京都大学防災研究所年報 第 65 号 B
DPRI Annuals, No. 65 B, 2022

建物のパッシブ振動制御の極配置法に基づく統一的理解

Unified Understanding of Passive Vibration Control for Buildings Based on Pole Allocation

池田芳樹・松本祐輝 (1)

Yoshiki IKEDA and Yuki MATSUMOTO (1)

（1）京都大学大学院工学研究科

(1) Graduate School of Engineering, Kyoto University

Synopsis

For a building with a passive control system, an inverse problem is formulated based on the pole allocation method in control theories. The structural system is simplified as a 3DOF damped lumped-mass shear model. The model can express an earthquake resistant structure, a base-isolated structure, an interstory-isolated structure, or a structure with a tuned mass damper or viscous dampers by changing its parameters adequately. The natural frequencies and the corresponding damping ratios in three vibration modes are set as the initial control target for performance-based design. The introduced closed-form expression explains how model parameters are related to the control target, and the mathematical expression generally proves the trade-off relationship in passive control effect. The relationship is extended to an MDOF damped-mass shear model. The numerical examples indicate that the pole allocation has arbitrariness in selecting a solution and a limited solution can be applied to the actual building.

キーワード:建物，パッシブ振動制御，統一的理解，極配置，性能規定型設計
Keywords: building, passive vibration control, unified understanding, pole allocation, performance-based design

1. はじめに

本論文は，3質点3自由度系せん断振動型モデル（3DOFモデルと略す）に極配置法を適用して，建物のパッシブ振動制御を共通に支配している基本式を導いている．同様の基本式は，すでに中間層免震のやや複雑な動特性を理解する目的で導かれ（Ikeda, 2021），その後に基礎免震と同調型マスダンパ（Tuned Mass Damper，TMDと略す）による振動制御を理解するためにも導かれた（池田，2021；松本・池田，2021；松本・池田，2022）．基礎免震と中間層免震では，免震層のみに減衰があるモデルが用いられ，TMDではマスダンパのみに減衰があるモデルが用いられた．これまでの研究では，制御方式ごとに減衰の位置が異なるモデルが設定されており，基本式はモデルごとに個別に誘導されていた．基礎免震とTMDでは，3DOFモデルだけではなく，建物をSDOFモデルにした2DOFモデルにも極配置法が適用された．その結果，モデルが2DOF系か3DOF系かに関係なく，同様の基本式が成立することも確認された．得られた基本式は，振動モードに対応する極を指定すると，解析モデルを表現するパラメータの値が自動的に制約されることを意味していた．特に中間層免震では，免震層を挟む上下部分構造物の振動低減効果にトレードオフ関係があることを表現していた．

本論文では，モデルの一般性を高めるために，すべての質点間に剛性と減衰を並列に配置した3DOFモデルを扱っており，耐震構造や層間ダンパを含め

たパッシブ振動制御でも共通の基本式が成り立つことを証明している．さらに，モデルを多質点多自由度系（MDOFモデルと略す）に拡張しても，2DOFと3DOFのモデルで得られたトレードオフ関係式が存在することを示している．新たに層間ダンパの効果が考察できるようになったことから，数値解析例ではその動特性の解明に焦点を絞っている．極配置法では数学的に得られる解に任意性があり，複数の解のうち実建物に適用できる解は限られていることも明らかにしている．

建物の構造設計で志向されている性能規定型設計には，中小地震時の弾性応答の制御だけではなく，大地震時の弾塑性応答の制御も含まれる．例えば，第一世代の性能規定型耐震設計法である2000年に発表されたFEMA 356は，建物の標準的性能を無被害，即時居住，人命保護および倒壊防止の4つのレベルに設定し，それらを建物損傷と相関性が高い最大変形角に関係付けている（FEMA 356，2000）．建物の振動制御技術に対しては，大地震を受けても建物本体の応答を線形範囲内にできるだけ収めて，大地震後の建物補修を最小限にしたい期待がある（和田ほか，1998；Connor *et al*., 1997）．性能規定型設計がさらに普及しても，制御系を設計する最初の段階で，建物応答を線形範囲内に収めようとする制御は検討され続けるであろう．

等価線形化モデルは，耐震建物の非線形振動を理解し易くするために有用である（Caughey，1960；Caughey 1963）．現在実施されている構造設計でも，応答振幅に応じた等価な固有周期と減衰を考える場合は多い．免震やパッシブ制御された建物の基本特性の理解にも，等価線形的な考え方が受け入れられている．免震装置の設計では，積層ゴムのせん断歪に応じた等価固有周期や等価減衰を理解することは重要であり（Kelly，1997），変位依存の性質を示す履歴型ダンパの設計でも，非線形履歴によるエネルギ吸収を等価減衰として評価する考え方が見られる（Soong and Dargush, 1997）．地震時の振動記録から，耐震・免震・制震の建物の動的挙動を簡易に把握する際にも，等価線形的に評価した固有周期とモード減衰の時間変動はよく利用されている（Loh and Lin, 1996；Ikeda, 2009；Ikeda, 2016；Fujino *et al*., 2019）．固有振動数やモード減衰比といったモード特性を目標に指定する極配置法は，特に等価線形系として建物の動特性を制御しようとする際に，性能規定型設計と整合が高いと考えられる．

極配置法は，はじめに振動系で制御したい極を制御が漸近的に安定するような複素平面上の領域に指定し，次に指定した極を実現するための線形フィードバック制御則を得る方法である（Wonham, 1967；Meirovitch，1990）．極配置法は現代制御理論の一つであり，建物のアクティブ制御でフィードバック制御則を得る手段として，研究の黎明期にすでに紹介されていた（Leiphiolz and Abdel-Rohman, 1986）．これまで極配置法に関する研究では，主にフィードバックゲインを得ることに関心が払われており，その結果，アクティブ・セミアクティブ制御に利用することを前提とした研究が多い．

並進とねじれ回転の2方向の振動を単一の制御力で同時に低減するアクティブ制御法の極配置法に基づく検討では，同じ極を設定しても，制御力を作用させる位置によって応答低減効果が異なることが明らかにされている（池田・小堀，1994）．アクティブマスダンパのストローク制約条件を考慮するために，極配置法に基づいて可変ゲインを誘導した研究では，実大鋼構造架構を用いて制御法の有効性が実験的にも検証されている（山本・鈴木，1998）．非共振現象を利用したアクティブ制御の提案では，構造物に入力する地震の周波数分析結果に基づいて，極を再配置する考え方が述べられている（Pnevmatikos and Gantes, 2007）．極配置法の適用は，MRダンパやオイルダンパの利用を想定したセミアクティブ制御の検討でも見られる（Pnevmatikos，2017）．構造物の共振現象を捉えながら，目標とする等価モード減衰を得て，高次モードの励起を抑える制御を，極配置法で提案している研究もある（Basu and Nielsen，2011）．この研究も共振・非共振現象を利用している．

極配置法は，系の固有振動数と減衰比を指定して振動制御する方法であるから，アクティブ・アクティブ制御だけではなく，パッシブ制御にも適用性があると考えられる．粘性流体を利用したパッシブ制御を対応するアクティブ制御に近いように設計する検討では，建物の層剛性を低下させる制御に極配置法を取り入れている（Ahmadizadeh and Zare，2012；Zare and Ahmadizadeh，2014）．しかしながら，極配置法を建物のパッシブ制御に利用した研究はほとんどないようである．

極配置法を多制御入力の系に適用すると，フィードバックゲインが一意に定まらないという問題が生じる（Wonham，1967；Wonham，1979）．そのため，拘束条件を加えて解を絞り込む提案がされている．フィードバックゲインが大きいと制御入力も大きくなるため，ゲインが過度に大きくならないように解を選択する方法が提案されている（依田，小山，三浦，1975）．この任意性は，極配置法をパッシブ制御に適用した場合には，モデルを表現するパラメータが一意に定まらないという現象として現れる．建物への適用を想定すると，実現可能な解は限られて

いることに対応する．

これまで極配置法は，多入力多出力系のフィードバック制御を前提に理論展開され，一般性と汎用性を追求してきた．その結果，解を得ることが数値解析に依存し，制御対象構造物に固有の基本的性質が見え難いという問題が残っている．本論文の数値解析では，建物モデルを質点間に剛性と減衰を並列に配置した1本棒の3DOFモデルに限定し，極配置法の基本式を閉じた形で誘導して，従来の研究で見えなかった解の適用範囲を明らかにしている（Ikeda and Matsumoto, 2022）．閉じた解はパッシブ振動制御を共通に支配している基本式の存在も明らかにしている．

続く第2章では，一般性が高い3DOFモデルを用いて極配置法の基本式を誘導し，それが耐震建物，基礎免震や中間層免震の建物，さらにはTMDや層間ダンパによる振動制御建物の動特性を統一的に表現することを示す．モデルをMDOF系に拡張しても，2DOFと3DOFのモデルで得られた統一表現が存在することを，第3章で証明している．

第4章では，質点の質量を仮定して，非減衰固有値問題と極配置を扱うことで，指定した極に対応する各層の剛性を，減衰とは独立に求めることができることを示す．この方法では，はじめに層剛性に対応するように定義した固有円振動数が得られ，その後に減衰係数に対応する減衰比が得られる．

第5章では，新たに考察できるようになった層間ダンパによるパッシブ振動制御に焦点を当て，その基本特性を明らかにする．3質点の質量を仮定しても，ある一組の極指定の下で複数の解が数学的に存在することを最初に示す．そして，実建物に適用できる解は限られ，その存在領域が狭いことを明らかにする．目標とする3モードの極を指定すると，建物の剛性と減衰が制約を受け，3層のパラメータ値にトレードオフ関係が生じることを示す．

2. 極配置法の３質点系建物モデルへの適用

質点間に剛性と減衰を並列に配置した3DOFモデルを考える（Fig.1）．このモデルは，剛性と減衰を調整することによって，耐震構造だけではなく，基礎免震，中間層免震さらにはパッシブ振動制御を，線形仮定の下で簡易に表現することができる．最下層の剛性を他の2層に比較してかなり低くし，その減衰を大きくすれば，基礎免震建物となる．同様の操作を中間層で行えば中間層免震建物となる．最上質点を重錘，最上層の剛性をばね，最上層の減衰をダンパと考えて，ばねとダンパを下2質点の振動エネルギを吸収するように設定すれば，パッシブ振動制御に分類されるTMDを屋上階に設置した建物にもなる．3つの減衰をダンパと考えれば，層間ダンパを取り付けたパッシブ制御建物となる．

前報（池田，2021；松本・池田，2021；松本・池田，2022）では，最下層だけに減衰があるモデルを基礎免震，中間層だけに減衰があるモデルを中間層免震，最上層だけに減衰があるモデルをTMDによる制振として，各モデルに対して極配置法を適用した．ここでは，全層に減衰を考慮することで，すでに報告した3つのモデルを一つに統合するだけではなく，層間ダンパも表現して一般性が高い極配置法を展開している．

