

動径基底関数に基づく大気大循環モデルを用いた傾圧不安定波実験

Baroclinic Instability Experiments Using an Atmospheric General Circulation Model Based on Radial Basis Functions

小笠原宏司⁽¹⁾・榎本剛

Koji OGASAWARA⁽¹⁾ and Takeshi ENOMOTO

(1) 京都大学大学院理学研究科

(1) Graduate School of Science, Kyoto University, Japan

Synopsis

A primitive equation model using radial basis function generated finite differences (RBF-FD) was developed. The new model can use any quasi-uniform nodes because RBF-FD is a meshless method. In addition, RBF-FD can achieve a high-order convergence. A test case of baroclinic instability was used to evaluate the primitive equation model. The test case examines whether a new primitive equation model numerically converge to the solutions of the test case. In the test case, three norms of vorticity (2-norm, infinity-norm, and infinity norm of 2-norm of gradient) are used to check the convergence of vorticity field. The results show that the RBF-FD model approximately converge in 2-norm and infinity norm of 2-norm of gradient, but the infinity norm is smaller than the numerical converged solutions. The smaller infinity norm seems to be due to a Gibbs phenomenon in the reference solution or to a different formulation of hyper viscosity.

キーワード: 動径基底関数, プリミティブ方程式モデル, メッシュレス法

Keywords: radial basis functions, primitive equation model, meshless method

1. はじめに

Radial Basis Functions (RBF) を用いた球面上の偏微分方程式の解法 (RBF離散化手法) はメッシュレス法であり, 現行で用いられているスペクトル手法と同等の精度である (Flyer and Wright, 2006 ; Flyer and Wright, 2009) . しかしRBF離散化手法は時間積分の際に, 節点数を N とした時に計算量が $O(N^2)$ かかり, 大規模計算に適していない. そこでRBFを用いて生成された有限差分法 (RBF-generated Finite Difference (RBF-FD)) が大規模な計算に用いられている. RBF-FDは高次の代数的な収束が可能であり, メッシュレス法である. メッシュレス法は球面において準一様な節点配置を用いることができる. 準一様な節点配

置は節点間距離ができるだけ広く取られているため, CFL条件で制約されるタイムステップが長くとれる強みがある. RBF-FDを球面上の偏微分方程式に適用した研究事例は移流モデル (Fornberg and Lehto, 2011; Gunderman et al., 2020) と浅水波方程式モデル (Flyer et al. 2012; Tillenius et al. 2015) があり, 球面調和関数を適用したスペクトル変換法や不連続 Galerkin 法よりも少ない節点数で場を再現できることが報告されている. また大規模計算に向けた並列計算の研究も行われている (Bollig et al., 2012; Tillenius et al., 2015) .

2次元球面モデルに関する研究が行われている一方で, 3次元プリミティブ方程式モデルの研究は行われていない. そこで本研究では水平方向の離散化に

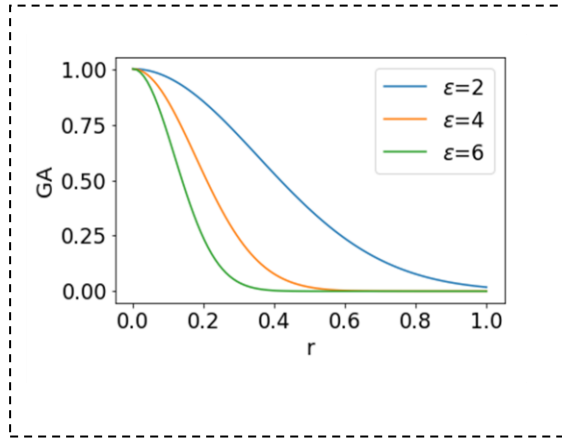


Fig. 1 Gaussian radial basis function (GARBF). The horizontal and vertical axes are the distance between nodes and the function value of GARBF, respectively.

