

## 大変形する弾性体を含む 3 次元流れ場の数値計算法

黒田望\*・牛島省\*\*

\* 京都大学工学研究科 社会基盤工学専攻

\*\* 京都大学学術情報メディアセンター

### 要旨

本研究では、3 次元流体中に存在する、線形弾性体の大変形問題を扱う数値解析手法を検討した。従来の微小変形問題を扱う固体モデルから、速度形の構成式により物体内力を計算する固体モデルに変更し、これを多相場の解法 MICS に導入した。改良された計算手法の適用性を確認するために、3 次元流中の線形弾性体の形状復元性について検証を行う。さらに、3 次元キャビティ流れの中に設置された樹木形状弾性体や弾性円柱群に適用し、線形弾性体として扱える植生や樹木の群落に対する計算法の応用が可能であることを示す。

キーワード: 流体・固体連成, 弾性体, 有限変形, FEM, MICS, 柔軟植生

### 1. はじめに

本研究では、3 次元流体中に存在する、線形弾性体の大変形問題を扱う数値解析手法について検討を行った。具体的な問題としては、河道に自生した樹木や植生の洪水流による変形に着目した。従来より、流れと植生の連成計算は行われてきたが、植生を剛体として扱った研究(清水ら, 1992)や、片持ち梁としてモデル化した研究(中川ら, 1995)のように、植生の詳細な変形まで再現していない。流れによって変形する植生のように流体と固体が相互に関係する複雑な現象は、縮小模型実験や理論解析による評価が難しい。このため、線形弾性体と流体との連成作用を適切に評価できる計算手法を検討する。本報では、線形弾性体のみを対象としているため、以降では線形弾性体を単に弾性体と表記する。

今まで、著者らは有限要素法により弾性体の微小変形を解析する固体モデルを 3 次元多相場の解法 MICS (牛島ら, 2008)に導入し、流体と弾性体の連成問題に適用した(黒田・牛島, 2008)。本報では、流れ場中存在する弾性体の有限変形問題を扱うことを目的として、速度形の構成式を用いた応力増分型によって、物体内力の計算を行う。

新たに導入した固体モデルの適用性を検討するために、基礎的な連成問題を対象として弾性体の形状復元性に関して検証を行った。次に、複雑な固体・流体連成問題として、3 次元キャビティ内に存在する樹木形状弾性体や弾性円柱群に対する本手法の有効性を示す。

### 2. 数値解析手法

#### 2.1 3 次元自由水面流れの計算法

MICS の基礎方程式は以下の Euler 表記による質量保存則、非圧縮条件、保存形表示された運動方程式の 3 式である(牛島ら, 2008)。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j}(\mu u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\mu u_j) \right] \quad (3)$$

ここで、 $\rho, \mu, p$  は順に計算セル内の体積平均操作によって求められる密度、粘性率、圧力である。また、 $u_i$  はセル内の質量平均により算出される  $x_i$  方向の流速成分である。 $t$  と  $x_i$  は時間と 3 次元直交座標系の座標成分で、 $f_i$  は外力の加速度成分を表す。体積平均または質量平均は各流体計算セルごとに定められるが、セル内に物体が占有する体積を求める際には、四面体サブセル法(牛島ら, 2008)を用いる。

計算手順は、コロケート格子を用いる非圧縮性流体計算法と同様で、予測段階、圧力計算段階、修正段階の 3 つの手順からなる MAC 系解法が用いられている。最初に、四面体サブセル法により、計算セルに含まれる物体体積を算出し、体積平均された物性値等を求める。予測段階では、陰的解法である C-ISMALC 法(牛島ら, 2002)を使ってセル中心で流速の推定値を求める。圧力計算段階では C-HSMALC 法(牛島・奥山, 2003)を利用して、BiCGSTAB

法により圧力変化量の連立 1 次方程式の数値解を求める。自由水面形状は、式 (1) を数値拡散を抑制する保存形式スキームで解いて求める。

## 2.2 FEM による物体変形の計算法

固体は四面体要素の集合として表現し、変形計算の精度を高めるために 2 次要素モデルを用いる。仮想仕事の原理より導き出される物体運動の基礎式は以下の通りである。

$$M\ddot{\mathbf{d}} + C\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{F}_{int} = \mathbf{F}_{ext} \quad (4)$$

