

## 準地衡流モデルへの決定論的アンサンブルデータ同化

### Deterministic Ensemble Data Assimilation for a Quasi-geostrophic Model

榎本剛・中下早織<sup>(1)</sup>

Takeshi ENOMOTO and Saori NAKASHITA

<sup>(1)</sup>京都大学大学院理学研究科

<sup>(1)</sup>Graduate School of Science, Kyoto University

#### Synopsis

Ensemble data assimilation experiments for a quasi-geostrophic model are conducted with the deterministic ensemble Kalman filter under an idealized mid-latitude ocean with double gyres. The model uses the Arakawa Jacobian for the nonlinear term and the multigrid method to solve the Helmholtz equation. To reduce pseudo correlation and increase the apparent sample size, the forecast error covariance matrix is localized by Schur product of a Gaussian function of the distance between two grid points. Localization can be applied to the blocks of the forecast error covariance separately by variable decomposition. The innovations of a diagnostic variable (streamfunction) correct the prognostic variable (potential vorticity) through the forecast error covariance between the two, indicating that the analysis of the potential vorticity is essential. By contrast, the analysis of the streamfunction only smoothes vortices in a few cycles and results in an ensemble collapse.

キーワード: アンサンブルカルマンフィルタ, 局所化, 荒川ヤコビアン, 多重格子法

**Keywords:** ensemble Kalman filter, localization, Arakawa Jacobian, multigrid solver

#### 1. はじめに

アンサンブルカルマンフィルタ (Ensemble Kalman Filter, EnKF, Evensen, 1994) は背景誤差共分散の代用として, アンサンブル予報から推定した予報誤差共分散を用いる手法で, 変分法データ同化と並んで大気・海洋のデータ同化に広く利用されている. 自由度が大きい大気や海洋のモデルは予報の計算コストが大きいので, アンサンブル数を十分に取れないことが多い. モデルの自由度に対してアンサンブル数が少ないと, 遠方の点との偽相関が生じ, 観測と予報との差 (イノベーション) を適切に解析に反映できない. 標本不足に伴う偽相関を低減するとともに, 見かけの自由度を増やす手法が局所化 (localization) である.

データ同化手法のテストに用いられる局所化を必要とする低自由度モデルは局所化を必要としないことも多いが, 大気・海洋のデータ同化は通常局所化を必要とする. 大気や海洋のモデルには複数の予報変数や診断変数が含まれることも低自由度モデルとは異なる.

そこで本稿では, 計算量が過大にならない範囲で, 大気や海洋の流れに類似したより現実的な問題を扱うため, 2次元準地衡流 (quasi-geostrophic, QG) モデルに対して, 決定論的アンサンブルカルマンフィルタ (Deterministic Ensemble Kalman Filter, DEnKF, Sakov and Oke, 2008) を適用する. Sakov and Oke (2008) に基づいて, 第2節でDEnKFの背景とアルゴリズムについて示した後, 第3節で準地衡流モデルに用いられている数値計算手法として荒川ヤコビアン (Arakawa, 1966) と多重格子法を紹介する. 第4節では, QGモデルとDEnKFからなるシステムを用いて, 中緯度海洋における表層流を模したデータ同化実験を行い, Sakov and Oke (2008) の結果の再現を試みる.

#### 2. 決定論的アンサンブルカルマンフィルタ

この節では, DEnKFが考案された背景について述べるとともに, その計算手順を示す.

## 2.1 背景

EnKFにおいて、各々のアンサンブル予報に対してカルマンフィルタ方程式を適用して解析すると、カルマンフィルタと比較して誤差共分散が過小評価されてしまう。観測に摂動を与えてこれを補う手法が摂動観測 (Perturbed Observation, PO) 法である (Burgers et al. 1998; Houtekamer and Mitchell, 1998)。

Monte Carlo法に基づくPO法に対し、EnSRF (Ensemble Square Root Filter; Whitaker and Hamill, 2002) 等観測に摂動を与えない決定論的な平方根フィルタが複数考案されている (Trippet et al., 2003)。PO法では誤差共分散の期待値が摂動なしの場合と同じでも、観測摂動の標本誤差のため、解析誤差共分散の確率密度が小さい方に歪むため過小評価する (予報を過信する) 可能性が高い (Whitaker and Hamill, 2002)。平方根フィルタはアンサンブル平均に対して観測を同化して解析を行い、予報アンサンブル摂動に右から変換行列を掛けて解析アンサンブル摂動を求める。

局所化には様々な方法が提案されているが、最も素朴でかつ効果的な手法は、格子点間の距離に依存する関数を用いて遠方の相関を小さくする状態空間局所化である。状態空間局所化は状態空間の誤差共分散行列を用いるPO法EnKFには容易に適用できるが、アンサンブル空間の誤差共分散行列を用いるEnSRFに適用する場合は観測を一つずつ連続的に同化する必要がある (Whitaker and Hamill, 2002)。

EnKFの摂動の解析を改変することにより、観測を摂動を与えず決定論的に解析する決定論的アンサンブルカルマンフィルタ (deterministic ensemble Kalman filter, DEnKF) が提案された (Sakov and Oke, 2008)。DEnKFは解析誤差共分散の過小評価が緩和されているが、予報アンサンブル摂動に左から行列を作用させて解析アンサンブル摂動を求める。そのためEnKF同様に状態空間局所化が容易に実現でき、複数の観測を同時に同化できる。