RBF-FDを、鉛直方向には差分法を適用したプリミティブ方程式モデルを開発した。開発したモデルはPolvani et al. (2004)で提案された傾圧不安定のテストケースで性能が評価される。

本論文は第2節でRBF、第3節でプリミティブ方程式、第4節で時間積分と離散化についてまとめる。第5節ではテストケースについて述べ、第6節で実験結果の結果を示し、第7節スケーラビティーの検証を行う。第8節で結果を考察し、第9節で全体のまとめをする。

2. Radial Basis Functions

Radial basis functions (RBF) は距離のみに依存する関数であり、数種類提案されている。本研究ではGaussian RBF (GA) を用いた(Fig.1)。GAは以下の式で計算される。

$$\phi(r) = \exp(-\varepsilon^2 r^2)$$

r はユークリッド距離がよく用いられる。 ε は形状を決める任意のパラメーターである。 ε を大きくとるほど短い距離でおよそ0の値になる。

2.1 RBF内挿

RBF-FDはRBF内挿から導出されているため、RBF内挿の性質を多く引き継いでいる。そのためRBF内挿から順に説明する。RBF内挿は、格子点が不要なメッシュレス法に基づく内挿法である。内挿値は基底関数とするRBFと重みとの積で定義される。

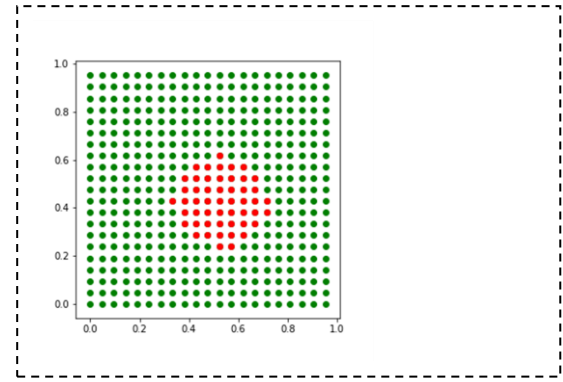


Fig. 2 Node selection in a unit plane. Green and red nodes are all nodes in the plane. The red nodes include the central node and its nearest 50 nodes.

$$f(x) \cong s(x) = \sum w_i \phi(r) \quad (1)$$

重み w_i は選点条件から決定される。選点条件とは、内挿する関数の値がわかっている点において内挿が厳密に成り立つという条件である。選点条件を課すと

$$f(x) = A\mathbf{w} \\ A_{ij} = \phi(\|x_i - x_j\|)$$

となり、連立方程式を $\mathbf{w}$ を決定する。決定した重みを(1)に用いると任意の点での内挿値が得られる。

GAでは ε を小さく取ることにより高精度な内挿ができるが、 ε を小さくし過ぎると条件数が高くなり、連立方程式を正確に解くことが困難になり、精度が落ちる。

2.2 RBF-FD

RBF-FDは微分を求める点と n 個の近傍の点からなる $n+1$ 個の点 (ステンシル) (Fig. 2) を用いて微分を計算する手法である。微分は重み c_i とデータの積の和で計算する (Wright and Fornberg, 2006)。

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cong \sum_{i=1}^{n+1} c_i f_i$$

重みは3つのステップで求める。1) 微分を求めたい点 (中心点) の近傍の n 点 (Fig. 2) を求める。2) 中心点と近傍の点における節点間距離から行列 $\mathbf{A}$ を計算する。3) 以下の連立方程式を $\mathbf{c}$ を決定する。

$$R\mathbf{c} = \mathbf{b}$$

$$R = \begin{bmatrix} A & e \\ e^T & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \frac{\partial A_1}{\partial x} \quad (2)$$

$$A_1 = [\phi_{1,1}, \dots, \phi_{1,n+1}, 1]$$

$$e = [1, 1, \dots, 1]^T$$

e は $n+1$ 個の1を持つ列ベクトルである。 A_1 の微分は連鎖律を用いて行う。RBFは距離で微分し、距離 r を x で微分する。行列やベクトルの末尾の1は精度向上のために入れ、計算される c の最後の要素 c_{n+1} は重みとして用いない。このように計算した n 個の要素を持つ c を行ベクトルとして積み上げて行列 D を作り、微分は以下のように計算する。

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cong D \underline{f}$$

$$\underline{f} = [f_1, f_2, \dots, f_N]$$

RBF-FDは線形安定性解析において、正の実固有値を持つ。この正の実固有値を数値積分の安定領域に押し込むために超粘性を偏微分方程式に加える必要がある (Fornberg and Lehto, 2011)。超粘性は式 (2) の微分を Δ^k に置き換えて計算する。方程式には以下のようにして加える。

$$\frac{df}{dt} = \text{左辺} + (-1)^{k+1} \frac{\gamma}{N^k} H(\underline{f})$$

H は超粘性、 γ は超粘性係数である。

3. プリミティブ方程式

プリミティブ方程式は予報方程式と診断方程式から構成される。予報方程式には運動方程式、連続の式、熱力学の式が含まれる。水平方向に球座標系、鉛直方向に地形に準拠した σ 座標をそれぞれ適用したプリミティブ方程式は以下の式で表される。