ここで、各節点の 3 次元変位を成分とするベクトルを  $\mathbf{d}$ 、上付のドットは時間微分 (2 つのドットは 2 階微分) を表し、 $M$  は質量マトリックス、 $C$  は減衰マトリックス、 $\mathbf{F}_{ext}$  は流体力などの外力ベクトルである。 $\mathbf{F}_{int}$  は次式で表される四面体要素の内力ベクトル  $\mathbf{F}_{int}^e$  を重ね合わせて求める。

$$\mathbf{F}_{int}^e = \int_{\Omega_e} B^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (5)$$

ここに、 $\boldsymbol{\sigma}$  は応力ベクトル、 $B$  は形状関数で表現されるひずみ変位マトリックスである。積分領域  $\Omega_e$  は四面体要素を表し、上記の積分は局所座標形に変換した後、積分点数が 4 の数値積分により求める。質量マトリックス  $M$  と減衰マトリックス  $C$  は対角行列として表される集中マトリックスとした。

本報で使用した客観性のある応力速度は、次に示す Cotter-Rivlin 速度 (Javier · Richard, 2008) である。

$$\dot{T}_{(c)} = \dot{T} + L^T \cdot T + T \cdot L \quad (6)$$

ここに、上式中の  $T$ 、 $\dot{T}$  はテンソル形式の応力、応力速度を表し、 $L$  は速度勾配テンソルである。添字の  $(c)$  は Cotter-Rivlin 速度を表す。有限変形問題に対応するために、ベクトル表記した Cotter-Rivlin 応力速度  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{(c)}$  と速度  $\dot{\mathbf{d}}$  を次のように関連づける。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{(c)} = D\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = DB\dot{\mathbf{d}} \quad (7)$$

ここに、 $\boldsymbol{\varepsilon}$  はひずみベクトルを表す。 $D$  は材料特性を示す応力ひずみマトリックスであるが、ここでは均質等方な線形弾性体を扱うので、ヤング率とポアソン比の二つの材料定数によって構成される。式 (6) の応力速度  $\dot{T}$  をベクトル表記した  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  と現ステップの応力  $\boldsymbol{\sigma}^n$  を用いて、次ステップの応力  $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$  は次式で表される。

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^n + \dot{\boldsymbol{\sigma}}\Delta t \quad (8)$$

物体運動の計算概要は Fig. 1 に示す通りである (Okazawa et al., 2007)。本報では、物体の幾何学的非線形性を考慮できるように、ひずみ変位マトリックス  $B$  を毎ステップ更新している。Fig. 1 の「1. 流体力計算」や「5. 質量平均速度の計算」の詳細は既報 (黒田 · 牛島, 2008) に示されている。

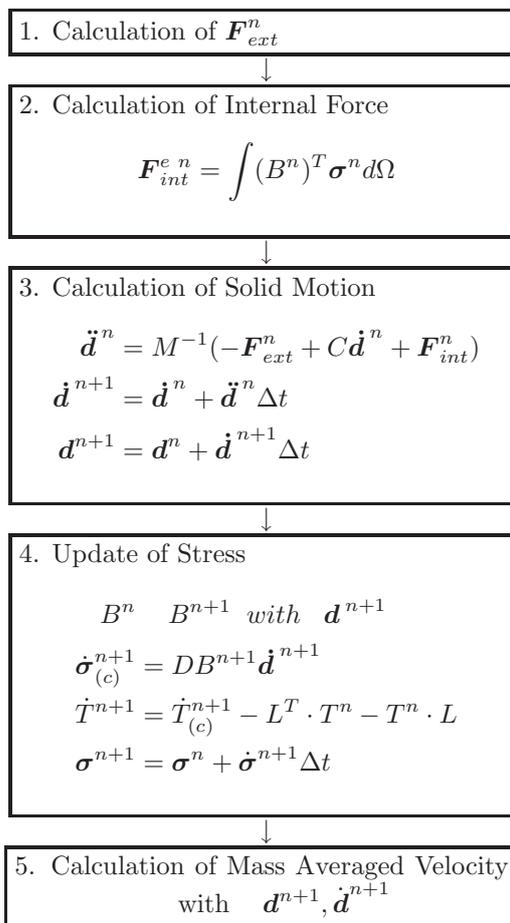


Fig. 1 Flowchart of solid calculation

## 3. 解法の検証と適用例

本項では、弾性体の形状復元性を確認して解法の検証を行い、応用例として、キャピティ流中の複雑形状弾性体と弾性円柱群に対して解法を適用する。以下の計算は無次元で行われている。