カルマンフィルタ (KF) の解析誤差共分散は

$$\mathbf{P}^a = (\mathbf{I} - \mathbf{KH})\mathbf{P}^f \quad (1)$$

と表される。ここで $\mathbf{I}$ は単位行列、 $\mathbf{K}$ はカルマンゲイン

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (2)$$

$\mathbf{H}$ は観測演算子、 $\mathbf{P}^f$ は予報誤差共分散行列である。KFの解析誤差共分散と比べて、EnKFの解析誤差共分散

$$\mathbf{P}^a = (\mathbf{I} - \mathbf{KH})\mathbf{P}^f (\mathbf{I} - \mathbf{KH})^T \quad (3)$$

は $(\mathbf{I} - \mathbf{KH})^T$ が掛かっている分小さいことが分かる。アンサンブル摂動の振幅が小さいと仮定した「弱い」同化において(3)を書き換えて2次の項を省略すると

$$\mathbf{P}^a = \mathbf{P}^f - 2\mathbf{KHP}^f + \mathbf{KHP}^f \mathbf{H}^T \mathbf{K}^T \approx (\mathbf{I} - 2\mathbf{KH})\mathbf{P}^f \quad (4)$$

となる。この式は、アンサンブル摂動を $\mathbf{K}/2$ を用いれば、近似の下で式(1)と一致することを示唆している。

## 2.2 計算手順

この小節ではDEnKFの具体的な計算手順を示す。

1. 予報のアンサンブル $\mathbf{X}^f$ に対してアンサンブル平均 $\mathbf{x}^f$ を

$$\mathbf{x}^f = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{X}_i^f \quad (5)$$

により求める。予報アンサンブル摂動 $\mathbf{A}^f$ は

$$\mathbf{A}_i^f = \mathbf{X}_i^f - \mathbf{x}^f \quad (6)$$

と表す。

2. カルマン方程式

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^f + \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}^f) \quad (7)$$

によりアンサンブル平均 $\mathbf{x}^a$ を解析する。

3. 第2.1節での議論に基づきKFの解析誤差共分散に一致するように、 $\mathbf{K}/2$ を用いて $\mathbf{A}^a$ を

$$\mathbf{A}^a = \mathbf{A}^f - \frac{1}{2} \mathbf{KHA}^f \quad (8)$$

で求める。

4. 解析アンサンブル $\mathbf{X}^a$ の平均が式(7)となるように、解析アンサンブル摂動に平均を加える。

$$\mathbf{X}^a = \mathbf{A}^a + [\mathbf{x}^a, \dots, \mathbf{x}^a] \quad (9)$$

式(8)により求めた解析誤差共分散は

$$\mathbf{P}^a = (\mathbf{I} - \mathbf{KH})\mathbf{P}^f + \frac{1}{4} \mathbf{KHP}^f \mathbf{H}^T \mathbf{K}^T \quad (10)$$

となる。「弱い」同化では、 $\mathbf{KH}$ が2次である式(10)の第2項が小さいとみなせるので、 $\mathbf{P}^a \approx (\mathbf{I} - \mathbf{KH})\mathbf{P}^f$ となり最適に近い解を求めることができる。 $\mathbf{KH}$ の2次の項を無視できない「強い」同化では $\mathbf{P}^a$ が式(10)の第2項の分だけ過大評価され、適応インフレーションとして機能する。式(8)を

$$\mathbf{A}^a = \frac{1}{2} \mathbf{A}^f + \frac{1}{2} (\mathbf{A}^f - \mathbf{KHA}^f) \quad (11)$$

と書くと重み1/2の先験値への緩和 (relaxation-to-prior, Zhang et al. 2004) と等価であることが分かる (Bowler et al. 2013)。

## 3. 準地衡流モデル

渦位 $q$ を予報変数とする準地衡流モデルは次の方程式で記述される。

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} - \varepsilon J(\psi, q) - A \Delta^3 \psi - 2\pi \sin(2\pi y) \quad (12)$$

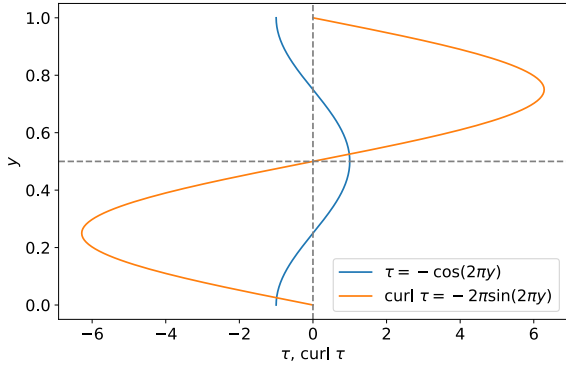


Fig. 1 Idealized wind stress  $\tau = -\cos(2\pi y)$  due to the mid-latitude westerlies and subtropic and subarctic easterlies (blue) and wind stress curl ( $\text{curl } \tau = -d\tau/dy = -2\pi \sin(2\pi y)$ , orange).

$t, x, y$ はそれぞれ時刻と東西及び南北座標,  $\psi$ は流線函数,  $J(p, q)$ はヤコビアン,  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ はラプラシアンで, 渦位と流線函数との関係は

$$q = \Delta\psi - F\psi \quad (13)$$

で  $F = 1600$  である. 式(12)の右辺第1項は惑星渦度の移流, 第2項は渦位の移流, 第3項は数値粘性, 第4項は風応力カールを表す. 非線型項及び数値粘性の強さを表すパラメタは, それぞれ  $\varepsilon = 10^{-5}$ ,  $A = 2 \times 10^{-12}$  を標準とする. Sakov and Oke (2008)の式(20)の風応力カールの符号は正となっており, 逆ダブルジャイアに対応するが, 渦の分布を見ると示されている実験は風応力カールが負であると考えられる. また, 彼らの Fig. 1には縦軸が示されていないが, 流線函数と渦位の符号から下向きに正であると思われる.

