京都大学防災研究所年報　第 59 号 B　平成 28 年 6 月
Annuals of Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., No. 59 B, 2016

初期構造（固有）異方性を考慮した線形弾性体の多重せん断機構の概念に基づく解釈

Revisit of the Formulation of Elastic Body Considering Inherent Anisotropy Based on the Concept of Multiple Shear Mechanism

上田恭平・井合進

Kyohei UEDA and Susumu IAI

Synopsis

The formulation of an elastic body, which can take the effect of inherent anisotropy into account, has been proposed by various researchers in 1970's and widely used for the simulation of fibrous materials (e.g. lumber), materials containing reinforcement member in a certain direction, and blood vessel walls. This manuscript reinterprets the conventional formulation based on the concept of multiple shear mechanism, which has been applied to the modelling of granular materials (e.g. sands) and extended in order to consider the effect of inherent anisotropy of the materials.

キーワード：初期構造（固有）異方性，線形弾性体，多重せん断機構
Keywords: inherent anisotropy, elastic body, multiple shear mechanism

1.　はじめに

砂のような地盤材料は，一般に小さなひずみ領域から（材料的な）非線形性を示すことが知られており（Ishihara, 1996），その応力～ひずみ関係のモデル化として，これまで種々の構成式が提案されている(例えば, Sekiguchi and Ohta, 1977; Iai et al, 2011). 一方，地盤材料であっても，深部の洪積層や十分に締め固めた盛土，また岩盤材料等では非線形性が顕著ではないことから，線形弾性体としてモデル化を行う場合が存在する．また，地盤・構造物系の応答評価を数値解析により行う場合，例えば港湾構造物におけるケーソン式岸壁等では，線形弾性体がそのモデル化に用いられることが多い.

このように線形弾性体は種々の構成式の中で最もシンプルでありながら，土木分野に限らず他の分野においても頻繁に用いられている(例えば, 林, 1971). ここで，線形弾性体のモデル化は，等方性を有する場合と，異方性を有する場合の2つに分類することが可能である（なお，特に土木分野の設計実務の世界では，前者によりモデル化する場合の方が多いと考えられる）．ここに，等方性とは，弾性定数があらゆる方向で等しいことを言う．一方，異方性とは，弾性定数が方向によって異なることを指し，特に，直交する三つの軸の方向で異なる性質を有する場合，直交異方性と呼ばれている（Ashton and Whitney, 1970；林，1971）．直交異方性材料の代表的な例としては，木のように繊維方向がある材料，ある方向に補強材を入れた材料，血管壁等が挙げられる．他方，砂や粘土のような土質材料や岩盤材料においても，堆積環境などの影響により異方性を示すことが知られており，応力の作用下で粒状体特有のダイレイタンシーの影響などにより生じる異方性と区別するため，前者を初期構造（固有）異方性，後者を（応力）誘導異方性と呼ぶのが一般的である（Oda, 1972；佐武，1984）．

本稿では，砂のような粒状体のモデル化において導入されている多重せん断機構の概念（Iai et al., 2011）に基づき，既往の異方性を考慮した線形弾性体構成式の再解釈を行う．すなわち，初期構造（固有）異方性を考慮できるように拡張された多重せん断機構モデル（増田ら，2016）において，ダイレイ

タンシーの影響等を無視することで線形弾性の条件へと還元し，既往のモデルとの対応関係を調べるのが目的である．これにより，拡張された多重せん断モデルにおける異方性のモデル化の妥当性が，（少なくとも線形弾性の範囲内では）検証できるものと考えられる．

2. 既往の線形弾性体のモデル化

2.1 等方性の場合

本稿では，2次元平面ひずみ条件に議論を限定する．この場合，線形弾性体の剛性マトリクスは，以下のとおり与えられる（例えば，吉田，1997）．

$$\mathbf{D}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix} \tag{1}$$

これを体積成分とせん断成分に分解すると，

$$\mathbf{D}=K\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+G\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{2}$$

となる．ここに，

$$K=\frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)},\ G=\frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3}$$

よって，線形弾性体における応力～ひずみ関係は，以下のように表すことができる．

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{D}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}=-p\mathbf{n}^{(0)}+\sum_{i=1}^{2}q^{(i)}\mathbf{n}^{(i)} \tag{4}$$

ここに，

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy}\end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy}\end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\mathbf{n}^{(0)\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\mathbf{n}^{(1)\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{n}^{(2)\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{8}$$

$$p=-K\varepsilon \tag{9}$$

$$q^{(i)}=G\gamma^{(i)}\quad (\text{for } i=1,2) \tag{10}$$

式(9)(10)における体積ひずみとせん断ひずみは，それぞれ以下で与えられる．

$$\varepsilon=\mathbf{n}^{(0)\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{11}$$

$$\gamma^{(i)}=\mathbf{n}^{(i)\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\quad (\text{for } i=1,2) \tag{12}$$

