京都大学防災研究所年報 第 67 号 B
DPRI Annuals, No. 67 B, 2024

極配置法に基づく建物振動の統一的理解のMaxwellモデルへの拡張

Extension of Unified Understanding Based on Pole Allocation for Building Vibration to Maxwell Model

池田芳樹・宇原尚希 (1)

Yoshiki IKEDA and Naoki UHARA (1)

（1）京都大学大学院工学研究科

(1) Graduate School of Engineering, Kyoto University

Synopsis

The Maxwell model is used to understand the realistic effectiveness of vibration reduction in building structures. The model consists of a dashpot and spring in series. The dashpot and spring represent a viscous damper and joint between the damper and the structural frame, respectively. To examine the effect of the joint spring, pole allocation is applied to a structural system wherein the Maxwell model is incorporated into an S-DOF damped model. The introduced closed-form expression describes the relationships between the target structural damping ratio, damper capacity, and joint spring. The model constrains the control effectiveness using damper parameters, and suggests an optimal and realistic joint spring for the damper. Pole allocation is also applied to an M-DOF damped structural system employing multiple Maxwell models. The newly proposed optimized joint spring could easily control the additional damping effect on the M-DOF system. The optimization scheme is more useful in the preliminary design stage than the previous numerical optimizations. This study extends the mathematical equation governing the building vibrations to the Maxwell model.

キーワード：建物，Maxwellモデル，統一的理解，極配置，粘性ダンパ，制御効果
Keywords: building, Maxwell model, unified understanding, pole allocation, viscous damper, control effect

1. はじめに

建物の振動制御を担う粘性ダンパは，主構造部材に接合部材を介して取り付けられるため，より現実的な制御効果を理解するためには，ダンパと接合部材をそれぞれ表現するダッシュポットとばねを直列に繋いだMaxwellモデルが必要になる（Soong and Dargush, 1997）．Maxwellモデルをダッシュポットとばねが並列に配置されているKelvin－Voigt型モデル（以下，Voigtモデル）と比較すると，モデルの自由度数は増加し，振動数依存性に起因してエネルギ吸収効果が高くなる振動数が存在する．後者の性質から，Maxwellモデルを建物モデルに組み込んだ際には，パラメータの最適化に関心を払う必要がある．

Voigtモデルのみを考慮した時刻歴応答解析ソフトが標準仕様であった時代には，Maxwellモデルをほぼ等価なVoigtモデルに置き換える方法の提案は，実用上の観点から重要であった（石井ら，2000；笠井・大熊，2001；笠井・大熊，2004）．実用的なモデリングの範疇には，モード歪エネルギ法（Chang *et al.*，1995；Fu and Kasai，1998；Palmeri *et al.*，2003；Soong and Dargush，1997； Zambranoet *et al.*，1996），複素減衰理論（Ou *et al.*，2007），さらには運動方程式にある減衰項の近似法（Li *et al.*，2018）も広く含ま

れる．

その一方で，Maxwellモデルを時刻歴応答解析で直接扱う提案もされている．モデルに生じる力がサンプリング周期内で線形に変化するという仮定を導入すると，力が作用する節点の速度で表現できるようになり，建物全体モデルの自由度数を増加させずに，時刻歴応答解析を行うことができる（畑田ら，1994；石田ら，1994；Hatada *et al*.，2000）．この解析法は，Maxwell要素を複数もつ一般化Maxwellモデルに拡張されている（高橋・曽田，1998）．これらは，Maxwellモデルを用いながらも実用的な解析法になっている．

Maxwellモデル特有の物理現象を，建物の振動低減を担う粘性ダンパの視点から扱った研究では，Voigtモデルでダンパを表現した場合に比較して，効果が減じられる点に着目している．その基本特性は，1質点系モデルによる閉じた解に基づいて主に調べられている．

極配置法を1質点系非減衰建物モデルに適用した研究（石垣・石丸，2005）では，最適なダンパ容量の存在と建物に与える付加減衰効果の頭打ち現象が明らかにされている．この現象は，ランダム振動理論による統計的解析でも裏付けられている（松田，2011；Matsuda，2012）．極の変化を通じた研究（Yamada，2008）では，建物剛性に対するダンパ接合部材のばねの比（以下，剛性比）により，基本特性が分類されている．剛性比が小さい場合には，付加減衰効果を最大にするダンパ容量が存在することがやはり確認されている．剛性比が大きい場合には，建物振動は抑えられるものの，ダンパが大きな力を負担するため，剛性比には自ずと制約がある点が指摘されている．しかしながら，いずれの文献でも，実現可能なパラメータ領域で最適化が十分考察されていない．例えば，剛性比は0.4程度までが現実的という指摘がある（笠井・大熊，2001）．最適なダンパ容量は，非減衰建物モデルの定点理論に基づいても誘導されている（白井ら，2008）．そこでは，建物卓越振動モードの減衰比に及ぼすダンパ容量の影響が把握されていない，極配置法ですでに誘導されていた最適なダンパ容量との関係が整理されていない，という課題が残されていた．

ダンパの最適化では，多質点系モデルのための誘導も期待されている．粘性ダンパの振動数依存性をMaxwellモデルで表現し，勾配降下法を用いてダンパの最適配置や最適パラメータを得た研究（Singh *et al*., 2003）では，多様な応答（例えば，ベースシア係数，層間変位，各階の加速度）で表現される評価関数を最小にするダンパ最適化が提案されている．同時に，接合部材の影響も調べられている．勾配降下法は，Chen and Chai（2011）によるダンパ設計法でも利用されている．多質点系モデルにおけるダンパ最適化では，ランダム振動理論に基づく方法も報告されている（松田，2011；Matsuda，2012）．多質点系モデルにおけるダンパの最適化は，きわめて特殊な場合を除いて閉じた解で行うことが不可能と考えられており，結果的に数値解析に強く依存している．そのため， 数値解析に過度に依存しない簡単な最適化手法があると，構造設計の特に初期段階への貢献が期待できる．

最近，極配置法が基礎・中間層免震や同調型マスダンパによる制振（池田，2021；松本・池田，2022；Ikeda，2021），ダッシュポットを層剛性に並列に配置したVoigtモデルに基づく粘性ダンパによる制振（池田・松本，2022；松本・池田，2023；Ikeda and Matsumoto，2022），さらには粘性ダンパで2棟を繋いだ連結制振（池田・松本, 2023；Ikeda and Matsumoto, 2024）に適用され，制御効果と制御装置の規模の関係が閉じた形で統一的に導かれた．その結果，性能規定型設計に資する知見も得られている．

そこで本研究は，石垣・石丸（2005）と同様に極配置法を適用しながらも，池田と松本による方法（池田，2021；池田・松本，2022；池田・松本，2023；松本・池田，2022；松本・池田，2023；Ikeda，2021；Ikeda and Matsumoto, 2022；Ikeda and Matsumoto, 2024）に基づいて，粘性ダンパのパラメータを拘束する統一式をMaxwellモデルに拡張している．

第2章では，建物減衰を組み込んだ1質点系モデルに極配置法を適用して統一式を導くと同時に，パラメータと制御効果の関係を閉じた形で示している．この関係式を用いると，ダンパ設置後の建物の固有振動数の変化が建物とダンパのモード減衰比に及ぼす影響を，実現可能なパラメータの領域で考察することができる．新たな視点でMaxwellモデルが制御効果を制約する現象を調べた結果，同一効果を得る接合部材ばねに最小値が存在することを明らかにしている（池田，2024）．第3章では，多質点系1本棒モデルに極配置法を適用して，第2章で得た統一式の一般的な表現を得ている．第4章では，1質点系モデルで把握した接合部材ばねに最小値が存在する現象を，多質点系モデルで利用している．続く第5章では，第4章で提案した接合部材ばねの最小値に基づくダンパ設計法を検証している．地震応答解析も行い，極配置法では調べることができない建物とダンパの応答値も調べている．最後に第6章では，本論文の成果を整理している．

2. 1質点系モデルに基づく基本特性

2.1 運動方程式と状態方程式

Fig.1 に示す 1 質点系 Maxwell モデルの運動方程式を次式で表現する.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + g(x-z) = -m\ddot{y}_0 \tag{1}$$

$$d\dot{z} = g(x-z) \tag{2}$$

ここに, m, k および c は, 建物のそれぞれ質量, 剛性および減衰係数, d はダンパを表現するダッシュポットの減衰係数, g はダンパ接合部材のばね, x は建物の固定端からの変位, z はダッシュポットの固定端からの水平変位, $\ddot{y}_0$ は地震入力加速度である.

ω_0 と h_0 をそれぞれ建物自体の固有円振動数と減衰比, μ をダンパ接合部材のばね g の建物剛性 k に対する剛性比, τ を緩和時間とおく.

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m},\quad 2h_0\omega_0 = \frac{c}{m},\quad \mu = \frac{g}{k},\quad \tau = \frac{d}{g} \tag{3}$$

運動方程式に対応する状態方程式は次式になる.