### 3.1 3次元場の弾性体の形状復元性の検証

弾性体に力を加えて変形させた後、力を取り除くと変形前の形状に戻る。従来の手法では剛性マトリックスを作成し、変位と内力を関連づけていたために、この形状復元性を容易に捉えられた。しかし、式 (7) に示すような速度形の構成式を用いている本手法では基準配置の情報を陽に含んでいない。そこで、大きさ  $1 \times 1 \times 1$  の立方体キャピティ流中における弾性立方体を対象として形状復元性を確認する。計算に用いた弾性立方体は節点数 1617、四面体数 968、大きさは  $0.3 \times 0.3 \times 0.3$  の立方体で、計算領域の中心に鉛直軸回りに 45 度回転させて設置した。計算セル数は  $20 \times 20 \times 20$  とした。上面、下面はそれぞれ速度  $U_w, -U_w$  の移動壁で、その他は non-slip 条件の壁面とした。移動壁の移動速度と時間の関係は Fig. 2 に示すとおりである。計算条件は Table 1 に示した。

Fig. 3 に初期状態 (a)、最大変形時 (c)、変形復元状態 (d) の計算結果を示す。物体は回転しながら変形し、Fig.

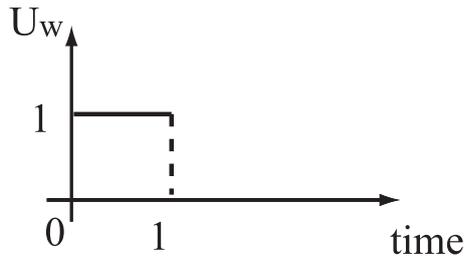


Fig. 2 Time histories of  $U_w$

Table 1 Non-dimensional physical properties

solid		
$\rho_s$	Density of solid	1.0
$E$	Young's modulus	90.0
$\nu$	Poisson ratio	0.5
fluid		
$\rho_f$	Density of fluid	1.0
$\mu$	Viscous coefficient	1.0
$U_w$	Velocity of wall	1.0

3(d) に示されるように、回転した状態で初期の形状に戻る。Fig. 4 に次式で表される変形量の指標  $\phi$  の時刻歴を示した。

$$\phi = \sqrt{\Sigma \Delta l^2} \quad (9)$$

ここで、 $\Delta l$  は四面体要素を構成する各節点の弾性立方体重心点からの距離の変化量である。 $t = 1.0$  の時に  $\phi$  が最大となり、 $U_w$  が 0 になる時刻  $t > 1$  で急激に  $\phi$  が減少し、初期値 0 に漸近することがわかる。これらの結果より、本計算手法に 3 次元弾性体の形状復元性があることが確認できた。

### 3.2 複雑形状物体を対象とした連成計算

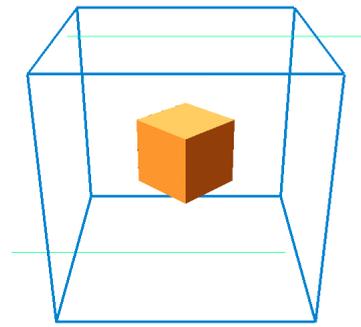
次に、本手法の応用例として、 $1 \times 1 \times 1$  のキャピティ流内部に樹木形状の弾性体が存在する場の計算を行う。

樹木モデルの作成方法は以下の通りである。L-system (Prunskiewicz and Lindenmayer, 1990) を用いて線分データからなる骨格を生成し、この線分データを熱源とする熱拡散方程式の非定常計算を行い、適当な時刻の温度場を求めた。熱源付近に高い温度が集中しているため、等値面を描くことで擬似的な樹皮面が生成される。三角形ポリゴンで形成された等値面に囲まれたボリュームに対して、内部に四面体要素を生成した。

