京都大学防災研究所年報 第 64 号 B
DPRI Annuals, No. 64 B, 2021

局所細密化を適用したRBF移流モデルの安定性と保存性

Stability and Preservability of RBF Transport Model with Local Node Refinement

小笠原宏司[(1)]・榎本剛

Koji OGASAWARA [(1)] and Takeshi ENOMOTO

(1) 京都大学大学院理学研究科

(1) Graduate School of Science, Kyoto University, Japan

Synopsis

Radial Basis Functions (RBF) have attracted attention as a tool for solving PDEs on a sphere in recent years because of the ability to achieve spectral accuracy and applicability to unstructured node layouts. Because RBF provides opportunities for local node refinement, several studies about adaptive node refinement were conducted using electrostatic repulsion. In this study, the Schmidt transform is used as a tool of local node refinement. This study shows that the Schmidt transform improves stability and conservation. The stability and conservation are examined in a test case with vortex roll-up. The eigenvalue stability shows that local node refinement improves stability of the transport scheme. The verification of conservation shows that the transport scheme with the Schmidt transformation conserves the spherical integration of scalar value in absolute error at O (10^{-7}).

キーワード：RBF移流モデル，動径基底関数
Keywords: RBF-transport scheme, Radial Basis Functions

1.　はじめに

動径基底関数(RBF)は距離のみに依存する関数である(Fig. 1). RBFは無限回微分可能なRBFと有限回微分可能なRBFに分類される. 無限回微分可能なRBFは形状パラメーターεを持っている. Gaussian RBF (Fig. 1)ではεを大きくとると尖った形になり，小さくとるとなだらかな形になる. RBFは多次元における格子状でない節点配置において未知の曲面を表現することを目的に研究が行われた関数である. 近年RBFは内挿以外にも楕円型，双曲線型偏微分方程式の解法 (Flyer and Wright 2007) にも用いられている.

RBFを用いた双曲線型偏微分方程式の解法は非格子状の局所細密化節点を扱うことが可能である.
この特徴をいかした適合節点(時事刻々と節点配置が流体の状態に合わせて変化する)を適用する研究が行

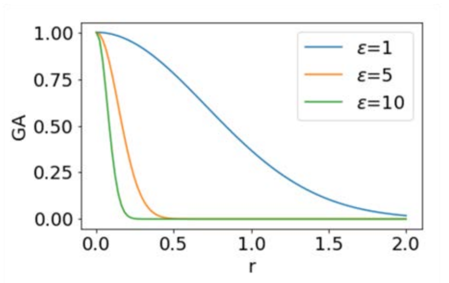


Fig. 1 Gaussian RBF as a function of distance between nodes.

われている. しかし, 近年は高解像度モデルにRBFを適用する動きが盛んに行われてきている. そこで巨大な

節点数に対応するために反復解法を用いない局所細密化が必要になることが考えられる. そこでSchmidt変換 (Schmidt 1977) の適用を考える.

Schmidt変換を適用したRBF法の研究は誤差の収束性のみ報告されており, 安定性や保存性は示されていない. よって本研究では渦の巻き上げ実験においてSchmidt変換を適用したRBF手法の安定性と保存性を検証する.本稿の構成は次のようになっている.まず２章において本研究で用いた節点配置について述べる. 次に３章で局所細密化, 細密化に合わせた形状パラメーターεについて述べる.4章ではテストケースについて述べる.5,6章では解析の結果をそれぞれ述べ, ７章でまとめる.

2. 節点配置

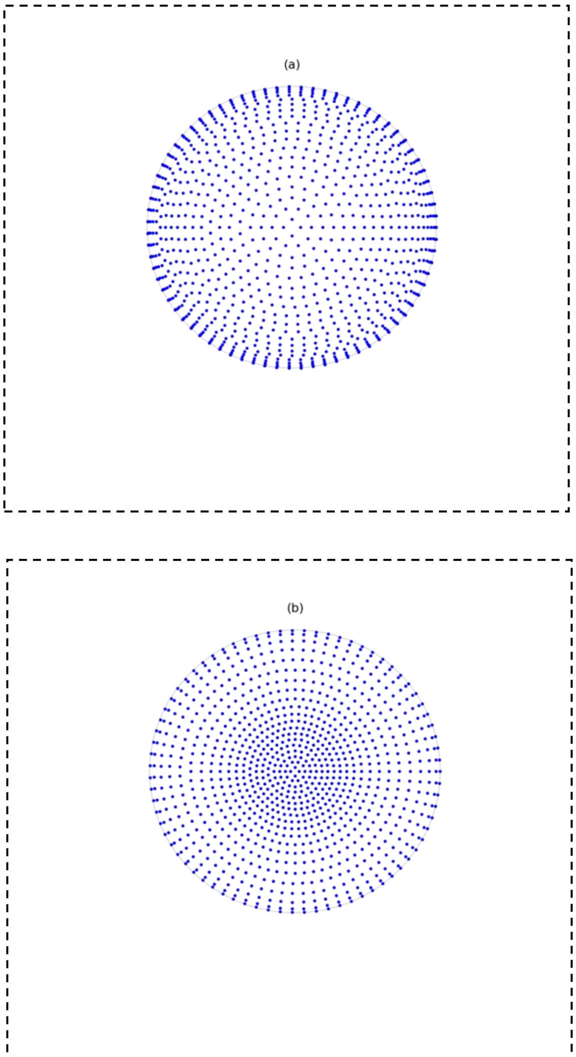


Fig. 2 Fully Reduced Grid. The figure (a) is quasi-uniform node. The figure (b) is refined node.