同様に，応力・ひずみの増分関係は，

$$\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{D}\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{13}$$

となる．ここに，接線剛性マトリクスは，以下で与えられる．

$$\mathbf{D}=K\mathbf{n}^{(0)}\mathbf{n}^{(0)\mathrm{T}}+\sum_{i=1}^{2}G\mathbf{n}^{(i)}\mathbf{n}^{(i)\mathrm{T}} \tag{14}$$

以上のことから，固有異方性を有しない線形弾性体の構成式は，体積弾性係数およびせん断弾性係数が定数で与えられる多重せん断モデルに他ならない（上田ら，2009；上田・井合，2016）．式(14)をより一般化して書けば，以下のように定式化することもできる（多重せん断機構の仮想的なバネ本数をI本に増やしている）．

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{D}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}=-p\mathbf{n}^{(0)}+\sum_{i=1}^{I}q^{(i)}\mathbf{n}^{(i)}\Delta\omega \tag{15}$$

ここに，

$$\mathbf{D}=K\mathbf{n}^{(0)}\mathbf{n}^{(0)\mathrm{T}}+\sum_{i=1}^{I}G_{\mathrm{v}}\mathbf{n}^{(i)}\mathbf{n}^{(i)\mathrm{T}}\Delta\omega \tag{16}$$

$$\left\{\mathbf{n}^{(i)}\right\}^{\mathrm{T}}=\left\{\cos\omega_i\quad -\cos\omega_i\quad \sin\omega_i\right\} \tag{17}$$

$$\omega_i=(i-1)\Delta\omega,\ \Delta\omega=\pi/I \tag{18}$$

$$q^{(i)}=G_{\mathrm{v}}\gamma^{(i)}\quad (\text{for } i=1,\ldots,I) \tag{19}$$

$$G_{\mathrm{v}}=\frac{G}{\sum_{i=1}^{I}\sin^2\omega_i\Delta\omega}\approx\frac{G}{\pi/2} \tag{20}$$

なお，式(15)をテンソル形式で記述すれば，以下のとおりとなる．

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbb{C}:\boldsymbol{\varepsilon}=-p\mathbf{I}+\sum_{i=1}^{I}q^{(i)}\left\langle\mathbf{t}^{(i)}\otimes\mathbf{n}^{(i)}\right\rangle\Delta\omega \tag{21}$$

ここに，

$$\left\langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \right\rangle = \begin{bmatrix} \cos\omega_i & \sin\omega_i \\ \sin\omega_i & -\cos\omega_i \end{bmatrix} \tag{22}$$

2.2　異方性の主軸が座標系と一致する場合

固有異方性を考慮した線形弾性体（3次元）には，直交異方性と面内等方性の大きく分けて2種類の定式化が存在する（**付録1, 2参照**）．ただし，ここでは2次元平面ひずみ条件を対象にするので，面内等方性の線形弾性体を取り上げることとする．**付録2**より，y軸を法線とする面内（すなわちxz面）のみに等方性（E_h, ν_{hh}）を仮定すると，

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{23}$$

ここに，

$$D_{11} = \frac{C_{22}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} = \frac{E_h\left(1-\nu_{vh}\nu_{hv}\right)}{\left(1+\nu_{hh}\right)\left(1-\nu_{hh}-2\nu_{vh}\nu_{hv}\right)} \tag{24}$$

$$D_{12} = -\frac{C_{12}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} = \frac{E_v\nu_{hv}}{1-\nu_{hh}-2\nu_{vh}\nu_{hv}} \tag{25}$$

$$D_{22} = \frac{C_{11}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} = \frac{E_v\left(1-\nu_{hh}\right)}{1-\nu_{hh}-2\nu_{vh}\nu_{hv}} \tag{26}$$

$$D_{33} = \frac{1}{C_{33}} = G_{hv} \tag{27}$$

ここで，$\sigma_x = D_{11}\varepsilon_x + D_{12}\varepsilon_y$，$\sigma_y = D_{12}\varepsilon_x + D_{22}\varepsilon_y$ より，

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} &= \left(\frac{D_{11}+D_{12}}{2}\right)\varepsilon_x + \left(\frac{D_{12}+D_{22}}{2}\right)\varepsilon_y \\ &= K'\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right) + G'\left(\varepsilon_x-\varepsilon_y\right) \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2} &= \left(\frac{D_{11}-D_{12}}{2}\right)\varepsilon_x + \left(\frac{D_{12}-D_{22}}{2}\right)\varepsilon_y \\ &= K''\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right) + G''\left(\varepsilon_x-\varepsilon_y\right) \end{aligned} \tag{29}$$

