

## ゲリラ豪雨をもたらす積乱雲初期における鉛直渦管形成の解析

### Analysis of Vertical Vortex Tubes Formulation at the Initial Stage of Cumulonimbus Cloud Causing Guerrilla-Heavy Rainfall

中北英一・佐藤悠人<sup>(1)</sup>・山口誠弘

Eiichi NAKAKITA, Hiroto SATO<sup>(1)</sup> and Kosei YAMAGUCHI

(1) 京都大学大学院工学研究科

(1) Graduate School of Engineering, Kyoto University

#### Synopsis

In Japan, the frequency of Guerrilla-heavy rainfall is increasing, so it is quite important to predict the risk of heavy rainfall even within a few minutes. Nakakita et al. discovered the large vertical vorticity inside the baby cell aloft is useful to predict the Guerrilla-heavy rainfall, and also discovered the baby cells have vortex tubes which are similar to ones inside the initial cumulonimbus clouds of supercells. From this results, we considered that the vortex tubes inside the baby cells support fluid dynamics. This paper shows that the strongest updraft exists between positive vorticity and negative vorticity inside one sample cell using high  $Z_{DR}$  column.

**キーワード:** ゲリラ豪雨, 渦度, 渦管, High  $Z_{DR}$  Column

**Keywords:** Guerrilla-Heavy Rainfall, vorticity, vortex tube, High  $Z_{DR}$  Column

## 1. はじめに

### 1.1 研究背景

近年, 都市域での集中豪雨災害が研究者の間のみならず, 世間でも注目を集めている. 例えば2015年9月は台風及び温帯低気圧の影響により関東・東北地方に24時間雨量300mmを越える記録的な豪雨をもたらした, 床上下浸水合わせて約20,000棟という被害をもたらした(内閣府, 2016). 災害を引き起こす豪雨には様々なスケールが存在する. 台風, 梅雨前線, 集中豪雨, 積乱雲, 竜巻と順にスケールが小さくなり, もたらされる災害にも違いが生じる. 極めて小さな時空間スケールで発生・発達する豪雨を局地的豪雨と呼び, 特に人命に関わる局地的豪雨はゲリラ豪雨と表現される. 2008年7月兵庫県都賀川において, ゲリラ豪雨による突然の出水で約50名が流され, 5名の尊い命が奪われるという水難事故が発生した.

市民の憩いの場であった都賀川がわずか10分足らずで悲惨な災害現場となった. このような災害が起こった要因として, 都市域特有の水環境が挙げられる. 都賀川出水の場合, 河川上流部で豪雨をもたらされたことに加え, 都市域に降った雨水が効率よく下水道システムを経て, 河川に大量の横流入をもたらした. また都賀川は普段から親水空間としての役割も果たしており, 事故当時も多くの人々が川辺で遊んでいたことも要因の1つである. このような悲惨な事故が2度と起こらぬよう, 1分1秒でも早い注意喚起を行い人々を安全に避難させる必要がある. そのため5分, 10分でも早いゲリラ豪雨の予測技術の確立, 高精度化がより一層急務であると言える.

### 1.2 研究目的

中北ら(2010)は都賀川豪雨をもたらした積乱雲を解析し, まだ地上で降雨がもたらされていない時

点で上空にレーダーエコーが観測できることを発見し、これを「ゲリラ豪雨のタマゴ」と命名した。これにより上空観測がゲリラ豪雨の早期探知に有効な手段であることが示した。また中北（2013）はゲリラ豪雨のタマゴ内部の鉛直渦度に着目し、ゲリラ豪雨に発達する事例で高い渦度が観測されることを発見し、渦度による危険性予測手法を開発した。さらに中北ら（2014a）は立体観測を利用した「早期探知」、セルの「自動追跡」、渦度による「危険性予測」の3手法を統合し、ゲリラ豪雨の危険性予報システムを構築した。このシステムはすでに国土交通省で試験的運用がなされている（片山ら，2015）。危険性予測手法では積乱雲内部の渦度の最大値に着目し、ゲリラ豪雨をもたらす積乱雲に発達するか否かを判別している。しかし、なぜ高い渦度を持つ積乱雲が発達するのかという原因については未だに明らかでない点が多く、メカニズムの解明が重要である。渦度が積乱雲の発生、発達過程にどのように関わっているのかというメカニズムを解明することで、渦度の最大値に加え渦度が観測された時刻、高度等も危険性判別の情報として実践的に利用することができるようになると思われる。そこで本研究ではタマゴ発生、発達時におけるメカニズムの解明を目指し、積乱雲初期のふるまいを詳細に解析し、新たな知見を得ることを目的とする。