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2h_0\omega_0 & -(1+\mu)\omega_0^2 & \mu\omega_0^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\tau & -1/\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \\ z \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{y}_0 \tag{4}$$

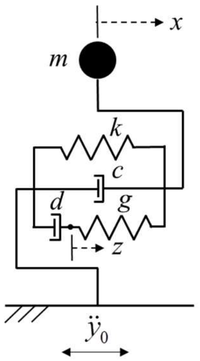


Fig.1 Single-lumped-mass model with a Maxwell model

2.2 極配置法

この系の極を s とおくと, 対応する特性方程式は

$$s^3 + (2h_0\omega_0 + \frac{1}{\tau})s^2 + [(1+\mu)\omega_0^2 + \frac{2h_0\omega_0}{\tau}]s + \frac{\omega_0^2}{\tau} = 0 \tag{5}$$

である. 石垣・石丸 (2005) と同様に, 建物の卓越振動モードの固有円振動数と減衰比をそれぞれ ω_1 と h_1, ダンパのモードの減衰比を $h_{1*} = -\mathrm{Re}[s]/\omega_1$ とおくと, 極配置法で制御目標となる特性方程式は

$$(s^2 + 2h_1\omega_1 s + \omega_1^2)(s + h_{1*}\omega_1) = 0$$

$$s^3 + (2h_1 + h_{1*})\omega_1 s^2 + (2h_1h_{1*}+1)\omega_1^2 s + h_{1*}\omega_1^3 = 0 \tag{6}$$

となる. 式(5)と式(6)から, 指定した極にモデルパラメータを対応させる 3 つの条件が得られる.

$$2h_0\omega_0 + \frac{1}{\tau} = (2h_1 + h_{1*})\omega_1 \tag{7}$$

$$(1+\mu)\omega_0^2 + \frac{2h_0\omega_0}{\tau} = (2h_1h_{1*}+1)\omega_1^2 \tag{8}$$

$$\frac{\omega_0^2}{\tau} = h_{1*}\omega_1^3 \tag{9}$$

建物の ω_0 と h_0 は与えられるため, μ と τ (g と d) が未知数になり, h_1 を最大にする μ と τ を探すことが重要となる. 式(8)を式(9)で除すと, 下記のパラメータの拘束条件式(統一式ともいう)が得られる.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{c+d}{k} + \frac{d}{g}\right) = \frac{h_1}{\omega_1} + \frac{1}{2h_{1*}\omega_1} \tag{10}$$

式(7)から式(9)で τ を消去すると

$$h_1 = h_0\frac{\omega_0}{\omega_1} + \frac{h_{1*}}{2}\left\{\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 - 1\right\} \tag{11}$$

$$h_{1*} = \frac{2(h_1 - h_0\frac{\omega_0}{\omega_1})}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 - 1} \tag{12}$$

が導かれる. 式(11)は ω_1 と h_{1*} を指定すると h_1 が決まり, 式(12)は ω_1 と h_1 を指定すると h_{1*} が決まることを意味する. h_1 と h_{1*} は互いに独立ではない. 式(8)と式(9)からは, μ を求める次式が導かれる.

$$\mu = (2h_1h_{1*}+1)\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 - 2h_{1*}h_0\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^3 - 1 \tag{13}$$

2.3 これまでの極配置法との関係

極配置法という表現はないが, 石垣・石丸 (2005) は建物を非減衰にした場合の極配置法を扱っている. そこで, 式(7)と式(8)で $h_0 = 0$ とおく.

$$\frac{1}{\tau} = (2h_1 + h_{1*})\omega_1 \tag{14}$$

$$(1+\mu)\omega_0^2 = (2h_1h_{1*}+1)\omega_1^2 \tag{15}$$

式(14)と式(15)を辺々乗じて, 式(9)を考慮すると

$$h_1 = -\frac{1}{4}(h_{1*} + \frac{1}{h_{1*}}) + \frac{1}{4}\sqrt{(h_{1*} + \frac{1}{h_{1*}})^2 + 4\mu} \tag{16}$$

が得られる. この式を h_{1*} で微分した

$$\frac{dh_1}{dh_{1*}} = \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{h_{1*}^2})\left[\frac{h_{1*} + \frac{1}{h_{1*}}}{\sqrt{(h_{1*} + \frac{1}{h_{1*}})^2 + 4\mu}} - 1\right] \tag{17}$$

から, h_1 の最大値は $h_{1*} = 1$ の時に生じることが明らかにされている(石垣・石丸, 2005). この時, パラメータの間には以下の関係がある.

$$\omega_1 = \left(\frac{\omega_0^2}{\tau}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{18}$$

$$h_{1,\max} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+\mu)(\tau\omega_0)^2} - 1\right) \tag{19}$$

$$\tau\omega_0 = \left(\frac{1}{1+\mu}\right)^{\frac{3}{4}} \tag{20}$$

式(20)を式(19)に代入すると，h_1 の最大値 $h_{1,\max}$ が μ のみに依存することがわかる．

$$h_{1,\max} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\mu} - 1\right) \tag{21}$$

ここで，ダンパの減衰比 h_D を次式で表現する（石垣・石丸，2005）．

$$h_D = \frac{d}{2m\omega_0} = \frac{\tau\mu\omega_0}{2} \tag{22}$$

式(14)と式(15)から ω_1 を消去した

$$(\tau\omega_0)^2 = \frac{1+2h_1h_{1*}}{(2h_1+h_{1*})^2(1+\mu)} \tag{23}$$

と式(22)から $\tau\omega_0$ を消去する．

$$h_D = \frac{\mu}{2(2h_1+h_{1*})}\sqrt{\frac{1+2h_1h_{1*}}{1+\mu}} \tag{24}$$

上式に h_1 が最大値になる条件 $h_{1*}=1$ を考慮する．

$$h_{D,opt} = \frac{\mu}{2\sqrt{(1+\mu)(1+2h_{1,\max})}} \tag{25}$$

さらに式(21)を代入すると，h_1 が最大値になるダンパの最適減衰比 $h_{D,opt}$ が得られる．なお，式(24)や式(26)の閉じた表現を石垣・石丸（2005）は示していない．

$$h_{D,opt} = \frac{\mu}{2(1+\mu)^{\frac{3}{4}}} \tag{26}$$

Fig.2 に，式(16)に基づいて 2 つのモード減衰比 h_1 と h_{1*} の関係を示す．μ が一定の場合，h_1 は式(21)に示す最大値をもつ．Fig.3 は，Fig.2 と式(24)に基づいて h_1 と h_D の関係を示しており（石垣・石丸(2005) の図 3 と同じ），破線の Voigt モデルの場合と比較している．これらの図は，Maxwell モデルでは建物モードの減衰比 h_1 がダンパの減衰比 h_D（または h_{1*}）とともに単調増加しないことを意味する．この現象が Maxwell モデルを推奨する理由である．一方，実建物では 高い値の μ や h_1 は実現不可能なことが多いため，現実的な領域でダンパの最適化を再考する必要がある．

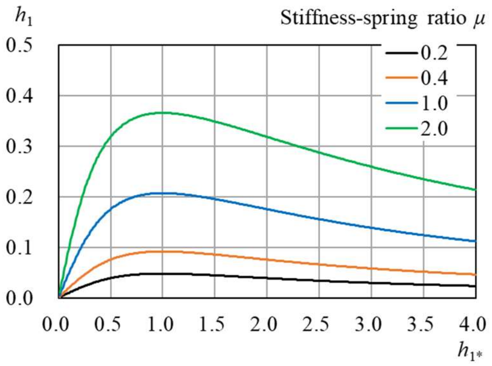


Fig.2 Damping ratio h_1 as a function of the damping ratio h_{1*}

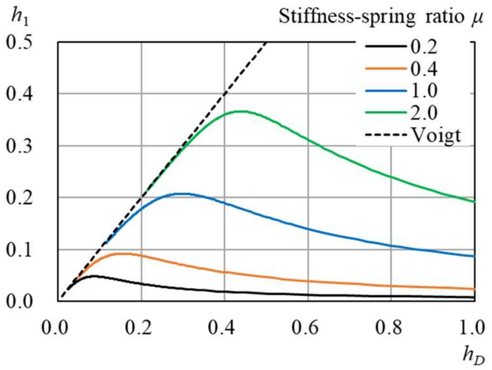


Fig.3 Damping ratios h_1 as a function of the damping ratio h_D

2.4 定点理論との関係

$h_0=0$ の場合には定点理論が適用でき，6 種類の周波数伝達関数でダンパのダッシュポットの最適減衰比 $h_{D,opt}$ が式(27)から(32)で示されている（白井ら，2008）．この減衰比の定義も式(22)と同じである．

$\left|\frac{x}{y_0}\right|$ の場合 $$h_{D,opt} = \frac{\mu}{\sqrt{2(1+\mu)(2+\mu)}} \tag{27}$$

$\left|\frac{x}{\dot{y}_0}\right|$ の場合 $$h_{D,opt} = \frac{\mu\sqrt{4+\mu}}{\sqrt{2(4+3\mu)(2+\mu)}} \tag{28}$$

$\left|\frac{x}{\ddot{y}_0}\right|$ の場合 $$h_{D,opt} = \frac{\mu}{\sqrt{2(2+\mu)}} \tag{29}$$

$\left|\frac{\ddot{x}+\ddot{y}_0}{y_0}\right|$ の場合 $$h_{D,opt} = \frac{\mu\sqrt{2+\mu}}{2(1+\mu)\sqrt{2(1+\mu)}} \tag{30}$$

$\left|\frac{\ddot{x}+\ddot{y}_0}{\dot{y}_0}\right|$ の場合 $$h_{D,opt} = \frac{\mu\sqrt{(2+\mu)(4+3\mu)}}{2(1+\mu)\sqrt{2(1+\mu)(4+\mu)}} \tag{31}$$

$\left|\frac{\ddot{x}+\ddot{y}_0}{\ddot{y}_0}\right|$ の場合 $$h_{D,opt} = \frac{\mu\sqrt{2(2+\mu)}}{4(1+\mu)} \tag{32}$$

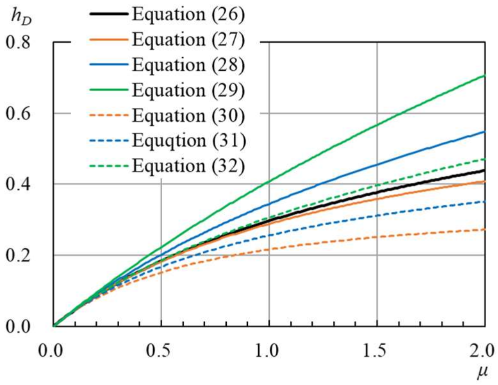
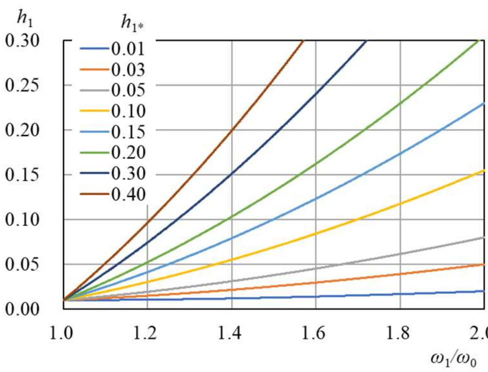