2.1 運動方程式と状態方程式

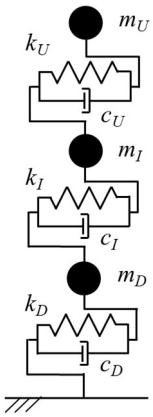


Fig.1 3DOF model for pole allocation

Fig.1に示すモデルが地震を受ける際の運動方程式を下式で表現する．

$$\begin{bmatrix} m_U & 0 & 0 \\ 0 & m_I & 0 \\ 0 & 0 & m_D \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_U \\ \ddot{x}_I \\ \ddot{x}_D \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_U & -c_U & 0 \\ -c_U & c_U+c_I & -c_I \\ 0 & -c_I & c_I+c_D \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_U \\ \dot{x}_I \\ \dot{x}_D \end{Bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} k_U & -k_U & 0 \\ -k_U & k_U+k_I & -k_I \\ 0 & -k_I & k_I+k_D \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_U \\ x_I \\ x_D \end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix} m_U & 0 & 0 \\ 0 & m_I & 0 \\ 0 & 0 & m_D \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\ddot{y}_0 \tag{1}$$

ここに，

m_U ：最上質点の質量
m_I ：中間質点の質量
m_D ：最下質点の質量
k_U ：最上層のせん断剛性
k_I ：中間層のせん断剛性
k_D ：最下層のせん断剛性
c_U ：最上層の減衰係数
c_I ：中間層の減衰係数

c_D ：最下層の減衰係数

x_U ：最上質点の固定端に対する相対変位

x_I ：中間質点の固定端に対する相対変位

x_D ：最下質点の固定端に対する相対変位

$\ddot{y}_0$ ：地動入力加速度

運動方程式(1)を書き直す目的で，以下のパラメータを導入する．

ω_U ：最上層単独の固有円振動数

ω_I ：最上層を剛体に仮定した際の中間層の固有円振動数

ω_D ：上 2 層を剛体に仮定した際の最下層の固有円振動数

h_U ：最上層の減衰比

h_I ：最上層を剛体に仮定した際の中間層の減衰比

h_D ：上 2 層を剛体に仮定した際の最下層の減衰比

μ_U ：中間質点に対する最上質点の質量比

μ_D ：最下質点に対する他質点の質量和の比

上記のパラメータと式(1)内のパラメータの関係は，

$$\omega_U^2 = \frac{k_U}{m_U}, \quad 2h_U\omega_U = \frac{c_U}{m_U} \tag{2}$$

$$\omega_I^2 = \frac{k_I}{m_U + m_I}, \quad 2h_I\omega_I = \frac{c_I}{m_U + m_I} \tag{3}$$

$$\omega_D^2 = \frac{k_D}{m_U + m_I + m_D}, \quad 2h_D\omega_D = \frac{c_D}{m_U + m_I + m_D} \tag{4}$$

$$\mu_U = \frac{m_U}{m_I}, \quad \mu_D = \frac{m_U + m_I}{m_D} \tag{5}$$

となる．これらを使って運動方程式(1)を書き直すと，

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_U \\ \ddot{x}_I \\ \ddot{x}_D \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2h_U\omega_U & -2h_U\omega_U & 0 \\ -2\mu_U h_U\omega_U & 2\mu_U h_U\omega_U + 2(1+\mu_U)h_I\omega_I & -2(1+\mu_U)h_I\omega_I \\ 0 & -2\mu_D h_I\omega_I & 2\mu_D h_I\omega_I + 2(1+\mu_D)h_D\omega_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_U \\ \dot{x}_I \\ \dot{x}_D \end{Bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} \omega_U^2 & -\omega_U^2 & 0 \\ -\mu_U\omega_U^2 & \mu_U\omega_U^2 + (1+\mu_U)\omega_I^2 & -(1+\mu_U)\omega_I^2 \\ 0 & -\mu_D\omega_I^2 & \mu_D\omega_I^2 + (1+\mu_D)\omega_D^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_U \\ x_I \\ x_D \end{Bmatrix}$$
$$= -\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{y}_0 \tag{6}$$

となり，対応する6次元の状態方程式は，

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_U \\ \ddot{x}_I \\ \ddot{x}_D \\ \dot{x}_U \\ \dot{x}_I \\ \dot{x}_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2h_U\omega_U & 2h_U\omega_U & 0 & -\omega_U^2 & \omega_U^2 & 0 \\ 2\mu_U h_U\omega_U & -2\mu_U h_U\omega_U - 2(1+\mu_U)h_I\omega_I & 2(1+\mu_U)h_I\omega_I & \mu_U\omega_U^2 & -\mu_U\omega_U^2 - (1+\mu_U)\omega_I^2 & (1+\mu_U)\omega_I^2 \\ 0 & 2\mu_D h_I\omega_I & -2\mu_D h_I\omega_I - 2(1+\mu_D)h_D\omega_D & 0 & \mu_D\omega_I^2 & -\mu_D\omega_I^2 - (1+\mu_D)\omega_D^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_U \\ \dot{x}_I \\ \dot{x}_D \\ x_U \\ x_I \\ x_D \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{y}_0 \tag{7}$$

で表現される．

2.2 特性方程式

状態方程式(7)の右辺第1項にあるシステム行列から，極（記号s）を求める特性方程式(8)が得られる．

$$\begin{vmatrix} -2h_U\omega_U - s & 2h_U\omega_U & 0 & -\omega_U^2 & \omega_U^2 & 0 \\ 2\mu_U h_U\omega_U & -2\mu_U h_U\omega_U - 2(1+\mu_U)h_I\omega_I - s & 2(1+\mu_U)h_I\omega_I & \mu_U\omega_U^2 & -\mu_U\omega_U^2 - (1+\mu_U)\omega_I^2 & (1+\mu_U)\omega_I^2 \\ 0 & 2\mu_D h_I\omega_I & -2\mu_D h_I\omega_I - 2(1+\mu_D)h_D\omega_D - s & 0 & \mu_D\omega_I^2 & -\mu_D\omega_I^2 - (1+\mu_D)\omega_D^2 \\ 1 & 0 & 0 & -s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -s \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

ここで，式(9)のように 6 次正方行列を A とおき，それを 4 つの 3 次正方行列に分割すると，行列式に関する公式(10)が利用できる．

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$|A| = |A_{22}|\left|A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right| \tag{10}$$

4 つの分割行列を

$$A_{11}=\begin{bmatrix} -2h_U\omega_U - s & 2h_U\omega_U & 0 \\ 2\mu_U h_U\omega_U & -2\mu_U h_U\omega_U - 2(1+\mu_U)h_I\omega_I - s & 2(1+\mu_U)h_I\omega_I \\ 0 & 2\mu_D h_I\omega_I & -2\mu_D h_I\omega_I - 2(1+\mu_D)h_D\omega_D - s \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$A_{12}=\begin{bmatrix} -\omega_U^2 & \omega_U^2 & 0 \\ \mu_U\omega_U^2 & -\mu_U\omega_U^2-(1+\mu_U)\omega_I^2 & (1+\mu_U)\omega_I^2 \\ 0 & \mu_D\omega_I^2 & -\mu_D\omega_I^2-(1+\mu_D)\omega_D^2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$A_{22}=\begin{bmatrix} -s & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & -s \end{bmatrix} \tag{14}$$

とおくと，式(8)は下式として整理できる．

$$\begin{aligned}
&s^6+2[(1+\mu_U)h_U\omega_U+(1+\mu_U+\mu_D)h_I\omega_I+(1+\mu_D)h_D\omega_D]s^5 \\
&+[(1+\mu_U)\omega_U^2+(1+\mu_U+\mu_D)\omega_I^2+(1+\mu_D)\omega_D^2 \\
&\quad+4(1+\mu_U)(1+\mu_D)(h_Uh_I\omega_U\omega_I+h_Ih_D\omega_I\omega_D+h_Uh_D\omega_U\omega_D)]s^4 \\
&+2(1+\mu_U)(1+\mu_D)[h_U\omega_U(\omega_I^2+\omega_D^2)+h_I\omega_I(\omega_D^2+\omega_U^2) \\
&\qquad+h_D\omega_D(\omega_U^2+\omega_I^2)+4h_Uh_Ih_D\omega_U\omega_I\omega_D]s^3 \\
&+(1+\mu_U)(1+\mu_D)[\omega_U^2\omega_I^2+\omega_I^2\omega_D^2+\omega_D^2\omega_U^2 \\
&\qquad+4\omega_U\omega_I\omega_D(h_Uh_I\omega_D+h_Ih_D\omega_U+h_Dh_U\omega_I)]s^2 \\
&+2(1+\mu_U)(1+\mu_D)\omega_U\omega_I\omega_D(h_U\omega_I\omega_D+h_I\omega_D\omega_U+h_D\omega_U\omega_I)s \\
&+(1+\mu_U)(1+\mu_D)\omega_U^2\omega_I^2\omega_D^2=0
\end{aligned} \tag{15}$$

2.3 指定する極による特性方程式

解析モデルは 3 つ振動モードをもつ．そこで，i 次モードの固有円振動数とモード減衰比をそれぞれ ω_i と h_i とおくと，対応する特性方程式は

$$\prod_{i=1}^{3}(s^2+2h_i\omega_i s+\omega_i^2)=0 \tag{16}$$

である．上式を整理すると s に関する 6 次式を得る．

$$\begin{aligned}
&s^6+2(h_1\omega_1+h_2\omega_2+h_3\omega_3)s^5 \\
&+[4(h_1h_2\omega_1\omega_2+h_2h_3\omega_2\omega_3+h_3h_1\omega_3\omega_1)+\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2]s^4 \\
&+2[h_1\omega_1(\omega_2^2+\omega_3^2)+h_2\omega_2(\omega_3^2+\omega_1^2) \\
&\qquad+h_3\omega_3(\omega_1^2+\omega_2^2)+4h_1h_2h_3\omega_1\omega_2\omega_3]s^3 \\
&+[4\omega_1\omega_2\omega_3(h_1h_2\omega_3+h_2h_3\omega_1+h_3h_1\omega_2) \\
&\qquad+\omega_1^2\omega_2^2+\omega_2^2\omega_3^2+\omega_3^2\omega_1^2]s^2 \\
&+2\omega_1\omega_2\omega_3(h_1\omega_2\omega_3+h_2\omega_3\omega_1+h_3\omega_1\omega_2)s+\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2=0
\end{aligned} \tag{17}$$

