドが GM の情報を取り入れることで減少しやすくなっている．解析誤差を小さくしつつスプレッドの過小評価を緩和するには，スケール毎に共分散膨張率を変えるべきだと考えられる．このようなスケールに依存する共分散膨張の実装は将来的に行う．

5.　観測分布への依存性

本節では，LAM に対して GM とは異なる観測を同化した場合に，LSB 手法が解析・予測精度にどのような影響を及ぼすのかを調べる．

LAM 領域内に偏らせた観測を同化した実験 2–5 における，解析 RMSE とスキルスコアを Table 2 に示す．一様な観測を同化した実験 1（Fig. 1, Table 1）よりも LAM に同化される観測数は増えているものの，LSB 手法なしの同化実験では領域内を動く観測を同化した EnVar を除く全ての実験で解析精度が実験 1 よりも悪化している．特に 3DVar では領域内の一部のみを観測する場合に，観測誤差を大きく上回るほど解析精度が悪化している．スキルスコアの比較から，この解析精度の悪化は主に大規模場の改悪によるものであることがわかる．これは偏りのある観測を同化する場合に，解析精度に領域内で差が生じることでより大規模場の解析精度が悪化しやすいことを示している．

LSB 手法を導入すると，この大規模場での解析精度の悪化が抑えられ，安定した解析値が得られている．特に BLSB+3DVar と Nested 3DVar では，実験 1 と比較して観測数が増えたことによる解析精度の向上が現れており，2 つの実験間の精度差が小さくなっている．観測を左より（Table 2a），中央（Table 2b），および右より（Table 2c）に置いた実験では，BLSB 手法と変分 LSB 手法の解析精度の間に明確な差は見られず，2 つの LSB 手法は同等の性能を示している．右よりの観測を同化した実験で Nested EnVar が BLSB+EnVar よりもやや大きな RMSE と低いスキルスコアを示しているが，これは領域右側で GM の誤差が比較的大きく（Fig. 2），GM を同時に同化する Nested EnVar の方がこの誤差傾向をよく反映しているために差が生じている．実験 1 と同様にスプレッドの過小評価を改善することで精度差を小さくできると考えられる．

領域内を動く観測を同化した実験 5（Table 2d）では，解析 RMSE とスキルスコアの両方で変分 LSB 手法が BLSB 手法よりも高い精度を示している．特に Nested EnVar と BLSB+EnVar の解析 RMSE の差は実験 2–4 と比べて大きく，t 検定でも 99% 以上有意であることから，流れ依存性を考慮した変分 LSB 手法は領域内を移動する密な観測を同化する場合に BLSB 手法よりも高い性能を示すと言える．以降，

Table 2: Time averaged analysis RMSE and skill score for the experiments with different observation networks.

(a) left (experiment 2)

method	RMSE	all k	$k \leq 24$	$k > 24$
3DVar	3.29	−118	−116	−2.1
BLSB+3DVar	0.331	0.051	−0.21	0.26
Nested 3DVar	0.323	0.040	−0.23	0.27
EnVar	0.662	−3.8	−3.9	0.13
BLSB+EnVar	0.295	0.23	−0.056	0.28
Nested EnVar	0.287	0.26	−0.0056	0.27

(b) center (experiment 3)

method	RMSE	all k	$k \leq 24$	$k > 24$
3DVar	1.33	−17.3	−16.8	−0.50
BLSB+3DVar	0.327	0.13	−0.14	0.28
Nested 3DVar	0.313	0.14	−0.14	0.28
EnVar	0.371	−0.18	−0.45	0.27
BLSB+EnVar	0.285	0.32	0.032	0.29
Nested EnVar	0.273	0.37	0.092	0.27

(c) right (experiment 4)

method	RMSE	all k	$k \leq 24$	$k > 24$
3DVar	3.34	−125	−122	−2.7
BLSB+3DVar	0.328	0.053	−0.21	0.27
Nested 3DVar	0.323	0.036	−0.23	0.27
EnVar	0.543	−1.9	−2.2	0.26
BLSB+EnVar	0.291	0.24	−0.012	0.29
Nested EnVar	0.307	0.12	−0.14	0.26

(d) mobile (experiment 5)

method	RMSE	all k	$k \leq 24$	$k > 24$
3DVar	0.652	−4.7	−4.5	−0.17
BLSB+3DVar	0.329	0.086	−0.19	0.27
Nested 3DVar	0.311	0.13	−0.15	0.27
EnVar	0.315	0.15	−0.15	0.29
BLSB+EnVar	0.283	0.30	0.014	0.29
Nested EnVar	0.258	0.40	0.11	0.29