Fig.4 Comparison of the optimal damping ratios $h_{D,\,opt}$

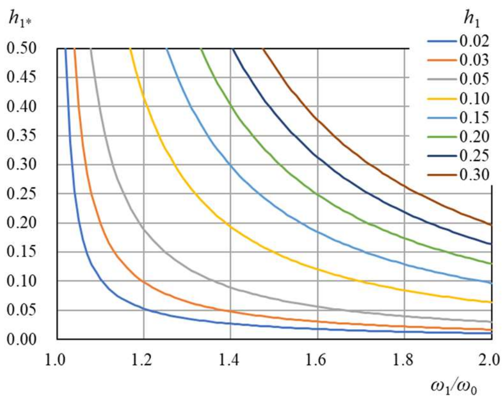
Fig.4 は，石垣・石丸（2005）が示す式(26)と定点理論の式(27)から式(32)までを比較している．極配置法による値は，定点理論 6 式の平均的な値である．

2.5 剛性比から見た基本特性

Fig.5 に，$h_0=1\%$ の場合に式(11)と式(12)に基づいて，建物の固有振動数比 ω_1/ω_0 がモード減衰比 h_1 と h_{1*} に及ぼす影響を示す．ダンパを設置しても建物の固有振動数は急激に高くならないから，ω_1/ω_0 は 1.2 以下の範囲が現実的である．ダンパ容量 h_{1*} を大きくしても，h_1 の大きさには限度がある．



(a) Damping ratio h_1 for the controlled structure versus structural natural frequency ratio ω_1/ω_0



(b) Damping ratio h_{1*} for the damper versus structural natural frequency ratio ω_1/ω_0

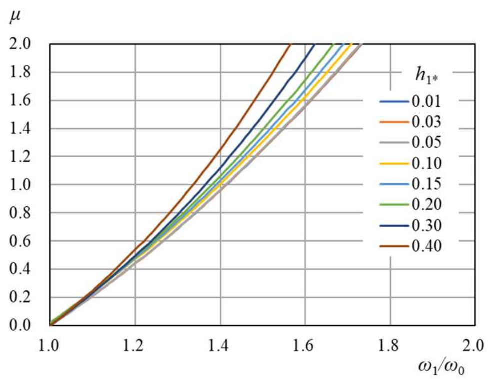
Fig.5 Damping ratio h_1 for the controlled structure and damping ratio h_{1*} for the damper versus structural natural frequency ratio ω_1/ω_0 when the structural initial damping ratio h_0 is 1%

Fig.6 に，式(13)に基づいて ω_1/ω_0 と μ の関係を示す．μ は h_{1*} の変化に対して鈍く，h_1 に対しては敏感である．Fig.6 (b)は，h_1 を大きくするには μ を高くする必要があること，同じ h_1 では μ に最小値が存在し，その値を採用すれば小さめの接合部材で同じ目標が達成できることを示している．

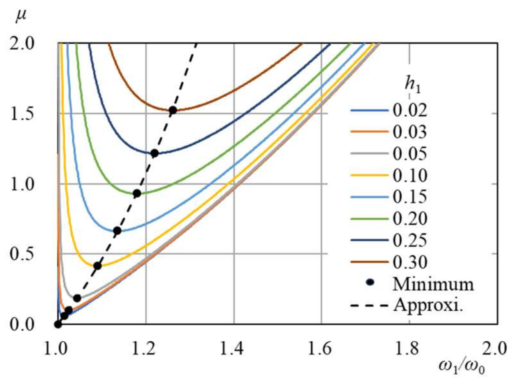
$h_0=0$ の場合には，μ は

$$\frac{\omega_1}{\omega_0}=\sqrt{2h_1+1} \tag{33}$$

の時に最小値をとる．黒色の破線は最小値の振動数比 ω_1/ω_0 の 2 次式による近似曲線で，$h_0=1\%$ で小さい場合には，近似式は十分な精度をもっている．



(a) Effect of damping ratio h_{1*} for the damper



(b) Effect of damping ratio h_1 for the controlled structure

Fig.6 Stiffness-spring ratio μ versus structural natural frequency ratio ω_1/ω_0 when the structural damping ratio is 1%

3. 多質点系モデルの統一式

Fig.7 に示す多質点系 1 本棒 Maxwell モデルで，パラメータの拘束条件式を求める．m_j を質点 j の質量，

k_j と c_j を j 層のせん断剛性とそれに並列配置されたダッシュポットの減衰係数，g_j と d_j を j 層の Maxwell 要素のばねとダッシュポットの減衰係数，x_j を質点 j の固定端からの相対変位，z_j を Maxwell 要素のばねとダッシュポットに挟まれた位置の固定端からの相対変位，$\ddot{y}_0$ を基礎固定端の地震入力加速度として，質点などの番号を固定端側から上に向かって振る．

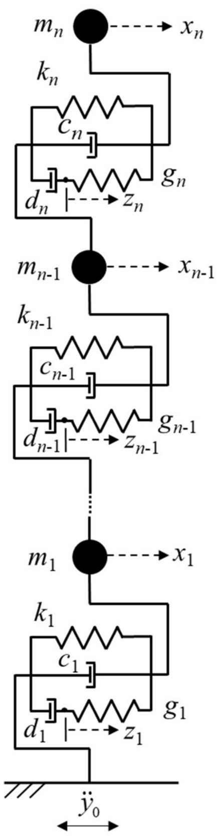


Fig.7 Multi-lumped-mass model with Maxwell models

3.1 運動方程式と状態方程式

Fig.7 に対応する運動方程式は次式で表現できる．

$$M\ddot{x}+C\dot{x}+(K+E)x-Ez=-Me_n\ddot{y}_0 \tag{34}$$

$$D\dot{z}=F\dot{x}+G(x-z) \tag{35}$$

ここに，

$$x^T=\{x_n \quad x_{n-1} \quad x_{n-2} \quad \cdots \quad x_2 \quad x_1\} \tag{36}$$

$$z^T=\{z_n \quad z_{n-1} \quad z_{n-2} \quad \cdots \quad z_2 \quad z_1\} \tag{37}$$

$$M=\begin{bmatrix} m_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_1 \end{bmatrix} \tag{38}$$

$$C=\begin{bmatrix} c_n & -c_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_n & c_n+c_{n-1} & -c_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c_{n-1} & c_{n-1}+c_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_3+c_2 & -c_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_2 & c_2+c_1 \end{bmatrix} \tag{39}$$

$$K=\begin{bmatrix} k_n & -k_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_n & k_n+k_{n-1} & -k_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -k_{n-1} & k_{n-1}+k_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_3+k_2 & -k_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_2 & k_2+k_1 \end{bmatrix} \tag{40}$$

$$G=\begin{bmatrix} g_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & g_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{n-2} & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & g_1 \end{bmatrix} \tag{41}$$

$$D=\begin{bmatrix} d_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{n-2} & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \end{bmatrix} \tag{42}$$

$$E=\begin{bmatrix} g_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -g_n & g_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -g_{n-1} & g_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -g_2 & g_1 \end{bmatrix} \tag{43}$$

$$F=\begin{bmatrix} 0 & d_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{44}$$

$$e_n^T=\{1 \quad 1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1 \quad 1\} \tag{45}$$

運動方程式(34)と(35)を整理する．

$$\ddot{x}=-M^{-1}C\dot{x}-M^{-1}(K+E)x+M^{-1}Ez-e_n\ddot{y}_0 \tag{46}$$

$$\dot{z}=D^{-1}F\dot{x}+D^{-1}G(x-z) \tag{47}$$

対応する状態方程式は次式となる．

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ I_{n\times n} & O_{n\times n} & O_{n\times n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \\ z \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} e_n \\ o_n \\ o_n \end{Bmatrix}\ddot{y}_0 \tag{48}$$

ここに，$I_{n\times n}$ は $n\times n$ 次の単位行列，$O_{n\times n}$ は $n\times n$ 次のゼロ行列，o_n は n 次元のゼロベクトルで，システム行列の部分行列は以下となる．

$$A_{11}=\begin{bmatrix} -\frac{c_n}{m_n} & \frac{c_n}{m_n} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{c_n}{m_{n-1}} & -\frac{c_n+c_{n-1}}{m_{n-1}} & \frac{c_{n-1}}{m_{n-1}} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_{n-1}}{m_{n-2}} & -\frac{c_{n-1}+c_{n-2}}{m_{n-2}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{c_3+c_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{c_2}{m_1} & -\frac{c_2+c_1}{m_1} \end{bmatrix} \tag{49}$$

$$A_{12}=\begin{bmatrix} -\frac{k_n+g_n}{m_n} & \frac{k_n}{m_n} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{k_n+g_n}{m_{n-1}} & -\frac{k_n+k_{n-1}+g_{n-1}}{m_{n-1}} & \frac{k_{n-1}}{m_{n-1}} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_{n-1}+g_{n-1}}{m_{n-2}} & -\frac{k_{n-1}+k_{n-2}+g_{n-2}}{m_{n-2}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{k_3+k_2+g_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{k_2+g_2}{m_1} & -\frac{k_2+k_1+g_1}{m_1} \end{bmatrix} \tag{50}$$

$$A_{13}=\begin{bmatrix} \frac{g_n}{m_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{g_n}{m_{n-1}} & \frac{g_{n-1}}{m_{n-1}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{g_{n-1}}{m_{n-2}} & \frac{g_{n-2}}{m_{n-2}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{g_2}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -\frac{g_2}{m_1} & \frac{g_1}{m_1} \end{bmatrix} \tag{51}$$

$$A_{31}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{52}$$

$$A_{32}=-A_{33}=\begin{bmatrix} \frac{g_n}{d_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g_{n-1}}{d_{n-1}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g_{n-2}}{d_{n-2}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{g_2}{d_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{g_1}{d_1} \end{bmatrix} \tag{53}$$