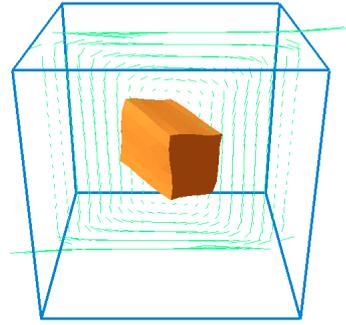
計算条件は Table 2 に示すとおりである。

計算セル数は  $20 \times 20 \times 20$  で、セルサイズは各方向に 0.05 とした。時間増分  $\Delta t$  は  $2.0 \times 10^{-2}$  とした。上壁面のみが速度  $U_w$  で左から右へ水平に移動し、その他は non-slip 条件とした。Table 2 の値より計算される  $Re$  数は 1000 である。

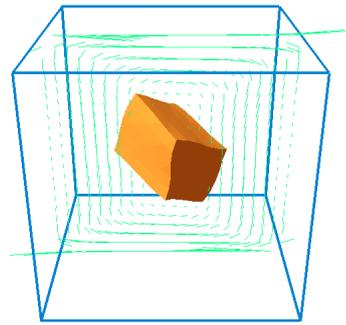
Fig. 5 に変形する樹木形状物体の計算結果を示す。キャピティ流れの発達に伴い、鉛直方向に長い幹の部分に変



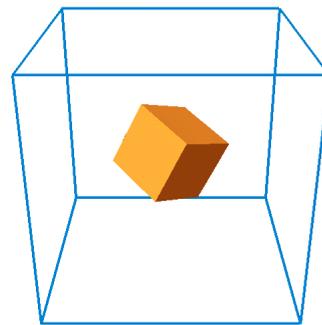
(a)  $t = 0.0$  (s)



(b)  $t = 0.5$  (s)



(c)  $t = 1.0$  (s)



(d)  $t = 5.0$  (s)

Fig. 3 Predicted results

形し、その後、斜め方向にのびた枝の部分が大きく変形する様子が示されている。計算が進むにつれて、瞬間的な流体力による変形状態から元の形状に近づいていることがわかる。

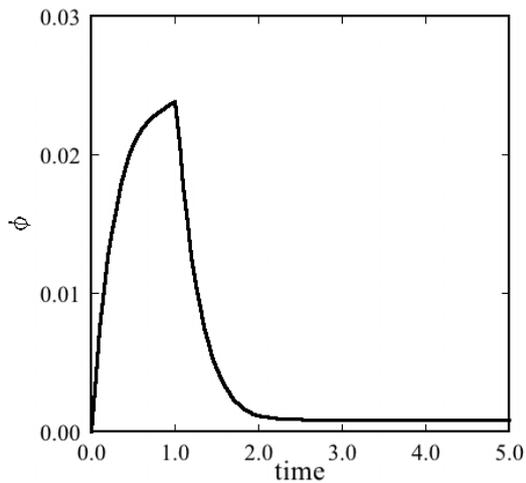


Fig. 4 Time history of index of deformation

Table 2 Non-dimensional physical properties

tree model		
$\rho_s$	Density of solid	1.0
$E$	Young's modulus	$1.0 \times 10$
$\nu$	Poisson ratio	0.5
fluid		
$\rho_f$	Density of fluid	1.0
$\mu$	Viscous coefficient	$1.0 \times 10^{-3}$
$U_w$	Velocity of wall	1.0