## 2. タマゴ内部の渦管構造

ゲリラ豪雨に関する既往研究が少ない一方で、スーパーセルに関する既往研究は多く発達メカニズムが理論的に明らかになっている（例えばCotton, 2010）。Fig. 1に示すスーパーセル発達過程初期の渦管構造は流体力学の理論から導かれている。鉛直渦管形成の理論式については4. 2, 付録で論じる。ここでは現象について簡単に説明する。まず水平風の鉛直シアーにより水平方向に軸を持つ渦管が形成される。ここで上昇流が存在しているとき、水平渦管は持ち上げられて上昇流の両脇に正負の渦度を持ったペアの鉛直渦管が形成される。また鉛直シアーの方向が高さと共に時計回りに回転する場合、その後正の渦度が強化され、負の渦度は抑制され、正の渦度を持ったスーパーセルが形成されることがわかっている。中北ら（2014b）はゲリラ豪雨のタマゴ内部に鉛直渦管が見られることを発見した。これよりゲリラ豪雨をもたらす積乱雲内部でスーパーセル発達過程初期と同様の現象が起こっているのではないかと考えることができる。つまりスーパーセル初期の渦管の発達を表現する流体力学の理論を用いて上昇流の位置を推定できると考えられる。そこで本研

究ではゲリラ豪雨をもたらす積乱雲内部に見られる渦管がスーパーセルをもたらす積乱雲内部に見られる渦管構造と一致する現象であるか検証を行った。そのためまず積乱雲内部の渦管の発達過程に着目し、渦管がどのように成長しているかを確認した。次に渦管の発生過程について確認した。鉛直シアーから導かれる理論上の渦管の位置と観測された鉛直渦管の位置関係が一致しているか検証を行った。また観測された $Z_{DR}$ を用いて上昇流の位置を推定し、理論での上昇流の位置と一致するかの検証も行った。

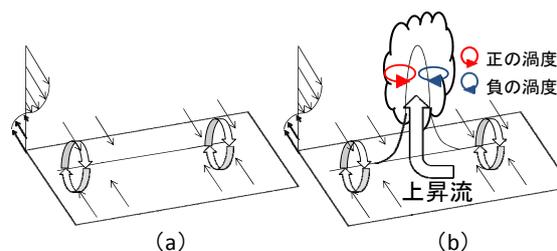


Fig. 1 (a) Vertical wind shear causes horizontal vortex tube. (b) Updraft tilts the horizontal vortex tube and form the pair of vertical vortex tubes.

## 3. XバンドMPレーダーのデータ処理

### 3.1 京阪神のXバンドMPレーダー

本研究では国土交通省がXRAINとして管理する39機のレーダー群のうち京阪神エリアに設置されている4台のXバンドMPレーダーを用いて解析を行った。XバンドMPレーダーは一般の気象レーダーのアンテナと同様に機械的に3次元全体をスキャンすることが可能であり、必要に応じて特定の方角方向をスキャンする。3次元の立体的なエコーを観測する際は一定仰角で方位角方向に全周スキャンするPPI (Plan Position Indicator) スキャンを行い、仰角を変えながら5分に一回の立体観測（ボリュームスキャン）を行っている。