2.4 極配置問題

系の特性方程式(15)を目標とする特性方程式(17)に一致させる条件は，

$$\begin{aligned}
&h_1\omega_1+h_2\omega_2+h_3\omega_3 \\
&\quad=(1+\mu_U)h_U\omega_U+(1+\mu_U+\mu_D)h_I\omega_I+(1+\mu_D)h_D\omega_D
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
&4(h_1h_2\omega_1\omega_2+h_2h_3\omega_2\omega_3+h_3h_1\omega_3\omega_1)+\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2 \\
&\quad=(1+\mu_U)\omega_U^2+(1+\mu_U+\mu_D)\omega_I^2+(1+\mu_D)\omega_D^2 \\
&\qquad+4(1+\mu_U)(1+\mu_D)(h_Uh_I\omega_U\omega_I \\
&\qquad\qquad+h_Ih_D\omega_I\omega_D+h_Uh_D\omega_U\omega_D)
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
&h_1\omega_1(\omega_2^2+\omega_3^2)+h_2\omega_2(\omega_3^2+\omega_1^2)+h_3\omega_3(\omega_1^2+\omega_2^2) \\
&\quad+4h_1h_2h_3\omega_1\omega_2\omega_3 \\
&\quad=(1+\mu_U)(1+\mu_D)[h_U\omega_U(\omega_I^2+\omega_D^2)+h_I\omega_I(\omega_D^2+\omega_U^2) \\
&\qquad+h_D\omega_D(\omega_U^2+\omega_I^2)+4h_Uh_Ih_D\omega_U\omega_I\omega_D]
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
&4\omega_1\omega_2\omega_3(h_1h_2\omega_3+h_2h_3\omega_1+h_3h_1\omega_2) \\
&\quad+\omega_1^2\omega_2^2+\omega_2^2\omega_3^2+\omega_3^2\omega_1^2 \\
&\quad=(1+\mu_U)(1+\mu_D)[\omega_U^2\omega_I^2+\omega_I^2\omega_D^2+\omega_D^2\omega_U^2 \\
&\qquad+4\omega_U\omega_I\omega_D(h_Uh_I\omega_D+h_Ih_D\omega_U+h_Dh_U\omega_I)]
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
&\omega_1\omega_2\omega_3(h_1\omega_2\omega_3+h_2\omega_3\omega_1+h_3\omega_1\omega_2) \\
&\quad=(1+\mu_U)(1+\mu_D)\omega_U\omega_I\omega_D(h_U\omega_I\omega_D \\
&\qquad\qquad+h_I\omega_D\omega_U+h_D\omega_U\omega_I)
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2=(1+\mu_U)(1+\mu_D)\omega_U^2\omega_I^2\omega_D^2 \tag{23}$$

の 6 式である．前報（池田，2021；松本・池田，2022）の極配置法で扱った解析モデルは，基礎免震では $h_U=h_I=0$，中間層免震では $h_U=h_D=0$，TMD による制振では $h_I=h_D=0$ とおくと得られる．ただし，未定パラメータは ω_U，ω_I，ω_D，h_U，h_I，h_D，μ_U および μ_D の 8 つであるから，これらを一意に決定することはできない．

式(22)と式(23)からは，重要な関係式

$$\frac{h_U}{\omega_U}+\frac{h_I}{\omega_I}+\frac{h_D}{\omega_D}=\frac{h_1}{\omega_1}+\frac{h_2}{\omega_2}+\frac{h_3}{\omega_3}=\sum_{i=1}^{3}\frac{h_i}{\omega_i} \tag{24}$$

が得られる．前報で基礎免震，中間層免震または TMD による制振を扱った際には，対応する各モデルで制御装置を設置した 1 つの層だけに減衰があるた

めに，左辺は 1 つの項だけで構成されていた．本報では，すべての層が減衰をもつため左辺に 3 つの項が現れる．3 つの極を指定すると上式の右辺の値が決まるから，極配置はその制約下で各層の固有振動数と減衰をどう割り振るかという問題になる．したがって，式(24)は，各層の動特性を表現するパラメータの間のトレードオフ関係を，前報と同様に表現している．

2.5 式(24)がパラメータの定義に依存しないことの証明

前節で誘導された極配置では，ω_I と ω_D を対象とする層よりも上の層を剛体に仮定した固有円振動数として定義し，h_I と h_D をそれらに対応する減衰比として定義した．本節では，3 組の固有振動数と減衰比を，1 つの層だけを取り出した際のパラメータで定義しても，式(24)の関係が維持されることを証明する．

新たなパラメータを次式のように定義する．

$$\omega_{I*}^2 = \frac{k_I}{m_I}, \quad 2h_{I*}\omega_{I*} = \frac{c_I}{m_I} \tag{25}$$

$$\omega_{D*}^2 = \frac{k_D}{m_D}, \quad 2h_{D*}\omega_{D*} = \frac{c_D}{m_D} \tag{26}$$

これらの 2.1 節で定義したパラメータとの関係は，

$$\omega_I^2 = \frac{m_I}{m_U + m_I}\frac{k_I}{m_I} = \frac{m_I}{m_U + m_I}\omega_{I*}^2$$

$$\omega_I = \sqrt{\frac{m_I}{m_U + m_I}}\omega_{I*} = \frac{\omega_{I*}}{\sqrt{1+\mu_U}} \tag{27}$$

$$\omega_D^2 = \frac{m_D}{m_U + m_I + m_D}\frac{k_D}{m_D} = \frac{m_D}{m_U + m_I + m_D}\omega_{D*}^2$$

$$\omega_D = \sqrt{\frac{m_D}{m_U + m_I + m_D}}\omega_{D*} = \frac{\omega_{D*}}{\sqrt{1+\mu_D}} \tag{28}$$

$$h_I = \frac{c_I}{2\omega_I(m_U + m_I)} = \frac{c_I}{2\sqrt{\frac{m_I}{m_U + m_I}}(m_U + m_I)\omega_{I*}}$$

$$= \frac{c_I}{2\sqrt{m_I(m_U + m_I)}\omega_{I*}} = \frac{c_I}{2m_I\sqrt{\frac{m_U + m_I}{m_I}}\omega_{I*}}$$

$$h_I = \frac{2h_{I*}\omega_{I*}}{2\sqrt{1+\mu_U}\,\omega_{I*}} = \frac{h_{I*}}{\sqrt{1+\mu_U}} \tag{29}$$

$$h_D = \frac{c_D}{2\omega_D(m_U + m_I + m_D)} = \frac{c_D}{2\sqrt{\frac{m_D}{m_U + m_I + m_D}}(m_U + m_I + m_D)\omega_{D*}}$$

$$= \frac{c_D}{2\sqrt{m_D(m_U + m_I + m_D)}\omega_{D*}} = \frac{c_D}{2m_D\sqrt{\frac{m_U + m_I + m_D}{m_D}}\omega_{D*}}$$

$$h_D = \frac{2h_{D*}\omega_{D*}}{2\sqrt{1+\mu_D}\,\omega_{D*}} = \frac{h_{D*}}{\sqrt{1+\mu_D}} \tag{30}$$

式(27)～(30)を式(24)に代入すると，

$$\frac{h_U}{\omega_U} + \frac{h_I}{\omega_I} + \frac{h_D}{\omega_D} = \frac{h_U}{\omega_U} + \frac{h_{I*}}{\omega_{I*}} + \frac{h_{D*}}{\omega_{D*}} = \sum_{i=1}^{3}\frac{h_i}{\omega_i} \tag{31}$$

したがって，トレードオフ関係式(24)は固有円振動数と減衰比の定義には依存せず，普遍性を有する．

2.6 2.5 節のパラメータによる書き換え

式(27)～(30)で定義したパラメータで極配置の条件式(18)～(23)を書き換えると，

$$\begin{aligned} &h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + h_3\omega_3 \\ &\quad = (1+\mu_U)h_U\omega_U + (1+\mu_3)h_{I*}\omega_{I*} + h_{D*}\omega_{D*} \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} &4(h_1h_2\omega_1\omega_2 + h_2h_3\omega_2\omega_3 + h_3h_1\omega_3\omega_1) + \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \\ &\quad = (1+\mu_U)\omega_U^2 + (1+\mu_3)\omega_{I*}^2 + \omega_{D*}^2 \\ &\qquad + 4[(1+\mu_D)h_Uh_{I*}\omega_U\omega_{I*} + h_{I*}h_{D*}\omega_{I*}\omega_{D*} \\ &\qquad + (1+\mu_U)h_Uh_{D*}\omega_U\omega_{D*}] \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} &h_1\omega_1(\omega_2^2 + \omega_3^2) + h_2\omega_2(\omega_3^2 + \omega_1^2) + h_3\omega_3(\omega_1^2 + \omega_2^2) \\ &\qquad + 4h_1h_2h_3\omega_1\omega_2\omega_3 \\ &\quad = h_U\omega_U[(1+\mu_D)\omega_{I*}^2 + (1+\mu_U)\omega_{D*}^2] \\ &\qquad + h_{I*}\omega_{I*}[\omega_{D*}^2 + (1+\mu_D)\omega_U^2] \\ &\qquad + h_{D*}\omega_{D*}[(1+\mu_U)\omega_U^2 + \omega_{I*}^2] \\ &\qquad + 4h_Uh_{I*}h_{D*}\omega_U\omega_{I*}\omega_{D*} \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} &4\omega_1\omega_2\omega_3(h_1h_2\omega_3 + h_2h_3\omega_1 + h_3h_1\omega_2) \\ &\qquad + \omega_1^2\omega_2^2 + \omega_2^2\omega_3^2 + \omega_3^2\omega_1^2 \\ &\quad = (1+\mu_D)\omega_U^2\omega_{I*}^2 + \omega_{I*}^2\omega_{D*}^2 + (1+\mu_U)\omega_{D*}^2\omega_U^2 \\ &\qquad + 4\omega_U\omega_{I*}\omega_{D*}(h_Uh_{I*}\omega_{D*} + h_{I*}h_{D*}\omega_U + h_{D*}h_U\omega_{I*}) \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} &\omega_1\omega_2\omega_3(h_1\omega_2\omega_3 + h_2\omega_3\omega_1 + h_3\omega_1\omega_2) \\ &\quad = \omega_U\omega_{I*}\omega_{D*}(h_U\omega_{I*}\omega_{D*} + h_{I*}\omega_{D*}\omega_U + h_{D*}\omega_U\omega_{I*}) \end{aligned} \tag{36}$$

$$\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2 = \omega_U^2\omega_{I*}^2\omega_{D*}^2 \tag{37}$$

ここに，

$$\frac{\mu_D}{1+\mu_U} = \frac{\frac{m_U + m_I}{m_D}}{1 + \frac{m_U}{m_I}} = \frac{\frac{m_U + m_I}{m_D}}{\frac{m_U + m_I}{m_I}} = \frac{m_I}{m_D} = \mu_3 \tag{38}$$