本研究では逓減格子 (Hortal and Simmons 1991) を節点配置として用いている(Fig. 2).逓減格子は赤道から極域にかけて緯度円上の節点が減少していく格子点である.緯度円上の節点は次の手順で作成した. １）子午線上の節点数から水平解像度を計算し, その解像度に対応する赤道上の節点数Nを計算する.２）FFTと相性の良い2, 3, ５の公倍数nを$n \leq N$まで計算する.３）緯度円の縮小（北にいくほど小さくなる）に合わせて水平解像度ができるだけ保つように緯度円上の節点を$n_k \rightarrow n_{k+1}$に変更していく.

3. 局所細密化

Schmid変換は緯度のみを変換する手法であり, 次式で変換される.

$$\theta' = \arcsin\left(\frac{(1-c^2)+(1+c^2)\sin(\theta)}{(1+c^2)+(1-c^2)\sin(\theta)}\right) \qquad (1)$$

θ:緯度, c：拡大率.

本研究ではテストケースに合わせ, 両極に細密化するために拡大率cを以下の式で変更した(Fig. 2 (b)).

$$c = c_0^{\sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)} \qquad (2)$$

$\mu = \sin(\theta)$.

3.1 変動するε

局所細密化節点を用いた移流モデルではRunge現象を抑制するために解像度に合わせた形状パラメーターの設定が必要である(Fornberg and Zuev 2007, Flyer and Lehto 2010).本研究ではSchmidt変換のmap factor を用いて形状パラメーターを計算した.計算式は以下である.

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{F(c,\mu')}} \qquad (3)$$

$\mu' = \sin\theta'$, ε_0：$c = 0$におけるε.

4. 渦の巻き上げ

渦の巻き上げ(Nair et al. 1999) は両極で渦が巻き上がっていく, スカラー値の移流を題材にしたテストである(Fig. 3).テストケースは極を座標変換で移動させて計算を行う.東西方向の移流のみであり, 東西風は角速度ωで定義される. 変換後の緯度をθ'とすると東西風は次式で表される.

$$u' = \omega(\theta')\cos\theta'$$

ωは次式で与えられる.

$$\omega(\theta') = \frac{3\sqrt{3}}{2\rho(\theta')}\operatorname{sech}^2\big(\rho(\theta')\big) \quad ,\rho(\theta') \neq 0 \qquad (4)$$

$$\omega(\theta') = 0 \qquad ,\rho(\theta') = 0 \qquad (5)$$

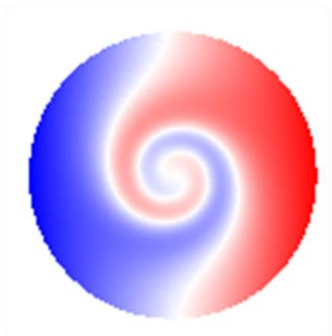
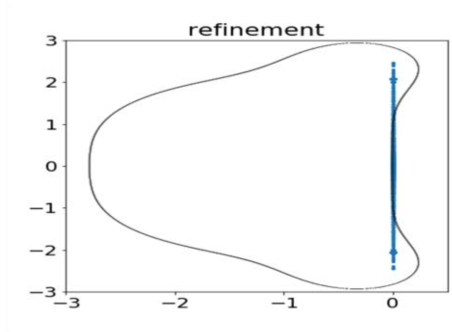


Fig. 3 The Exact solution at 3second.



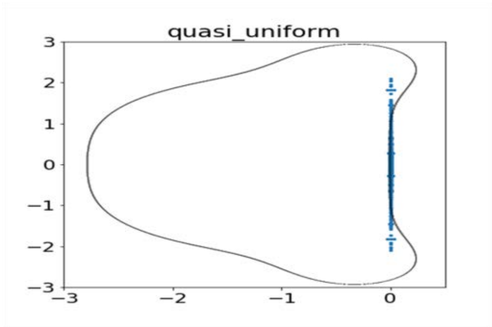


Fig. 4 The Eigenvalues of the different matrix with a stability domain of 4th order Runge-Kutta.

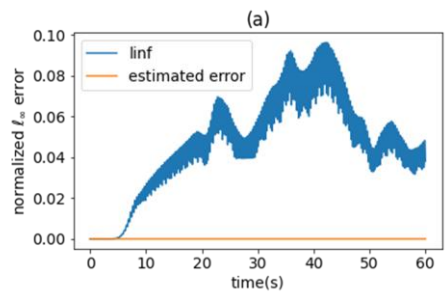
5. 固有値解析

固有値解析の結果をFig. 4に示す.局所細密化により安定領域外の固有値が減少している.次に安定領域外の固有値による４段4位のRunge-Kutta法の増幅率の最大値をtable 1 に示す.局所細密化により増幅率が0.0176減少しており，安定化していることがわかる.