### 3.2 レーダーデータの処理

中北ら（2013）の先行研究では反射強度、ドップラー風速、渦度のデータにおいて反射強度 20 [dBZ]未満の値を持つメッシュをノイズとして除去を施している。しかし本研究の目的は解析であり反射強度がさらに弱い初期段階のタマゴ解析を重視する。そこでレーダーデータは反射強度に関しては5 [dBZ]未満の値をノイズとして除去を施し、ドップラー風速と渦度に関しては反射強度によるノイズ除去を施さなかった。

反射強度や偏波パラメータ値は距離方向、方位角方向、仰角方向の極座標系で表される放射状メッシ

ュ単位のサンプリングボリュームの代表値として得られる。ここではまず中北ら（2013）の可視化手法と、本研究の可視化手法と比較する。中北ら（2013）は解析の簡便性から、始めに単位放射メッシュ毎に得られる値を3次元デカルト直交座標系における格子点上の値に変換している。変換の際、水平方向200m×200m、鉛直方向200mの格子を考え、レーダービームが通過していない格子点には鉛直内挿補間で値を挿入している。こうして等高度面データ（CAPPI=Constant Altitude Plan Positioning Indicator）を作成し、高度毎のドップラー風速と反射強度の平面分布を作成する。反射強度に関しては平均処理を施して水平方向500m×500m、鉛直方向250mの格子に変換した。各レーダーは5分で1サイクルの立体観測を行っており、1サイクル終了時刻にすべての仰角の観測がなされ、その時刻での反射強度、ドップラー風速の観測値が瞬時に得られるものと見なしている。これは防災の観点上、時間に余裕を持たせて探知を行うためである。

一方、本研究ではCAPPIデータを作成するのではなく、各PPIスキャンによって得られたデータを補間せず2次元直交座標系に投影し可視化を行った。また、本研究ではタマゴが発生、発達する時刻を正確に表現するため、正確なスキャン時刻を1分間隔で表現した。さらに、極座標系レーダーデータを2次元直交座標系に変換する際、サンプリングボリュームが格子を十分な数含み、正確な極座標系のデータを表現できるようにするため水平方向に50m×50mの格子点で表現した。解析に用いた図の一例をFig. 2に示す。図は1台のレーダーからの1つのPPIスキャンデータを可視化したものである。解析を行いやすくするために、高度の等値線、1km×1kmメッシュを設けた。

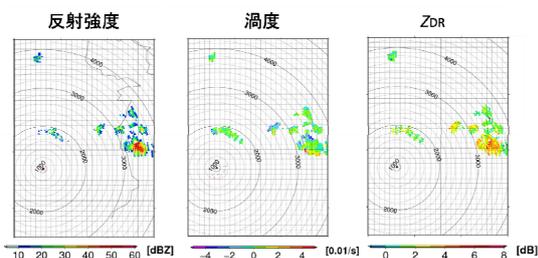


Fig. 2 These figures shows reflection intensity (left), vorticity (middle), and  $Z_{DR}$  (right).

### 3.3 疑似渦度の計算手法

本研究では中北ら（2013）の先行研究と同様にドップラー風速から渦度を算出し解析を行った。北半球における渦度は低気圧回転（反時計回り）が正の値をとり鉛直渦度 $\zeta$ の定義式は以下のように表せる。

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1)$$

しかしドップラー風速の観測で得られるのはレンジ方向の風速のみであり、アジマス方向の情報を得ることができない。ここで、ゲリラ豪雨をもたらす雲内部の渦がFig. 3のように存在していると仮定すると渦度は2地点のアジマス方向の風速差を2地点の距離で除した値を2倍することで近似的に算出することができる。中北ら（2013）は定性的な評価を重視していたため2倍する作業を行っていないが、本研究では定義式に従い2倍して式(2)のように表現した。

$$\zeta = 2 \cdot \frac{(v_a - v_b)}{2r} \quad (2)$$

式(2)で扱う渦のスケールはレーダーからの距離に依存し、距離が離れるにつれてスケールが大きくなる。しかし本研究では渦をできるだけ細かい分解能で捉えるために35kmより以遠のレーダーを用いた解析を避け、加えて、いくつかの放射状メッシュが集まった程度の空間スケールで渦を解析しているので、本研究に大きな影響を及ぼさないと考えられる。