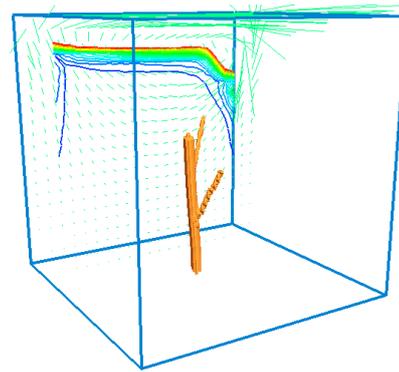
### 3.3 弾性円柱群を対象とした連成計算

ここでは、16本の弾性円柱をキャビティ内部に等間隔に設置し、円柱群を対象として連成計算を行う。

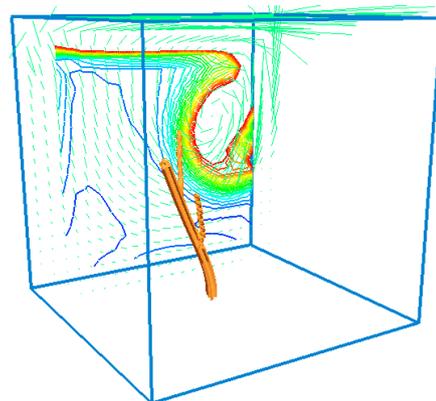
Table 3 Non-dimensional physical properties

cylinder		
$\rho_s$	Density of solid	1.0
$E$	Young's modulus	$1.0 \times 10$
$\nu$	Poisson ratio	0.5
fluid		
$\rho_f$	Density of fluid	1.0
$\mu$	Viscous coefficient	$1.0 \times 10^{-3}$
$U_w$	Velocity of wall	1.0

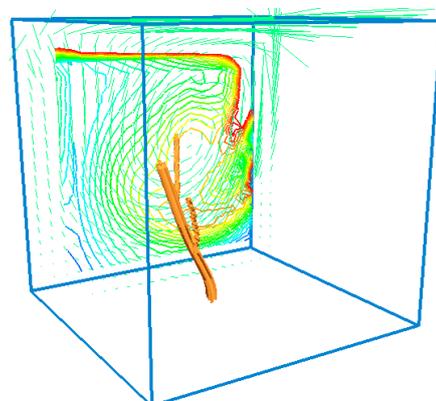
計算条件は Table 3 に示すとおりである。計算セル数は、 $20 \times 20 \times 20$  で、セルサイズは各方向に 0.05 とした。時間増分  $\Delta t$  は  $2.0 \times 10^{-2}$  とした。上壁面は速度  $U_w$  で左から右に移動し、 $Re$  数は 1000 である。他の壁面は non-slip 条件とした。



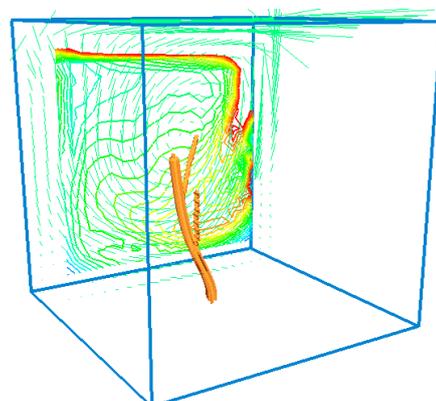
(a)  $t = 1.0$  (s)



(b)  $t = 3.0$  (s)



(c)  $t = 6.0$  (s)



(d)  $t = 8.0$  (s)

Fig. 5 Predicted results (tree model)

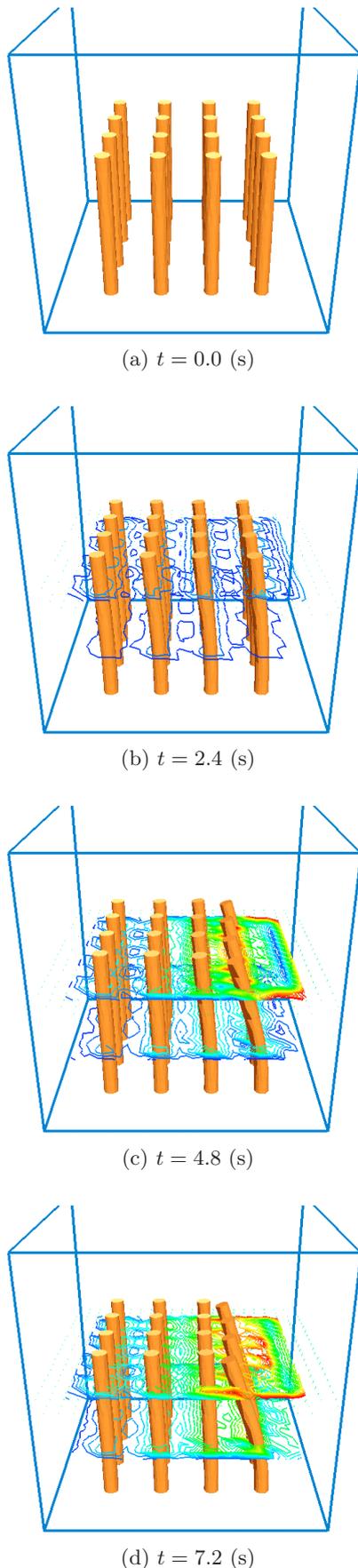


Fig. 6 Predicted results (cylinders)