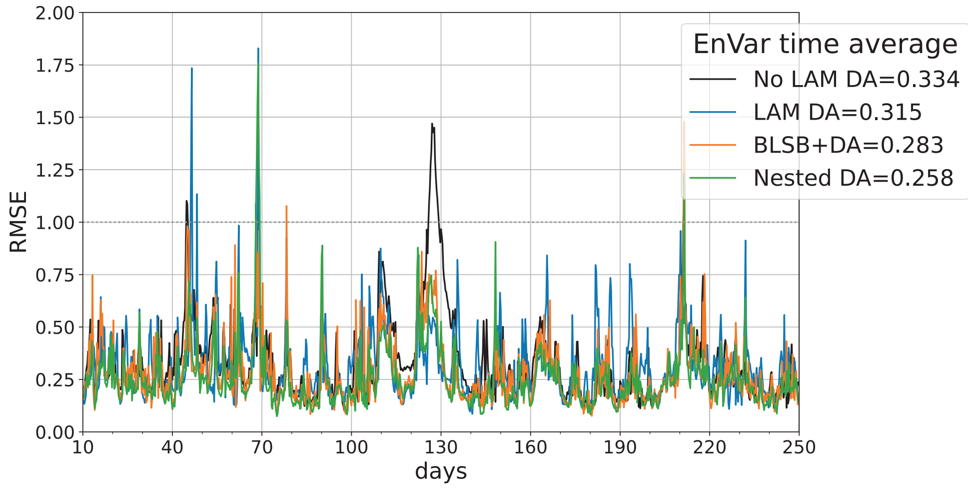

Fig. 5: Same as Fig. 1b, but for experiments with dense, mobile observations.

実験 5 の EnVar の結果に着目して LSB 手法間の違いを見ていく．

まず Fig. 5 に実験 5 における解析 RMSE の時間変化を示す．EnVar（青線）は一様観測実験よりも平均的な誤差は減少しているが，誤差が急増するタイミングは増えている．EnVar に LSB 手法を導入すると，誤差が急増するタイミングは相変わらず見られるものの，精度が高く安定している期間が一様観測実験よりも伸びている．Nested EnVar（緑線）はこの安定した期間において BLSB+EnVar（橙線）よりも全体的に低い RMSE を示している．

Fig. 6a に解析誤差の空間分布を示す．LAM に同化される観測は領域内をランダムに動いているため，EnVar（青線）の解析誤差と解析スプレッドに明瞭な波状構造は見られない．領域右側で一様観測実験よりも解析精度の向上が見られるが，観測数が増えたことによりスプレッド（破線）も減少しているため，自信過剰気味である点は同様である．BLSB+EnVar は一様観測実験と同様にスプレッドの過小評価を緩和しているが，一様観測実験に対する解析精度の改