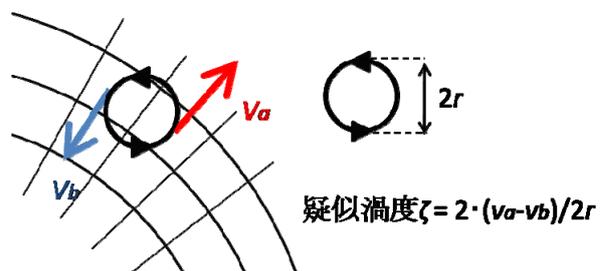


Fig. 3 This figure shows the method of calculating pseudo-vorticity.

本研究では渦度の絶対値が0.01 [1/s]より大きな渦度を解析対象とした。ここで鉛直渦度0.01 [1/s]という値は竜巻の渦度のオーダーであり（新野，2007），明らかに大きな値であると考えられる。この過大な渦度の原因は疑似渦度がアジマス方向のドップラー風速のみを用いて算出されているためであると考えられるが、なぜ過大評価になるかは今の時点で明確ではなく今後の課題としたい。本研究の段階では渦度の値が正であるか負であるかを確認することが重要であり0.01 [1/s]という値には留意しないものとする。

中北ら（2013）は防災の観点から、危険側に予測を行うため4台のレーダーで別々に渦度を計算した後、格子毎に4台の最大値を出力している。そして

積乱雲内部で最も高い渦度の値を危険性予測に利用している。しかし本研究ではメカニズム解明の観点から、高い渦度にのみ注目するのではなく、各レーダーが観測したそれぞれの渦度のデータを解析に用いた。これにより、最大値出力では見ることができなかった負の渦度も解析することができ、積乱雲内部のメカニズム解析に有効であると考えられる。

### 3.4 $Z_{DR}$ を用いた上昇流の推定手法

本研究ではまず直接推定できること、最近の知見であることから High  $Z_{DR}$  Column を用いた上昇流部の推定を行った。加えて、本研究は単独の偏波レーダーを用いて上昇流部を推定し、渦度との対応を解析したという点で新規性があると考えている。A. Adachi (2013), Brandes, E. A. (1995)の先行研究から融解層より高い領域での大きい  $Z_{DR}$  は上昇流の存在を示唆しているということがわかっており、本研究では  $Z_{DR}$  を用いた上昇流の検証を行った。 $Z_{DR}$  はレーダー反射因子差を表す偏波パラメータである。大きな雨滴などの扁平な粒子は大きな値を示し、小さな雨滴や雹、霰など扁平でなく円形に近い粒子は 0 に近い値を示す。通常融解層以上では  $Z_{DR}$  の大きい粒子は存在しない。しかし上昇流により融解層より下から雨滴が運ばれると融解層以上で大きな  $Z_{DR}$  を示す Column の存在を確認することができる。本研究では中北ら (2008) と同様に  $Z_{DR}$  のバイアス補正を行っ

た。タマゴ発見時刻の前後 30 分間で、低仰角観測の反射強度が 5 [dBZ]以上 20 [dBZ]未満の範囲で  $Z_{DR}$  が 0 になると考え、最小二乗法を用いて  $Z_{DR}$  のバイアスを算出した。このバイアスを観測値の  $Z_{DR}$  から引いて融解層以上で  $Z_{DR}$  が 2 [dB]以上の部分に着目した。また融解層の高さは潮岬のラジオゾンデの観測データを最小二乗法で線形近似して、温度が 0 度となる高度を求めた。