Fig. 6 に変形する円柱群の計算結果を示す。等値線は、円柱上部と下部の渦度分布を示す。キャビティ流れにより右側の円柱群が変形しているが、円柱群によって流れが遮られ、左側の円柱群はほとんど変形していない。右側の円柱群による遮蔽効果のため、左側の円柱に作用する流体力が小さくなる状況が計算できていると推測される。

#### 4. おわりに

本報では、3次元流中に存在する弾性体の有限変形を予測する解法を構築した。大変形を考慮して、速度形の構成式により物体内力を計算する FEM モデルを多相場の解法である MICS に導入した。この解法の適用性を確認するため、大変形する 3次元弾性体の形状復元性を検証した。さらに、本計算手法の応用例として、3次元キャビティ内における樹木形状弾性体や弾性円柱群に本手法を適用した。その結果、流れにより物体が有限変形する様子や流況により弾性円柱群の変形が異なる状況が計算された。今後は固体モデルの改良や並列計算の導入によって、実現象に近い問題に適用する。

#### 参考文献

- 牛島省, 禰津家久 (2002) : 陰解法を用いたコロケート格子による高次精度の流体解析手法の提案. 土木学会論文集, No. 719/II-61, pp. 21-30.
- 牛島省, 奥山洋平 (2003) : 非圧縮性流体計算における C-HSMAC 法と SOLA 法の収束特性. 土木学会論文集, No. 747/II-65, pp. 197-202.
- 牛島省, 福谷彰, 牧野統師 (2008) : 3次元自由水面流中の接触を伴う任意形状物体運動に対する数値解法. 土木学会論文集, Vol. 64/II-2, pp. 128-138.
- 黒田望, 牛島省 (2008) : 自由水面流中の変形を伴う物体に作用する流体力の数値計算. 応用力学論文集, Vol. 11, pp. 799-806.
- 清水義彦, 辻本哲朗, 中川博次 (1992) : 直立性植生層を伴う流れ場の数値計算に関する研究. 土木学会論文集, Vol. 447/II-19, pp. 35-44.
- 中川博次, 辻本哲朗, 北村忠紀, 藤井康嗣 (1995) : 流れによって変形する植生粗度の抵抗則. 水工学論文集, Vol. 39, pp. 465-470.
- Javier Bonet and Richard D. Wood. (2008) : *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge.
- S. Okazawa, K. Kasiyama, and Y. Kaneko (2007) : Eulerian formulation using stabilized finite element method for large deformation solid dynamics. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol. 72, No. 13, pp. 1544-1559.
- Prusinkiewicz P and Lindenmayer A (1990) : *The algorithmic beauty of plants*. Springer Verlag.

## Numerical Method of 3D Flows Including Elastic Objects with Large Deformations

Nozomu KURODA\* and Satoru USHIJIMA\*\*

\* Department of Civil and Earth Resources Engineering, Kyoto University

\*\* Academic Center for Computing and Media Studies, Kyoto University

### Synopsis

In this study, a numerical method which can deal with the large deformations of the linear elastic objects in 3D flows is proposed. The object is assumed to be a linear elastic body and its deformation is calculated through the stress increments to deal with its finite deformation. The validity of the prediction method was confirmed with the basic problems related to the reshape of linear elasticity in 3D cavity flows. In addition, the computational method was applied to the flexible tree model and elastic cylinders deforming in 3D flows. Consequently, it was confirmed that this method is applicable to the plants which are assumed to be elastic bodies.

**Keywords** : fluid-solid interaction, elastic body, finite deformation, FEM, MICS, flexible plant