京都大学防災研究所年報　第51号B　平成 20 年 6 月
Annuals of Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., No. 51 B, 2008

# 砂の繰返し載荷時の挙動モデルとしてのひずみ空間多重モデルにおけるストレスダイレイタンシー関係

井合　進・飛田哲男・小堤　治*

＊ 京都大学防災研究所非常勤講師/（株）明窓社

## 要　旨

本稿は，砂の繰返し載荷時の挙動モデルとして，新たなストレスダイレイタンシー関係を提案し，それをひずみ空間多重モデルに組込んだ形の定式化を提示する。提案するストレスダイレイタンシー関係は，ダイレイタンシーによる体積ひずみ成分が，仕事をしないせん断機構を表現する膨張的成分，および，累積せん断ひずみに比例する収縮的成分の和として与えられるという簡単な仮説に基づくものである。定式化とともに，このモデルを適用していられる砂の繰返し挙動の解析例を併せて示す。

キーワード: 砂，構成式，繰返載荷挙動，ダイレイタンシー

## 1.　はじめに

カムクレイモデルにおけるストレスダイレイタンシーの式は，３軸応力状態において，以下のとおり表される(Roscoe *et al.*, 1963; Schofield & Wroth, 1968)。

$$p\mathrm{d}v_{\mathrm{p}} + q\mathrm{d}\gamma_{\mathrm{p}} = \mathrm{M}p\mathrm{d}\gamma_{\mathrm{p}} \tag{1}$$

ここに，平均有効応力 $p=(\sigma_{\mathrm{a}}'+2\sigma_{\mathrm{r}}')/3$（圧縮を正），偏差応力 $q=\sigma_{\mathrm{a}}'-\sigma_{\mathrm{r}}'$，ダイレイタンシーによる体積ひずみ $v_{\mathrm{p}}=\varepsilon_{\mathrm{pa}}+2\varepsilon_{\mathrm{pr}}$（圧縮を正），偏差ひずみ $\gamma_{\mathrm{p}}=(2/3)(\varepsilon_{\mathrm{pa}}-\varepsilon_{\mathrm{pr}})$。下添字 a, r は，円柱供試体の軸方向および半径方向を，p は塑性ひずみを表す。

式(1)において，ダイレイタンシーによる体積ひずみ増分は以下のように分解できる(Iai, 1994)。

$$\mathrm{d}v_{\mathrm{p}} = \mathrm{d}v_{\mathrm{p}}^{\mathrm{c}} + \mathrm{d}v_{\mathrm{p}}^{\mathrm{d}} \tag{2}$$

$$\mathrm{d}v_{\mathrm{p}}^{\mathrm{c}} = \mathrm{M}\mathrm{d}\gamma_{\mathrm{p}} \tag{3}$$

$$p\mathrm{d}v_{\mathrm{p}}^{\mathrm{d}} + q\mathrm{d}\gamma_{\mathrm{p}} = 0 \tag{4}$$

式(3)は収縮的な体積ひずみ成分，式(4)は膨張的な成分を示す。膨張的な成分を体積ひずみとして有するひずみ増分 $(\mathrm{d}v_{\mathrm{p}}^{\mathrm{d}}, \mathrm{d}\gamma_{\mathrm{p}})$ は，式(4)のとおり仕事をしない。

## 2. 提案するストレスダイレイタンシー関係

以上のストレスダイレイタンシー式は３軸応力条件下で与えられたものであるが，これを一般的な応力条件に書き換える。

まず，体積ひずみ成分を以下のとおり，三成分に分解する。

$$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}} + \varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}} \tag{5}$$

ここに，

$\varepsilon'$：等方的圧力の変化による成分（有効体積ひずみ），$\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}$：収縮的ダイレイタンシー成分，$\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}$：膨張的ダイレイタンシー成分。

式(5)を用いると，ひずみは以下のとおりの成分に分解できる。

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{3}\left(\varepsilon' + \varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}} + \varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}\right)\delta_{kl} + e_{kl} \tag{6}$$