## 4. 積乱雲の渦管構造解析

### 4.1 渦管発達過程の解析

渦度と上昇流の関係を解析するため、融解層以上の高度を早期に観測できている必要がある。また渦管の構造が早期に観測できていることも解析には重要である。そこで両条件を満たす事例で上昇流の検証を行った。事例の基本データを Table 1 に示す。タマゴ発見時刻は高度 2,000m 以上でドップラー風速が反射強度が発見された時刻である。本事例のタマゴは鷲峰山上空に出現したので、タマゴから比較的近く上空のデータも観測できていた田口レーダーを用いて解析を行った。本事例の田口レーダーにおける  $Z_{DR}$  バイアスは 0.76 であったので、観測された  $Z_{DR}$  から 0.76 引いたデータを扱った。融解層の高度は潮岬の 9 時の観測データから約 5,100m とした。

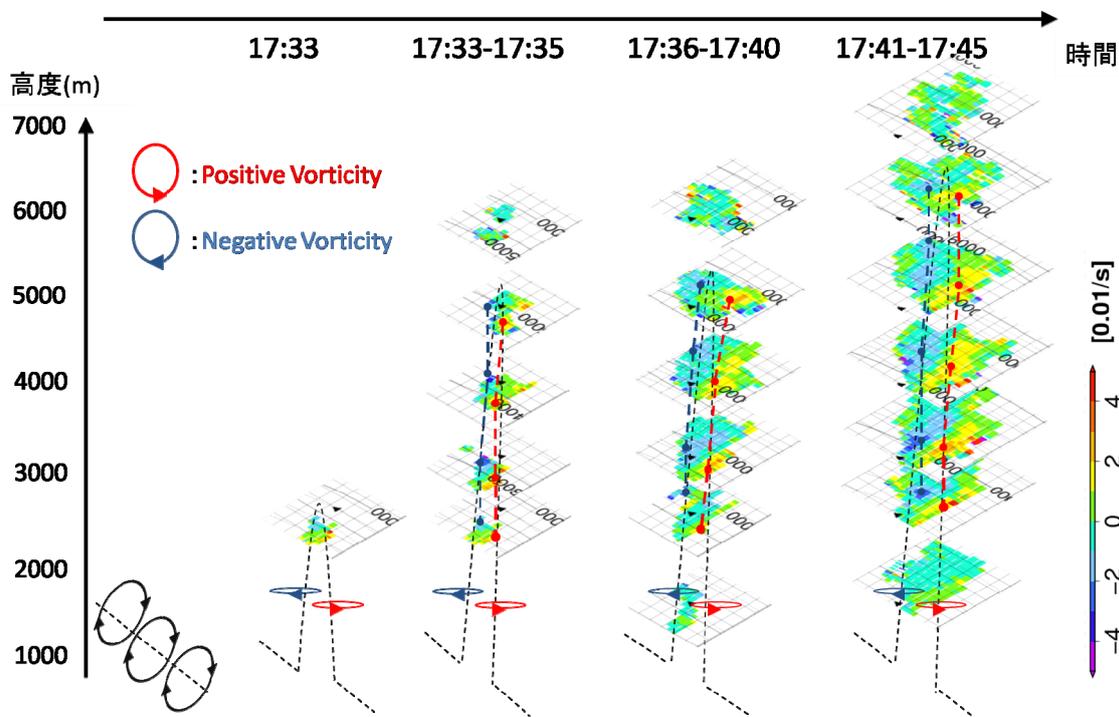


Fig. 4 These figures show vorticity observed by Tanokuchi radar. Red lines show the vortex tubes having positive vorticity, and blue lines shows the vortex tubes having negative vorticity.