ここに，

$$\begin{aligned} &K' = \frac{D_{11}+2D_{12}+D_{22}}{4},\ K'' = \frac{D_{11}-D_{22}}{4} = G' \\ &G' = \frac{D_{11}-D_{22}}{4},\ G'' = \frac{D_{11}-2D_{12}+D_{22}}{4},\ G''' = D_{33} \end{aligned} \tag{30}$$

であるので，

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{31}$$

ここに，

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = K'\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + K''\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + G'\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ + G''\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + G'''\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{32}$$

なお，独立変数は $D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{33}$ もしくは K', G' $(\equiv K''), G'', G'''$ の4つである．

2.3　異方性の主軸が座標系と一致しない場合

固有異方性の主軸が座標系と一致しない場合，式(123)により式(32)は以下のように変換される．

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}} &= \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{Q} \\ &= \hat{K}'\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \hat{K}''\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \hat{G}'\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \hat{G}''\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \hat{G}'''\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\quad + \hat{H}'\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \hat{H}''\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \hat{H}'''\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{33}$$

ここに，$\theta = \omega/2$ として，

$$\hat{K}' = K' \tag{34}$$

$$\hat{K}'' = K''\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = K''\cos\omega \tag{35}$$

$$\hat{G}' = G'\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = G'\cos\omega \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \hat{G}'' &= G''\cos^2 2\theta + 4G'''\cos^2\theta\sin^2\theta \\ &= G''\cos^2\omega + G'''\sin^2\omega \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \hat{G}''' &= 4G''\cos^2\theta\sin^2\theta + G'''\cos^2 2\theta \\ &= G''\sin^2\omega + G'''\cos^2\omega \end{aligned} \tag{38}$$

$$\hat{H}' = 2G'\cos\theta\sin\theta = G'\sin\omega \tag{39}$$

$$\hat{H}'' = 2K''\cos\theta\sin\theta = K''\sin\omega \tag{40}$$

$$\hat{H}''' = 2(G''-G''')\cos 2\theta \cos\theta \sin\theta \\ = (G''-G''')\cos\omega \sin\omega \tag{41}$$

3. 多重せん断機構に基づく固有異方性を考慮した線形弾性体

3.1 ばね本数がI本の場合

固有異方性を考慮した場合の多重せん断モデルの積分形構成式（付録3参照）において，体積弾性係数およびせん断弾性係数を定数とし，さらにダイレイタンシーの影響を無視すると（このプロセスの詳細は，上田ら（2009）もしくは上田・井合（2016）を参照のこと），固有異方性を考慮した線形弾性体の定式化が以下のとおり与えられる．

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = -p\mathbf{n}^{(0)} + \sum_{i=1}^{I} q^{(i)}\mathbf{n}^{(i)}\Delta\omega \\ = -p\mathbf{n}^{(0)} + \sum_{i=1}^{I} F_{\mathrm{Iso}}^{(i)} q_{\mathrm{Iso}}^{(i)}\mathbf{n}^{(i)}\Delta\omega + \sum_{i=1}^{I} q_{\mathrm{Aniso}}^{(i)}\mathbf{n}^{(i)}\Delta\omega \tag{42}$$

ここに，

$$p = -K\varepsilon' = -K(\varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{d}}) \tag{43}$$

$$q^{(i)} = F_{\mathrm{Iso}}^{(i)} q_{\mathrm{Iso}}^{(i)} + q_{\mathrm{Aniso}}^{(i)} = F(\omega_i - \omega_0) q_{\mathrm{Iso}}^{(i)} + q_{\mathrm{Aniso}}^{(i)} \tag{44}$$

$$F(\omega_i) = 1 + a_2 \cos 2\omega_i \tag{45}$$

$$q_{\mathrm{Iso}}^{(i)} = G_{\mathrm{v}}\gamma^{(i)} \quad (\text{for } i = 1,...,I) \tag{46}$$

$$q_{\mathrm{Aniso}}^{(i)} = -2a_1\cos(\omega_i - \omega_0)\bar{E}_0 p = F_{\mathrm{Aniso}}^{(i)} p \tag{47}$$

$$F_{\mathrm{Aniso}}^{(i)} = -2a_1\cos(\omega_i - \omega_0)\bar{E}_0 \tag{48}$$

$$\bar{E}_0 = \frac{1}{2\pi} \tag{49}$$

ここで，

$$p = -K\varepsilon' = -K\mathbf{n}^{(0)\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{d}}) \tag{50}$$

$$q_{\mathrm{Iso}}^{(i)} = \frac{q_{\mathrm{Iso}}^{(i)}}{\gamma^{(i)}}\gamma^{(i)} = G_{\mathrm{v}}\mathbf{n}^{(i)\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{51}$$