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\nabla_h \psi - R_d T \nabla_h \ln(p_s) - f \mathbf{k} \times \mathbf{U} \quad (3)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\kappa T}{\sigma p_s} \omega \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln p_s = - \int_0^1 \nabla_h \cdot (p_s \mathbf{U}) d\sigma \quad (5)$$

$$\psi = -R_d \int_0^\sigma T d(\ln \sigma) \quad (6)$$

$$\omega = \sigma \mathbf{U} \cdot \nabla_h p_s + \frac{\partial}{\partial t} \ln p_s \quad (7)$$

$$\mathbf{U} = [u_p, v_p]$$

$$\kappa = R_d / c_p$$

$$\sigma = p / p_s$$

u_p は東西風、 v_p は南北風、 ψ はジオポテンシャル、 p は気圧、 p_s は地表面気圧、 f はコリオリパラメータ、 R_d は乾燥大気的气体定数、 c_p は定圧比熱。ラグランジュ微分は以下の式で示される。球座標系の水平方向の成分には添字 h をつける。

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla_h + \dot{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma}$$

$$\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$$

4. 時間積分と離散化

本節では時間積分と離散化手法に関して述べる。

この節以降の添字のない水平方向の変数は全て絶対デカルト座標系の成分である。またベクトルと行列の表記に以下のルールを適用する。

ベクトルをBold体の小文字で表し

$$\mathbf{v} = (u, v, w)$$

節点ごとの変数を並べたベクトルは下線付きのBold体の小文字で表し

$$\underline{\mathbf{v}} = (v_1, \dots, v_N)$$

行列をBold体の大文字で示す。

4.1 時間積分

時間積分には4次精度の古典的Runge-Kutta法を適用した。

4.2 水平・鉛直方向の節点配置

水平方向には正20面体格子 (Fig. 3)を用いた。鉛直方向にはスタaggerド格子を適用する (Fig. 4)。層の中心をフルレベル、境界面をハーフレベルと定義する。層数を K とすると、天頂が $\sigma_{1/2}$ であり、地表面が $\sigma_{K+1/2}$ である。フルレベルには予報変数とジオポテンシャル、ハーフレベルには鉛直 σ 速度 $\dot{\sigma}$ が配置される。天頂と地表面における鉛直流の境界条件は $\dot{\sigma} = 0$ である。

フルレベルの σ はハーフレベルから以下の式で求められる。

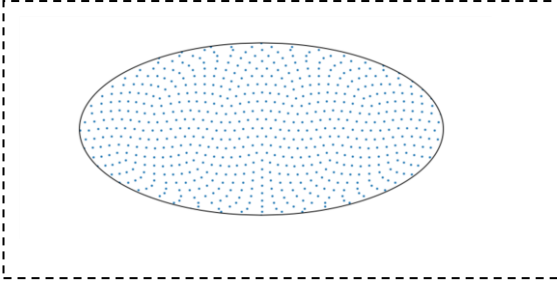


Fig. 3 Icosahedral nodes. The number of grids is 642. The Mollweide projection is applied.

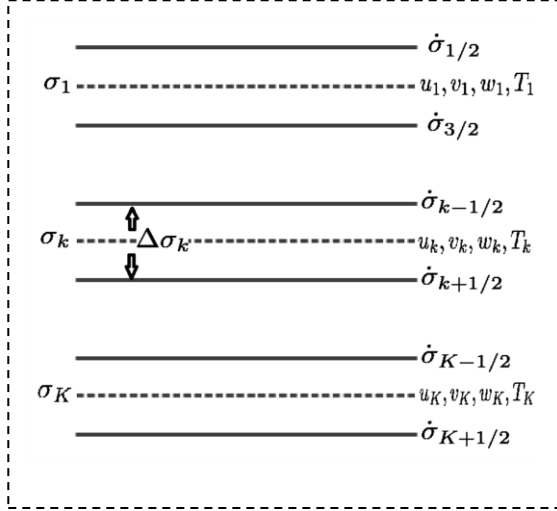


Fig. 4 Staggered grids in the vertical. Full and half levels are represented by broken and solid lines, respectively. Prognostic variables and diagnosed vertical velocity σ are placed on full and half levels, respectively.

$$\sigma_k^\kappa = \frac{1}{\kappa + 1} \frac{\sigma_{k+\frac{1}{2}}^{\kappa+1} - \sigma_{k-\frac{1}{2}}^{\kappa+1}}{\sigma_{k+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \sigma_{k-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}}$$