3.2 系の特性方程式

状態方程式(48)のシステム行列

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ I_{n\times n} & O_{n\times n} & O_{n\times n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \tag{54}$$

に，公式

$$|B|=\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix}=|B_{22}|\left|B_{11}-B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}\right| \tag{55}$$

を2回適用して特性方程式を誘導する．

$$|A-sI|=\begin{vmatrix} A_{11}-sI_{n\times n} & A_{12} & A_{13} \\ I_{n\times n} & -sI_{n\times n} & O_{n\times n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}-sI_{n\times n} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} \tag{56}$$

ここに，

$$B_{11}=\begin{bmatrix} A_{11}-sI_{n\times n} & A_{12} \\ I_{n\times n} & -sI_{n\times n} \end{bmatrix},\quad B_{12}=\begin{bmatrix} A_{13} \\ O_{n\times n} \end{bmatrix},$$
$$B_{21}=\begin{bmatrix} A_{31} & A_{32} \end{bmatrix},\quad B_{22}=A_{33}-sI_{n\times n} \tag{57}$$

式(56)は以下のように変形できる．

$$\begin{aligned} &|A-sI| \\ &=|A_{33}-sI_{n\times n}| \\ &\quad\left|\begin{bmatrix} A_{11}-sI_{n\times n} & A_{12} \\ I_{n\times n} & -sI_{n\times n} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} A_{13} \\ O_{n\times n} \end{bmatrix}[A_{33}-sI_{n\times n}]^{-1}[A_{31}\quad A_{32}]\right| \\ &=|A_{33}-sI_{n\times n}| \\ &\quad\begin{vmatrix} A_{11}-sI_{n\times n}-A_{13}[A_{33}-sI_{n\times n}]^{-1}A_{31} & A_{12}-A_{13}[A_{33}-sI_{n\times n}]^{-1}A_{32} \\ I_{n\times n} & -sI_{n\times n} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{58}$$

公式(55)を再度用いると次式が得られる．

$$\begin{aligned} &|A-sI| \\ &=|A_{33}-sI_{n\times n}||-sI_{n\times n}| \\ &\quad\left|A_{11}-sI_{n\times n}-A_{13}[A_{33}-sI_{n\times n}]^{-1}A_{31}\right. \\ &\qquad\left.+\left[A_{12}-A_{13}[A_{33}-sI_{n\times n}]^{-1}A_{32}\right][sI_{n\times n}]^{-1}\right| \end{aligned} \tag{59}$$

上式の各部は次のように得られる．

$$\begin{aligned} &|A_{33}-sI_{n\times n}| \\ &=\begin{vmatrix} -\frac{g_n}{d_n}-s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{g_{n-1}}{d_{n-1}}-s & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{g_{n-2}}{d_{n-2}}-s & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{g_2}{d_2}-s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{g_1}{d_1}-s \end{vmatrix} \\ &=(-1)^n\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{g_i}{d_i}+s\right) \end{aligned} \tag{60}$$

$$|-sI_{n\times n}|=(-1)^n s^n \tag{61}$$

$$
\left[-sI_{n\times n}\right]^{-1}=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{s} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{s} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\dfrac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\dfrac{1}{s} \end{bmatrix}=-\frac{1}{s}I_{n\times n} \qquad (62)
$$

式(60)から式(62)を反映させると，式(59)は

$$
\begin{aligned}
&\left|A-sI\right| \\
&=s^n\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{g_i}{d_i}+s\right)\left|\begin{matrix} A_{11}-sI_{n\times n}-A_{13}\left[A_{33}-sI_{n\times n}\right]^{-1}A_{31} \\ +\dfrac{1}{s}\left[A_{12}-A_{13}\left[A_{33}-sI_{n\times n}\right]^{-1}A_{32}\right] \end{matrix}\right|
\end{aligned} \qquad (63)
$$

ここで，式(63)をいくつかの部分に分けて計算を進める．

$$
A_{11}-sI_{n\times n}
=\begin{bmatrix}
-\dfrac{c_n}{m_n}-s & \dfrac{c_n}{m_n} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\dfrac{c_n}{m_{n-1}} & -\dfrac{c_n+c_{n-1}}{m_{n-1}}-s & \dfrac{c_{n-1}}{m_{n-1}} & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \dfrac{c_{n-1}}{m_{n-2}} & -\dfrac{c_{n-1}+c_{n-2}}{m_{n-2}}-s & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\dfrac{c_3+c_2}{m_2}-s & \dfrac{c_2}{m_2} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \dfrac{c_2}{m_1} & -\dfrac{c_2+c_1}{m_1}-s
\end{bmatrix} \qquad (64)
$$

$$
\left[A_{33}-sI_{n\times n}\right]^{-1}
=\begin{bmatrix}
-\dfrac{1}{\dfrac{g_n}{d_n}+s} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -\dfrac{1}{\dfrac{g_{n-1}}{d_{n-1}}+s} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\dfrac{1}{\dfrac{g_{n-1}}{d_{n-1}}+s} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\dfrac{1}{\dfrac{g_2}{d_2}+s} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\dfrac{1}{\dfrac{g_1}{d_1}+s}
\end{bmatrix} \qquad (65)
$$

$$
A_{13}\left[A_{33}-sI_{n\times n}\right]^{-1}A_{31}
=\begin{bmatrix}
0 & -\dfrac{g_n}{m_n(\frac{g_n}{d_n}+s)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \dfrac{g_n}{m_{n-1}(\frac{g_n}{d_n}+s)} & -\dfrac{g_{n-1}}{m_{n-1}(\frac{g_{n-1}}{d_{n-1}}+s)} & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dfrac{g_{n-1}}{m_{n-2}(\frac{g_{n-1}}{d_{n-1}}+s)} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \dfrac{g_3}{m_2(\frac{g_3}{d_3}+s)} & -\dfrac{g_2}{m_2(\frac{g_2}{d_2}+s)} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{g_2}{m_1(\frac{g_2}{d_2}+s)}
\end{bmatrix} \qquad (66)
$$

$$
A_{13}\left[A_{33}-sI_{n\times n}\right]^{-1}A_{32}=
\begin{bmatrix}
-\dfrac{g_n^2}{m_n(g_n+d_ns)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\dfrac{g_n^2}{m_{n-1}(g_n+d_ns)} & -\dfrac{g_{n-1}^2}{m_{n-1}(g_{n-1}+d_{n-1}s)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \dfrac{g_{n-1}^2}{m_{n-2}(g_{n-1}+d_{n-1}s)} & -\dfrac{g_{n-2}^2}{m_{n-2}(g_{n-2}+d_{n-2}s)} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\dfrac{g_2^2}{m_2(g_2+d_2s)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \dfrac{g_2^2}{m_1(g_2+d_2s)} & -\dfrac{g_2^2}{m_1(g_2+d_2s)}
\end{bmatrix} \qquad (67)
$$

$$
A_{11}-sI_{n\times n}-A_{13}\left[A_{33}-sI_{n\times n}\right]^{-1}A_{31}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
-\dfrac{c_n}{m_n}-s & \dfrac{c_n}{m_n}+\dfrac{g_nd_n}{m_n(g_n+d_ns)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\dfrac{c_n}{m_{n-1}} & -\dfrac{c_n+c_{n-1}}{m_{n-1}}-\dfrac{g_nd_n}{m_{n-1}(g_n+d_ns)}-s & \dfrac{c_{n-1}}{m_{n-1}}+\dfrac{g_{n-1}d_{n-1}}{m_{n-1}(g_{n-1}+d_{n-1}s)} & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \dfrac{c_{n-1}}{m_{n-2}} & -\dfrac{c_{n-1}+c_{n-2}}{m_{n-2}}-\dfrac{g_{n-1}d_{n-1}}{m_{n-2}(g_{n-1}+d_{n-1}s)}-s & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\dfrac{c_3+c_2}{m_2}-\dfrac{g_3d_3}{m_2(g_3+d_3s)}-s & \dfrac{c_2}{m_2}+\dfrac{g_2d_2}{m_2(g_2+d_2s)} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \dfrac{c_2}{m_1} & -\dfrac{c_2+c_1}{m_1}-\dfrac{g_2d_2}{m_1(g_2+d_2s)}-s
\end{bmatrix} \qquad (68)
$$

$$
\left[A_{12}-A_{13}\left[A_{33}-sI_{n\times n}\right]^{-1}A_{32}\right]\left[sI_{n\times n}\right]^{-1}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\frac{-(k_n+g_n)(g_n+d_ns)+g_n^2}{m_n(g_n+d_ns)s} & \frac{k_n}{m_ns} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\frac{(k_n+g_n)(g_n+d_ns)-g_n^2}{m_{n-1}(g_n+d_ns)s} & \frac{-(k_n+k_{n-1}+g_{n-1})(g_{n-1}+d_{n-1}s)+g_{n-1}^2}{m_{n-1}(g_{n-1}+d_{n-1}s)s} & \frac{k_{n-1}}{m_{n-1}s} & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \frac{(k_{n-1}+g_{n-1})(g_{n-1}+d_{n-1}s)-g_{n-1}^2}{m_{n-2}(g_{n-1}+d_{n-1}s)s} & \frac{-(k_{n-1}+k_{n-2}+g_{n-2})(g_{n-2}+d_{n-2}s)+g_{n-2}^2}{m_{n-2}(g_{n-2}+d_{n-2}s)s} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-(k_3+k_2+g_2)(g_2+d_2s)+g_2^2}{m_2(g_2+d_2s)s} & \frac{k_2}{m_2s} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{(k_2+g_2)(g_2+d_2s)-g_2^2}{m_1(g_2+d_2s)s} & \frac{-(k_2+k_1+g_1)(g_1+d_2s)+g_1^2}{m_1(g_1+d_1s)s}
\end{bmatrix}
\tag{69}
$$