$$q_{\mathrm{Aniso}}^{(i)} = -\frac{q_{\mathrm{Aniso}}^{(i)}}{p}K\varepsilon' = -\frac{\mathrm{d}q_{\mathrm{Aniso}}^{(i)}}{\mathrm{d}p}K\mathbf{n}^{(0)\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{d}}) \tag{52}$$

$$\mathbf{n}^{(0)\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{d}} = \mathbf{n}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{53}$$

$$\mathbf{n}_{\mathrm{d}} = -\sum_{i=1}^{I} 2a_1\bar{E}_0\cos(\omega_i - \omega_0)\mathbf{n}^{(i)}\Delta\omega = \sum_{i=1}^{I} F_{\mathrm{Aniso}}^{(i)}\mathbf{n}^{(i)}\Delta\omega \tag{54}$$

を考慮すると，

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^{4}\mathbf{D}_i \tag{55}$$

ここに，

$$\mathbf{D}_1 = K\mathbf{n}^{(0)}\mathbf{n}^{(0)\mathrm{T}} \tag{56}$$

$$\mathbf{D}_2 = G_{\mathrm{v}}\sum_{i=1}^{I} F_{\mathrm{Iso}}^{(i)}\mathbf{n}^{(i)}\mathbf{n}^{(i)\mathrm{T}}\Delta\omega \tag{57}$$

$$\mathbf{D}_3 = -K\mathbf{n}^{(0)}\sum_{i=1}^{I} F_{\mathrm{Aniso}}^{(i)}\mathbf{n}^{(i)\mathrm{T}}\Delta\omega \tag{58}$$

$$\mathbf{D}_4 = -K\sum_{i=1}^{I} F_{\mathrm{Aniso}}^{(i)}\mathbf{n}^{(i)}\left(\mathbf{n}^{(0)} - \sum_{j=1}^{I} F_{\mathrm{Aniso}}^{(j)}\mathbf{n}^{(j)}\Delta\omega\right)^{\mathrm{T}}\Delta\omega \tag{59}$$

3.2 ばね本数が無限大の場合

ここでは，3.1の定式化において，多重せん断機構の仮想的な単純せん断ばねを無限大とした場合について考える．この場合，式(55)は積分記号を用いて以下のように書き換えられる．

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^{8}\mathbf{D}_i \tag{60}$$

ここに，

$$\mathbf{D}_1 = K\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{61}$$

$$\mathbf{D}_2 = \frac{a_1}{2}K\cos\omega_0\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{62}$$

$$\mathbf{D}_3 = \frac{a_1}{2}K\cos\omega_0\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{63}$$

$$\mathbf{D}_4 = \frac{a_1}{2}K\sin\omega_0\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{64}$$

$$\mathbf{D}_5 = \frac{a_1}{2} K \sin\omega_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{65}$$

$$\mathbf{D}_6 = \left\{ \left(1 + \frac{a_2}{2}\cos 2\omega_0\right) G + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 K \cos^2\omega_0 \right\} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{66}$$

$$\mathbf{D}_7 = \left\{ a_2 G + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 K \right\} \cos\omega_0 \sin\omega_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{67}$$

$$\mathbf{D}_8 = \left\{ \left(1 - \frac{a_2}{2}\cos 2\omega_0\right) G + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 K \sin^2\omega_0 \right\} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{68}$$

であり，式の導出には式(20)の関係を用いた．

ここで，式(60)において $\omega_0 = 0$ とすると，

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_3 + \mathbf{D}_6 + \mathbf{D}_8 \tag{69}$$

ここに，

$$\mathbf{D}_1 = K \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{70}$$

$$\mathbf{D}_2 = \frac{a_1}{2} K \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{71}$$

$$\mathbf{D}_3 = \frac{a_1}{2} K \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{72}$$

$$\mathbf{D}_6 = \left\{ \left(1 + \frac{a_2}{2}\right) G + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 K \right\} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{73}$$

$$\mathbf{D}_8 = \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) G \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{74}$$

これと面内等方性の線形弾性体（異方性の主軸が座標系と一致している場合）の構成式(32)を比較すると，

$$K = K' \tag{75}$$

$$G = \frac{1}{2} \left\{ G'' + G''' - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 K \right\} \tag{76}$$

$$a_1 = \frac{2G'}{K} \tag{77}$$

$$a_2 = \frac{2\left\{ G'' - G''' - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 K \right\}}{G'' + G''' - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 K} \tag{78}$$