後の数値解析では層間ダンパを配置した問題を新たに扱うため，上記の 6 式を基本式とする．

3. 多質点系建物モデルへの拡張

3DOF モデルで得た統一式(31)を，MDOF モデルに拡張する．対応する解析モデルは Fig.1 で質点数を n に増やし，質点および層の剛性と減衰の番号は，固定端から最上階に向かって 1 から振ることとする．例えば，最下質点と最上質点の質量はそれぞれ m_1 と m_n，最上層の剛性と減衰係数はそれぞれ k_n と c_n なる．

3.1 運動方程式と状態方程式

x_i を質点 i の固定端からの変位とおくと，MDOF 系の運動方程式は次式になる．

$$
\begin{bmatrix} m_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_n \\ \ddot{x}_{n-1} \\ \ddot{x}_{n-2} \\ \vdots \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \end{Bmatrix}
$$

$$
\cdots + \begin{bmatrix} c_n & -c_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_n & c_n + c_{n-1} & -c_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c_{n-1} & c_{n-1} + c_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_3 + c_2 & -c_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_2 & c_2 + c_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_n \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_{n-2} \\ \vdots \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_1 \end{Bmatrix}
$$

$$
+ \begin{bmatrix} k_n & -k_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_n & k_n + k_{n-1} & -k_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_3 + k_2 & -k_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_2 & k_2 + k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ \vdots \\ x_2 \\ x_1 \end{Bmatrix}
$$

$$
= - \begin{bmatrix} m_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{y}_0 \tag{39}
$$

ここで，i 層だけを取り出した際の固有円振動数 ω_{i*} と減衰比 h_{i*}，および質量比 μ_{i*} を以下で定義する．

$$
\omega_{i*}^2 = k_i / m_i, \quad 2h_{i*}\omega_{i*} = c_i / m_i \quad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{40}
$$

$$
\mu_{i*} = m_i / m_{i-1} \ (i = 2, 3, \cdots n) \tag{41}
$$

これらの記号を用いて，式(39)を書き換える．

$$
\begin{Bmatrix} \ddot{x}_n \\ \ddot{x}_{n-1} \\ \ddot{x}_{n-2} \\ \vdots \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2h_{n*}\omega_{n*} & 2h_{n*}\omega_{n*} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2\mu_{n*}h_{n*}\omega_{n*} & -2\mu_{n*}h_{n*}\omega_{n*} - 2h_{n-1*}\omega_{n-1*} & 2h_{n-1*}\omega_{n-1*} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu_{n-1*}h_{n-1*}\omega_{n-1*} & -2\mu_{n-1*}h_{n-1*}\omega_{n-1*} - 2h_{n-2*}\omega_{n-2*} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2\mu_{3*}h_{3*}\omega_{3*} - 2h_{2*}\omega_{2*} & 2h_{2*}\omega_{2*} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\mu_{2*}h_{2*}\omega_{2*} & -2\mu_{2*}h_{2*}\omega_{2*} - 2h_{1*}\omega_{1*} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_n \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_{n-2} \\ \vdots \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_1 \end{Bmatrix}
$$

$$
+ \begin{bmatrix} -\omega_{n*}^2 & \omega_{n*}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu_{n*}\omega_{n*}^2 & -\mu_{n*}\omega_{n*}^2 - \omega_{n-1*}^2 & \omega_{n-1*}^2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{n-1*}\omega_{n-1*}^2 & -\mu_{n-1*}\omega_{n-1*}^2 - \omega_{n-2*}^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\mu_{3*}\omega_{3*}^2 - \omega_{2*}^2 & \omega_{2*}^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_{2*}\omega_{2*}^2 & -\mu_{2*}\omega_{2*}^2 - \omega_{1*}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ \vdots \\ x_2 \\ x_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{y}_0 \tag{42}
$$

対応する状態方程式は式(43)となる．

$$
\begin{Bmatrix} \ddot{x}_n \\ \ddot{x}_{n-1} \\ \ddot{x}_{n-2} \\ \vdots \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \dot{x}_n \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_{n-2} \\ \vdots \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2h_{n*}\omega_{n*} & 2h_{n*}\omega_{n*} & 0 & \cdots & 0 & -\omega_{n*}^2 & \omega_{n*}^2 & 0 \\ 2\mu_{n*}h_{n*}\omega_{n*} & -2\mu_{n*}h_{n*}\omega_{n*} - 2h_{n-1*}\omega_{n-1*} & 2h_{n-1*}\omega_{n-1*} & \cdots & 0 & \mu_{n*}\omega_{n*}^2 & -\mu_{n*}\omega_{n*}^2 - \omega_{n-1*}^2 & \omega_{n-1*}^2 \\ 0 & 2\mu_{n-1*}h_{n-1*}\omega_{n-1*} & -2\mu_{n-1*}h_{n-1*}\omega_{n-1*} - 2h_{n-2*}\omega_{n-2*} & \cdots & 0 & 0 & \mu_{n-1*}\omega_{n-1*}^2 & -\mu_{n-1*}\omega_{n-1*}^2 - \omega_{n-2*}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2\mu_{3*}h_{3*}\omega_{3*} - 2h_{2*}\omega_{2*} & 2h_{2*}\omega_{2*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\mu_{2*}h_{2*}\omega_{2*} & -2\mu_{2*}h_{2*}\omega_{2*} - 2h_{1*}\omega_{1*} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

(43)

$$
\begin{matrix}
\cdots & 0 & 0 \\
\cdots & 0 & 0 \\
\cdots & 0 & 0 \\
\ddots & \vdots & \vdots \\
\cdots & -\mu_{3*}\omega_{3*}^2-\omega_{2*}^2 & \omega_{2*}^2 \\
\cdots & \mu_{2*}\omega_{2*}^2 & -\mu_{2*}\omega_{2*}^2-\omega_{1*}^2 \\
\cdots & 0 & 0 \\
\cdots & 0 & 0 \\
\cdots & 0 & 0 \\
\ddots & \vdots & \vdots \\
\cdots & 0 & 0 \\
\cdots & 0 & 0
\end{matrix}
\begin{Bmatrix} \dot{x}_n \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_{n-2} \\ \vdots \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_1 \\ x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ \vdots \\ x_2 \\ x_1 \end{Bmatrix}
-
\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\ddot{y}_0
\tag{43}
$$

上式に対応する特性方程式は，

$$
\begin{vmatrix}
-2h_n\omega_n-s & 2h_n\omega_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
2\mu_n h_n\omega_n & -2\mu_n h_n\omega_n-2h_{n-1*}\omega_{n-1*}-s & 2h_{n-1*}\omega_{n-1*} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -\omega_{n*}^2 & \omega_{n*}^2 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 2\mu_{n-1*}h_{n-1*}\omega_{n-1*} & -2\mu_{n-1*}h_{n-1*}\omega_{n-1*}-2h_{n-2*}\omega_{n-2*}-s & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \mu_{n*}\omega_{n*}^2 & -\mu_{n*}\omega_{n*}^2-\omega_{n-1*}^2 & \cdots & \omega_{n-1*}^2 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \mu_{n-1*}\omega_{n-1*}^2 & \cdots & -\mu_{n-1*}\omega_{n-1*}^2-\omega_{n-2*}^2 & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -2\mu_3 h_3\omega_3-2h_{2*}\omega_{2*}-s & 2h_{2*}\omega_{2*} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 2\mu_2 h_2\omega_{2*} & -2\mu_2 h_2\omega_{2*}-2h_1\omega_1-s & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -s & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -s & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -s & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{vmatrix}
=0
\tag{44}
$$

である．ここで，2.2 節と同様に分割行列を用いて行列式を表現すると，式(44)は次式となる．

$$
\begin{vmatrix}
s^2+2h_{n*}\omega_{n*}s+\omega_{n*}^2 & -2h_{n*}\omega_{n*}s-\omega_{n*}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-2\mu_{n*}h_{n*}\omega_{n*}s-\mu_{n*}\omega_{n*}^2 & s^2+2\mu_{n*}h_{n*}\omega_{n*}s+2h_{n-1*}\omega_{n-1*}s+\mu_{n*}\omega_{n*}^2+\omega_{n-1*}^2 & -2h_{n-1*}\omega_{n-1*}s-\omega_{n-1*}^2 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -2\mu_{n-1*}h_{n-1*}\omega_{n-1*}s-\mu_{n-1*}\omega_{n-1*}^2 & s^2+2\mu_{n-1*}h_{n-1*}\omega_{n-1*}s+2h_{n-2*}\omega_{n-2*}s+\mu_{n-1*}\omega_{n-1*}^2+\omega_{n-2*}^2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & s^2+2\mu_{3*}h_{3*}\omega_{3*}s+2h_{2*}\omega_{2*}s+\mu_{3*}\omega_{3*}^2+\omega_{2*}^2 & -2h_{2*}\omega_{2*}s-\omega_{2*}^2 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -2\mu_{2*}h_{2*}\omega_{2*}s-\mu_{2*}\omega_{2*}^2 & s^2+2\mu_{2*}h_{2*}\omega_{2*}s+2h_{1*}\omega_{1*}s+\mu_{2*}\omega_{2*}^2+\omega_{1*}^2
\end{vmatrix}
=0
\tag{45}
$$

これまでの統一式の誘導から，s に関係しない定数項と s に関する 1 次の項だけで，同様の式が得られると推測される．s の 0 次と 1 次の項だけを得る目的ならば，上式で s の 2 次以上の項は無視することができる．

$$
\begin{vmatrix}
2h_{n*}\omega_{n*}s+\omega_{n*}^2 & -2h_{n*}\omega_{n*}s-\omega_{n*}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-2\mu_{n*}h_{n*}\omega_{n*}s-\mu_{n*}\omega_{n*}^2 & 2\mu_{n*}h_{n*}\omega_{n*}s+2h_{n-1*}\omega_{n-1*}s+\mu_{n*}\omega_{n*}^2+\omega_{n-1*}^2 & -2h_{n-1*}\omega_{n-1*}s-\omega_{n-1*}^2 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -2\mu_{n-1*}h_{n-1*}\omega_{n-1*}s-\mu_{n-1*}\omega_{n-1*}^2 & 2\mu_{n-1*}h_{n-1*}\omega_{n-1*}s+2h_{n-2*}\omega_{n-2*}s+\mu_{n-1*}\omega_{n-1*}^2+\omega_{n-2*}^2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 2\mu_{3*}h_{3*}\omega_{3*}s+2h_{2*}\omega_{2*}s+\mu_{3*}\omega_{3*}^2+\omega_{2*}^2 & -2h_{2*}\omega_{2*}s-\omega_{2*}^2 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -2\mu_{2*}h_{2*}\omega_{2*}s-\mu_{2*}\omega_{2*}^2 & 2\mu_{2*}h_{2*}\omega_{2*}s+2h_{1*}\omega_{1*}s+\mu_{2*}\omega_{2*}^2+\omega_{1*}^2
\end{vmatrix}
=0
\tag{46}
$$