$$
s^n\left|A_{11}-sI_{n\times n}-A_{13}\left[A_{33}-sI_{n\times n}\right]^{-1}A_{31}+\frac{1}{s}\left[A_{12}-A_{13}\left[A_{33}-sI_{n\times n}\right]^{-1}A_{32}\right]\right|
$$

$$
=\begin{vmatrix}
\frac{g_n^2-(k_n+g_n+c_ns)(g_n+d_ns)}{m_n(g_n+d_ns)}-s^2 & \frac{(k_n+c_ns)(g_n+d_ns)+g_nd_ns}{m_n(g_n+d_ns)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\frac{(k_n+g_n+c_ns)(g_n+d_ns)-g_n^2}{m_{n-1}(g_n+d_ns)} & \frac{g_{n-1}^2-\{(k_n+k_{n-1}+g_{n-1})+(c_n+c_{n-1})s\}(g_{n-1}+d_{n-1}s)}{m_{n-1}(g_{n-1}+d_{n-1}s)}-\frac{g_nd_ns}{m_{n-1}(g_n+d_ns)}-s^2 & \frac{(k_{n-1}+c_{n-1}s)(g_{n-1}+d_{n-1}s)+g_{n-1}d_{n-1}s}{m_{n-1}(g_{n-1}+d_{n-1}s)} & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \frac{(k_{n-1}+g_{n-1}+c_{n-1}s)(g_{n-1}+d_{n-1}s)-g_{n-1}^2}{m_{n-2}(g_{n-1}+d_{n-1}s)} & \frac{g_{n-2}^2-\{(k_{n-1}+k_{n-2}+g_{n-2})+(c_{n-1}+c_{n-2})s\}(g_{n-2}+d_{n-2}s)}{m_{n-2}(g_{n-2}+d_{n-2}s)}-\frac{g_{n-1}d_{n-1}s}{m_{n-2}(g_{n-1}+d_{n-1}s)}-s^2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{g_2^2-\{(k_3+k_2+g_2)+(c_3+c_2)s\}(g_2+d_2s)}{m_2(g_2+d_2s)}-\frac{g_3d_3s}{m_2(g_3+d_3s)}-s^2 & \frac{(k_2+c_2s)(g_2+d_2s)s+g_2d_2s}{m_2(g_2+d_2s)} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{(k_2+g_2+c_2s)(g_2+d_2s)-g_2^2}{m_1(g_2+d_2s)} & \frac{g_1^2-\{(k_2+k_1+g_1)+(c_2+c_1)s\}(g_1+d_2s)}{m_1(g_1+d_1s)}-\frac{g_2d_2s}{m_1(g_2+d_2s)}-s^2
\end{vmatrix}
\tag{70}
$$

これまでの研究（池田，2021；池田・松本，2022；池田・松本，2023；松本・池田，2022：松本・池田，2023；Ikeda，2021；Ikeda and Matsumoto, 2022；Ikeda and Matsumoto，2024）から，定数項と s の 1 次の項だけを考慮すれば，統一式が得られることが分かっている．すわわち，統一式を得る目的ならば，式(70)で s の二乗は無視することが可能である．その行列式を a とおく．

$$
a=\begin{vmatrix}
\frac{g_n^2-(k_n+g_n+c_ns)(g_n+d_ns)}{m_n(g_n+d_ns)} & \frac{(k_n+c_ns)(g_n+d_ns)+g_nd_ns}{m_n(g_n+d_ns)} \\
\frac{(k_n+g_n+c_ns)(g_n+d_ns)-g_n^2}{m_{n-1}(g_n+d_ns)} & \frac{g_{n-1}^2-\{(k_n+k_{n-1}+g_{n-1})+(c_n+c_{n-1})s\}(g_{n-1}+d_{n-1}s)}{m_{n-1}(g_{n-1}+d_{n-1}s)}-\frac{g_nd_ns}{m_{n-1}(g_n+d_ns)} \\
0 & \frac{(k_{n-1}+g_{n-1}+c_{n-1}s)(g_{n-1}+d_{n-1}s)-g_{n-1}^2}{m_{n-2}(g_{n-1}+d_{n-1}s)} \\
\vdots & \vdots \\
0 & 0 \\
0 & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{array}{cc}
0 & \cdots \\
\dfrac{(k_{n-1}+c_{n-1}s)(g_{n-1}+d_{n-1}s)+g_{n-1}d_{n-1}s}{m_{n-1}(g_{n-1}+d_{n-1}s)} & \cdots \\
\dfrac{g_{n-2}^2-\{(k_{n-1}+k_{n-2}+g_{n-2})+(c_{n-1}+c_{n-2})s\}(g_{n-2}+d_{n-2}s)}{m_{n-2}(g_{n-2}+d_{n-2}s)}-\dfrac{g_{n-1}d_{n-1}s}{m_{n-2}(g_{n-1}+d_{n-1}s)} & \cdots \\
\vdots & \ddots \\
0 & \cdots \\
0 & \cdots
\end{array}
$$

$$
\left.
\begin{array}{cc}
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
\dfrac{g_2^2-\{(k_3+k_2+g_2)+(c_3+c_2)s\}(g_2+d_2s)}{m_2(g_2+d_2s)}-\dfrac{g_3d_3s}{m_2(g_3+d_3s)} & \dfrac{(k_2+c_2s)(g_2+d_2s)s+g_2d_2s}{m_2(g_2+d_2s)} \\
\dfrac{(k_2+g_2+c_2s)(g_2+d_2s)-g_2^2}{m_1(g_2+d_2s)} & \dfrac{g_1^2-\{(k_2+k_1+g_1)+(c_2+c_1)s\}(g_1+d_2s)}{m_1(g_1+d_1s)}-\dfrac{g_2d_2s}{m_1(g_2+d_2s)}
\end{array}
\right|
\tag{71}
$$

ある行に他行の定数倍を加えても行列式は変わらないから，式(71)で第 1 行に m_n/m_{n-1} を乗じて，第 2 行に加えると，行列式の第 2 行第 1 列の要素をゼロにすることができる．

$$
a=\left|
\begin{array}{ccc}
\dfrac{g_n^2-(k_n+g_n+c_ns)(g_n+d_ns)}{m_n(g_n+d_ns)} & \dfrac{(k_n+c_ns)(g_n+d_ns)+g_nd_ns}{m_n(g_n+d_ns)} & 0 \\
0 & \dfrac{g_{n-1}^2-(k_{n-1}+g_{n-1}+c_{n-1}s)(g_{n-1}+d_{n-1}s)}{m_{n-1}(g_{n-1}+d_{n-1}s)} & \dfrac{(k_{n-1}+c_{n-1}s)(g_{n-1}+d_{n-1}s)+g_{n-1}d_{n-1}s}{m_{n-1}(g_{n-1}+d_{n-1}s)} \\
0 & \dfrac{(k_{n-1}+g_{n-1}+c_{n-1}s)(g_{n-1}+d_{n-1}s)-g_{n-1}^2}{m_{n-2}(g_{n-1}+d_{n-1}s)} & \dfrac{g_{n-2}^2-\{(k_{n-1}+k_{n-2}+g_{n-2})+(c_{n-1}+c_{n-2})s\}(g_{n-2}+d_{n-2}s)}{m_{n-2}(g_{n-2}+d_{n-2}s)}-\dfrac{g_{n-1}d_{n-1}s}{m_{n-2}(g_{n-1}+d_{n-1}s)} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{array}
\right.
$$

$$
\left.
\begin{array}{cc}
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
\dfrac{g_2^2-\{(k_3+k_2+g_2)+(c_3+c_2)s\}(g_2+d_2s)}{m_2(g_2+d_2s)}-\dfrac{g_3d_3s}{m_2(g_3+d_3s)} & \dfrac{(k_2+c_2s)(g_2+d_2s)s+g_2d_2s}{m_2(g_2+d_2s)} \\
\dfrac{(k_2+g_2+c_2s)(g_2+d_2s)-g_2^2}{m_1(g_2+d_2s)} & \dfrac{g_1^2-\{(k_2+k_1+g_1)+(c_2+c_1)s\}(g_1+d_2s)}{m_1(g_1+d_1s)}-\dfrac{g_2d_2s}{m_1(g_2+d_2s)}
\end{array}
\right|
\tag{72}
$$

上式で第 2 行に m_{n-1}/m_{n-2} を乗じて第 3 行に加える．

$$
a=\left|
\begin{array}{ccc}
\dfrac{g_n^2-(k_n+g_n+c_ns)(g_n+d_ns)}{m_n(g_n+d_ns)} & \dfrac{(k_n+c_ns)(g_n+d_ns)+g_nd_ns}{m_n(g_n+d_ns)} & 0 \\
0 & \dfrac{g_{n-1}^2-(k_{n-1}+g_{n-1}+c_{n-1}s)(g_{n-1}+d_{n-1}s)}{m_{n-1}(g_{n-1}+d_{n-1}s)} & \dfrac{(k_{n-1}+c_{n-1}s)(g_{n-1}+d_{n-1}s)+g_{n-1}d_{n-1}s}{m_{n-1}(g_{n-1}+d_{n-1}s)} \\
0 & 0 & \dfrac{g_{n-2}^2-(k_{n-2}+g_{n-2}+c_{n-2}s)(g_{n-2}+d_{n-2}s)}{m_{n-2}(g_{n-2}+d_{n-2}s)} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{array}{cc}
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
\dfrac{g_2^2-\{(k_3+k_2+g_2)+(c_3+c_2)s\}(g_2+d_2s)}{m_2(g_2+d_2s)}-\dfrac{g_3d_3s}{m_2(g_3+d_3s)} & \dfrac{(k_2+c_2s)(g_2+d_2s)s+g_2d_2s}{m_2(g_2+d_2s)} \\
\dfrac{(k_2+g_2+c_2s)(g_2+d_2s)-g_2^2}{m_1(g_2+d_2s)} & \dfrac{g_1^2-\{(k_2+k_1+g_1)+(c_2+c_1)s\}(g_1+d_2s)}{m_1(g_1+d_1s)}-\dfrac{g_2d_2s}{m_1(g_2+d_2s)}
\end{array}\right| \tag{73}
$$