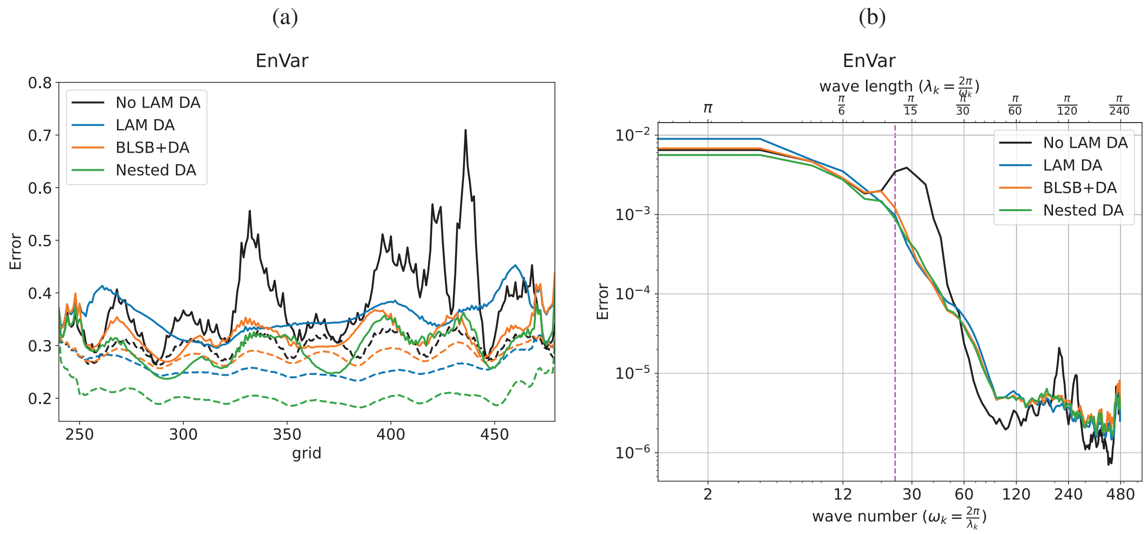

Fig. 6: Same as (a) Fig. 2b and (b) Fig. 3b, but for experiments with dense, mobile observations.

善は明瞭でない．一方で Nested EnVar は水平境界付近を除く領域全体で解析誤差が下がっている．観測数の増加に伴いアンサンブルスプレッドも減少しているが，観測分布が不均一であるために Fig. 2b で見られたような波状構造は明瞭でなくなっている．

解析誤差のスペクトル分布（Fig. 6b）を見ると，EnVar（青線）は一様観測実験（Fig. 3b）の時よりもわずかに軽減しているが，やはり大規模場の解析誤差が LAM 同化なし実験よりも増加している．BLSB+EnVar（橙線）はスキルスコア（Table 2d）にも現れているように，大規模場の解析精度は約 1% の改善にとどまっているため、スペクトル分布が切断波数以下ではほぼ LAM 同化なし実験に重なっている．Nested EnVar（緑線）は波数 2–60 付近までの広い波長帯で解析誤差を改善していることがわかる．一様観測実験（Fig. 3b）で見られた波数 30 付近での誤差の増加は現れているものの，LAM 領域内に多くの観測を同化しているため一様観測実験よりも不明瞭になっている．特に切断波数付近では BLSB+EnVar よりも小さく EnVar と同等の誤差を示していることから，Nested EnVar が GM と LAM の背景誤差の情報を適切に組み合わせていることがわかる．

Fig. 7b に解析アンサンブル平均値からの決定論予測の誤差を示す．BLSB+EnVar からの予測は 30 時間後まで，Nested EnVar からの予測は 36 時間後まで 95% 有意にダウンスケーリングよりも高い精度を示している．予測誤差の成長率は一様観測実験（Fig. 4）と大きく変わらないため，予測精度の高いリードタイムの増加は初期値の誤差の改善によるものである．アンサンブル予測（図略）も同様に Nested EnVar が 36 時間後まで有意に高い精度を示す．Nested 3DVar も BLSB+3DVar よりも解析精度を改善するが，有意に高い予測精度を示すのは 6 時間後までである（Fig. 7a）ことから，背景場の流れ依存性を考慮することで密な観測を同化する効果を最大限引き出すことができると示唆される．

6.　結論と今後の課題

本研究では，LAM 同化が抱える大規模場の誤差を改善するために，GM と LAM の大規模場を背景誤差の変動を考慮して混合するアンサンブル変分法ベースの LSB 手法を新たに導入した．本研究で提案するアンサンブル変分 LSB 手法は，GM と LAM の背景誤差をどちらもアンサンブル予報から推定することで，GM の大規模場の情報を流れ場に応じた相対的な重みに基づいて動的に取り入れることができる．提案手法を背景場の LSB（BLSB）手法と静的な変分法ベースの LSB 手法と直接比較することで，LSB 手法に対する背景場の流れ依存性の影響を調べた．

Lorenz (2005) の一次元カオスモデルを用いた OSSE から，BLSB 手法と変分 LSB 手法はともに LAM DA によって生じる大規模場の解析精度の悪化を抑えるが，3DVar 実験のように GM の方が平均的に高い解析精度を示す場合，変分 LSB 手法によって観測と同時に GM の情報を同化することで，BLSB 手法よりも効果的に大規模場の精度悪化を抑えることができるとわかった．背景誤差の流れ依存性を考