惑星渦度移流と風応力カールとのバランスを Svedrup (1947) 平衡という. 北半球亜熱帯 (亜寒帯) では偏西風のシアにより風応力が北向き (南向き) に強まるため, 風応力カールは偏西風の南側で負 (北側で正) となる (Fig. 1). Svedrup平衡から西岸境界を除いて南向き (北向き) の流れとなるが, 連続の式から亜熱帯 (亜寒帯) で西岸境界では北向き (南向き) の強い流れ (西岸境界流) が生じ, 高気圧性循環 (低気圧性循環) が強制される (Pedlosky, 1987). これらの二つの循環 (ダブルジャイア) は, 太平洋では亜熱帯及び亜寒帯の黒潮と親潮に伴う循環に対応する.

計算領域は  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  の正方形領域とし,  $129 \times 129$  点に  $d = 1/128$  の等間隔に離散化する. 東西南北の境界で  $\psi = \Delta\psi = \Delta^2\psi = 0$  とし内部領域のみ時間発展を計算する. 時間積分には4次のRunge-Kutta法, 式(12)右辺第1項の惑星渦度の移流には中央差分

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} \approx \frac{\psi_{i+1} - \psi_{i-1}}{2\Delta x} \quad (14)$$

を用いた. 第2項の渦位の移流の計算方法は, 第3.1節で述べる. 第3項の数値粘性は, 式(13)より  $\Delta\psi = q + F\psi$ に各格子点とその東西南北の格子点5点を用いてラプラシアンの差分近似

$$\Delta p = \frac{p_{i-1,j} + p_{i+1,j} + p_{i,j-1} + p_{i,j+1} - 4p_{i,j}}{d^2} \quad (15)$$

を2回作用させて求める.

### 3.1 荒川ヤコビアン

ヤコビアン  $J(p, q)$  は

$$J(p, q) = \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial q}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( p \frac{\partial q}{\partial x} \right) \quad (16)$$

と書け領域平均は0であるため, 領域平均のエネルギータンクとエンストロフィーが保存し, 小さなスケールの正味のエネルギー輸送は0である. すなわち非粘性の順圧渦度方程式 (強制項を除いた式(12)) の初期値が滑らかであれば, 解は滑らかでなければならない (Fjørtoft, 1953). ところが素朴な差分

$$J_1(p, q) = \frac{1}{4d^2} \left[ (q_{i,j+1} - q_{i,j-1})(p_{i+1,j} - p_{i-1,j}) - (q_{i+1,j} - q_{i-1,j})(p_{i,j+1} - p_{i,j-1}) \right] \quad (17)$$

を用いると短い波長が増幅し非線型不安定を生ずる. Arakawa (1966)3つの差分の平均で表され, ヤコビアンはエネルギーやエンストロフィーを保存する.

$$J_2(p, q) = \frac{1}{4d^2} \left[ (q_{i+1,j+1} - q_{i+1,j-1})p_{i+1,j} - (q_{i-1,j+1} - q_{i-1,j-1})p_{i-1,j} - (q_{i+1,j+1} - q_{i-1,j+1})p_{i,j+1} + (q_{i+1,j-1} - q_{i-1,j-1})p_{i,j-1} \right] \quad (18)$$

$$J_3(p, q) = \frac{1}{4d^2} \left[ q_{i,j+1}(p_{i+1,j+1} - p_{i-1,j+1}) - q_{i,j-1}(p_{i+1,j-1} - p_{i-1,j-1}) - q_{i+1,j}(p_{i+1,j+1} - p_{i+1,j-1}) + q_{i-1,j}(p_{i-1,j+1} - p_{i-1,j-1}) \right] \quad (19)$$

$$J_A = \frac{1}{3}(J_1 + J_2 + J_3) \quad (20)$$

3つの差分はそれぞれ

$$J(p, q) = \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial q}{\partial y} p \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial q}{\partial x} p \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( q \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( q \frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad (21)$$

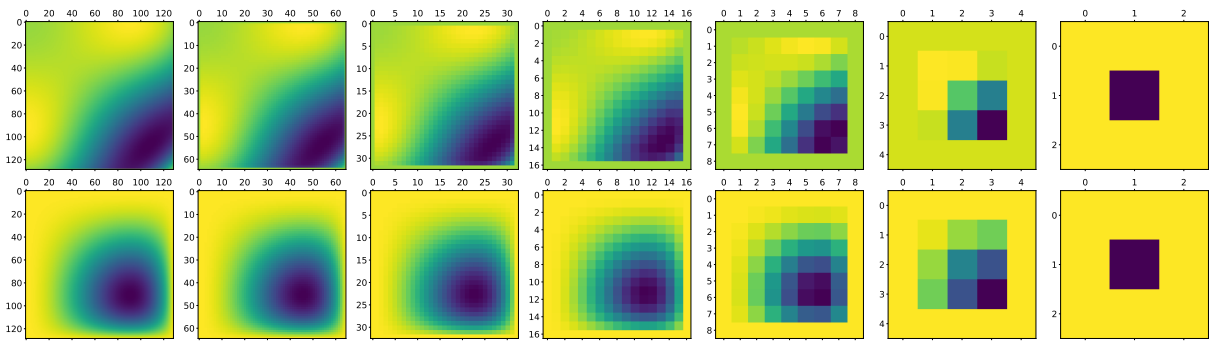


Fig. 2 V-cycle for a test function. Restricting from the top left (129×129) to the top right (3×3) and prolonging from the bottom right to the bottom left. See the text for details.