4.3 球面の接平面に対する投影

デカルト座標系におけるベクトルは球面の接平面にあるとは限らないため、投影手法を適用する。

球面投影には投影行列 $\mathbf{P}$ をベクトルの左側からかける。

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 - x^2 & -xy & -xz \\ -xy & 1 - y^2 & -yz \\ -xz & -yz & 1 - z^2 \end{bmatrix}$$

投影行列を用いると3次元デカルト座標系における勾配は以下の式で表される。

$$\nabla_h = \mathbf{P} \nabla_c \quad (8)$$

$$\nabla_c = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

発散も同様に投影行列を用いて計算できる。

RBFを用いて離散化するには投影行列を $\mathbf{b}$ 行列の計算に適用する (Flyer and Wright, 2009)。

$$\mathbf{P} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \phi = (\mathbf{x} \mathbf{x}^t \mathbf{x}_k - x_k) \frac{\partial \phi}{\partial r} = \mathbf{P} \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = (x, y, z)^t, \mathbf{x}_k = (x_k, y_k, z_k)^t$$

$$\mathbf{D}_x = (\mathbf{P} \mathbf{b})_x \mathbf{R}^{-1}$$

$$(\mathbf{P} \mathbf{b})_x = [(Pb)_{1,1}, (Pb)_{1,2}, (Pb)_{1,3}]$$

y成分は2行目、z成分は3行目の行ベクトルである。投影行列を適用した微分行列を用いて勾配と発散は以下のように計算される。

$$\nabla_h \cong [\mathbf{D}_x, \mathbf{D}_y, \mathbf{D}_z] \quad (9)$$

$$\nabla_h \cdot \mathbf{U} \cong \mathbf{D}_x \mathbf{u} + \mathbf{D}_y \mathbf{v} + \mathbf{D}_z \mathbf{w} \quad (10)$$

4.4 運動方程式の離散化

鉛直移流を除いた水平方向の運動方程式は3次元デカルト座標系を用いて計算することができる (Swarztrauber et al., 1998)。式 (9) を用いるとデカルト座標系における運動方程式は以下のように計算できる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -du + \mu x - \sigma \frac{\partial u}{\partial \sigma} \quad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -dv + \mu y - \sigma \frac{\partial v}{\partial \sigma}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -dw + \mu z - \sigma \frac{\partial w}{\partial \sigma}$$

$$\mu = x du + y dv + z dw$$

$$du = u(\mathbf{D}_x \mathbf{u}) + v(\mathbf{D}_y \mathbf{u}) + w(\mathbf{D}_z \mathbf{u}) + \mathbf{D}_x \psi$$

$$+ \text{RT}(\mathbf{D}_x \ln(\mathbf{p}_s)) + f(yw - zv) + \mathbf{I} \mathbf{u}$$

$$dv = u(\mathbf{D}_x \mathbf{v}) + v(\mathbf{D}_y \mathbf{v}) + w(\mathbf{D}_z \mathbf{v}) + \mathbf{D}_y \psi$$

$$+ \text{RT}(\mathbf{D}_y \ln(\mathbf{p}_s)) + f(uz - wx) + \mathbf{I} \mathbf{v}$$

$$dw = u(\mathbf{D}_x \mathbf{w}) + v(\mathbf{D}_y \mathbf{w}) + w(\mathbf{D}_z \mathbf{w}) + \mathbf{D}_z \psi$$

$$+ \text{RT}(\mathbf{D}_z \ln(\mathbf{p}_s)) + f(xv - uy) + \mathbf{I} \mathbf{w}$$

I に超粘性と場合によって拡散が適用される。

式 (11) における $-du + \mu x$ の項は投影技法の未定乗数法である。ベクトルに対して位置ベクトルとの内積を取り、 x とかけることで x 軸の非接平面成分 μx を計算でき、 dx から引くことで接平面成分を計算できる。

4.5 連続の式の離散化

連続の式 (5) の離散化は式 (10) を用いて以下の式で示される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p_s}{\partial t} &= -\sum_{k=1}^N D_k \Delta \sigma_k \\ G_k &= \nabla_\sigma \cdot \mathbf{u}_k + \mathbf{u}_k \cdot \nabla \ln(\mathbf{p}_s) \\ &= D_x \underline{u}_k + D_y \underline{v}_k + D_z \underline{w}_k + u_k D_x \ln \underline{p}_s \\ &\quad + v_k D_y \ln \underline{p}_s + w_k D_z \ln \underline{p}_s \end{aligned}$$