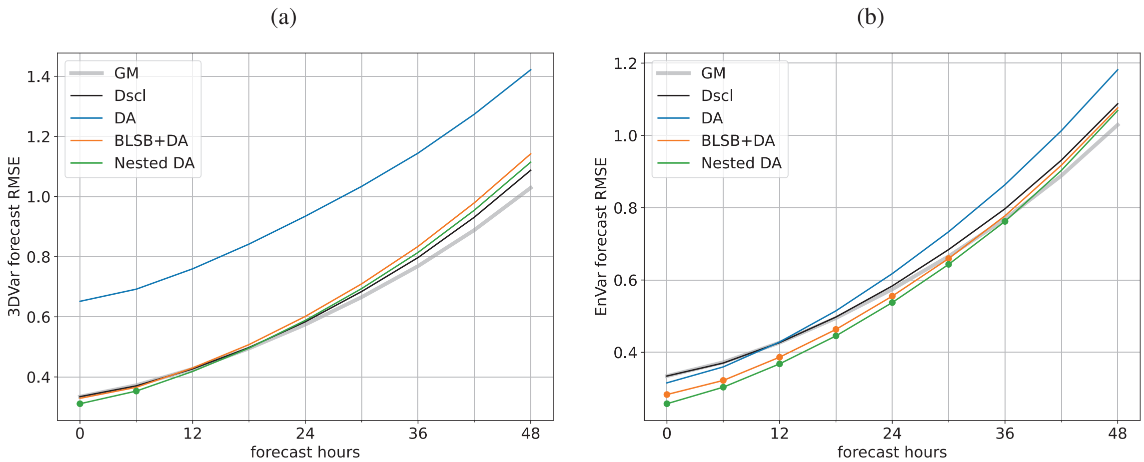

Fig. 7: Same as Fig. 4, but for experiments with dense, mobile observations.

慮する EnVar では，定常な背景誤差を用いる 3DVar よりも大規模場の解析誤差の悪化は抑えられるものの, 大規模場は中小規模な場よりも大きなエネルギーを持つため，大規模場の精度悪化は観測の同化による中規模波長帯の解析精度の改善を打ち消すほどの影響を持つ．EnVar に対しても LSB 手法を導入することで，この大規模場の精度悪化を抑え，GM 解析の空間内挿よりも高い解析精度を示す場を得ることができ，予測にも正のインパクトをもたらす．これらの結果は，LAM 同化が GM 解析のダウンスケーリングに対する付加価値を持つためには，LSB 手法による大規模場の制約が重要であることを示している．

さらに，LSB 手法による大規模場の制約は LAM 領域内に偏りのある観測を同化する場合に大きな効果を持つことがわかった．偏りのある観測は LAM 解析のバランスを崩しやすいため，均一な観測よりも大規模場の誤差を悪化させやすく，LSB 手法が大きなインパクトを示す．特に本研究で提案するアンサンブル変分法ベースの LSB 手法は、GM の背景誤差の流れ依存性を考慮することで，LAM 領域内を動く密な観測を同化する場合に BLSB 手法を上回る解析・予測精度を示した．アンサンブル変分 LSB 手法は，大規模場の制約と中規模場に対する観測の効果のバランスを適切に決定でき，幅広い波長帯で高い精度を示す解析値を作成していた．この結果は，衛星サウンダのように密で空間的に局在化した観測を LAM に同化する場合に，アンサンブル変分 LSB 手法が現在用いられている BLSB 手法の有望な代用手法であることを示唆している．

一方で，アンサンブル変分 LSB 手法はアンサンブルスプレッドを予測誤差に対して過小評価する傾向が見られ, 均一な観測を同化する実験では観測の同化による正のインパクトを弱めていた．これはコスト関数のヘシアンを用いたアンサンブル変換 (Zupanski 2005) により GM の誤差情報を解析アンサンブルに反映しているためであり, 観測のみを考慮するアンサンブル手法よりも特に大規模場の解析分散が縮小しやすくなっている．現状用いているすべてのスケールで一定の共分散膨張ではスケールごとの分散の調整を行うことができないため，スケールごとに膨張を行う手法を実装する必要があると考えられる．

また，本研究で定式化したアンサンブル変分 LSB 手法では，GF08 や DG12 と同様に GM と LAM の間の背景誤差相関を無視している．GM と LAM は水平境界で接続しているため，双方の背景誤差は本来相関を持つと考えられる．個々の誤差共分散と同様に，2 つの場の背景誤差間の交差共分散もモンテカルロ法で推定できるが、この交差共分散を変分法に組み込むためには交差共分散を含む巨大な行列 ($(N_L + N_{LI}) \times (N_L + N_{LI})$ 次元）の逆行列を考える必要がある．この行列はアンサンブル数が状態変数次元よりも小さい場合には，実際にはそうでなくとも 2 つの背景誤差が最大相関を持つ状態 (Berry and Sauer 2018) に相当し，行列の条件数が非常に大きくなり数値最適化が不安定になることに加え，GM の背景誤差を適切に考慮することができない．2 つの背景誤差間の交差共分散を考慮するためには，このランク落ちを克服する手法が必要である．