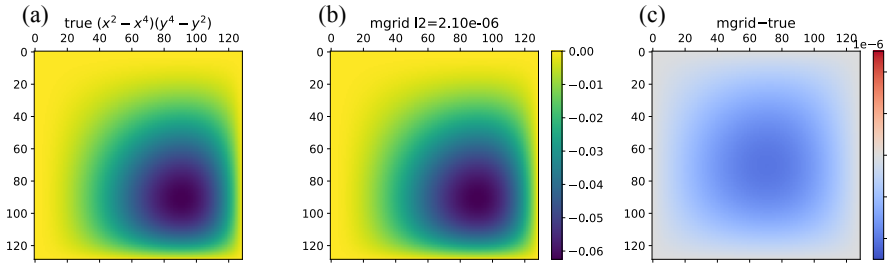


Fig. 3 (a) The analytic and (b) multigrid solutions, and (c) the difference (multigrid–analytic) for the test function.

の差分近似であり、変数を異なる配置 (Arakawa (1983)のFig. 2) で求めたものである。また、上下左右の及び斜めフラックスがそれぞれ0であることを示すことができる (Arakawa (1983)のFig. 3)。

### 3.2 多重格子法

式(12)のラプラシアンを式(15)で差分近似すると

$$\psi^{(n+1)} = \psi^{(n)} + \frac{d^2 r}{4 + d^2 F} \quad (22)$$

という反復式が得られる。ここで $(n)$ は $n$ 回目の反復を表し、 $r = \Delta\psi^{(n)} - F\psi^{(n)} - q$ は残差である。Jacobi法 (既に更新された格子点の情報を利用する場合は Gauss–Seidel法) と呼ばれるこの反復解法の収束を加速するため、多重格子 (multigrid) 法を用いる。格子を間引いて制限 (restrict) した後、内挿で元の解像度に戻す延長 (prolong) する過程をVサイクルと呼ぶ。

既知の解析解

$$p(x, y) = (x^2 - x^4)(y^4 - y^2) \quad (23)$$

に対するPoisson方程式

$$\Delta p = -2 \left[ (1 - 6x^2)y^2(1 - y^2) + (1 - 6y^2)x^2(1 - x^2) \right] \quad (24)$$

を境界条件  $p = 0$  の下で求める (Briggs et al. 2000; Zingal 2014)。解像度は129×129, 65×65, 33×33, 17×17, 9×9, 5×5, 3×3の7つの解像度を用いた。

制限での反復回数は各解像度で1回としたが、反復回数を増やしても精度や延長での反復回数に対する影響はほとんどなかった。延長では上限を十分に大きく取り許容誤差を $10^{-4}$  ( $10^{-5}$ ) としたところ、反復回数は粗い方から22, 80, 256, 747, 1905, 3989 (29, 109, 375, 1220, 3740, 10643) 回となった。制限において空間スケールの大きな誤差が取り除かれることにより、延長では少ない反復回で解析解に近づいていくことが分かる (Fig. 2)。Fig. 3に解析解と許容誤差を $10^{-5}$ とした場合の解を示す。誤差は $\ell_2 = 2.10 \times 10^{-6}$ で境界から離れるほど差が大きいくことが分かる。

## 4. データ同化実験

本節では、第2, 3節でそれぞれ示したデータ同化手法DEnKFとQGモデルを組み合わせたデータ同化システムを構築し、中緯度海洋の表層流を模したデータ同化実験を行う。

### 4.1 実験設定

#### (1) パラメタ

モデルの解像度は $n = 129 \times 129 = 16641$ で、境界を除いて時間発展を計算する。まず静止状態から500,000ステップの長期積分を行う。100,000ステップ以降100ステップ毎に保存した4001ステップから真値及び $k = 25$ メンバーを乱択しアンサンブル予報の初期値とする。真値及び予報のタイムステップ及びは $\Delta t = 1.25$ 、数値拡散係数は $A = 2 \times 10^{-11}$ とした。

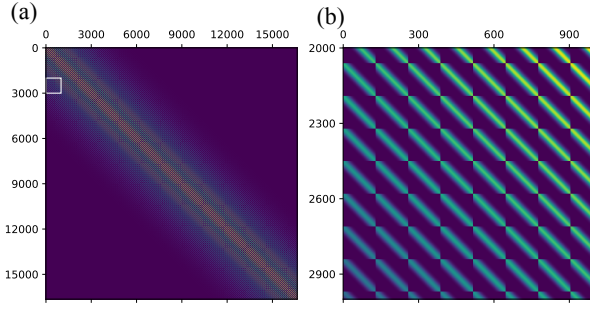


Fig. 4 Structure of a localization matrix for (a) all elements and (b) a part marked by a white square.

## (2) 観測

4ステップの予報毎に1回,  $m = 300$ 点の格子点上における流線函数の観測を300サイクル同化する. 観測は真値にガウス型の誤差(分散4.0)を加えて作成する. 観測網を海面高度計観測を模したものとするため, 格子点を1次元化して等間隔(55点)に観測点を取る. 観測を開始位置する格子点は, サイクル毎に1から129までの一様乱数で定める.