のように異方性を考慮した多重せん断型の線形弾性体モデルの材料パラメータを設定すれば，既往の面内等方性の線形弾性体の挙動を表現することが可能である．つまり，**付録3**の初期構造（固有）異方性を考慮できるように改良された多重せん断機構モデルは，既往の異方性弾性体モデルの非線形領域への自然な拡張になっていると考えられる．また同時に，砂のような粒状体に対する多重せん断機構のモデル化において，ある方向の粒子接触力およびその方向の接触数の分布関数で方向依存（すなわち，固有異方性）の影響が発現するという物理的な概念（式(135)等）が，粒状体以外のモデル化（例えば，木材等の繊維材料）においても適用可能であることを示唆している．

次に，式(69)に対して角度 $\theta = \omega / 2$ だけ座標軸を回転すると，

$$\hat{\mathbf{D}} = \sum_{i=1}^{8} \hat{\mathbf{D}}_i \tag{79}$$

ここに，

$$\hat{\mathbf{D}}_1 = K \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{80}$$

$$\hat{\mathbf{D}}_2 = \frac{a_1}{2} K \cos\omega \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{81}$$

$$\hat{\mathbf{D}}_3 = \frac{a_1}{2} K \cos\omega \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{82}$$

$$\hat{\mathbf{D}}_4 = \frac{a_1}{2} K \sin\omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{83}$$

$$\hat{\mathbf{D}}_5 = \frac{a_1}{2} K \sin\omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{84}$$

$$\hat{\mathbf{D}}_6 = \left\{ \left(1 + \frac{a_2}{2}\cos 2\omega\right) G + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 K \cos^2\omega \right\} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{85}$$

$$\hat{\mathbf{D}}_7 = \left\{ a_2 G + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 K \right\} \cos\omega \sin\omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{86}$$

$$\hat{\mathbf{D}}_8 = \left\{ \left(1 - \frac{a_2}{2}\cos 2\omega\right) G + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 K \sin^2\omega \right\} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{87}$$

となり，ここで $\omega = \omega_0$ とおくと，式(79)は式(60)と一致することがわかる．これを固有異方性の主軸が座標系と一致しない場合の面内等方性の線形弾性体の構成式(33)と比較すると，主軸が座標系と一致しない場合と同様に，式(75)～(78)が得られる．したがって，主軸が座標系と一致しない場合については，一致する場合と同じ材料パラメータを入力した上で，回転角に応じて残りの入力パラメータ ω_0 を別途設定すればよい．

3.3　ばね本数が2本の場合

次に，3.1の定式化において，多重せん断機構の仮想的な単純せん断ばねを2本とした場合について考えてみる．この場合，式(60)の各成分は以下のように表される．

$$\mathbf{D}_1 = K \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{88}$$

$$\mathbf{D}_2 = \frac{a_1}{2} K \cos\omega_0 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{89}$$

$$\mathbf{D}_3 = \frac{a_1}{2} K \cos\omega_0 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{90}$$

$$\mathbf{D}_4 = \frac{a_1}{2} K \sin\omega_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{91}$$

$$\mathbf{D}_5 = \frac{a_1}{2} K \sin\omega_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{92}$$

$$\mathbf{D}_6 = \left\{ \left(1 + a_2 \cos 2\omega_0\right) G + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 K \cos^2\omega_0 \right\} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{93}$$

$$\mathbf{D}_7 = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 K \cos\omega_0 \sin\omega_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{94}$$

$$\mathbf{D}_8 = \left\{ \left(1 - a_2 \cos 2\omega_0\right) G + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 K \sin^2\omega_0 \right\} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{95}$$

これらとばね本数を無限大にした場合の結果（式(61)～(68)）を比較すると，a_2 に掛かる係数が異なることに加えて，$\mathbf{D}_7$ において式(67)の右辺の行列に掛かる係数のうち第2項（$a_2 G$）が，ばね本数が2本の場合（式(94)）は存在しないことがわかる．この係数は，元をたどれば $\cos\omega_0 \sin\omega_0$ を含む項から生じており，ばね本数が2本の場合は，$\cos\omega_0$ もしくは $\sin\omega_0$ のいずれかが必ずゼロとなるために，式(94)に示すように係数 $a_2 G$ が生じない結果となった．

ここで，式(88)～(95)で $\omega_0 = 0$ とおくと，

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_3 + \mathbf{D}_6 + \mathbf{D}_8 \tag{96}$$

ここに，

$$\mathbf{D}_1 = K \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{97}$$

$$\mathbf{D}_2 = \frac{a_1}{2} K \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{98}$$

$$\mathbf{D}_3 = \frac{a_1}{2} K \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{99}$$

$$\mathbf{D}_6 = \left\{ \left(1 + a_2\right) G + \frac{a_1^2 K}{4} \right\} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{100}$$

$$\mathbf{D}_8 = \left(1 - a_2\right) G \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{101}$$