行列式のある行に他行の定数倍を加えても，行列式の値は変わらない．第 1 行に μ_n を掛けて第 2 行に加えると，2 行 1 列の要素がゼロになり，計算し易くなる．

$$
\begin{vmatrix}
2h_{n*}\omega_{n*}s+\omega_{n*}^2 & -2h_{n*}\omega_{n*}s-\omega_{n*}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 2h_{n-1*}\omega_{n-1*}s+\omega_{n-1*}^2 & -2h_{n-1*}\omega_{n-1*}s-\omega_{n-1*}^2 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -2\mu_{n-1*}h_{n-1*}\omega_{n-1*}s-\mu_{n-1*}\omega_{n-1*}^2 & 2\mu_{n-1*}h_{n-1*}\omega_{n-1*}s+2h_{n-2*}\omega_{n-2*}s+\mu_{n-1*}\omega_{n-1*}^2+\omega_{n-2*}^2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 2\mu_{3*}h_{3*}\omega_{3*}s+2h_{2*}\omega_{2*}s+\mu_{3*}\omega_{3*}^2+\omega_{2*}^2 & -2h_{2*}\omega_{2*}s-\omega_{2*}^2 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -2\mu_{2*}h_{2*}\omega_{2*}s-\mu_{2*}\omega_{2*}^2 & 2\mu_{2*}h_{2*}\omega_{2*}s+2h_{1*}\omega_{1*}s+\mu_{2*}\omega_{2*}^2+\omega_{1*}^2
\end{vmatrix}=0
\tag{47}
$$

次に，第 2 行に μ_{n-1} を掛けて第 3 行に加えると，3 行 2 列の要素がゼロになる．

$$
\begin{vmatrix}
2h_{n*}\omega_{n*}s+\omega_{n*}^2 & -2h_{n*}\omega_{n*}s-\omega_{n*}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 2h_{n-1*}\omega_{n-1*}s+\omega_{n-1*}^2 & -2h_{n-1*}\omega_{n-1*}s-\omega_{n-1*}^2 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2h_{n-2*}\omega_{n-2*}s+\omega_{n-2*}^2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 2\mu_{3*}h_{3*}\omega_{3*}s+2h_{2*}\omega_{2*}s+\mu_{3*}\omega_{3*}^2+\omega_{2*}^2 & -2h_{2*}\omega_{2*}s-\omega_{2*}^2 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -2\mu_{2*}h_{2*}\omega_{2*}s-\mu_{2*}\omega_{2*}^2 & 2\mu_{2*}h_{2*}\omega_{2*}s+2h_{1*}\omega_{1*}s+\mu_{2*}\omega_{2*}^2+\omega_{1*}^2
\end{vmatrix}=0
\tag{48}
$$

同様の作業を繰り返すと行列は上三角行列になるため，行列式は対角成分の積で表現できる．

$$
\begin{vmatrix}
2h_{n*}\omega_{n*}s+\omega_{n*}^2 & -2h_{n*}\omega_{n*}s-\omega_{n*}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 2h_{n-1*}\omega_{n-1*}s+\omega_{n-1*}^2 & -2h_{n-1*}\omega_{n-1*}s-\omega_{n-1*}^2 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2h_{n-2*}\omega_{n-2*}s+\omega_{n-2*}^2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 2h_{2*}\omega_{2*}s+\omega_{2*}^2 & -2h_{2*}\omega_{2*}s-\omega_{2*}^2 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2h_{1*}\omega_{1*}s+\omega_{1*}^2
\end{vmatrix}=0
\tag{49}
$$

最終的に，行列式は式(49)になる．

$$
\prod_{i=1}^{n}(2h_{i*}\omega_{i*}s+\omega_{i*}^2)=0 \tag{50}
$$

上式で s に関係しない項は式(51), s に関する 1 次の項は式(52)となる．

$$
\prod_{i=1}^{n}\omega_{i*}^2=\omega_{1*}^2\omega_{2*}^2\cdots\omega_{n*}^2 \tag{51}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}[2h_{i*}\omega_{i*}\frac{1}{\omega_{i*}^2}\prod_{j=1}^{n}\omega_j^2]=2\sum_{i=1}^{n}[\frac{h_{i*}}{\omega_{i*}}\prod_{j=1}^{n}\omega_{j*}^2] \\
&=2\omega_{1*}\omega_{2*}\cdots\omega_{n*}(h_{1*}\omega_{2*}\cdots\omega_{n*} \\
&\qquad +h_{2*}\omega_{1*}\omega_{3*}\cdots\omega_{n*}+\cdots+h_{n*}\omega_{1*}\cdots\omega_{n-1*})
\end{aligned}
\tag{52}
$$

3.2 指定する極による特性方程式

解析モデルは n 個の振動モードをもつ. i 次モードの固有円振動数とモード減衰比を，第 2 章と同様にそれぞれ ω_i と h_i とおくと，対応する特性方程式は次式である．

$$
\prod_{i=1}^{n}(s^2+2h_i\omega_i s+\omega_i^2)=0 \tag{53}
$$

3.1 節と同様に，特性方程式(53)で定数項と s に関する 1 次の項は、それぞれ式(54)と式(55)である．

$$
\prod_{i=1}^{n}\omega_i^2=\omega_1^2\omega_2^2\cdots\omega_n^2 \tag{54}
$$

$$
\begin{aligned}
&2\sum_{i=1}^{n}[\frac{h_i}{\omega_i}\prod_{j=1}^{n}\omega_j^2] \\
&=2\omega_1\omega_2\cdots\omega_n(h_1\omega_2\cdots\omega_n \\
&\qquad +h_2\omega_1\omega_3\cdots\omega_n+\cdots+h_n\omega_1\cdots\omega_{n-1})
\end{aligned}
\tag{55}
$$

3.3 統一式

極配置法では，式(51)と式(54)が等しく，式(52)と式(55)が等しくなるから，

$$
\omega_{1*}^2\omega_{2*}^2\cdots\omega_{n*}^2=\omega_1^2\omega_2^2\cdots\omega_n^2 \tag{56}
$$

$$
\begin{aligned}
&\omega_{1*}\omega_{2*}\cdots\omega_{n*}(h_{1*}\omega_{2*}\cdots\omega_{n*}+h_{2*}\omega_{1*}\omega_{3*}\cdots\omega_{n*}+\cdots+h_{n*}\omega_{1*}\cdots\omega_{n-1*}) \\
&=\omega_1\omega_2\cdots\omega_n(h_{1*}\omega_{2*}\cdots\omega_n+h_2\omega_1\omega_3\cdots\omega_n+\cdots+h_n\omega_1\cdots\omega_{n-1})
\end{aligned}
\tag{57}
$$

式(57)に式(56)を代入すると，式(24)を n 質点 n 自由度系に拡張した

$$
\sum_{i=1}^{n}\frac{h_{i*}}{\omega_{i*}}=\frac{h_{1*}}{\omega_{1*}}+\frac{h_{2*}}{\omega_{2*}}+\cdots+\frac{h_{n*}}{\omega_{n*}}=\frac{h_1}{\omega_1}+\frac{h_2}{\omega_2}+\cdots+\frac{h_n}{\omega_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{\omega_i} \tag{58}
$$

が得られる．

4. 数値解析法

第 2 章で示した建物モデルで質量（m_U， m_I および m_D）が与えられて，極配置によって各層の剛性（k_U， k_I および k_D）と減衰（c_U， c_I および c_D）を決める問題を想定する．この場合，質量比は未知パラメータでなくなるため，未知数は 6 つとなる．

式(32)～(37)は未知数の 1 次式ではないため，質量が与えらえても複雑である．そこで，実用的な減衰値の範囲では，減衰が固有振動数に与える影響は小さいことから，

$$h_1 = h_2 = h_3 = 0 \tag{59}$$

として，まず目標とする減衰比を無視する．さらに建物の減衰比 h_U，h_{I*} または h_{D*} の積も小さい値として無視すると，式(32)，式(34)および式(36)を考える必要がなくなり，式(33)，式(35)および式(37)は次のように簡略化される．

$$(1+\mu_U)\omega_U^2 + (1+\mu_3)\omega_{I*}^2 + \omega_{D*}^2 = (1+b^2+c^2)\omega_1^2 \tag{60}$$

$$\begin{aligned}&(1+\mu_D)\omega_U^2\omega_{I*}^2 + \omega_{I*}^2\omega_{D*}^2 + (1+\mu_U)\omega_{D*}^2\omega_U^2 \\ &\quad = (b^2+b^2c^2+c^2)\omega_1^4\end{aligned} \tag{61}$$

$$\omega_U^2\omega_{I*}^2\omega_{D*}^2 = b^2c^2\omega_1^6 \tag{62}$$

ここで，b と c は，1 次固有円振動数に対する 2 次と 3 次の固有円振動数の比である．

$$\omega_2 = b\omega_1,\quad \omega_3 = c\omega_1 \tag{63}$$

さらに，無次元量

$$x=\frac{\omega_U^2}{\omega_1^2}=\frac{f_U^2}{f_1^2},\quad y=\frac{\omega_{I*}^2}{\omega_1^2}=\frac{f_{I*}^2}{f_1^2},\quad z=\frac{\omega_{D*}^2}{\omega_1^2}=\frac{f_{D*}^2}{f_1^2} \tag{64}$$

を導入すると，無次元量に関する

$$(1+\mu_U)x+(1+\mu_3)y+z=1+b^2+c^2 \tag{65}$$

$$(1+\mu_D)xy+yz+(1+\mu_U)zx=b^2+b^2c^2+c^2 \tag{66}$$

$$xyz=b^2c^2 \tag{67}$$

が得られる．f_U，f_{I*} および f_{D*} は，それぞれ固有円振動数 ω_U，ω_{I*} および ω_{D*} に対応する固有振動数である．

次に，式(32)，式(34)および式(36)で減衰比の積を無視すると，3 つの減衰比に関する線形連立方程式

$$\begin{Bmatrix} h_U \\ h_{I*} \\ h_{D*} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+\mu_U)\sqrt{x} & (1+\mu_3)\sqrt{y} & \sqrt{z} \\ \sqrt{x}\{(1+\mu_D)y+(1+\mu_U)z\} & \sqrt{y}\{z+(1+\mu_D)x\} & \sqrt{z}\{(1+\mu_U)x+y\} \\ \sqrt{x}yz & x\sqrt{y}z & xy\sqrt{z} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} h_1+bh_2+ch_3 \\ (b^2+c^2)h_1+b(1+c^2)h_2+c(1+b^2)h_3 \\ bc(bch_1+ch_2+bh_3) \end{Bmatrix} \tag{68}$$

が導かれ，固有円振動数を求めた後に減衰比を得ることができる．このように非減衰固有値問題として固有円振動数を求めれば，6 元連立方程式を固有円振動数に関する 3 元連立方程式と減衰比に関する 3 元連立方程式に分離できる利点がある．