4.6 熱力学方程式の離散化

熱力学方程式 (4) は、式 (9) を用いて以下のように離散化する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= -u(D_x T) - v(D_y T) - w(D_z T) \\ &\quad + \dot{\sigma} \frac{\partial T}{\partial \sigma} + \frac{\kappa T}{\sigma p_s} \omega \end{aligned}$$

4.7 ω の計算

ω は式 (10) を用いて以下のようにになる。

$$\begin{aligned} \frac{RT_k}{p_k} \omega_k &= RT_k u_k \nabla \ln \underline{p}_s - \frac{C_p T_k}{\Delta \sigma_k} \left[A_{k+\frac{1}{2}} M_{k+1} + B_{k-\frac{1}{2}} M_{k-1} \right] \\ M_k &= \sum_{i=1}^k G_i \Delta \sigma_i \end{aligned}$$

4.8 鉛直 σ 速度

$\dot{\sigma}$ は水平発散の項をデカルト座標系に変更して計算する。

$$\dot{\sigma} = \sigma_K \left(\frac{\partial}{\partial t} \ln p_s \right) - M_K$$

4.9 鉛直移流項の離散化

運動量の鉛直移流はハーフレベルでの値の平均として、以下の式で計算する。

$$\dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \dot{\sigma}_{k+\frac{1}{2}} \frac{(u_{k+1} - u_k)}{\Delta \sigma_{k+1} + \Delta \sigma_k} + \dot{\sigma}_{k-\frac{1}{2}} \frac{(u_k - u_{k-1})}{\Delta \sigma_k + \Delta \sigma_{k-1}}$$

気温の鉛直移流は全ポテンシャルエンタルピーと全エントロフィーが保存するように以下の式で求める。

$$\dot{\sigma} \frac{\partial T}{\partial \sigma} = \left(\dot{\sigma}_{k+\frac{1}{2}} \left(T_{k+\frac{1}{2}} - T_k \right) + \dot{\sigma}_{k-\frac{1}{2}} \left(T_k - T_{k-\frac{1}{2}} \right) \right) \left(\frac{1}{\Delta \sigma} \right)$$

気温のハーフレベルの値は以下の式で得られる。

$$T_{k+\frac{1}{2}} = a_{k+\frac{1}{2}} T_k + b_{k+\frac{1}{2}} T_{k+1}$$

ここで a_k , b_k は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} a_k &= \left[\left(\frac{\sigma_{k+\frac{1}{2}}}{\sigma_k} \right)^\kappa - 1 \right] \left[1 - \left(\frac{\sigma_k}{\sigma_{k+1}} \right)^\kappa \right]^{-1} \\ b_{k+\frac{1}{2}} &= \left[1 - \left(\frac{\sigma_{k+\frac{1}{2}}}{\sigma_{k+1}} \right)^\kappa \right] \left[\left(\frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k} \right)^\kappa - 1 \right]^{-1} \end{aligned}$$

4.10 ジオポテンシャル

ジオポテンシャルは以下の式で計算される。

$$\begin{aligned} \underline{\psi} &= \psi_s + \mathbf{C} \hat{\mathbf{T}} \\ \hat{\mathbf{T}}_l &= T_k, k = 1, \dots, K \\ \mathbf{C}_{k,l} &= \begin{cases} 0, l < k \\ C_p A_{k+1/2}, l = k \\ C_p \left(A_{l+1/2} + B_{l-1/2} \right), l > k \end{cases} \\ A_{k+1/2} &= \left(\frac{\sigma_{k+\frac{1}{2}}}{\sigma_k} \right)^\kappa - 1 \\ B_{k-1/2} &= 1 - \left(\frac{\sigma_{k-\frac{1}{2}}}{\sigma_k} \right)^\kappa \end{aligned}$$

ψ_s は地表面のジオポテンシャルを表す。

5. テストケース

Polvani et al. (2004, 以下P04) はプリミティブ方程式モデルのバグの発見とモデル間比較を容易に行えるように設計されている。P04では12日間で成長する北半球中緯度ジェットにおける傾圧不安定波を計算する。積分時間で短期間で終わるためバグの修正が迅速に行え、時間・空間平均を用いないことでバグが平均に隠れることも防げる。バグを修正した後に、高精度なモデルで計算された数値的収束解と実験結