Table 1 Data of sample Guerrilla-Heavy Rainfall

日付	タマゴ発見時刻	地上での降り始め時刻	最大降雨強度時刻	0度層
2014/8/25	17:33	17:37	17:51	5,100m

Fig. 4に本事例の渦管構造を示す。PPIスキャンデータを重ねて、鉛直方向のつながりがわかるよう表示した。17:36-17:40から17:41-17:45にかけて正、負の渦度を持つ渦管が同様に鉛直方向に伸びていた。これは2. で述べたスーパーセルをもたらす積乱雲初期に見られる鉛直渦管が上昇流により徐々に立ち上がる様子と同様であり、ゲリラ豪雨をもたらす積乱雲内部でも同様の現象が起きていると考えられる。すなわちFig. 4左のような水平渦管が存在しており、それが上昇流によって持ち上げられることで黒の点線で表しているようなペアーの渦管が形成されていると考えることができる。そこで4. 2では鉛直渦管が立ち上がる現象に着目し、スーパーセル初期で用いられる流体力学理論と同様の現象が起きているのか、式を用いて解析を行った。

#### 4.2 流体力学を用いた渦管発生過程の解析

Fig. 5(a)のドップラー風速図から本事例では上空ほど西風が強いことがわかっている。このような鉛直シアが存在している時、スーパーセルに発達する積乱雲で用いられている理論では南側で正の渦度、北側で負の渦度が発生することがわかっている。これは鉛直方向の渦度方程式により理論的に導かれている。鉛直渦度方程式の導出については付録に記述

する。渦度方程式は式(3)のように表される。ζはx軸方向の渦度、ηはy軸方向の渦度、ζはz軸方向の渦度を表している。

$$\frac{d\zeta}{dt} = \xi \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3)$$

右辺第1項、第2項は渦管を傾けることでその渦度成分を生成するTilting Termである。右辺第3項は渦管を伸縮することで渦度を変化させるStretching Termである。本事例において図のように東西方向にx座標、南北方向にy座標をとる。積乱雲発達初期においてはζ=0であり、また南北方向の風はほとんど吹いていないのでη=0である。東西方向の環境の風を $\bar{u}(z)$ とすると式(3)は以下のように書き直すことができる。

$$\frac{d\zeta}{dt} = \eta \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{d\bar{u}(z)}{dz} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4)$$

式(4)から鉛直シアにより水平渦管が形成され、それが上昇流により立ち上がることで上昇流の中心の南側(∂w/∂y>0)で正のζが生じ、北側(∂w/∂y<0)で負のζが生じることがわかる。ここで観測された鉛直渦管の位置に着目するとFig. 5(b)のように南側に正の渦度、北側に負の渦度を持った鉛直渦管が形成されていた。これより観測されたペアーの渦管は式(4)のwと同様の上昇流により形成されたと考察することができる。そこで、Z<sub>DR</sub>を用いてペアーの渦管の間の上昇流を確認し、実際に式(4)と同様の現象が起こ