同様の操作を第 n 行まで順次繰り返すと，式(72)は

$$
a=\left|\begin{array}{cccc}
\dfrac{g_n^2-(k_n+g_n+c_ns)(g_n+d_ns)}{m_n(g_n+d_ns)} & \dfrac{(k_n+c_ns)(g_n+d_ns)+g_nd_ns}{m_n(g_n+d_ns)} & 0 & \\
0 & \dfrac{g_{n-1}^2-(k_{n-1}+g_{n-1}+c_{n-1}s)(g_{n-1}+d_{n-1}s)}{m_{n-1}(g_{n-1}+d_{n-1}s)} & \dfrac{(k_{n-1}+c_{n-1}s)(g_{n-1}+d_{n-1}s)+g_{n-1}d_{n-1}s}{m_{n-1}(g_{n-1}+d_{n-1}s)} & \cdots \\
0 & 0 & \dfrac{g_{n-2}^2-(k_{n-2}+g_{n-2}+c_{n-2}s)(g_{n-2}+d_{n-2}s)}{m_{n-2}(g_{n-2}+d_{n-2}s)} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0. & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots
\end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{ccc}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\dfrac{g_3^2-(k_3+g_3+c_3s)(g_3+d_3s)}{m_3(g_3+d_3s)} & \dfrac{(k_3+c_3s)(g_3+d_3s)+g_3d_3s}{m_3(g_3+d_3s)} & 0 \\
0 & \dfrac{g_2^2-(k_2+g_2+c_2s)(g_2+d_2s)}{m_2(g_2+d_2s)} & \dfrac{(k_2+c_2s)(g_2+d_2s)+g_2d_2s}{m_2(g_2+d_2s)} \\
0 & 0 & \dfrac{g_1^2-(k_1+g_1+c_1s)(g_1+d_1s)}{m_1(g_1+d_1s)}
\end{array}\right| \tag{74}
$$

となる．

の上三角の行列式となる．したがって，上式の行列式は対角成分の掛け算で表現できる．

$$
a=\prod_{i=1}^{n}\frac{g_i^2-(k_i+g_i+c_is)(g_i+d_is)}{m_i(g_i+d_is)} \tag{75}
$$

式(60)を考慮すると

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{g_i}{d_i}+s\right)\frac{g_i^2-(k_i+g_i+c_is)(g_i+d_is)}{m_i(g_i+d_is)} \\
&=\prod_{i=1}^{n}\frac{-k_ig_i-(g_ic_i+k_id_i+g_id_i)s-c_id_is^2}{d_im_i}
\end{aligned} \tag{76}
$$

が得られるため，この分子で s の二乗も無視できる．

$$
\prod_{i=1}^{n}\frac{-k_ig_i-(g_ic_i+k_id_i+g_id_i)s}{d_im_i} \tag{77}
$$

式(77)から，状態方程式(48)の特性方程式で，s の1次の項は，

$$
(-1)^n\prod_{j=1}^{n}\frac{k_jg_j}{d_jm_j}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{c_i+d_i}{k_i}+\frac{d_i}{g_i}\right) \tag{78}
$$

定数項は，

$$
(-1)^n\prod_{j=1}^{n}\frac{k_jg_j}{d_jm_j} \tag{79}
$$

となる．

3.3 制御目標となる特性方程式

2.2 節で示した1質点系では，制御目標となる特性方程式は式(6)である．多質点系への適用を考えて，式(6)で $h_1\to h_i$ と $h_{1*}\to h_{i*}$ の置き換えをする．その結果，h_i は建物の i 次卓越振動モードの減衰比，h_{i*} は対応するダンパのモードの減衰比となる．

n 質点系で制御目標となる特性方程式は，

$$
\prod_{i=1}^{n}[s^3+(2h_i+h_{i*})\omega_is^2+(1+2h_ih_{i*})\omega_i^2s+h_{i*}\omega_i^3]=0 \tag{80}
$$

となるから，s の1次の項は，

$$
\prod_{j=1}^{n}(h_{j*}\omega_j^3)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{h_{i*}\omega_i}+\frac{2h_i}{\omega_i}\right) \tag{81}
$$

定数項は，

$$
\prod_{j=1}^{n}(h_{j*}\omega_j^3) \tag{82}
$$

となる．

3.4 極配置法と統一式

極配置法で，s の 1 次式(78)を式(81)に，定数項(79)を式(82)に一致させる条件は，

$$(-1)^n \prod_{j=1}^{n} \frac{k_j g_j}{d_j m_j} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{c_i + d_i}{k_i} + \frac{d_i}{g_i}\right) = \prod_{j=1}^{n} (h_{j*}\omega_j^3) \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{h_{i*}\omega_i} + \frac{2h_i}{\omega_i}\right) \tag{83}$$

$$(-1)^n \prod_{j=1}^{n} \frac{k_j g_j}{d_j m_j} = \prod_{j=1}^{n} (h_{j*}\omega_j^3) \tag{84}$$

である．式(83)を式(84)で辺々除すと，統一式

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{c_i + d_i}{k_i} + \frac{d_i}{g_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{h_{i*}\omega_i} + \frac{2h_i}{\omega_i}\right) \tag{85}$$

が得られる．上式で $d_i = 0$ と $h_{i*} \to \infty$ を考えると，Voigt モデルで得られた統一式（池田・松本，2022；松本・池田，2023）に一致する．式(85)は，これまでに得られた建物振動を支配する式をより一般的に表現している．

4. 多質点系モデルにおける最小剛性比の適用

2.5節で明らかになった1質点系モデルにおける最小剛性比を，Fig.7の多質点系に取り入れることを考える．式(85)の左辺は各層の値の総和を，右辺は各モードの値の総和を意味するが，左辺では1つの層のみを取り出し，右辺では1次モードのみを取り出して

$$\frac{c_i + d_i}{k_i} + \frac{d_i}{g_i} = \frac{1}{h_{1*}\omega_1} + \frac{2h_1}{\omega_1} \tag{86}$$

とする．上式は式(10)と同じ形式であるから，式(12)，式(13)および式(9)から

$$h_{1*} = \frac{2\left(h_1 - h_{01}\dfrac{\omega_{01}}{\omega_1}\right)}{\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_{01}}\right)^2 - 1} \tag{87}$$

$$\mu_i = \frac{g_i}{k_i} = (2h_1 h_{1*} + 1)\left(\frac{\omega_1}{\omega_{01}}\right)^2 - 2h_{1*}h_{01}\left(\frac{\omega_1}{\omega_{01}}\right)^3 - 1 \tag{88}$$

$$\tau_i = \frac{d_i}{g_i} = \frac{1}{h_{1*}\dfrac{\omega_1^3}{\omega_{01}^2}} = \frac{1}{h_{1*}\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_{01}}\right)^2 \omega_1} \tag{89}$$

が得られる．ここでは，ω_{01} と h_{01} は ω_0 と h_1 の置き換えであり，ダンパ設置前の建物の 1 次モードの固有円振動数と減衰比にそれぞれ対応する．これに対応させて，ω_1 と h_1 はダンパ設置後の 1 次モードの固有円振動と減衰比とする．h_{1*} は 1 次モードに対応するダンパの見かけの減衰比となり，μ_i と τ_i は第 i 層の剛性比と緩和時間となる．層の最小剛性比には，近似式(33)を置き換えた次式を用いる．

$$\frac{\omega_1}{\omega_{01}} = \sqrt{2h_1 + 1} \tag{90}$$

ダンパ設置時に目標とする 1 次モード減衰比 h_1 が与えられると，式(90)から最小剛性比 ω_1 / ω_{01} がはじめに得られる．ダンパ設置前の h_{01} は与えられているから，次に式(87)から h_{1*} が得られる．最後に，式(88)と式(89)から μ_i と τ_i が決まる．式から明らかなように，各層の h_{1*}，μ_i および τ_i は実際にはそれぞれ一定である．

5. 多質点モデルにおける最小剛性比の検証

第 4 章で示した多質点系モデルにおける最小剛性比の計算には，第 2 章の 1 質点系モデルの解を利用したために仮定が含まれている．そこでダンパ設置前の建物を 10 質点 10 自由度系（10-DOF）1 本棒せん断振動型モデルとして，数値解析で第 4 章の考え方の妥当性を確認する．

5.1 数値解析モデル

Table 1に10-DOFモデルの各質点の質量，各層のせん断剛性と減衰係数を示す．減衰係数は，内部粘性型（剛性比例型）減衰で1次モードに対して1%を与えた場合に対応する値である．建物モデルの総質量は 5000×10^3kg（5000ton）である．Table 2に固有振動数とモード減衰比を，Fig.8に1次から3次までのモード形を刺激関数で示す．

Table 1 Structural parameters for 10-DOF model

Lumped mass No.	Mass m_i (10^3kg)	Story	Stiffness k_i (MN/m)	Damping coefficient c_i (MNs/m)
10	600	10	318.7	1.090
9	450	9	367.7	1.257
8	450	8	441.3	1.509
7	450	7	514.8	1.760
6	470	6	588.4	2.012
5	470	5	656.5	2.347
4	490	4	784.5	2.682
3	510	3	882.6	3.018
2	560	2	980.7	3.353
1	550	1	1078.7	3.688