このようなサンプル数不足によるランク落ちの問題は，交差共分散だけでなく現実的な高次元モデル

に適用する場合にも課題となる．アンサンブル手法においてサンプル数不足を補う手法として有名なのは局所化手法であるが，局所化手法の挙動は局所化スケールに大きく依存する．アンサンブル変分 LSB 手法において，LETKF (Hunt et al. 2007) のように観測空間で局所化を行う場合は，GM の情報を観測のように扱うため，この GM の情報も距離に応じて局所化することになるが，大規模場の情報を局所化する際の局所化スケールは観測に対する局所化スケールよりも大きく設定することが望ましいと考えられる．また状態空間での局所化 (Zupanski 2021) を用いる場合も，GM と LAM の背景アンサンブルをどちらも局所化する必要があり，それぞれ異なる局所化スケールを持つことが予測される．局所化の効果的な導入のためには，それぞれのモデルのアンサンブルに対して適切な局所化スケールを持つ関数を選択あるいは推定する手法が必要であると考えられる．局所化の考慮は交差共分散の導入にも効果的であると考えられるため，今後はスケールごとの共分散膨張手法に加えて，適切な局所化手法についても研究していく．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 22KJ1966, 19H05698, 19H05605, 21K03662 の助成を受けました．

参考文献

Baxter, G. M., S. L. Dance, A. S. Lawless, and N. K. Nichols, 2011: Four-dimensional variational data assimilation for high resolution nested models. *Computers & Fluids*, **46**, pp.137–141.

Berre, L., 2000: Estimation of synoptic and mesoscale forecast error covariances in a limited-area model. *Mon. Wea. Rev.*, **128**, pp.644–667.

Berry, T., and T. Sauer, 2018: Correlation between system and observation errors in data assimilation. *Mon. Wea. Rev.*, **146**, pp.2913–2931.

Bučánek, A., and R. Brožková, 2017: Background error covariances for a BlendVar assimilation system. *Tellus A*, **69**, 1355718.

Caron, J.-F., 2013: Mismatching perturbations at the lateral boundaries in limited-area ensemble forecasting: A case study. *Mon. Wea. Rev.*, **141**, pp.356–374.

Dahlgren, P., and N. Gustafsson, 2012: Assimilating host model information into a limited area model. *Tellus A*, **64**, 15836.

Davies, H. C., 1976: A lateral boundary formulation for multi-level prediction models. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **102**, pp.405–418.

Denis, B., J. Côté, and R. Laprise, 2002: Spectral decomposition of two-dimensional atmospheric fields on limited-area domains using the discrete cosine transform (DCT). *Mon. Wea. Rev.*, **130**, pp.1812–1829.

Feng, J., J. Sun, and Y. Zhang, 2020: A dynamic blending scheme to mitigate large-scale bias in regional models. *J. Adv. Model. Earth Syst.*, **12**, e2019MS001754.

Fukui, S., and A. Murata, 2021: Sensitivity to horizontal resolution of regional climate model in simulated precipitation over Kyushu in Baiu season. *SOLA*, **17**, pp.207–212.

Gaspari, G., and S. E. Cohn, 1999: Construction of correlation functions in two and three dimensions. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **125**, pp.723–757.

Guidard, V., and C. Fischer, 2008: Introducing the coupling information in a limited-area variational assimilation. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **134**, pp.723–735.

Gustafsson, N., and Coauthors, 2018: Survey of data assimilation methods for convective-scale numerical weather prediction at operational centres. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **144**, pp.1218–1256.

Harville, D. A., 2006: *Matrix Algebra From a Statistician's Perspective*. Springer, 634 pp.

Hsiao, L.-F., and Coauthors, 2015: Blending of global and regional analyses with a spatial filter: Application to typhoon prediction over the western North Pacific Ocean. *Wea. Forecasting*, **30**, pp.754–770.