このうち，右辺の最後の２項をまとめて，

$$\varepsilon_{kl}{}^{\mathrm{n}} = \frac{1}{3}\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}\delta_{kl} + e_{kl} \tag{7}$$

と書き，式(7)であらわされるひずみの増分が，応力ベクトルと直交する成分（仕事をしない成分）であると仮定する。すなわち，

$$\sigma_{kl}'\mathrm{d}\varepsilon_{kl}{}^{\mathrm{n}}=0 \tag{8}$$

これより，膨張的ダイレイタンシー成分は，以下のとおり求められる。

$$\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}=\frac{s_{kl}\mathrm{d}e_{kl}}{-\dfrac{I_1}{3}} \tag{9}$$

他方，収縮的成分は，以下のように与える。

$$\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}=-\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\mathrm{M}_{\mathrm{v}}\left|\mathrm{d}\gamma_{\mathrm{p}}^{(ij)}\right|\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{10}$$

ここに，仮想単純せん断ひずみは，以下で与える。

$$\mathrm{d}\gamma^{(ij)}=\left\langle t_k^{(ij)},n_l^{(ij)}\right\rangle\mathrm{d}\varepsilon_{kl} \tag{11}$$

以上が，提案するストレスダイレイタンシー関係である。以下に，これらの関係を多重せん断モデルに組込む形の構成式を示す。本稿では，２次元的定式化を示すが，３次元的定式化もこれに準じて行うことができる(Iai & Ozutsumi, 2005)。

## 3.　積分形の構成式（基本形）

２次元解析の場合，応力，ひずみベクトルを以下で与える。

$$\boldsymbol{\sigma}'^{\mathrm{T}}=\left\{\sigma_x'\quad\sigma_y'\quad\tau_{xy}\right\} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}=\left\{\varepsilon_x\quad\varepsilon_y\quad\gamma_{xy}\right\} \tag{13}$$

多重せん断モデルの積分形の基本形を，以下で与える(Iai *et al.*, 1992)。

$$\boldsymbol{\sigma}'=-p\mathbf{n}^{(0)}+\sum_{i=1}^{I}q^{(i)}\mathbf{n}^{(i)}\Delta\omega \tag{14}$$

ここに，

$$\mathbf{n}^{(0)\mathrm{T}}=\left\{1\quad 1\quad 0\right\} \tag{15}$$

$$\mathbf{n}^{(i)\mathrm{T}}=\left\{\cos\omega_i\quad -\cos\omega_i\quad \sin\omega_i\right\}\quad (\text{for } i=1,\ldots,I) \tag{16}$$

$$\omega_i=(i-1)\Delta\omega \tag{17}$$

$$\Delta\omega=\pi/I \tag{18}$$

式(14)の等方成分 $p$ および仮想単純せん断応力 $q^{(i)}$ は，有効体積ひずみ $\varepsilon'$，仮想有効体積ひずみ $\varepsilon''$，および仮想単純せん断ひずみ $\gamma^{(i)}$ の関数として，以下で与える。

$$p=p(\varepsilon') \tag{19}$$

$$q^{(i)}=q^{(i)}(\gamma^{(i)},\ \varepsilon',\ \varepsilon'') \tag{20}$$

なお，式(20)において，仮想単純せん断ひずみ $\gamma^{(i)}$ のみの関数とせず，有効体積ひずみ $\varepsilon'$，仮想有効体積ひずみ $\varepsilon''$ を含む関数としている理由は，「5. 積分形の構成式（液状化解析）」で記述するとおり，仮想単純せん断機構の拘束圧力依存性および液状化状態依存性を考慮するためである。

さて，式(19)(20)における有効体積ひずみ $\varepsilon'$ は，体積ひずみからダイレイタンシーによる体積ひずみ成分を除去したものであり，以下で与える。

$$\varepsilon'=\mathbf{n}^{(0)\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}'=\mathbf{n}^{(0)\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{d}}\right) \tag{21}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{d}}=\frac{\varepsilon_{\mathrm{d}}}{2}\mathbf{n}^{(0)} \tag{22}$$