## (3) 実験の種類

流線函数及び渦位を更新する実験をコントロール実験とする. 流線函数は渦位から式(20)から計算できる診断変数なのでどちらか一方を更新すれば良いはずである. そこで渦位のみまたは流線函数のみを予報の初期値とする実験及び局所化なし実験を併せて行う. 流線函数のみを用いる場合は渦位を式(13)で計算する.

## (4) 局所化

先行研究(Sakov and Oke 2008)で最適とされている共分散膨張係数及び局所化半径 $\alpha = 1.06$ ,  $r_0 = 15$ 格子をそれぞれ用いた. 局所化函数はガウス型

$$\rho(i_1, j_1; i_2, j_2) = \exp\left(-\frac{r^2(i_1, j_1; i_2, j_2)}{2r_0^2}\right) \quad (25)$$

とした. 1次元の局所化行列は対角成分が最大となるが, 2次元ではブロック対角行列が並んだものとなる(Fig. 4).

## (5) 変数による行列の分解

QGモデルの予報変数は渦位 $q$ のみであり, 流線函数は式(13)から求められる診断変数である. この2変数について, 縦に並べて $2n \times k$ の予報アンサンブル摂動, 横に並べて $m \times 2n$ の観測演算子とする.

$$\mathbf{A}^f = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_q^f \\ \mathbf{A}_\psi^f \end{bmatrix}, \mathbf{H} = [H_q \ H_\psi] \quad (26)$$

ここで $\mathbf{A}_q^f, \mathbf{A}_\psi^f$ は $n \times k$ である. 解析誤差共分散行列は $2n \times 2n$ となるが, 以下のように,  $n \times n$ のブロック要素に分解することができる.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^f &= \frac{1}{k-1} \mathbf{A}^f (\mathbf{A}^f)^T = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{qq}^f & \mathbf{P}_{q\psi}^f \\ \mathbf{P}_{\psi q}^f & \mathbf{P}_{\psi\psi}^f \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{k-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_q^f (\mathbf{A}_q^f)^T & \mathbf{A}_q^f (\mathbf{A}_\psi^f)^T \\ \mathbf{A}_\psi^f (\mathbf{A}_q^f)^T & \mathbf{A}_\psi^f (\mathbf{A}_\psi^f)^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

となる.  $\mathbf{P}_{qq}^f = \frac{1}{k-1} \mathbf{A}_q^f (\mathbf{A}_q^f)^T$ などのブロック要素は $n \times n$ である. カルマンゲインに現れる二つの行列積はそれぞれ次のようになる.

$$\mathbf{P}^f \mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{qq}^f \mathbf{H}_q^T + \mathbf{P}_{q\psi}^f \mathbf{H}_\psi^T \\ \mathbf{P}_{\psi q}^f \mathbf{H}_q^T + \mathbf{P}_{\psi\psi}^f \mathbf{H}_\psi^T \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T &= \mathbf{H}_q \mathbf{P}_{qq}^f \mathbf{H}_q^T + \mathbf{H}_q \mathbf{P}_{q\psi}^f \mathbf{H}_\psi^T \\ &\quad + \mathbf{H}_\psi \mathbf{P}_{\psi q}^f \mathbf{H}_q^T + \mathbf{H}_\psi \mathbf{P}_{\psi\psi}^f \mathbf{H}_\psi^T \end{aligned} \quad (29)$$

$\mathbf{P}^f \mathbf{H}^T$ は $2n \times m$ ,  $\mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T$ は $m \times m$ である.

$q$ の観測がないとき $\mathbf{H}_q = 0$ なので式(28), (29)は

$$\mathbf{P}^f \mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{q\psi}^f \mathbf{H}_\psi^T \\ \mathbf{P}_{\psi\psi}^f \mathbf{H}_\psi^T \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T = \mathbf{H}_\psi \mathbf{P}_{\psi\psi}^f \mathbf{H}_\psi^T \quad (31)$$

となる.  $2n \times m$ のカルマンゲイン $\mathbf{K}$ は

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_q \\ \mathbf{K}_\psi \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\mathbf{K}_q = \mathbf{P}_{q\psi}^f \mathbf{H}_\psi^T \left[ \mathbf{H}_\psi \mathbf{P}_{\psi\psi}^f \mathbf{H}_\psi^T + \mathbf{R} \right]^{-1}$$

$$\mathbf{K}_\psi = \mathbf{P}_{\psi\psi}^f \mathbf{H}_\psi^T \left[ \mathbf{H}_\psi \mathbf{P}_{\psi\psi}^f \mathbf{H}_\psi^T + \mathbf{R} \right]^{-1}$$

となる.  $n \times m$ のカルマンゲイン $\mathbf{K}_q, \mathbf{K}_\psi$ と $\psi$ のイノベーションを用いると式(2)に対応する解析の式は

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^a &= \mathbf{q}^f + \mathbf{K}_q \left[ \mathbf{y} - \mathbf{H}_\psi \boldsymbol{\psi}^f \right] \\ \boldsymbol{\psi}^a &= \boldsymbol{\psi}^f + \mathbf{K}_\psi \left[ \mathbf{y} - \mathbf{H}_\psi \boldsymbol{\psi}^f \right] \end{aligned} \quad (33)$$