Table 2 Natural frequencies and modal damping ratiosof 10-DOF model without dampers

Mode No.	Natural frequency (Hz)	Damping ratio (%)
1	0.931	1.00
2	2.389	2.57
3	3.887	4.18
4	5.344	5.74
5	6.686	7.18
6	7.856	8.44
7	8.966	9.63
8	10.01	10.76
9	11.19	12.02
10	12.45	13.38

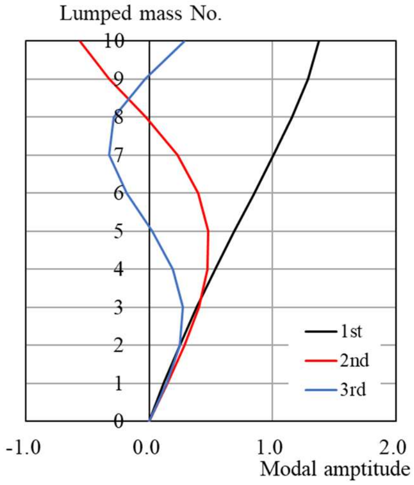


Fig.8 Mode shapes of 10-DOF building model

Table 3 Optimized parameters for dampers as Maxwell models

Story	Joint stiffness g_i (MN/m)	Damper's damping coefficient d_i (MNs/m)
10	125.6	17.98
9	145.0	20.75
8	174.0	24.90
7	203.0	29.05
6	231.9	33.19
5	270.6	38.73
4	309.3	44.26
3	347.9	49.79
2	386.6	55.32
1	425.2	60.86

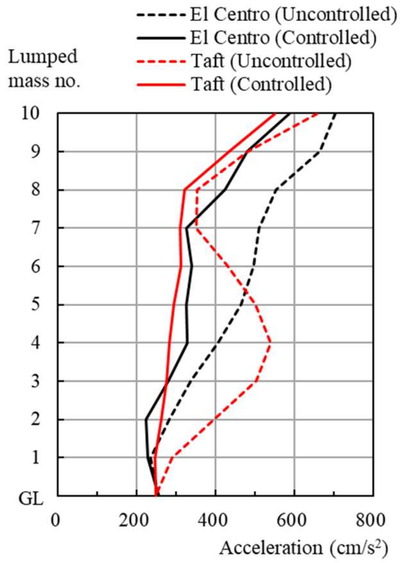
制御時の目標1次モード減衰比を10%に設定した場合，式(90)から得られる1次モードの振動数比は1.095であり，これに対応するダンパ設置後の1次モードの振動数は1.020Hzである．ダンパ減衰比 h_{1*} は0.9087，最小剛性比 μ_i は0.3942，緩和時間 τ_i は0.1431となる．最小剛性比と緩和時間は全ダンパでそれぞれ等しい．これに対応するMaxwellモデルの値（接合部の剛性 g_i とダンパのダッシュポットの減衰係数 d_i）をTable 3に示す．

5.2 固有値解析による検証

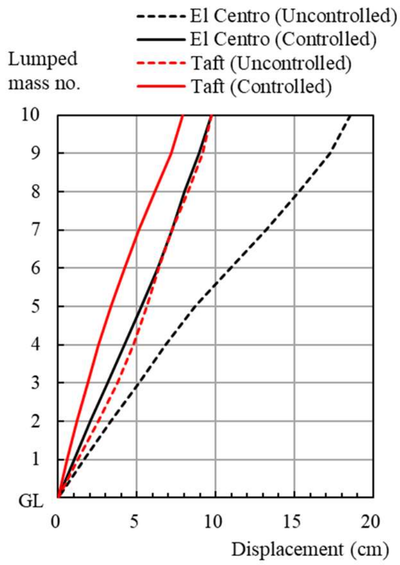
Table 4には，Table 2とTable 3のパラメータから得られる固有値解析結果を示す．最小剛性比を与える1次モードの振動数比を，式(90)の近似式から得た場合（1.095）と，数値解析により厳密に求めた場合（1.090）を比較している．これら2つで固有値解析結果はほとんど一致しており，いずれの場合も制御時の目標1次モード減衰比10%が達成されている．Table 2と比較すると，目標に掲げていない2～4次モードでも付加減衰効果を得ている．

Table 4 Natural frequencies and modal damping ratios of 10-DOF model with dampers

Mode No.	Natural frequency (Hz) Exact	Natural frequency (Hz) Approx.	Damping ratio (%) Exact	Damping ratio (%) Approx.
1	1.014	1.020	10.0	10.0
2	2.779	2.784	7.7	7.5
3	4.569	4.573	7.1	6.9
4	6.301	6.305	7.5	7.4
5	7.893	7.897	8.2	8.1
6	9.280	9.284	8.9	8.8
7	10.60	10.60	9.7	9.6
8	11.84	11.84	10.5	10.4
9	13.23	13.23	11.4	11.4
10	14.73	14.73	12.4	12.4

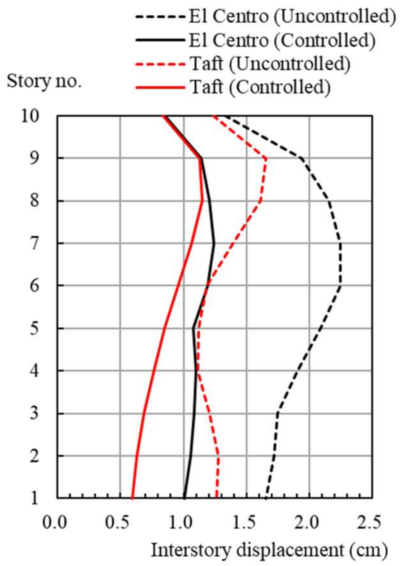


(a) Acceleration

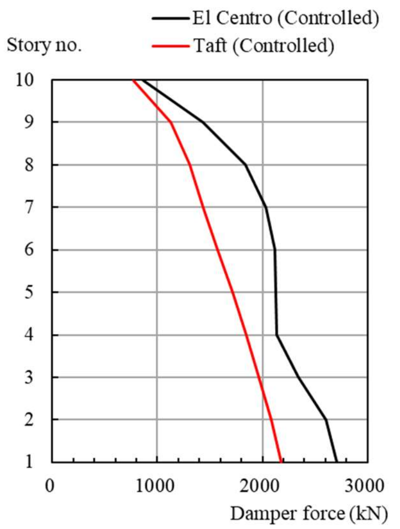


(b) Displacement to the base

Fig.9 Peak distributions of acceleration and displacement under two excitations



(c) Interstory displacement



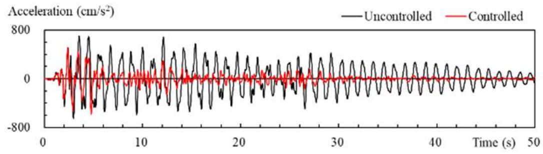
(d) Damper force

Fig.10 Peak distributions of interstory displacement and damper force under two excitations

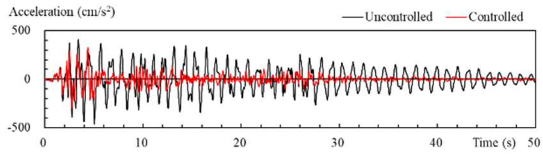
5.3 地震応答解析

振動制御時の固有振動数とモード減衰比を設計目標として指定する極配置法では，地震時の建物応答，ダンパのストローク，ダンパの減衰力などを把握することはできない．地震動特性とは独立にダンパのパラメータを扱える点は，特に設計の初期段階で長所となるが，現実には建物とダンパの応答は地震動特性に依存する．そのため，地震応答解析を行った．

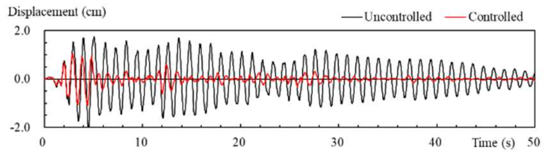
入力地震動としては，1940年Imperial Valley地震で観測されたEl Centro波（NS成分）と1952年Kern County地震で観測されたTaft波（EW成分）を用いた．極配置法が線形または等価線形のモデルに適用する制御理論であることから，地震動の振幅は最大速度が25cm/sになるように規準化した．この速度に対応する最大加速度は，El Centro波で255.0cm/s^2，Taft波で248.4cm/s^{2}である．Fig.9に加速度と変位の最大値分布を，Fig.10 に層間変位とダンパ減衰力の最大値分布を示す．Fig.11には，El Centro波入力時の質点10（最上質点）と質点5の加速度波形，第1層と第5層の層間変位，およびこれらの層のダンパ減衰力を示す．Fig.12は，層間変位，ダンパ接合部材の変位およびダンパ自体の変位を比較している．これらの応答解析から，構造物の応答が実用可能な減衰力で低減されていることが確認できる．



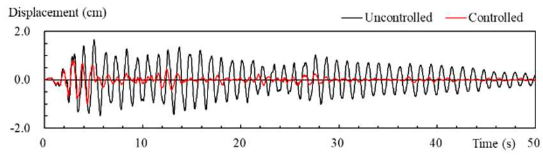
(a) Acceleration at Lumped mass no.10



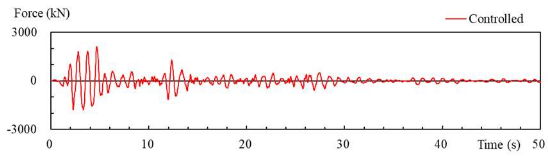
(b) Acceleration at Lumped mass no.5



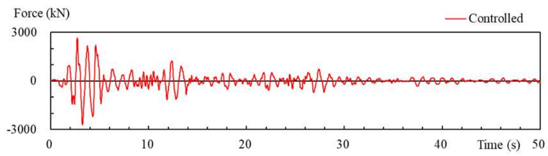
(c) Interstory displacement in the fifth story