Hu, G., S. L. Dance, R. N. Bannister, H. G. Chipilski, O. Guillet, B. Macpherson, M. Weissmann, and N. Yussouf, 2023: Progress, challenges, and future steps in data assimilation for convection-permitting numerical weather prediction: Report on the virtual meeting held on 10 and 12 November 2021. *Atmos. Sci. Lett.*, **24**, e1130.

Hunt, B. R., E. J. Kostelich, and I. Szunyogh, 2007: Efficient data assimilation for spatiotemporal chaos: A local ensemble transform Kalman filter. *Physica D*, **230**, pp.112–126.

Johnson, A., X. Wang, J. R. Carley, L. J. Wicker, and C. Karstens, 2015: A comparison of multiscale GSI-based EnKF and 3DVar data assimilation using radar and conventional observations for midlatitude convective-scale precipitation forecasts. *Mon. Wea. Rev.*, **143**, pp.3087–3108.

Kanada, S., and A. Wada, 2016: Sensitivity to horizontal resolution of the simulated intensifying rate and inner-core structure of Typhoon Ida, an extremely intense typhoon. *J. Meteor. Soc. Japan.*, **94A**, pp.181–190.

Keresturi, E., Y. Wang, F. Meier, F. Weidle, C. Wittmann, and A. Atencia, 2019: Improving initial condition perturbations in a convection-permitting ensemble prediction system. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **145**, pp.993–1012.

Kretschmer, M., B. R. Hunt, E. Ott, C. H. Bishop, S. Rainwater, and I. Szunyogh, 2015: A composite state method for ensemble data assimilation with multiple limited-area models. *Tellus A*, **67**, 26495.

Lorenz, E. N., 1995: Predictability: A problem partly solved. *Seminar on predictability, 4-8 september 1995*, Shinfield Park, Reading, ECMWF, pp.1–18.

Lorenz, E. N., 2005: Designing chaotic models. *J. Atmos. Sci.*, **62**, pp.1574–1587.

Milan, M., A. Clayton, A. Lorenc, B. Macpherson, R. Tubbs, and G. Dow, 2023: Large-scale blending in an hourly 4D-Var framework for a numerical weather prediction model. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **149**, pp.2067–2090.

Parrish, D. F., and J. C. Derber, 1992: The National Meteorological Center's spectral statistical-interpolation analysis system. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, pp.1747–1763.

Saito, K., H. Seko, M. Kunii, and T. Miyoshi, 2012: Effect of lateral boundary perturbations on the breeding method and the local ensemble transform Kalman filter for mesoscale ensemble prediction. *Tellus A*, **64**, 11594.

Simmons, A. J., R. Mureau, and T. Petroliagis, 1995: Error growth and estimates of predictablity from the ECMWF forecasting system. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **121**, pp.1739–1771.

Vendrasco, E. P., J. Sun, D. L. Herdies, and C. F. de Angelis, 2016: Constraining a 3DVAR radar data assimilation system with large-scale analysis to improve short-range precipitation forecasts. *J. Appl. Meteor. Clim.*, **55**, pp.673–690.

von Storch, H., H. Langenberg, and F. Feser, 2000: A spectral nudging technique for dynamical downscaling purposes. *Mon. Wea. Rev.*, **128**, pp.3664–3673.

Wang, H., X.-Y. Huang, D. Xu, and J. Liu, 2014a: A scale-dependent blending scheme for WRFDA: Impact on regional weather forecasting. *Geosci. Model Dev.*, **7**, pp.1819–1828.

Wang, Y., M. Bellus, J.-F. Geleyn, X. Ma, W. Tian, and F. Weidle, 2014b: A new method for generating initial condition perturbations in a regional ensemble prediction system: Blending. *Mon. Wea. Rev.*, **142**, pp.2043–2059.

Yang, X., 2005: Analysis blending using spatial filter in grid-point model coupling. *HiRLAM Newsletter*, **10**, pp.49–55.

Zhang, H., J. Chen, X. Zhi, Y. Wang, and Y. Wang, 2015: Study on multi-scale blending initial condition perturbations for a regional ensemble prediction system. *Adv. Atmos. Sci.*, **32**, pp.1143–1155.

Zupanski, M., 2005: Maximum likelihood ensemble filter: Theoretical aspects. *Mon. Wea. Rev.*, **133**, pp.1710–1726.

Zupanski, M., 2021: The maximum likelihood ensemble filter with state space localization. *Mon. Wea. Rev.*, **149**, pp.3505–3524.

（論文受理日：2024 年 8 月 31 日）