と表すことができる. アンサンブルを更新する式(8)は

$$\mathbf{A}_q^a = \mathbf{A}_q^f - \frac{1}{2} \mathbf{K}_q \mathbf{H}_\psi \mathbf{A}_\psi^f$$

$$\mathbf{A}_\psi^a = \mathbf{A}_\psi^f - \frac{1}{2} \mathbf{K}_\psi \mathbf{H}_\psi \mathbf{A}_\psi^f \quad (34)$$

と書ける. 平均を解析する式(33)と摂動を更新する式(34)は1変数に対する式と次元の大きさが同じになっている. 予報誤差共分散行列の局所化についても,  $n \times n$ の局所化行列を用いたSchur積で行う.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{q\psi}^f &\rightarrow \rho \cdot \mathbf{P}_{q\psi}^f \\ \mathbf{P}_{\psi\psi}^f &\rightarrow \rho \cdot \mathbf{P}_{\psi\psi}^f \end{aligned} \quad (35)$$

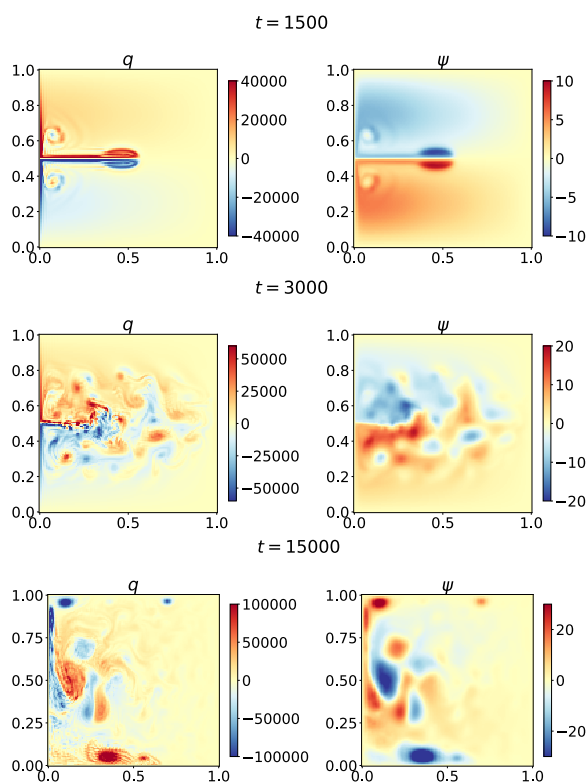


Fig. 5 Snapshots of the potential vorticity (left) and streamfunction (right) at  $t = 1500, 3000, 15000$  in the free run. NB. Each plot uses a different colour bar.

## 4.2 実験結果

長期積分の初期の3時刻における渦位及び流線関数の分布をFig. 5に示す。風応力カール (Fig. 1) に対応して、計算領域の上部の反時計回りの循環と下部の時計回りの循環ができ、その境である  $y = 0.5$  に沿って東向きの流れが形成される ( $t = 1500$ )。この流れは不安定を起し、様々なスケールの渦が形成される ( $t = 3000$ )。渦は引き伸ばされ変形するとともに、融合し大きな渦ができる。境界を0に固定しているため、西岸と南北の境界でのシアはジャイアと逆向きとなり、異符号の渦が形成される ( $t = 15000$ )。

データ同化実験の75, 150, 225, 300サイクル (300, 600, 900, 1200ステップ,  $t = 375, 750, 1125, 1500$ ) における流線関数の真値と観測値、解析誤差 (解析値-真値)、解析標準偏差、インクリメント (解析値-予報値) をFig. 6に示す。解析値と予報値は真値と見分けが付かないので省略している。

観測は計算領域を斜めに走査しており、走向方向に密に分布している。ランダムな観測誤差のために真値とずれがあることも分かる。南北境界にある渦に伴う誤差は同化を開始してすぐに修正され、サイクルが進むとともに渦の周辺の誤差の振幅も低減している。

最終時刻の  $t = 1500$  においては、南北境界付近や東半分では、観測の標準偏差2.0を大きく下回る誤差が得られている。一方  $0 < x < 0.5, 0.2 < y < 0.8$  付近の領域では、渦の活動が活発であり、観測の標準偏差程度の誤差が残っている。この領域で、解析の標準偏差も大きく誤差の分布とよく対応している。誤差共分散の大きな領域ではインクリメントがあり、観測により予報が修正されている。

Fig. 6に示すように解析誤差はデータ同化開始後、急速に減少し観測誤差の標準偏差を下回り、同化期間に渡って安定している。誤差の低下が飽和した後は、誤差は解析誤差の標準偏差を上回っており、予報誤差共分散の過小評価が示唆される。

渦位のみを予報に用いた場合でも、両方を用いた場合と同一の解析結果が得られた。予報開始時の流線関数の第一推定値は0であるが渦位から多重格子法により精度よく計算できることを示している。一方、流線関数だけを予報に用い、渦位を流線関数から計算した場合は、サイクルを進めると渦の振幅が小さくなり、アンサンブルの縮小が生じ観測を同化しなくなる。局所化なしの場合は、適切に観測を同化できなかった。

## 5. まとめと今後の展望

決定論的アンサンブルカルマンフィルタ (DEnKF) を1次元モデルよりも現実的な大気・海洋モデルに近い準地衡流 (QG) モデルに適用し、中緯度の表層流を模した条件下でデータ同化実験を行った。QGモデルに用いた手法について、荒川ヤコビアンについて解説するとともに、多重格子法によるHelmholtz方程式の解法の動作をテスト関数で確認した。