連立方程式(65)～(67)を数値的に解く一つの簡単な方法を示す．式(65)を移項して z に関して

$$z=1+b^2+c^2-(1+\mu_U)x-(1+\mu_3)y \tag{69}$$

として解き，これを式(66)に代入する．

$$\begin{aligned}&(1+\mu_U)^2x^2+\{(1+2\mu_U)y-(1+\mu_U)(1+b^2+c^2)\}x \\ &\quad -(1+b^2+c^2)y+(1+\mu_3)y^2+b^2+b^2c^2+c^2=0\end{aligned} \tag{70}$$

また，式(69)を式(67)に代入する．

$$y=\frac{(1+b^2+c^2)x-(1+\mu_U)x^2 \pm\sqrt{[(1+b^2+c^2)x-(1+\mu_U)x^2]^2-4(1+\mu_3)b^2c^2x}}{2(1+\mu_3)x} \tag{71}$$

そして，次の手順で解く．

1) 1 次固有円振動数 ω_1 および係数 b と c を決める．
2) x の検索範囲を決めて，Δx ずつ値を変化させる．
3) 仮定した x を用いて，式(71)の y の値を求める．
4) 式(70)に y を代入して，式(70)が成立することを確認する．成立しない場合には 2)に戻る．

同様に，y の検索範囲を決めて，Δy ずつ値を変化させる方法も存在する．その場合は，式(71)の代わりに

$$x=\frac{(1+b^2+c^2)y-(1+\mu_3)y^2 \pm\sqrt{[(1+b^2+c^2)y-(1+\mu_3)y^2]^2-4(1+\mu_U)b^2c^2y}}{2(1+\mu_U)y} \tag{72}$$

を使う．式(71)と式(72)から，目標とする固有円振動数とモード減衰比の 3 組を固定した際に，複数の解があることが示唆される．

5. 基本的性質

5.1 各層単独の固有振動数

3 質点の質量を同じにした条件（$\mu_U = 1$，$\mu_D = 2$）下で，振動数比 b と c を変動させ，解 x，y および z の存在領域を調べる．Fig.2 は横軸を b，縦軸を c にして，解の存在領域を示している．数値解析では，振動数比 b と c を 0.01 間隔で変化させて，式(65)～(67)を用いて解いた．

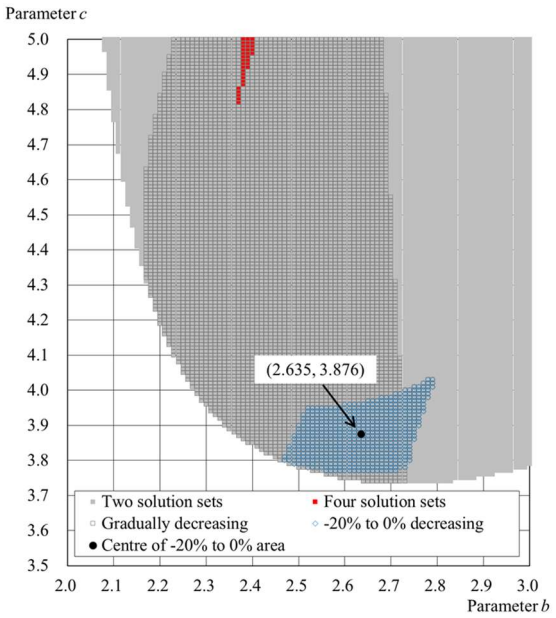


Fig.2 Region of solution existence

解が存在しない領域があり，解が存在する場合には 2 組ある領域（凡例：Two solution sets，灰色）が大部分を占め，4 組ある領域（凡例：Four solution sets，赤色）はきわめて狭い．c が 3.74 以上の場合に解が存在する．一般に，建物の層剛性は上層ほど低くなる傾向にある．そこで，この剛性の条件を満たす解が少なくとも一つ存在する領域を，格子（凡例：Gradually decreasing）で示す．3 質点の質量を同じにしているため，この格子は層単独の固有円振動数が上層ほど小さい解の領域になる（$x < y < z$）．さらに，無次元量 x と y が直下の層の固有振動数の 20%減以内に収まっている領域を青色（凡例：-20% to 0% decreasing）で示す．この青色の領域は，剛性が極端に上下層で変化しないことを意味し，不等式 $0.8\sqrt{y} \le \sqrt{x} \le 1.0\sqrt{y}$ と $0.8\sqrt{z} \le \sqrt{y} \le 1.0\sqrt{z}$ を満たす領域である．黒点は重心（$b = 2.635$, $c = 3.876$）である．

Fig.2 は，目標とする極配置を満たす固有円振動数 ω_U，ω_{I*} および ω_{D*} の組み合わせが，数学的には複数存在するが，実建物の動特性に整合する解は限られていることを示している．極配置には任意性があることが知られており（疋田・小山・三浦，1975；Wonham, 1967; Wonham, 1979），複数の解はこれに対応している．

Fig.2 から，b が 2.40 と 2.60 の場合，および c が 3.90 と 4.95 の場合を取り出し，各層の無次元固有振動数（$\sqrt{x} = f_U / f_1$，$\sqrt{y} = f_{I*} / f_1$ および $\sqrt{z} = f_{D*} / f_1$）を調べる．

Fig.3 は b が 2.40 の場合で，解は c が 3.85 以上の領域で存在する．黒色，赤色および青色の丸印は，それぞれ最上層単独，中間層単独および最下層単独の無次元固有振動数である．c が 3.85～4.95 の領域では解が 2 つあり，c が 4.96～5.00 の領域では解は 4 つある．曲線を構成する丸印は，4 つの解で色分けされており，曲線に沿って解の番号も示している．ただし，解の番号は同じ組であることを表現しているに過ぎない．例えば，黄色で塗られた印は解 3 を，緑色で塗られた印は解 4 を示す．b をある値に固定した場合には，同じ番号で示される 3 つの固有振動数比が一組となる．

解は，c が 3.85 で凸になる 3 曲線と，c が 4.96 で凸になる 3 曲線で構成されている．c が 3.85 で凸になる 3 曲線で c が 3.85～4.95 の領域では，最上層と中間層の上側の曲線が解 1，下側の曲線が解 2 となる一方，最下層では上側の曲線が解 2，下側の曲線が解 1 となる．c が 4.96～5.00 の領域では，上述とは異なる曲線が複雑な様相を示す．最上層と最下層の無次元固有振動数比では，上側の曲線が解 1，下側の曲線が解 3 であるが，中間層の無次元固有振動数では，上側の曲線が解 3，下側の曲線が解 1 となる．

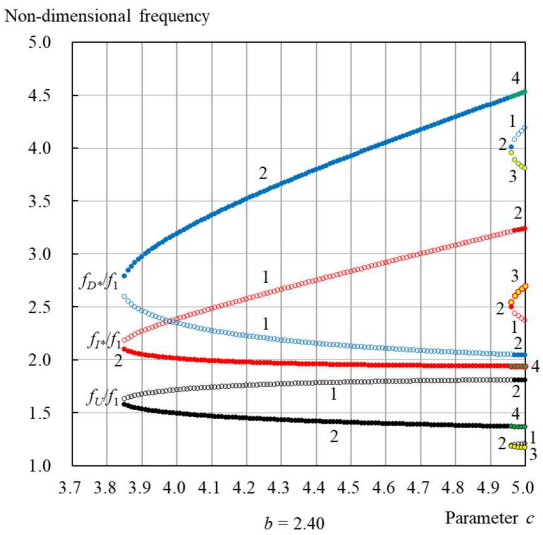


Fig.3 Non-dimensional natural frequencies (b=2.40)

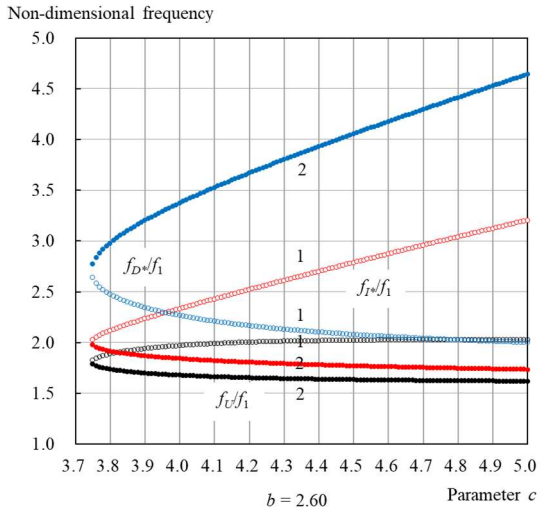


Fig.4 Non-dimensional natural frequencies (b=2.60)

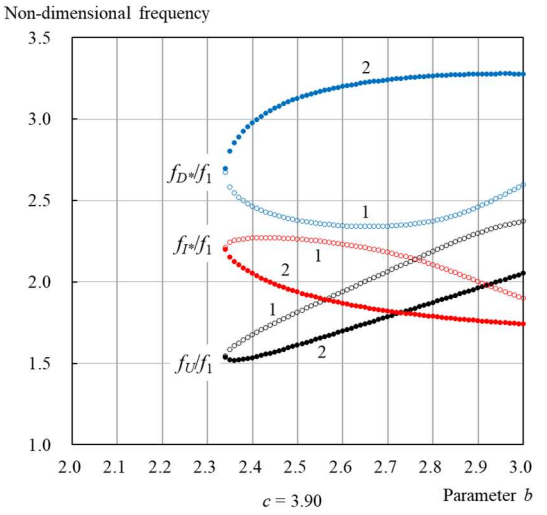


Fig.5 Non-dimensional natural frequencies (c=3.90)

Fig.4 は b が 2.60 の場合で，解は c が 3.75 以上の領域で存在している．黒色，赤色および青色の丸印は，それぞれ最上層，中間層および最下層の無次元固有振動数であり，Fig.3 と同様である．b が 2.60 の場合，解は常に 2 つであり，3 曲線だけで解が示されるため Fig.3 に比較して単純である．

Fig.5 は c を 3.90 に固定した場合である，解は b が 2.34 以上の領域で存在している．解は常に 2 つであり，3 曲線だけで解が示される点は Fig.4 と同じで単純である．しかし，b が大きくなると，最上層と中間層の無次元固有振動数の大小関係が完全に逆転する．

Fig.6 は c を 4.95 に固定した場合である，解は b が 2.09 以上の領域で存在している．解が 2 つの領域と 4 つの領域がある．4 つの領域は b が 2.38～2.39 の付近で見られ，解の曲線は S 字状である．