果を比較し、渦度場の再現性やモデルの特性を調べることができるため、本研究ではP04を用いた。

5.1 初期値と摂動

P04において定義されている初期値について簡潔に述べる。風速は南半球全域で0とし、北半球では南北風は0、東西風 u_p が以下の式で定義される。

$$u_p(\theta, \sigma) = u_0 \sin^3(\pi\mu^2)F(z)$$

$$F(z) = \frac{1}{2} \left[1 - \tan^3 \left(\frac{z-22}{5} \right) \right] \sin \left(\frac{\pi z}{30} \right)$$

$$\mu = \sin(\theta), z = -7.34 \log(\sigma)$$

θ は緯度である。気温場は以下の式で定義されている。

$$T(\theta, z) = \int \frac{\partial T(\theta, z)}{\partial \theta} d\theta + T_0(z)$$

$$\frac{\partial T(\theta, z)}{\partial \theta} = -\frac{7.41}{R_d} (af + 2u \tan \theta) \frac{\partial u}{\partial z}$$

$T_0(z)$ はアメリカ標準大気、 a は地球平均半径である。

傾圧不安定を引き起こすための摂動は全層の気温場に与えられる。摂動は以下の式で計算される。

$$T'(\lambda, \theta) = \text{sech}^2(3\lambda) \text{sech}^2\{6(\theta - \pi/4)\}$$

5.2 数値的収束解

本テストケースには厳密な解は示されていない。しかし、異なる離散化手法でも高解像度化によりおよそ等しい渦度場に収束することが報告されている。渦度は最下層の値が用いられ、以下のノルムが計算される。

$$\ell_2 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left\{ \int \int \zeta^2 \cos \theta d\theta d\varphi \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\ell_\infty = \max|\zeta|$$

$|\nabla \zeta|_\infty$: 渦度の勾配ノルムの2ノルムの最大値

これらの渦度ノルムの時間経過が高解像度化によりおよそ同じ時間変化に収束することを目指す。またノルムだけでは渦度場全体を把握できないので、決められた幅で描かれる等値線の概形が1つの形に収束することも収束判定に用いる。

5.3 モデルの実験設定

節点数は10242, 40962, 163842点の3通りを用いた。節点数に対して形状パラメータは4, 6, 10, 22を用

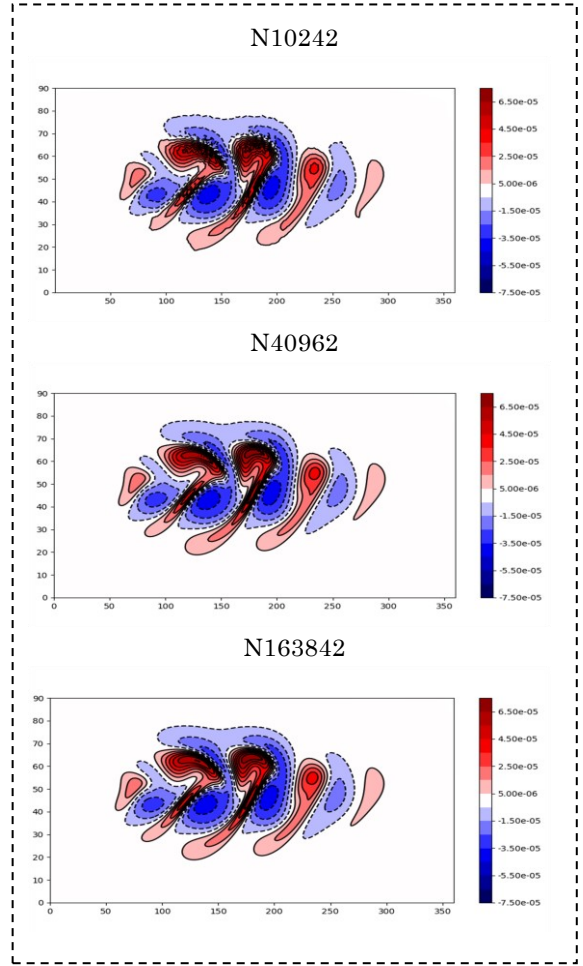


Fig. 5 Surface vorticity field. The contour interval is $1 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. The horizontal and vertical axes are the longitude and latitude, respectively. The contour almost converges at N40962.