水平2次元のQGモデルには予報変数である渦位と診断変数である流線関数がある。中緯度海洋の表層流を模した実験は不安定により境界や東向きの流れにおいて渦が生成する。アンサンブル数が少ない場合は、偽相関を低減するために局所化が有効である。

荒川ヤコビアンは異なる格子点での差分を組み合わせることでエネルギーとエンストロフィーを保存し、連続の式を満たすことにより非線型不安定を回避できる。

多重格子法は粗視化と内挿を経て、大きなスケールから誤差を低減し、Jacobi法よりも大幅に少ない反復回数で所定の許容誤差に収束させることができる。

DEnKFは観測の摂動を必要とせず、誤差共分散の過小評価を低減できる。平方根フィルタ同様に決定論的であるが、固有値分解が不要で平方根の回転任意性の影響を受けない。アンサンブルに左から行列をかけて更新するため、Schur積により容易に予報誤差共分散を局所化できる。

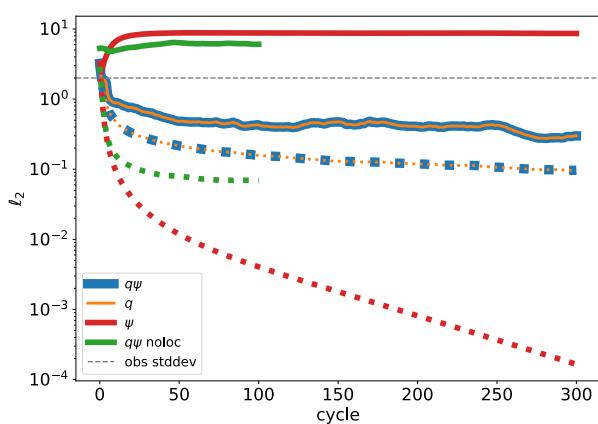
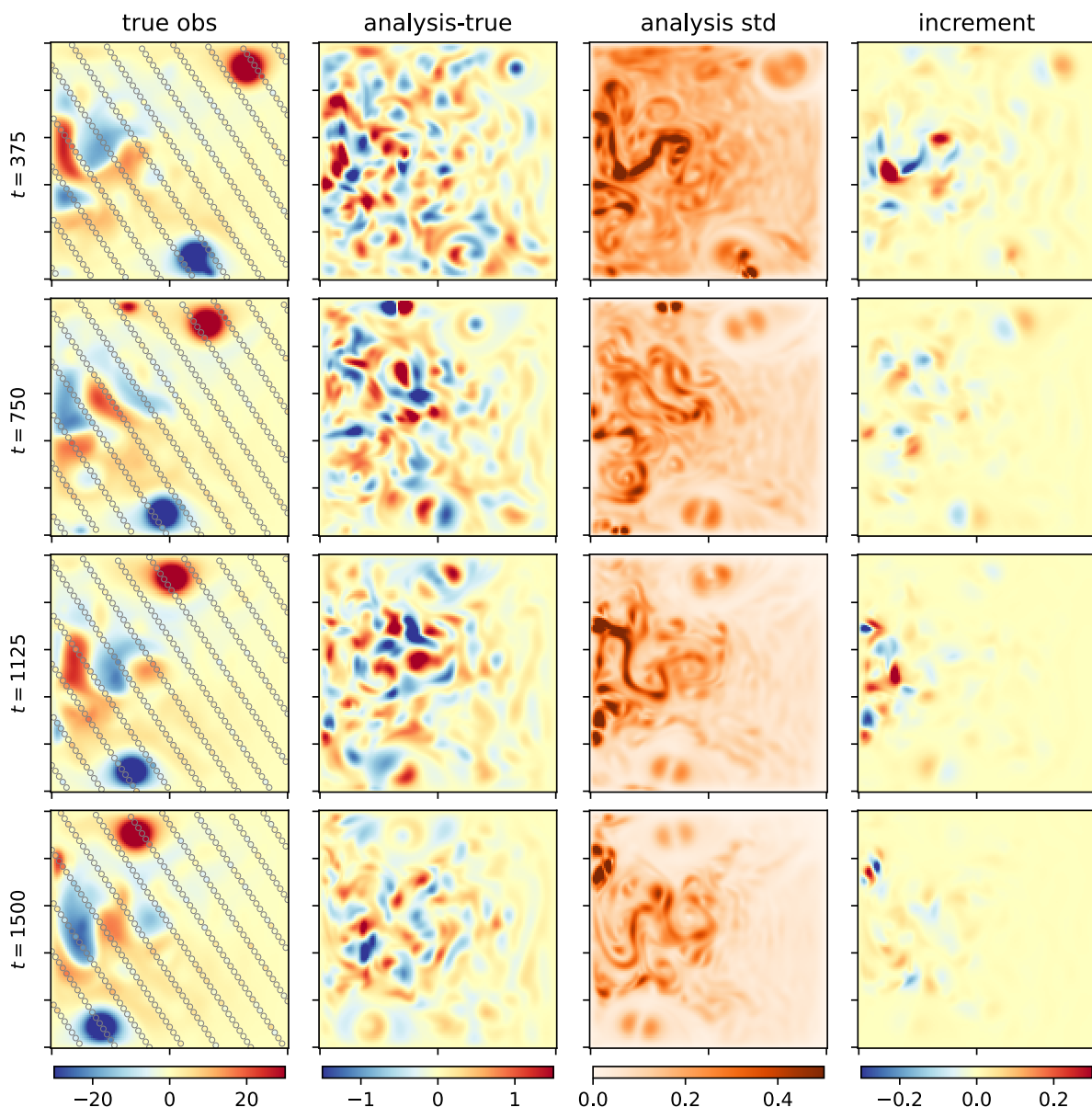


Fig. 7 The root-mean square error (solid lines) and analysis standard deviation (dotted lines) in the data assimilation experiments with  $q, \psi$  (control, blue),  $q$  only (orange),  $\psi$  only (red), and  $q, \psi$  without localization (green, terminated at cycle 100).