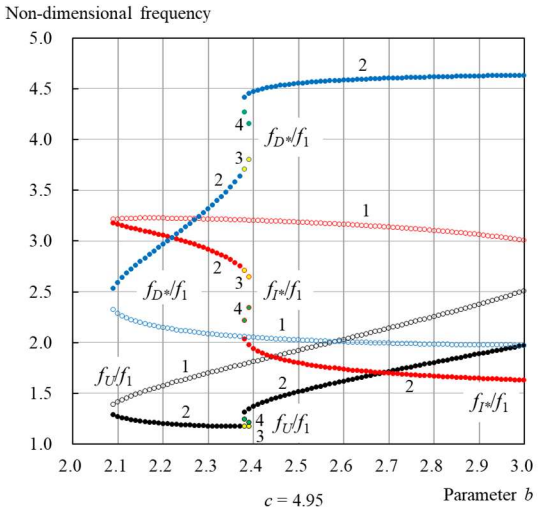
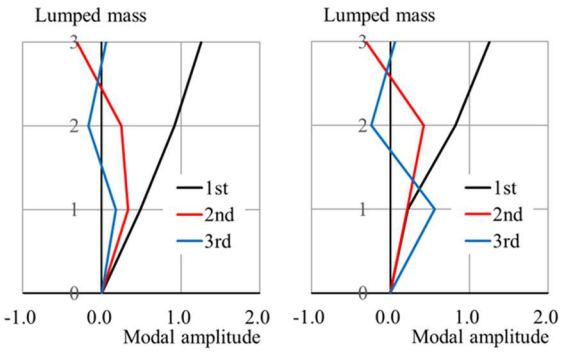


Fig.6 Non-dimensional natural frequencies (c=4.95)



(a) Solution set 1　　(b) Solution set 2

Fig.7 Modal shapes (μ_U = 1, μ_D = 2, b = 2.60, c = 3.90)

Fig.7 は，μ_U =1，μ_D=2，b = 2.60，c = 3.90 の場合に得られる 2 つの解で，非減衰固有値問題として得られたモード形（刺激関数）を示している．このモード形は，指定した 1 次固有振動数や仮定する質点質量の影響を受けない．図(a)が Fig.4 と Fig.5 で解 1 に対応し，図(b)が解 2 に対応している．

解 1 は，3 つの質点の振幅を調整して，指定した 3 つの固有振動数を得ている．一方，解 2 は最上質点（図では質点番号 3）と中間質点（図では質点番号 2）の振幅を調整して，まず 1・2 次モードで指定した固有振動数を得て，次に 3 つの質点で 3 次モードの固有振動数を得ている．この解釈は，最下質点（質点番号 1）で 1 次と 2 次のモード振幅がほぼ同じになっていることから支持されるであろう．図(a)の解 1 が，Fig.2 では固有振動数が直下の層の 20%減以内の解（凡例：-20% to 0% decreasing）に対応し，これは剛性が極端に変化しないことを意味している．一方，図(b)の解 2 はこの条件を満たしていない．

ここで，各質点の重量を 9.80665×10^3kN (1,000tf)，1 次固有振動数を 1.0Hz の建物を想定すると，Fig.7

に対応する層剛性は，式(2)，式(25)および式(26)を使って具体的に計算できる（Table 1）．表から，解1 の剛性変化が建物として不自然ではないことが確認できる．

Table 1 Story stiffness values for case presented in Fig.7
(Each weight: 1,000tf, 1st natural frequency: 1.0Hz)

Story	Solution 1	Solution 2
Upper (3rd)	148,306	113,729
Inter (2nd)	196,634	137,709
Lower (1st)	216,939	403,943

(Unit: kN/m)

5. 2 各層の減衰

第 2 章で導いた 6 元連立方程式は，非減衰固有値問題として扱うことで，第 4 章で示したように固有円振動数に関する 3 元連立方程式と減衰比に関する 3 元連立方程式に分離できた．5.1 節では，実建物の動特性に整合する固有円振動数という観点から，極の性質を調べた．この 5.2 節では，減衰という観点から極の性質を調べる．3DOF モデルの各層の減衰を建物動特性に整合させるには，減衰は正の値でなければならない．

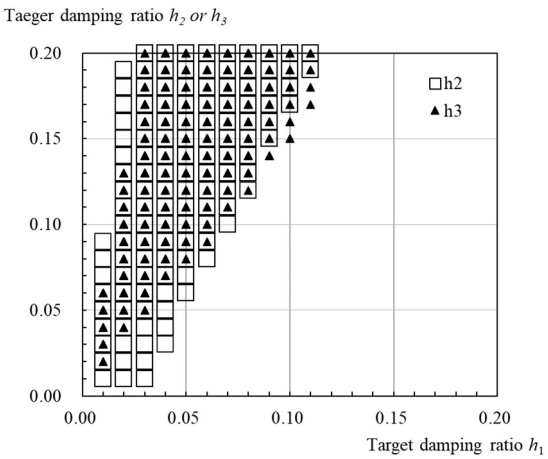


Fig.8 Useful and practical combinations of target damping ratios (b =2.60, c =3.90)

Fig.8 は，b を 2.60，c を 3.90 に固定して，モード減衰比 h_i（i = 1～3）を 0.01 から 0.20 の範囲で 0.01

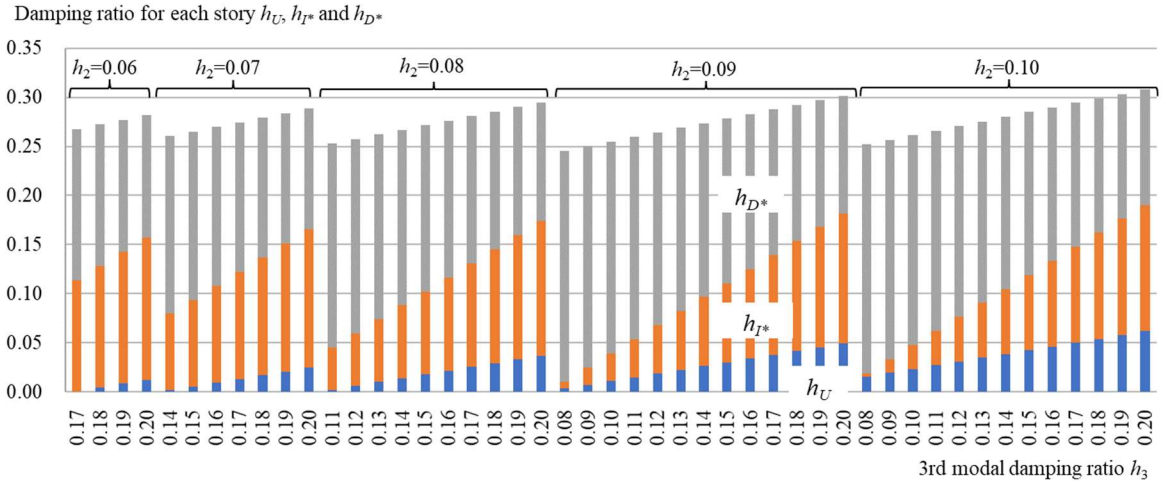


Fig.9 Damping ratios for each story (b =2.60, c =3.90, h_1 =0.05, h_2 =0.06 to 0.10)

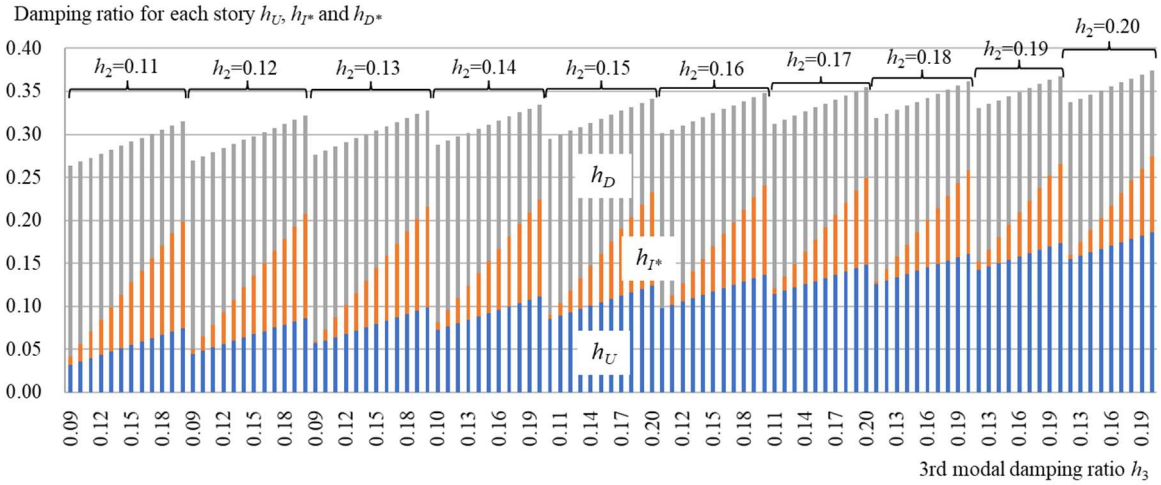


Fig.10 Damping ratios for each story (b =2.60, c =3.90, h_1 =0.05, h_2 =0.11 to 0.20)

ずつ変動させた場合に，層単独の減衰比 h_U ， h_{I*} および h_{D*} が正となる h_i の組み合わせを示している．言い換えると，実建物としての解が存在する組み合わせである．図の横軸は指定した 1 次モード減衰 h_1 を，縦軸は指定した 2･3 次のモード減衰（ h_2 と h_3 ）を示す．固定した b と c に対応する無次元固有振動数（ $\sqrt{x}=f_U/f_1$， $\sqrt{y}=f_{I*}/f_1$， $\sqrt{z}=f_{D*}/f_1$ ）は 2 組存在し，（1.938, 2.232, 2.344）と（1.697, 1.868, 3.199）である．前者は Fig.4 と Fig.5 では解 1 に対応し，後者は解 2 に対応する．4.1 節から，解 1 が実建物の剛性分布に整合すると考えられるため，ここでは解 1 に対応する減衰のみを考察する．層単独の減衰比がすべて正になる領域は限られており， h_2 と h_3 が h_1 よりも高い領域が該当している．数学的に得られる解のうち，建物で実現できる解は限られており，その選択を固有振動数と減衰比の観点から行う必要がある．

Fig.8から h_1 が0.05の場合を取り出し，各層の減衰比を示したものがFig.9とFig.10である．Fig.8で示されるように， h_2 が0.06以上の場合に限り，層の減衰比は正になる．Fig.9は h_2 が0.06から0.10の場合を，Fig.10は h_2 が0.11から0.20の場合を示している．3つの減衰比の合計（ $h_U + h_{I*} + h_{D*}$ ）は0.25～0.37の範囲にほぼ収まっているが，3つの減衰比の割合は h_3 によって異なっている．ある h_2 に着目した場合， h_3 が大きいほど，最上層の減衰比（ h_U ：青色）と中間層の減衰比（ h_{I*} ：オレンジ色）が大きくなっている．この現象は，Fig.7の解1のモード形で説明できる．2次モード形では最上層の層間変位が大きいことから， h_2 を大きくする影響は最上層に顕著に表れる．同様に，3次モード形では中間層の層間変位が大きいために， h_3 を大きくする影響は中間層に顕著に表れる．