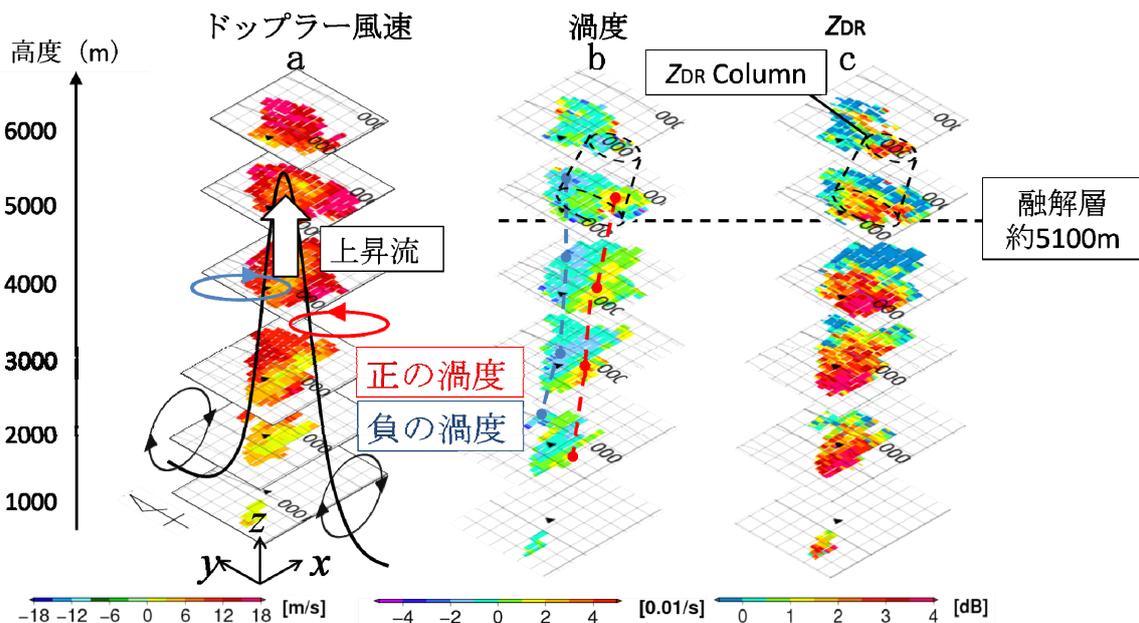


Fig. 5 These figures are observed by Tanokuchi radar from 17:36 to 17:40. These figures show Doppler velocity (left), vorticity (middle), and Z<sub>DR</sub> (right).

っているか確認を行った。Fig. 5(c)に本事例の $Z_{DR}$ を示す。融解層以上の $Z_{DR}$ に注目したところ、2 [dB]以上の値を持つHigh  $Z_{DR}$  Columnが確認された。これにより本事例に上昇流が存在しているということがわかる。黒の点線でHigh  $Z_{DR}$  Columnを囲み、渦度の図Fig. 5(b)と重ねたところ、ペアーの渦管の間にHigh  $Z_{DR}$  Columnを確認することができた。これにより上昇流がペアーの渦管の間に存在していることがわかり、この結果は式(4)と矛盾しないという結果を得た。

## 5. 結論

本研究はゲリラ豪雨の気流構造のメカニズムを解明し、新たな知見を得ることを目的とした。2. で述べたようにスーパーセル発達過程初期に見られる渦管の立ち上がりは流体力学の理論により導かれる一般的な特徴であり、必ずしもスーパーセルに発達するとは限らないゲリラ豪雨をもたらす積乱雲にもあてはまると考えた。そこで本研究では渦管構造をとらえるためにゲリラ豪雨のタマゴ内部の渦度分布に関して時空間的に詳細に解析を行った。これによりゲリラ豪雨のタマゴ内部で鉛直渦管が鉛直方向に伸びている様子を確認することができ、スーパーセル初期に見られる上昇流による渦管の立ち上がり現象と類似していることがわかった。そこでこの観測された渦管が上昇流によってもたらされたものか確認するために  $Z_{DR}$  を用いた上昇流推定を行った。その結果、融解層以上で高い High  $Z_{DR}$  Column が観測され、理論から導かれる上昇流の位置と High  $Z_{DR}$  Column の位置が一致しているという結果を得た。

本研究により1事例ではあるが、スーパーセル発達過程初期で用いられる流体力学の理論から上昇流の位置を推定し、観測された上昇流部との対応を確認することができた。今後の課題は渦管構造がレーダーで確認されるより前の、より初期の段階での渦度と上昇流の関係性についての解析を行うことである。そのためには本研究で用いたXバンドMPレーダーだけでなく、雲粒を観測することができるミリ波レーダー、気流を観測することができるLidar (Laser Radar)、上昇流を直接観測することができるBLR (Boundary Layer Radar)、或いは雲モデルを用いた理論方面からの解析も重要であると考えられる。

## 謝 辞

本研究で用いたXバンドMPレーダーの観測データは国土交通省からコンソーシアム活動の一環として提供いただいた。同時に、基盤研究(S)15H05765、22226010の助成をいただいた。この場を借りて深く