次にℓ_∞誤差と増幅率により推定できる誤差をFig.5に示す.推定された誤差はよく準一様な節点配置のℓ_∞誤差の成長を捉えており，固有値解析が安定性の特徴をよく捉えていることを示している.局所細密化節点における誤差の成長は時間とともに解の構造が細かくなっていき解像できなくなることから生じている.

Table1 Amplification factor.

node	Amplification factor
Quasi-uniform	1.0177
Refined node	1.0001



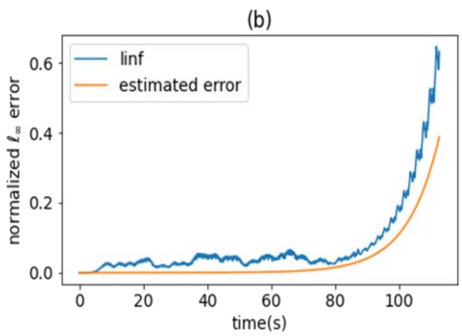
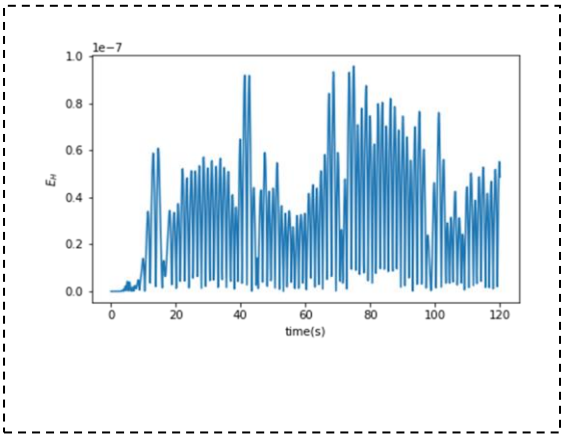


Fig. 5 The ℓ_∞error and estimated error of (a) refined node and (b) quasi-uniform node as a function of time(s).

6. 保存性の検証

検証の結果をFig. 6に示す.t=120における結果を比較すると局所細密化により３桁以上誤差が改善している.これは局所細密化により安定化したBRF移流モデルが高い保存性を有していることを示している.誤差の振動は手法の特徴ではなく，スカラー値を離散化していることが関係している.



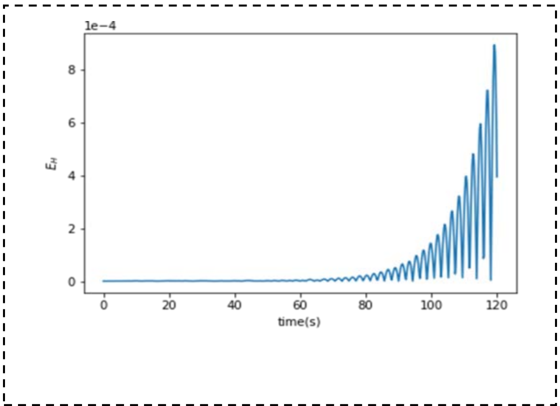


Fig. 6 The error of H as a function of time(s).
$E_H = abs(H_{exact} - H)$.

7.　まとめ

本研究ではSchmidt変換を適用したRBF移流モデルの安定性と保存性を検証した．安定性は固有値解析，保存性はスカラー値の球面積分の時間変化を調べることにより検証した．固有値解析の結果，細密化モデルは増幅率を0.176減少させ，安定性の向上を示した．保存性の検証では局所細密化モデルは誤差が$O(10^{-7})$で振動するのみであり，大きな成長は示さなかった．これにより高い保存性があることが示された．以上のことからSchmidt変換を適用したRBF移流モデルは高い精度，安定性，保存性を有するモデルであると言える．

参考文献

Flyer, N., and G. B. Wright. (2007): Transport schemes on a sphere using radial basis functions. Journal of Computational Physics, 226, pp. 1059–1084.

Flyer, N., and E. Lehto (2010): Rotational transport on a sphere: Local node refinement with radial basis functions. Journal of Computational Physics, 229, pp. 1954–1969.

Fornberg, B., and J. Zuev (2007): The Runge phenomenon and spatially variable shape parameters in RBF interpolation. Computers & Mathematics with Applications, 54, pp. 379–398.

Hortal, M., and A. J. Simmons (1991): Use of Reduced Gaussian Grids in Spectral Models. Monthly Weather Review, 119, pp. 1057–1074.

Nair, R., J. Côté, and A. Staniforth (1999): Cascade interpolation for semi-Lagrangian advection over the sphere. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 125, pp. 1445–1468.

Schmidt, F., B. (1977): Variable fine mesh in spectral global models. Phys. Atmos. 50, pp. 211–217

（論文受理日：2021年8月31日）