Fig. 6 Snapshots of the true streamfunction, analysis error, standard deviation, and increment (left to right) in the control data assimilation experiment at  $t = 375, 750, 1125, 1500$  (top to bottom). The circles on the true field represent observations.

DEnKFを用いたデータ同化実験では、誤差が観測誤差を下回り、安定して同化できることが確認された。格子点上にない位置での観測を利用するには、観測演算子に空間内挿を含める必要がある。

複数の予報・診断変数の観測を利用するには、第4.1節(5)項で述べたように、摂動や観測演算子、誤差共分散行列の変数分離を行うことより効率的に計算ができる。予報変数との変数間の共分散を考慮することにより、診断変数の観測を利用することもできる。DEnKFは、海洋モデルにも適用されている(Sakov et al., 2012) ので、大気や海洋の現実的なモデルに適用することが可能である。

## 謝辞

本研究はJSPS科研費2K03662の助成を受けた。モデルとデータ同化コードは海洋データ同化2022に際して準備したもので、<https://github.com/tenomoto/denkf>から取得できる。

## 参考文献

- Arakawa, A. (1966): Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: two-dimensional incompressible flow Part I. *J. Comput. Phys.*, Vol. 1, No. 1, 119–143.
- Arakawa, A. (1983): The use of integral constraints in designing finite-difference schemes for the two-dimensional advection equation. Seminar on Numerical Methods for Weather Prediction, 5–9 September 1983, Reading, UK, European Centre for Medium-range Weather Forecasts.
- Bowler, N. E., J. Flowerdew, and S. R. Pring (2013): Tests of different flavours of EnKF on a simple model. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, Vol. 139, No. 675, 1505–1519, doi:10.1002/qj.2055.
- Briggs, W. L., V. E. Henson, and S. F. McCormick, (2000): A multigrid tutorial, second edition. 2nd ed. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA.
- Burgers, G., P. J. van Leeuwen, and G. Evensen (1998): Analysis scheme in the ensemble Kalman filter. *Mon. Wea. Rev.*, Vol. 126, No. 6, 1719–1724, doi:10.1175/1520-0493(1998)126<1719:ASITEK>2.0.CO;2.
- Evensen, G. (1994): Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics. *J. Geophys. Res. Oceans*, Vol. 99, No. C5, 10143–10162, doi:10.1029/94JC00572.
- Fjørtoft, R. (1953): On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for twodimensional, nondivergent flow. *Tellus*, Vol. 5, No. 3, 225–230.
- Houtekamer, P. L., and H. L. Mitchell (1998): Data assimilation using an ensemble Kalman filter technique. *Mon. Wea. Rev.*, Vol. 126, No. 3, 796–811, doi:10.1175/1520-0493(1998)126<0796:DAUAEK>2.0.CO;2.
- Pedlosky, J. (1987), *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, p. 710 pp.
- Sakov, P., and P. R. Oke (2008): A deterministic formulation of the ensemble Kalman filter: an alternative to ensemble square root filters. *Tellus A*, Vol. 60, No. 2, 361–371, doi:10.1111/j.1600-0870.2007.00299.x.
- Sakov, P., F. Counillon, L. Bertino, K. A. Lisæter, P. R. Oke, and A. Korabely (2012): TOPAZ4: an ocean-sea ice data assimilation system for the North Atlantic and Arctic. *Ocean Science*, 8, 633–656, doi:10.5194/os-8-633-2012.
- Sverdrup, H. U. (1947): Wind-driven currents in a baroclinic ocean; with application to equatorial currents of the eastern Pacific. *PNAS*, Vol. 33, No. 11, 318–326.
- Tippett, M. K., J. L. Anderson, C. H. Bishop, T. M. Hamill, and J. S. Whitaker (2003): Ensemble square root filters. *Mon. Wea. Rev.*, Vol. 131, No. 7, 1485–1490, doi:10.1175/1520-0493(2003)131<1485:ESRF>2.0.CO;2.
- Whitaker, J. S., and T. M. Hamill (2002): Ensemble data assimilation without perturbed observations. *Mon. Wea. Rev.*, Vol. 130, No. 7, 1913–1924, doi:10.1175/1520-0493(2002)130<1913:EDAWPO>2.0.CO;2.
- Zhang, F., C. Snyder, and J. Sun (2004): Impacts of Initial estimate and observation availability on convective-scale data assimilation with an ensemble Kalman filter. *Mon. Wea. Rev.*, Vol. 132, No. 5, 1238–1253, doi:10.1175/1520-0493(2004)132<1238:IOIEAO>2.0.CO;2.
- Zingale, M., (2014), pyro: A teaching code for computational astrophysical hydrodynamics. *Astronomy and Computing*, 6, 52–62, doi:10.1016/j.ascom.2014.07.003.

(論文受理日：2022年8月31日)