京都大学防災研究所年報 第 65 号 B
DPRI Annuals, No. 65 B, 2022

計算量を削減したRBF離散化手法の性能評価

Performance of the Sparse Gaussian RBF Method

小笠原宏司[(1)]・榎本剛

Koji OGASAWARA[(1)] and Takeshi ENOMOTO

(1) 京都大学大学院理学研究科

(1) Graduate School of Science, Kyoto University, Japan

Synopsis

A sparse interpolation matrix is constructed as the differentiation matrix using Gaussian radial basis functions (RBF). Error convergence and eigenvalue stability analysis are investigated in a test case for shallow water models (SWM) with a local nonlinear zonal geostrophic flow. The convergence study shows that the SWM made with the sparse interpolation matrix is more accurate than made with the RBF-FD (finite-difference) method. The former model is more stable than the latter because the eigenvalues of the former model lie more closely along by the imaginary axis than those of the latter.

キーワード: 動径基底関数, 浅水波モデル, 疎行列
Keywords: radial basis functions, shallow water model, sparse matrix

1. はじめに

動径基底関数（radial basis functions: RBF） を用いた偏微分方程式の解法は現業モデルで用いられるスペクトル手法と同等の精度を持ちながら，自由な節点配置ができる手法である（Flyer and Wright, 2008）．RBF手法では不均一な節点も適用できるため，台風のような注目したい現象の周りだけ高解像度化すること（局所細密化）も可能である (Flyer and Lehto 2010) ．局所細密化節点は準一様な格子よりも点の数が少ないので，より速く計算を終えることができる．高精度で計算が速いことは防災上重要であるため，局所細密化節点が適用でき，高精度なRBFモデルは現業モデルに応用できる可能性がある．

しかし，RBFは高精度である一方で微分の計算量は節点数をNとしたときに$O(N^2)$の計算が必要である．節点数に伴う計算量の増大の問題を改善するために離散化に用いる基底の数を$n<N$個に制限するRBF-FD (finite-difference) 法が提案されている．一般的にnは31~101が使われる．これにより行列の要素の数は n^2 になり，計算量が$O(N\times n)$に削減される．

基底の数nは必要とされる精度や問題の大きさで決められることが多い．しかし，RBF-FD法は節点数と共に誤差が算術的にしか減少しないので，RBFが本来達成していたスペクトル精度を失う．スペクトル精度を維持しつつ計算量を削減するために，本研究ではGaussian RBFの形状を用いる手法を適用する．近似に用いる内挿行列にGaussian RBFを用い，閾値を使って一定値以下の基底の値を0にすることで，内挿の計算量を削減する手法が榎本（2019）で提案されている．本研究ではこの手法を偏微分方程式の解法に適用し，精度と安定性を検証した．検証には浅水波モデルを用い，局所的な非線形地衡流のテストケースを実施した．以降は2章でRBF, 3章で疎行列化手法, 4章で局所的な非線形地衡流, 5章で実験結果, 6章で考察とまとめという構成となっている．

2. Radial Basis Functions

本章ではRBFについて簡潔に述べる．

2.1　Gaussian RBF

RBFは距離のみに依存する関数である．一般的にはユークリッド距離が使われる．今回用いるGaussian RBF（Fig.1 ）は以下の式で示される．

$$\phi(r) = e^{-\varepsilon^2 r^2} \tag{1}$$

ここで，ε はGaussian RBFの形状を決めるパラメーターである（Fig. 1）．RBFは距離のみに依存するため，多次元でも同じ式で示される．Gaussian RBFによる内挿行列A

$$A(i,j) = \phi(\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|) \tag{2}$$

は正定値対称行列になる．

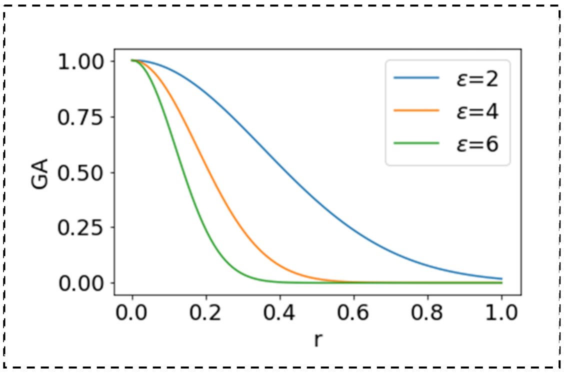

Fig. 1 Gaussian RBF.