いた。時刻幅は480, 240, 120[s]である。超粘性の階数は6, 任意係数 γ は 2×10^{-1} である。ステンシルサイズは51である。

6. 実験結果

12日目における最下層の渦度場を節点数NごとにFig. 5に示した。N10242においておよそ形を捉えているがノイズがある。N40962において渦度場の等値線の概形は収束している。

Fig. 6に渦度ノルムの時間発展を示す。 ℓ_2 は節点数10242の時点で高解像度のもので変わらない。 ℓ_∞ と $|\nabla \zeta|_\infty$ は40962において収束しており、12日目の値はわずかに異なる。次に12日目のノルム値をP04と比較する (Table. 1)。 ℓ_∞ と $|\nabla \zeta|_\infty$ はおおよそ等しい値に収束し、 ℓ_∞ がP04より小さい結果になった。

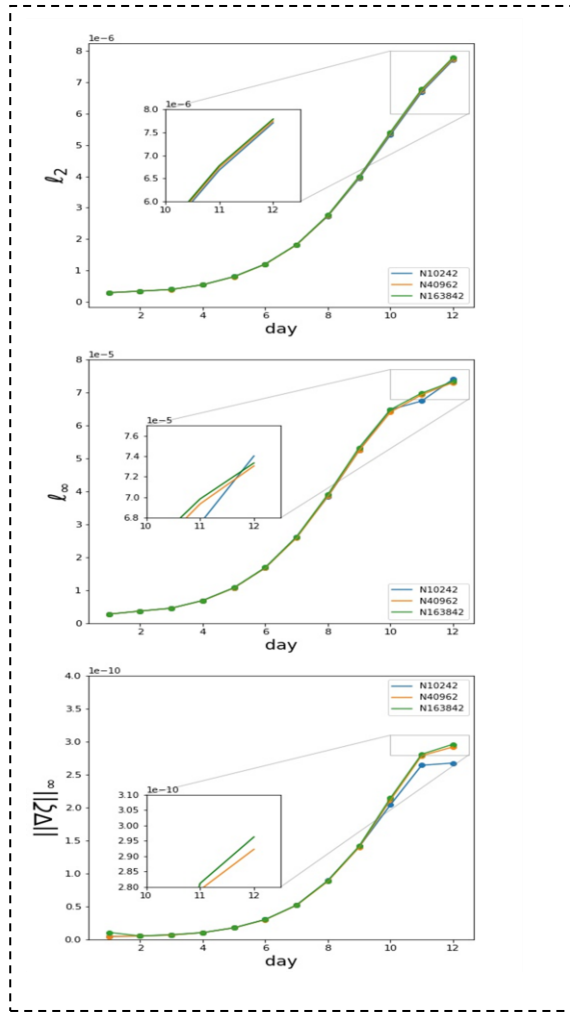


Fig. 6 Vorticity norms vs time [d]. The vertical and horizontal axes are norm and day, respectively. N is the number of ICOS nodes. ℓ_2 , ℓ_∞ and $|\nabla\zeta|_\infty$ are 2-norm, infinity norm and infinity norm of 2-norm of gradients, respectively.

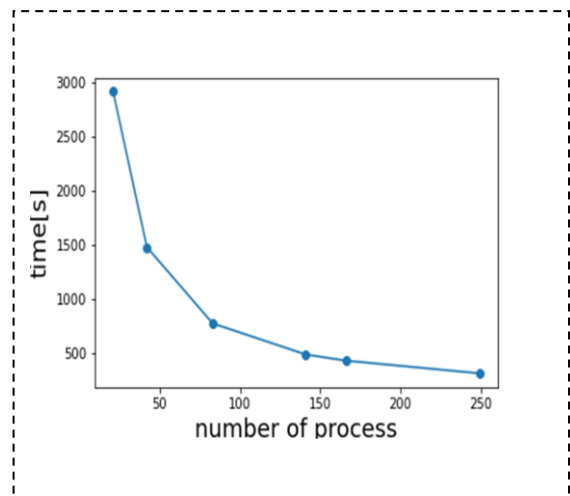


Fig.7 Calculation time for 1 day for 21, 42, 83, 141, 166 and 249 processes.

Table1 Vorticity norms at 12 days. The number of nodes for ICOS and P04 are 163842 and 524288, respectively.

	ℓ_2	ℓ_∞	$ \nabla\zeta _\infty$
P04	7.8×10^{-6}	7.4×10^{-5}	3×10^{-10}
ICOS	7.8×10^{-6}	7.3×10^{-5}	3×10^{-10}

7. スケーラビリティの検証

Fig. 7にプロセス数を変えたときの1日の計算時間を示す. 用いた節点数は163842である. 計算時間にはモデルの初期化からデータの読み書きまでの時間が含まれている. プロセス数を2倍にすると計算時間は2分の1になる. しかし, プロセス数およそ11.9倍の時にはおよそ10分の1の計算時間になった.