これと面内等方性の線形弾性体（異方性の主軸が座標系と一致している場合）の構成式(32)を比較すると，

$$K = K' \tag{102}$$

$$G = \frac{1}{2} \left\{ G'' + G''' - \left(\frac{a_1}{2} \right)^2 K \right\} \tag{103}$$

$$a_1 = \frac{2G'}{K} \tag{104}$$

$$a_2 = \frac{G'' - G''' - \dfrac{a_1^2 K}{4}}{G'' + G''' - \dfrac{a_1^2 K}{4}} \tag{105}$$

のように異方性を考慮した多重せん断型の線形弾性体モデルの材料パラメータを設定すれば，ばね本数が無限大の場合と同様に（ただし，材料パラメータ a_2 の値は異なる），既往の面内等方性の線形弾性体の挙動を表現することが可能である．

次に，式(96)に対して角度 $\theta = \omega / 2$ だけ座標軸を回転すると，

$$\hat{\mathbf{D}} = \sum_{i=1}^{8} \hat{\mathbf{D}}_i \tag{106}$$

ここに，

$$\hat{\mathbf{D}}_1 = K \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{107}$$

$$\hat{\mathbf{D}}_2 = \frac{a_1}{2} K \cos\omega \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{108}$$

$$\hat{\mathbf{D}}_3 = \frac{a_1}{2} K \cos\omega \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{109}$$

$$\hat{\mathbf{D}}_4 = \frac{a_1}{2} K \sin\omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{110}$$

$$\hat{\mathbf{D}}_5 = \frac{a_1}{2} K \sin\omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{111}$$

$$\hat{\mathbf{D}}_6 = \left\{ \left(1 + a_2 \cos 2\omega\right) G + \left(\frac{a_1}{2} \right)^2 K \cos^2 \omega \right\} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{112}$$

$$\hat{\mathbf{D}}_7 = \left\{ 2 a_2 G + \left(\frac{a_1}{2} \right)^2 K \right\} \cos\omega \sin\omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{113}$$

$$\hat{\mathbf{D}}_8 = \left\{ \left(1 - a_2 \cos 2\omega\right) G + \left(\frac{a_1}{2} \right)^2 K \sin^2 \omega \right\} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{114}$$

である．ここで，$\omega = \omega_0$ とし，式(79)と比較すると，係数の不一致が見られる．この原因は，先に述べた係数 $a_2 G$ の有無によるものである．式(106)を固有異方性の主軸が座標系と一致しない場合の面内等方性の線形弾性体の構成式(33)と比較すると，

$$a_1 = \frac{2G'}{K} = 2\sqrt{\frac{G'' - G'''}{K'}} \tag{115}$$

$$a_2 = 0 \tag{116}$$

を満たす必要があるが，式(115)より K', G', G'', G''' のうちどれか3つを決めると残りの1つは自動的に決定されることになってしまう．これは，2.2で述べた K', G', G'', G''' の4つが独立変数であるという事実に反する．したがって，異方性の主軸と座標系とが一致しない場合については，多重せん断機構におけるば

ね本数は2本では不十分であり，無限大（もしくは2より大きな値）に設定すべきであると考えられる．なお，2より大きな値，例えば4本とした場合の既往の異方性弾性体モデルに対する再現性については，本稿では検討していないため，今後追加で検討を進める必要があると思われる．

4. おわりに

本稿では，砂のような粒状体の堆積構造等に起因する初期構造（固有）異方性を考慮できるよう拡張された多重せん断モデルを線形弾性に還元し（この際，体積弾性係数とせん断弾性係数を定数とみなし，かつ，ダイレイタンシーの影響を無視した），既存の異方性を考慮した線形弾性体モデルとの比較を行った．その結果，異方性の主軸が座標系と一致しているかいないかにかかわらず，多重せん断型の線形弾性体モデルにおいて適切にパラメータ（異方性パラメータとしては a_1, a_2 の2つ）を設定することにより，既往の異方性弾性体モデルの挙動を表現可能であることがわかった．また，主軸と座標系とのずれ（回転）は，残る1つのパラメータ ω_0 により制御できることが確認された．

これにより，初期構造（固有）異方性を考慮できるよう改良された多重せん断モデルは，線形領域では既往の異方性弾性体モデルと一致し，線形領域から非線形領域へと自然な拡張がなされていると考えることができる．また，既往の異方性弾性体モデルでは恣意的に直交する方向の弾性係数を変えており，異方性発現の（微視的な）メカニズムが不明確であったが，提案モデルでは多重せん断機構の概念により，粒状体（実際には粒状体に限らず，木材等の繊維材料にも適用可能だと思われる）の接触力および接触分布の方向依存性が，初期構造（固有）異方性が生じるメカニズムとして明確に規定されていると言える．

参考文献

上田恭平・井合進（2016）：多重せん断機構の概念に基づく有限変形を考慮した弾性体構成式の提案，第19回応用力学シンポジウム．

上田恭平・井合進・飛田哲男・小堤治（2009）：幾何学的非線形性を考慮した多重せん断モデル型弾性体の定式化，京都大学防災研究所年報,第52号B, pp. 383-394.