2.2　偏微分方程式の解法

双曲線型偏微分方程式の解法に対するRBFの適用はFlyer and Wright (2007) において報告されている．

RBFによる偏微分方程式の解法は内挿を用いて行う．関数$\boldsymbol{F}$の内挿は次式で表される．

$$F \cong \boldsymbol{Ac} \tag{3}$$

ここで$\boldsymbol{A}$は内挿行列，$\boldsymbol{c}$は重みベクトルである．$\boldsymbol{c}$は選点条件（データ点における内挿が厳密に成立する）を課すことで決定する．次に式(3)の両辺を微分する．

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{Ac} = \boldsymbol{Bc} \tag{4}$$

ここで$\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$とした．次に式(3)から$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{F}$を用いて

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} = \boldsymbol{BA}^{-1}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{DF} \tag{5}$$

に変形する．RBF手法ではこの行列$\boldsymbol{D}$を用いて関数を微分する．

3.　疎行列化手法(RBF-GAS)

Gaussian RBFのεを大きくとることで，遠くの節点に対するRBFの値は0に近い値をとる．この性質を用いて閾値以下の0付近の値を0に置くと内挿行列を疎行列化出来る（榎本, 2019）．

榎本（2019）ではεの決定方法は具体的には指定されていない．本研究では全節点数Nに対して値をもつ基底の数が$\sqrt{N}$になるようにεを以下の式で決定した．

$$\varepsilon_s = \frac{\sqrt{-\log c}}{r_m} \tag{6}$$

ここでcは閾値，r_mは近傍$\sqrt{N}$個の節点で最も遠い節点の距離を示す．閾値は10^{-10}である．

4.　浅水波モデルにおける実験

RBFによる浅水波モデルはFlyer and Wright (2009) において報告されている．本章ではテストケースと実験設定のみ述べる．

4.1　局所的な非線形地衡流

本テストケースはWilliamson et al. (1992) にてまとめられている．本テストは高緯度にジェットがありそのジェットと地衡風平衡になるように深さが設定される．厳密解は初期値であり，地衡風平衡の状態が保たれるテストケースである．

4.2　実験設定

時間積分は4次のルンゲクッタ法を用いた．節点は球面螺旋節点 (Bauer, 2000)，収束性の検証では節点数を変化させて誤差の変化を調べ，安定性解析では節点数900点，タイムステップは600[s]で解析を行った．比較対象としてRBF-FDの結果も示す．

5.　実験結果

ℓ_2誤差をFig.2に示す．RBF-GASはRBF-FDと比較して精度が向上している．RBF-GASの収束性を見て

いくと，収束性がなまる結果になっているが，指数関数的な誤差の収束をしている．

次に固有値解析の結果をFig.3に示す．RBF-FDは大きな実部を持つ固有値が存在するが，RBF-GASは虚軸に沿うような固有値の配置をしている．これは安定化のための超粘性を必要としないことを意味する．

6.　考察とまとめ

本研究では疎行列化した内挿行列による偏微分方程式の解法(RBF-GAS) の性質を調べた．テストケースとして局所的な非線形地衡流を用いた．誤差の収束性の実験ではRBF-FDより精度がいい結果となった．これは節点数の増加に合わせて近似に用いられる基底の数を増やす設定にしていたため，基底の数を固定しているRBF-FDより精度がよくなったと考えられる．固有値解析では固有値は虚軸に沿うような配置であり，安定化のために超粘性を必要としないことがわかった．これはRBF-GASが線形システムのサイズを変更せずに，行列の非ゼロ要素数の数を減らすだけなのでRBF手法が持つ安定性を失わなかったためだと考えられる．以上からRBF-GASはRBF-FDより高精度であり，RBF手法と安定性の性質が変わらないことがわかった．

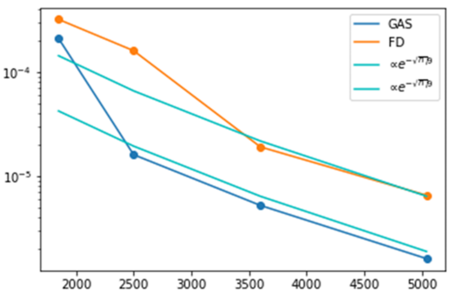

Fig. 2 ℓ_2 error as a function of number of nodes.

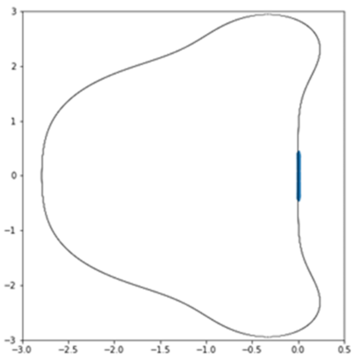

Fig. 3 Eigenvalues (blue dots) and the absolute stability domain of RK4 (closed curve).

参考文献

榎本剛 (2019)： 動径基底函数を用いた球面上のセミラグランジュ移流．防災研年報，63 号，158-164.

Bauer, R. (2000): Distribution of points on a sphere with application of star catalos, Jour. of Guid. Control Dyn., Vol. 23, No. 1, pp 130-137.

Flyer, N., and G. B. Wright (2007): Transport schemes on a sphere using radial basis functions. *Journal of Computational Physics*, **226**, pp 1059–1084,

Flyer, N., and G. B. Wright (2009): A radial basis function method for the shallow water equations on a sphere. *Proc. R. Soc. Math. Phys. Eng. Sci.*, **465**, pp 1949–1976.

Flyer, N. and Lehto, N. (2010):Rotational transport on a sphere: Local node refinement with radial basis functions, J. Compt. Phys., 229, pp. 1954–1969.

Williamson, D. L., J. B. Drake, J. J. Hack, R. Jakob, and P. N. Swarztrauber (1992): A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry. *J. Comput. Phys.*, 102, pp 211–224.

（論文受理日：2022年8月31日）