8. 考察

渦度場の再現性を12日目におけるノルムのP04とで比較すると, ℓ_2 と $|\nabla\zeta|_\infty$ は同等の値で, ℓ_∞ は低い結果であった. ℓ_2 が計算できているため, 大まかに渦度場は再現できている. しかし, ℓ_∞ は低く, $|\nabla\zeta|_\infty$ はおよそ同等であるため局所的な差がP04との間にある.

局所的な違いを離散化の差から検討する. Flyer et al. (2012) の浅水波方程式モデルにおける実験からスペクトル変換法とRBF-FDではGibbs現象による影響が異なると報告されている. P04の初期条件では赤道で風速が緯度方向に対して無限回微分不可になり, Gibbs現象が起きうる. これによりGibbs現象の影響の差が離散化間で生じ, 収束する場が異なっている可能性がある.

またRBF-FDでは安定化のために超粘性を適用しているため, 全ての波が影響を受けている. これにより場の振幅がP04とずれて, 最大値の差につながっている可能性がある.

次にスケーラビリティを検証する. プロセス数の増加に従って, 計算時間の減少率が鈍っていく原因は, RBF-FD手法において並列化しても実行時間が頭打ちになる箇所があるためである. 減少率は鈍るが, 並列化による高速化は十分に出来ているためモデルにはスケーラビリティがある.

9. まとめ

本研究では水平, 鉛直方向の離散化にRBF-FD, と有限差分法を適用したプリミティブ方程式モデルを

開発した. P04で提案された傾圧不安定波の実験を行った. 実験の結果からP04のテストケースは先行研究とおよそ整合しており, 局所的な差は離散化の特性の違いが原因と考えられる. また開発したモデルは並列化により高速化が可能であることが示された.

謝 辞

本研究は京都大学防災研究所共同研究(令和5年度萌芽的共同研究 2023NE-02)の支援を受けた.

参考文献

- Arakawa, A., and Suarez M., 1983: Vertical Differencing of the Primitive Equations in Sigma Coordinates., *Mon. Weather Rev.*, 111, pp. 34–45.
- Bollig, E. F., Flyer N., and Erlebacher G., 2012: Solution to PDEs using radial basis function finite-differences (RBF-FD) on multiple GPUs., *J. Comput. Phys.*, 231, pp. 7133–7151.
- Flyer, N., and Wright G. B., 2007: Transport schemes on a sphere using radial basis functions., *J. Comput. Phys.*, 226, pp. 1059–1084.
- Flyer, N., and Wright G. B., 2009: A radial basis function method for the shallow water equations on a sphere., *Proc. R. Soc. A: Math. Phys. Eng.*, 465, pp. 1949–1976.,
- Flyer, N., Lehto E., Blaise S., Wright G. B., and St-Cyr A., 2012: A guide to RBF-generated finite differences for nonlinear transport: Shallow water simulations on a sphere., *J. Comput. Phys.*, 231, pp. 4078–4095.
- Fornberg, B., and Lehto E., 2011: Stabilization of RBF-generated finite difference methods for convective PDEs., *J. Comput. Phys.*, 230, pp. 2270–2285.
- Gunderman, D., Flyer, N., and Fornberg, B., 2020: Transport schemes in spherical geometries using spline-based RBF-FD with polynomials., *J. Comput. Phys.*, pp. 408, 109256.
- Polvani L. M., Scott R. K., and Thomas S. J., 2004: Numerically Converged Solutions of the Global Primitive Equations for Testing the Dynamical Core of Atmospheric GCMs., *Mon. Weather Rev.*, 132, pp. 2539–2552.
- Swarztrauber, P. N., Williamson D. L., and Drake J. B., 1998: The Cartesian method for solving partial differential equations in spherical geometry. *Dyn. Atmos. Oceans.*, 27, pp. 679–706.
- Tillenius, M., Larsson E., Lehto E., and Flyer, N., 2015: A scalable RBF–FD method for atmospheric flow. *J. Comput. Phys.*, 298, pp. 406–422.
- Wright, G. B., and Fornberg, B., 2006: Scattered node compact finite difference-type formulas generated from radial basis functions., *J. Comput. Phys.*, 212, pp. 99–123.

(論文受理日 : 2023年8月31日)