感謝申し上げます。

## 参考文献

- 小倉義光 (1997) : メソ気象の基礎理論, 東京大学出版会, pp. 148-153.
- 片山勝之・山路昭彦・中村文彦・森田 宏・中北英一 (2015) : 局地的豪雨探知システムの開発, 河川技術論文集, 第21巻, pp.401-406.
- 内閣府 (2016) : 平成27年9月関東・東北豪雨による被害状況等について.
- 中北英一・佐藤悠人・西脇隆太・山口弘誠 (2014b) : ゲリラ豪雨危険性予知手法の高精度化に向けた積乱雲生成時の渦管構造の解析, 京都大学防災研究所年報, 第58号, pp. 221-231.
- 中北英一・西脇隆太・山口弘誠 (2014a) : ゲリラ豪雨の早期探知・予報システムの開発, 河川技術論文集, 第20巻, pp.355-360.
- 中北英一・西脇隆太・山邊洋之・山口弘誠 (2013) : ドップラー風速を用いたゲリラ豪雨のタマゴの危険性予知に関する研究, 土木学会論文集B1 (水工学), 69.4, pp.325-330.
- 中北英一・山口弘誠・隅田康彦・竹林栄伸・鈴木賢士・中川勝広・大石 哲・出世ゆかり・坪木和久 (2008) : Cバンド偏波レーダーを用いた降水粒子識別とビデオゾンデを用いた集中同期検証観測, 京都大学防災研究所年報, 第51号B, pp. 519-533.
- 中北英一・山邊洋之・山口弘誠 (2010) : ゲリラ豪雨の早期探知に関する研究, 水工学論文集, 第54巻, pp. 343-348.
- 新野 宏 (2007) : 竜巻, 天気, 54, pp. 933-936.
- Adachi, A., Kobayashi, T., Yamauchi, H. and Onogi, S. (2013): Detection of potentially hazardous convective clouds with a dual-polarized C-band radar., Atmospheric Measurement Techniques, 6.10, pp.2741-2760.
- Brandes, E. A., Vivekanandan, J., Tuttle, J. D. and Kessinger, C. J. (1995): A study of thunderstorm microphysics with multiparameter radar and aircraft observations, Monthly weather review 123.11, pp. 3129-3143.
- Cotton, W. R., Bryan, G., and Van den Heever, S. C. (2010): Storm and cloud dynamics, Vol. 99, Academic press, pp. 358-363.

## 付 録

小倉 (1997) を参考にスーパーセルをもたらす積乱雲内部の鉛直渦管の立ち上がりを説明する。コリ

オリ力，地球の曲率，摩擦を考慮しない非圧縮流体の運動方程式，連続式は以下のように表現できる．速度を $\mathbf{v}$ ，気圧を $p$ ，密度を $\rho$ ，重力加速度を $\mathbf{g}$ ，鉛直方向の単位ベクトルを $\mathbf{k}$ とする．

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p - g\mathbf{k} \quad (a1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (a2)$$

気圧と密度の基本場を $p_0, \rho_0$ ，偏差場を $p', \rho'$ として式(a1)に代入すると式(a3)になる．

$$\rho_0 \left( 1 + \frac{\rho'}{\rho_0} \right) \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla(p_0 + p') - \rho_0 \left( 1 + \frac{\rho'}{\rho_0} \right) g\mathbf{k} \quad (a3)$$

基本場は静力学の関係が

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -g\rho_0 \quad (a4)$$

にあるとする．ここで $\rho' \ll \rho_0$ とし，式(a4)を式(a3)に代入すると式(7)が得られる．

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' - g \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{k} \quad (a5)$$

式(a5)と式(a2)がブシネスク近似の運動方程式と連続の式である．この方程式は非圧縮形の流体の式と同じ形式であるが式(7)の右辺第2項に密度の変化が含まれており，浮力による運動が考慮されている．式(a5)の $x, y$ 成分から鉛直方向の渦度方程式（式(a6)）を導くことができる． $\xi$ は $x$ 軸方向の渦度， $\eta$ は $y$ 軸方向の渦度， $\zeta$ は $z$ 軸方向の渦度を表している．

$$\frac{d\zeta}{dt} = \xi \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \quad (a6)$$

（論文受理日：2016年6月13日）