佐武正雄（1984）：地盤と土の異方性，土と基礎，32-11 (322)，pp. 5-12.

林毅編（1971）：複合材料工学，日科技連．

増田達・上田恭平・飛田哲男・井合進（2016）：初期構造異方性を有する砂の非排水せん断挙動特性に関する要素試験と有効応力解析, 第52回地盤工学研究発表会（投稿中）．

吉田総仁（1997）：弾塑性力学の基礎，共立出版株式会社．

Ashton, J. E. and Whitney, J. M. (1970): Theory of Laminated Plates, Technomic.

Iai, S., Tobita, T., Ozutsumi, O. and Ueda, K. (2011): Dilatancy of Granular Materials in a Strain Space Multiple Mechanism Model, International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 35(3), pp. 360-392.

Ishihara, K. (1996): Soil Behaviour in Earthquake Geotechnics, Oxford University Press.

Oda, M. (1972): Initial fabric and their relations to mechanical properties of granular materials, Soils and Foundations, Vol. 12, No. 1, pp. 17-36.

Sekiguchi, H. and Ohta, H. (1977): Induced anisotropy and time dependency in clays, 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering (Tokyo), pp. 306-315.

付　録

付録1. 直交異方性を考慮した線形弾性体の定式化

座標系と異方性の主軸が一致していると仮定すると，3次元では応力～ひずみ関係が以下のように書ける（Ashton and Whitney, 1970；林，1971）．

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (117)$$

ここに，

$$\begin{aligned} &D_{11} = 1/E_1,\ D_{12} = -\nu_{12}/E_1,\ D_{13} = -\nu_{13}/E_1 \\ &D_{21} = -\nu_{21}/E_2,\ D_{22} = 1/E_2,\ D_{23} = -\nu_{23}/E_2 \\ &D_{31} = -\nu_{31}/E_3,\ D_{32} = -\nu_{32}/E_3,\ D_{33} = 1/E_3 \\ &D_{44} = 1/G_{23},\ D_{55} = 1/G_{31},\ D_{66} = 1/G_{12} \end{aligned} \quad (118)$$

であり， $\nu_{21}/E_2 = \nu_{12}/E_1$ 等の関係を用いると，独立変数は6つ（$E_1, E_2, E_3, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$）となる．

ここで，平面ひずみ条件を考えると，

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_x - \frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_y + \frac{1}{E_3}\sigma_z = 0 \tag{119}$$

より，$\sigma_z = \nu_{31}\sigma_x + \nu_{32}\sigma_y$ となるので，

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{120}$$

ここに，

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{C_{22}}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}},\ D_{12} = -\frac{C_{12}}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} \\ D_{22} &= \frac{C_{11}}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}},\ D_{33} = \frac{1}{C_{33}} = G_{12} \end{aligned} \tag{121}$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1}{E_1}\left(1 - \nu_{13}\nu_{31}\right),\ C_{12} = -\frac{1}{E_1}\left(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}\right) \\ C_{21} &= -\left(\frac{\nu_{12}}{E_1} + \frac{\nu_{23}\nu_{31}}{E_2}\right) = -\left(\frac{\nu_{12}}{E_1} + \frac{\nu_{32}\nu_{31}}{E_3}\right) = C_{12} \\ C_{22} &= \frac{1}{E_2}\left(1 - \nu_{23}\nu_{32}\right),\ C_{33} = \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \tag{122}$$

であり，2次元平面ひずみ条件では独立変数は4つ（$D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{33}$）となる．

なお, 座標軸と異方性の主軸が一致しない場合は, 式(120)の剛性マトリクスを以下のように変換すればよい．

$$\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{Q} \tag{123}$$

ここに，

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & l_1 m_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & l_2 m_2 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & l_1 m_2 + m_1 l_2 \end{bmatrix} \tag{124}$$

$$l_1 = \cos\theta,\ l_2 = -\sin\theta,\ m_1 = \sin\theta,\ m_2 = \cos\theta \tag{125}$$

付録2．面内等方性を考慮した線形弾性体の定式化

まず，**付録１**と同様に，座標軸と異方性の主軸が一致していると仮定する．次に，y軸を法線とする面内（すなわちxz面）のみに等方性（E_h, ν_{hh}）を仮定すると，式(117)は以下のように書き換えられる．

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ D_{13} & D_{12} & D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{126}$$