(d) Interstory displacement in the first story

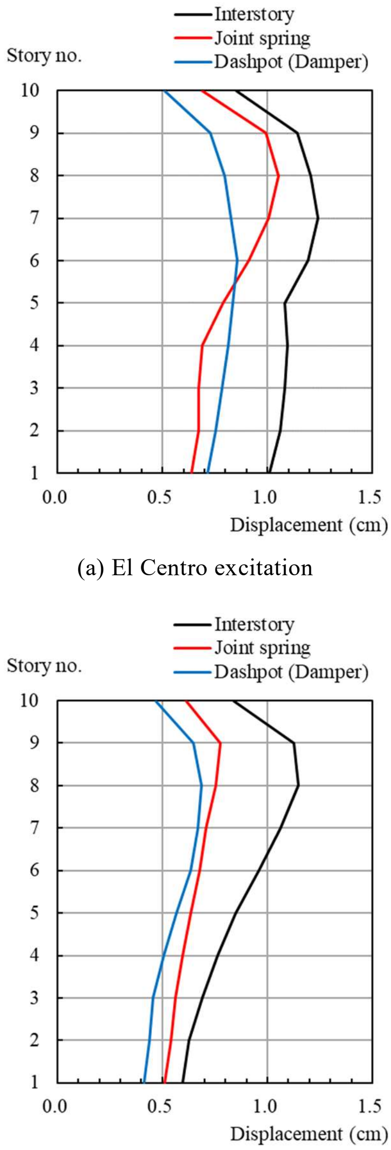


(e) Damper force in the fifth story



(f) Damper force in the first story

Fig.11 Time-history responses under El Centro excitation



(a) El Centro excitation

(b) Taft excitation

Fig.12 Peak displacements of interstories and Maxwell models under two excitations

6. まとめ

本論文は，層間粘性ダンパをMaxwellモデルとして組み込んだ，せん断振動型建物モデルに極配置法を適用した．1質点系モデルの基本特性を再考した後，多質点系1本棒モデルでモデルパラメータと制御効果の関係を支配する式を誘導して，過去の研究で得られている建物振動を統一表現する式の一般化を進めた．最後に，1質点系モデルで発見したダンパ接合部の最小剛性比を，多質点系モデルに応用する方法を示した．主な成果は次の3項目に整理される．

1) Maxwellモデルをもつ1質点系減衰付き建物モデルに極配置法を適用して，ダンパ設置後の建物の固有振動数の変化が建物とダンパのモード減衰比に及ぼす影響を，実現可能なパラメータの領域で新たに考察した．その結果，同一の減衰効果を得る接合部材ばねに最小値が存在することを発見した．さらに，極配置法によるダンパの最適減衰と定点理論によるダンパの最適減衰の関係を初めて明らかにし，2つの最適減衰の値が整合していることを確認した．
2) 多質点系1本棒Maxwellモデルに極配置法を適用して，モデルパラメータと制御効果の関係を支配する式を閉じた形で示した．これは，これまでの研究で得られた統一式をさらに一般化している．この式は，Maxwellモデルにおいても，制御目標がダンパを表現するパラメータを拘束する現象があることを意味している．
3) 1質点系モデルで把握した接合部材ばねに最小値が存在する現象を，多質点系モデルに応用した．ダンパによる効果を1次モード減衰比として設定すると，ダンパを表現するダッシュポットと接合部の剛性の値を得ることが可能で，しかも手計算でダンパを設計できる提案になっている．その有効性を，Maxwellモデルの固有値解析と地震応答解析で示した．

謝辞

本研究は，独立行政法人・日本学術振興会の令和5年度科学研究費助成事業（基盤研究（C）（一般），課題番号：23K04344，研究代表者：池田芳樹）の助成を受けました．ここに記して謝意を表します．

参考文献

池田芳樹（2021）：建物の基礎免震，中間層免震および同調型マスダンパによる制振の統一的理解，京都大学防災研究所年報，第64号B，pp.24-42.

池田芳樹・松本祐輝（2022）：建物のパッシブ振動制御の極配置法に基づく統一的理解，京都大学防災研究所年報，第65号B，pp.14-29.

池田芳樹・松本祐輝（2023）：極配置法に基づく建物振動の統一的理解の連結制振への拡張，京都大学防災研究所年報，第66号B，pp.42-58.

池田芳樹（2024）：極配置法に基づくMaxwellモデルの基本特性の解析的表現と振動制御における制約，令和5年度京都大学防災研究所研究発表講演会，講演番号A103，京都大学防災研究所HP，2頁．

石井正人・北村春幸・和田章・笠井和彦（2000）：粘弾性型制振部材付き架構のモデル化に関する検討，日本建築学会構造系論文集，第531号，pp. 55-62.

石垣秀典・石丸辰治（2005）：マックスウェルモデルで模擬されるパッシブ型制震構造物の性能評価法，日本建築学会構造系論文集，第597号，pp.59-61.
石田雅利・小堀鐸二・丹羽直幹・畑田朋彦（1994）：Maxwell型モデルを含む振動系の応答解析法（その２）数値安定性と精度の検討，日本建築学会大会学術講演梗概集，B構造I，pp.647-648.
笠井和彦・大熊潔（2001）：Kelvin体による線形粘弾性ダンパー簡易モデル化と精度に関する考察（その１）弾性・弾塑性フレームをもつ一質点制振構造の場合，日本建築学会構造系論文集，第550号，pp.71-78.
笠井和彦・大熊潔（2004）：振動数に依存する制振構造の等価周期・等価減衰の評価法とその精度－弾性架構と粘弾性ダンパーやオイルダンパーをもつ一質点構造における全体減衰系への置換法－，日本建築学会構造系論文集，第580号，pp.51-59.
白井和貴・蔭山満・吉田治・佐野剛志（2008）：定点理論に基づく層間ダンパーの最適減衰設計に関する基礎的検討，日本建築学会大会学術講演梗概集，B-2構造II，pp.575-576.
高橋雄司・曽田五月也（1998）：一般化マックスウェルモデルにより模擬される粘弾性ダンパーを有する構造物の応答解析方法，日本建築学会構造系論文集，第511号，pp.85-92.
畑田朋彦・小堀鐸二・石田雅利・丹羽直幹（1994）：Maxwell型モデルを含む振動系の応答解析法（その１）定式化と数値シミュレーション，日本建築学会大会学術講演梗概集，B構造I，pp.645-646.
松田敏（2011）：Maxwell型粘性ダンパーを有する構造物の統計的等価減衰定数に基づく最適設計，日本建築学会構造系論文集，第76巻，第667号，pp.1649-1657.
松本祐輝・池田芳樹（2022）：建物の基礎免震，中間層免震および同調型マスダンパによる制振の統一的理解，構造工学論文集（日本建築学会），Vol.68B，pp.367-375.
松本祐輝・池田芳樹（2023）：極配置法に基づく多質点１本棒せん断振動型建物モデルの支配方程式，構造工学論文集（日本建築学会），Vol.69B，pp.1-9.
Chang, K.C., Soong, T.T., Oh, S.T., Lai, M.L. (1995): Seismic behavior of steel frame with added viscoelastic damper, *J. Struct. Eng.*, Vol.121, No.10, pp.1418-1426.
Chen, Y.T., Chai, Y.H. (2011): Effects of brace stiffness on performance of structures with supplemental Maxwell model-based brace-damper systems. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, Vol.40, Issue 1, pp.75-92.
Fu, Y., Kasai, K. (1998): Comparative study of frame using viscoelastic and viscous dampers, *J. Struct. Eng.*, Vol.124, No.5, pp.513-522.
Hatada, T., Kobori, T., Ishida, M., Niwa, N. (2000): Dynamic analysis of structures with Maxwell model, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, Vol.29, Issue 2, pp.159-176.
Ikeda, Y. (2021): Fundamental equation based on pole allocation for interstory seismic isolation of buildings, *Struct. Cont. and Health Monitoring*, Vol.28, Issue 3, 19 pages.
Ikeda, Y., Matsumoto, Y. (2022): Unified description of passive vibration control for buildings based on pole allocation to three-degree-of-freedom model, *Struct. Cont. and Health Monitoring*, Vol.29, Issue 9, 17 pages.
Ikeda, Y., Matsumoto, Y. (2024): Pole allocation applied to two buildings connected by joint damper, *Shock and Vibration*, Vol.2024, Article ID 5363146, 25 Pages.
Li, C., Li, T., Ban, D., Ge., X. (2018): Equivalent damping of SDOF structure with Maxwell damper, *Earthquake Eng. Eng. Vibrat.*, Vol.17, Issue 3, pp.627-639.
Matsuda, S. (2012): Optimum design of Maxwell-type damper system based on stochastically equivalent damping Factor, *Proc. 15th World Conf. Earthquake Eng.*, ID:5554, 9 pages.
Ou, J.P., Long, X., Li., Q.S. (2007): Seismic response analysis of structures with velocity-dependent dampers. *J. Construct. Steel Res.*, Vol.63, Issue 5, pp. 628-638.
Palmeri, A., Ricciardelli, F., De Luca, A., Muscolino, G. (2003): State space formulation for linear viscoelastic system with memory, *J. Eng. Mech.*, Vol.129, No.7, pp.715-724.
Singh, M.P., Verma, N.P., Moreschi., L.M. (2003): Seismic analysis and design with Maxwell dampers, *J. Eng. Mech.*, Vol.129, No.3, pp.273-282.
Soong, T.T., Dargush, G.F. (1997): Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering, John Wiley & Sons, 356 pp.
Yamada, K. (2008): Dynamic characteristics of SDOF structure with Maxwell element. *J. Eng. Mech.*, Vol.134, No.5, pp.396-404.
Zambrano, A., Inaudi, J.A., Kelly, J.K. (1996): Modal coupling and accuracy of modal strain energy method, *J. Eng. Mech.*, Vol.122, No.7, pp.603-612.

（論文受理日：2024年6月21日）