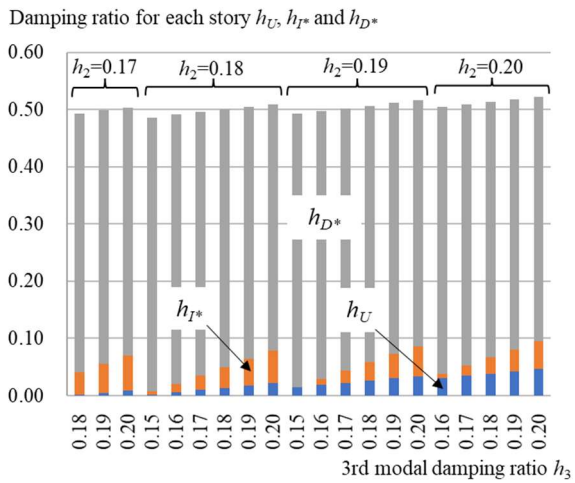


Fig.11 Damping ratios for each story (b =2.60, c =3.90, h_1 =0.10, h_2 =0.17 to 0.20)

Fig.11は h_1 を0.10にした場合である．この場合は， h_2 が0.17以上の場合に限り，層の減衰が正になる．ここでもFig.9とFig.10に示した傾向は見られるが， h_1 が0.10と高いために，1次モードの影響が大きくなり，結果的に最下層の減衰が支配的になっている．

なお，一部の層で減衰が負になる非現実的な解では，減衰が負でない層の減衰を大きくして，目標となる3つのモード減衰をすべて正にしていた．

最後に，トレードオフ関係を表現している式(24)と式(31)を幾何学的に解釈する．例えば，式(31)を固有円振動数（記号ω）から固有振動数（記号f）に置き換えて考える．非減衰固有値問題として扱うと，提案した極配置法では各層の固有振動数が先に計算される．したがって，式(32)で左辺の分母と右辺のすべての項の値は固定され，3つの層の変数が減衰比となる．この減衰比を直交座標系で表現すれば，求めようとする減衰比は，

$$\frac{h_U}{f_U}+\frac{h_{I*}}{f_{I*}}+\frac{h_{D*}}{f_{D*}}=d\ ,\quad d=\sum_{i=1}^{3}\frac{h_i}{f_i} \tag{73}$$

で表現される平面上の $h_U>0$， $h_{I*}>0$ かつ $h_{D*}>0$ の領域を動くことになる．

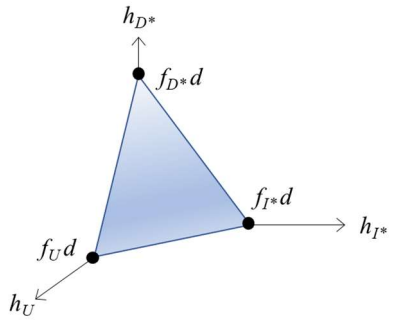


Fig.12 Damping ratio plane

6. まとめ

質点間に剛性と減衰を並列に配置した3DOFせん断振動型建物モデルに極配置法を適用して，目標とするモード特性と建物モデルの関係を明らかにした．このモデルはパラメータを調整することによって，耐震構造だけではなく，基礎免震，中間層免震，TMDによる制振，さらには層間に取り付けるダンパを簡易に表現することができる．

その成果は，次の4項目に整理される．

1) これまでの3DOFモデルに極配置法を適用した研究では，1つの層だけに減衰があるモデルを扱っ

ていた．その結果，基礎免震，中間層免震およびTMDによる制振ごとに異なる解析モデルを採用していた．本報では，全層に減衰を考慮することによって，すでに報告されている基礎免震，中間層免震およびTMDによる制振を統合するだけではなく，層間ダンパも表現して一般性が高い極配置法を導いた．また，統一的なトレードオフ関係式がMDOFモデルでも存在していることを導いた．

2) 質量を仮定して非減衰固有値問題として扱うことで，指定した極に対応する各層の剛性を減衰と独立に求めることができる．提案手法では，はじめに層剛性に対応するように定義した固有円振動数が得られ，その後に剛性に対応する減衰比が得られる．

3) 目標とする3つのモードの極を指定すると，建物の質量が得られている場合には，式(24)や式(31)によって建物の剛性と減衰が制約を受ける．極配置は，目標の制約下で各層の剛性と減衰をどう割り振るかという問題になり，3層のパラメータ値の関係にトレードオフが生じる．このトレードオフ関係は，モデルのパラメータの定義に依存しない普遍性が高い式である．剛性を決めた後に減衰が決まるため，層の減衰にトレードオフ関係が生じるという解釈も可能である．減衰の拘束条件は，平面の方程式で表現することができる．減衰は2・3次モードで大きい値を目標に掲げた方が各層で正の値を得易かった．

4) 得られる解には任意性があり，質量を仮定しても，同一の設計目標で複数の解が数学的に存在する．しかし，一般に建物の層剛性が上層ほど低くなる傾向にある点と，層の減衰が正である点を考慮すると，実建物に適用できる解は限られ，その存在領域は狭い．建物の動特性に見合う実用的な解では，全層の剛性を調整して目標となるモード特性を得ているが，非実用的な解は最初の2つのモードを連続する2層の剛性のみを調整して得ている．

参考文献

池田芳樹・小堀鐸二（1994）：単一制御力による1軸偏心構造物のアクティブ振動制御，日本建築学会構造系論文集，第462号，pp.61-68.

池田芳樹（2021）：建物の基礎免震，中間層免震および同調型マスダンパによる制振の統一的理解，京都大学防災研究所年報，第64号B，pp.24-42.

松本祐輝・池田芳樹（2021）：基礎免震，中間層免震および同調型マスダンパによる制振の統一的理解，日本建築学会近畿支部研究発表報告集，第61号，構造系，pp.341-344.

松本祐輝・池田芳樹（2022）：建物の基礎免震，中間層免震および同調型マスダンパによる制振の統一的理解，構造工学論文集（日本建築学会），Vol.68B, pp.367-375.

依田弘光・小山昭一・三浦良一（1975）：極配置問題におけるフィードバックゲインの自由度と低ゲインの導出，計測自動制御学会論文集，Vol.11, No.5, pp.556-561.

和田章・清水敬三・川合広樹・岩田衛・阿部重孝（1998）：建築物の損傷制御設計，丸善株式会社，220pp.

山本雅史・鈴木祥之（1998）：アクティブマスダンパーのストローク制約を考慮した極配置アルゴリズムによる実大構造物の制震に関する実験的研究，日本建築学会構造系論文集，第514号，pp.127-132.

Ahmadizadeh, M. and Zare, A.R. (2012): Optimal design of passive control systems using stiffness modification and pole assignment algorithm, *Proc. of 15th World Conf on Earthquake Eng.* 2012, Lisbon, Portugal, Vol.30, pp.24065-24074.

Basu, B. and Nielsen, S.R.K. (2011): A multi-modal control using a hybrid pole-placement–integral resonant controller (PPIR) with experimental investigations, *Struct. Cont. and Health Monitoring*, Vol.18, Issue 2, pp.191-206.

Caughey, T.K. (1960): Sinusoidal excitation of s system with bilinear hysteresis, *J. of Applied Mechanics*, ASME, Vol.27, No.4, pp.640-643.

Caughey, T.K. (1963): Equivalent linearization techniques, *J. of the Acoustical Society of America*, Vol.35, No.11, pp.1706-1711.

Connor, J.J., Wada, A., Iwata, M. and Huang, Y.H. (1997): Damage-controlled structures. I: Preliminary design methodology for seismically active regions, *J. of Structural Eng*. ASCE, Vol.123, No.4, pp.423-431.

FEMA (Federal Emergency Management Agency) 356 (2000): Prestandard and Commentary for the Seismic Rehabilitation of Buildings, American Society of Civil Engineers, 519pp.

Fujino, Y., Siringoringo, D.M., Ikeda, Y., Nagayama, T. and Mizutani, T. (2019): Research and implementations of structural monitoring for bridge and building structures in Japan, Engineering, Vol.5, No.6, pp.1093-1119.

Ikeda, Y. (2009): Active and semi-active vibration control of buildings in Japan -Practical applications and verification-, *Struct. Cont. and Health Monitoring*, Vol.16, Issue 7-8, pp.703-723.

Ikeda, Y. (2016): Verification of system identification utilizing shaking table tests of a full-scale 4-story steel building, *Earthquake Eng. & Struct. Dyn.*, Vol.45, Issue 4, pp.543-562.

Ikeda, Y. (2021): Fundamental equation based on pole allocation for interstory seismic isolation of buildings, *Struct. Cont. and Health Monitoring*, Vol.28, Issue 3, 19 pages.

Ikeda, Y., Matsumoto, Y. (2022): Unified description of passive vibration control for buildings based on pole allocation to three-degree-of-freedom model, *Struct. Cont. and Health Monitoring*, Vol.29, Issue 9, 17 pages.

Kelly, J.M. (1997): Earthquake-resistant Design with Rubber (2nd Edition), Springer-Verlag London, 243pp.

Leipholz, H.H.E. and Abdel-Rohman, M. (1986): Control of Structures, Martinus Nijhoff Publications, 413pp.

Loh, C.H. and Lin, H.M. (1996): Application of off-line and on-line identification techniques to building seismic response data, *Earthquake Eng. & Struct. Dyn.*, Vol.25, Issue 3, pp.269-290.

Meirovitch, L. (1990): Dynamics and Control of Structures, John Wiley & Sons, Inc., 425pp.

Pnevmatikos, N. (2017): Pole placement algorithm for control of civil structures subjected to earthquake excitation, *J. of Applied and Computational Mechanics*, Vol.3, No.1, pp.25-36.

Pnevmatikos, N.G. and Gantes, C.J. (2007): Pole selection for structural control using the complex Fourier characteristics of the incoming earthquake, *Structural Cont. and Health Monitoring*, Vol.14, Issue 3, pp.428-447.

Soong, T.T. and Dargush, G.F. (1997): Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering, John Wiley & Sons Ltd., West Sussex, 356pp.

Wonham, W.M. (1967): On pole assignment in multi -input controllable linear system, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.12, No.6, pp.660-665.

Wonham, W.M. (1979): Linear Multivariable Control - A Geometric Approach, Springer-Verlag, New York, 334pp.

Zare, A.R. and Ahmadizadeh M. (2014): Design of viscous fluid passive structural control systems using pole assignment algorithm, *Struct. Cont. and Health Monitoring*, Vol.21, Issue 7, pp.1084-1099.

（論文受理日：2022年7月11日）