ここに，

$$\begin{aligned} &D_{11} = 1/E_h,\ D_{12} = -\nu_{vh}/E_v,\ D_{13} = -\nu_{hh}/E_h \\ &D_{22} = 1/E_v,\ D_{44} = 1/G_{hv},\ D_{55} = 1/G_{hh} \end{aligned} \tag{127}$$

$$G_{hv} = G_{vh},\ \frac{\nu_{hv}}{E_h} = \frac{\nu_{vh}}{E_v},\ G_{hh} = \frac{E_h}{2\left(1 + \nu_{hh}\right)} \tag{128}$$

ここで，平面ひずみ条件を考えると，

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_{hh}}{E_h}\sigma_x - \frac{\nu_{vh}}{E_v}\sigma_y + \frac{1}{E_h}\sigma_z = 0 \tag{129}$$

より，$\sigma_z = \nu_{hh}\sigma_x + \nu_{hv}\sigma_y$ となるので，

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{130}$$

ここに，

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{C_{22}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2},\ D_{12} = -\frac{C_{12}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} \\ D_{22} &= \frac{C_{11}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2},\ D_{33} = \frac{1}{C_{33}} = G_{hv} \end{aligned} \tag{131}$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1}{E_h}\left(1 - \nu_{hh}^2\right),\ C_{12} = -\frac{\nu_{hv}}{E_h}\left(1 + \nu_{hh}\right) \\ C_{22} &= \frac{1}{E_v}\left(1 - \nu_{vh}\nu_{hv}\right),\ C_{33} = \frac{1}{G_{hv}} \end{aligned} \tag{132}$$

なお, 座標軸と異方性の主軸が一致しない場合は, **付録1**と同様の処理を行えばよい．

付録3．固有異方性を考慮した多重せん断モデルの定式化

ここでは，増田ら（2016）を参考に，初期構造（固有）異方性を考慮できるように拡張された多重せん断機構モデルの概要についてのみ述べる．まず，拡張されたモデルの積分形は, 以下のように表される．

$$\boldsymbol{\sigma}' = -p\mathbf{n}^{(0)} + \sum_{i=1}^{2I} \tilde{q}^{(i)} \mathbf{n}^{(i)} \Delta\omega \tag{133}$$

ここに,

$$\tilde{q}^{(i)} = \tilde{F}\left(\frac{\omega_i}{2} - \frac{\omega_0}{2}\right)\tilde{q}^{(i)}_{\mathrm{Iso}} + \tilde{q}^{(i)}_{\mathrm{Aniso}} \tag{134}$$

$$\tilde{F}(\theta) = 1 + a_1 \cos 2\theta + a_2 \cos 4\theta \tag{135}$$

$$\begin{aligned}\tilde{q}^{(i)}_{\mathrm{Aniso}} &= -\left\{\tilde{F}\left(\frac{\omega_i}{2} - \frac{\omega_0}{2}\right) - 1\right\}\bar{E}_0 p \\ &= -\left\{a_1 \cos(\omega_i - \omega_0) + a_2 \cos 2(\omega_i - \omega_0)\right\}\bar{E}_0 p\end{aligned} \tag{136}$$

$$\mathbf{n}^{(0)\mathrm{T}} = \{1 \quad 1 \quad 0\} \tag{137}$$

$$\mathbf{n}^{(i)\mathrm{T}} = \{\cos\omega_i \quad -\cos\omega_i \quad \sin\omega_i\} \tag{138}$$

$$\omega_i = (i-1)\Delta\omega,\ \Delta\omega = \pi / I \tag{139}$$

であり，$\tilde{F}(\theta)$は初期構造異方性を考慮するための関数，a_1, a_2, ω_0は初期構造異方性の程度や方向を規定するパラメータである．なお，式(134)における$\tilde{q}^{(i)}_{\mathrm{Iso}}$は，初期構造異方性がない場合（等方性）の仮想単純せん断応力であり，従来から用いられてきた仮想単純せん断応力（Iai et al., 2011）の1/2に相当する．

ここで，従来の定式化との整合性を考え，式(133)を以下のように変形しておく．

$$\boldsymbol{\sigma}' = -p\mathbf{n}^{(0)} + \sum_{i=1}^{I} q^{(i)} \mathbf{n}^{(i)} \Delta\omega \tag{140}$$

ここに,

$$q^{(i)} = F(\omega_i - \omega_0) q^{(i)}_{\mathrm{Iso}} + q^{(i)}_{\mathrm{Aniso}} \tag{141}$$

$$F(\omega_i) = 1 + a_2 \cos 2\omega_i \tag{142}$$

$$q^{(i)}_{\mathrm{Aniso}} = -2a_1 \cos(\omega_i - \omega_0)\bar{E}_0 p \tag{143}$$

であり，$q^{(i)}_{\mathrm{Iso}}$は従来から用いられてきた仮想単純せん断応力そのものに相当する．

（論文受理日：2016年6月13日）