式(22)におけるダイレイタンシー成分は，以下のように収縮的成分 $\varepsilon_d^c$ および膨張的成分 $\varepsilon_d^d$ よりなる。

$$\varepsilon_{\mathrm{d}}=\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}+\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}} \tag{23}$$

すなわち，

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}+\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}} \tag{24}$$

ここに，

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}=\frac{\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}}{2}\mathbf{n}^{(0)} \tag{25}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}=\frac{\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}}{2}\mathbf{n}^{(0)} \tag{26}$$

式(20)における仮想有効体積ひずみ $\varepsilon''$ は，有効体積ひずみから膨張的ダイレイタンシー成分を除去したもので，旧 FLIP の液状化フロントパラメタ $S_0$ に対応する有効体積ひずみであり，以下で与える。

$$\varepsilon''=\mathbf{n}^{(0)\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}''=\mathbf{n}^{(0)\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}\right) \tag{27}$$

仮想単純せん断ひずみ $\gamma^{(i)}$ は，以下で与える。

$$\gamma^{(i)}=\mathbf{n}^{(i)\mathrm{T}}(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{d}})=\mathbf{n}^{(i)\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{28}$$

ダイレイタンシー成分の増分は，ひずみ増分の線形変換で与えられるものと仮定し，これを以下のとおり書く。

$$\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{d}}=\mathbf{n}_{\mathrm{d}}{}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{29}$$

$$\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}=\mathbf{n}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}\,\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{30}$$

$$\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}} = \mathbf{n}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{dT}} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{31}$$

よって，式(23)より，

$$\mathbf{n}_{\mathrm{d}} = \mathbf{n}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}} + \mathbf{n}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}} \tag{32}$$

## 4. 増分形（基本形）

増分形の構成式は，式(3)の両辺の微分をとれば，以下で与えられる。

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}' = -\mathrm{d}p\mathbf{n}^{(0)} + \sum_{i=1}^{I} \mathrm{d}q^{(i)}\mathbf{n}^{(i)}\Delta\omega \tag{33}$$

$$\mathrm{d}p = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varepsilon'}\mathrm{d}\varepsilon' \tag{34}$$

$$\mathrm{d}q^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma^{(i)}}\mathrm{d}\gamma^{(i)} + \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon'}\mathrm{d}\varepsilon' + \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon''}\mathrm{d}\varepsilon'' \tag{35}$$

式(34)(35)に，式(21)(27)(28)を代入すると，

$$\mathrm{d}p = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varepsilon'}\mathbf{n}^{(0)\mathrm{T}}\mathrm{d}\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{d}}\right) \tag{36}$$

$$\mathrm{d}q^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma^{(i)}}\mathbf{n}^{(i)\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon'}\mathbf{n}^{(0)\mathrm{T}}\mathrm{d}\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{d}}\right) + \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon''}\mathbf{n}^{(0)\mathrm{T}}\mathrm{d}\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}\right) \tag{37}$$

式(36)(37)および式(29)～(31)を式(33)に代入すれば，増分形の構成式が以下のとおり与えられる。

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= K_{\mathrm{L/U}}\mathbf{n}^{(0)}\mathbf{n}^{(0)\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{I} G_{\mathrm{L/U}}^{(i)}\mathbf{n}^{(i)}\mathbf{n}^{(i)\mathrm{T}}\Delta\omega \\ &- K_{\mathrm{L/U}}\mathbf{n}^{(0)}\mathbf{n}_{\mathrm{d}}{}^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{I}\left(H^{(i)} + L^{(i)}\right)\mathbf{n}^{(i)}\mathbf{n}^{(0)\mathrm{T}}\Delta\omega \\ &- \sum_{i=1}^{I}\left(H^{(i)}\mathbf{n}^{(i)}\mathbf{n}_{\mathrm{d}}{}^{\mathrm{T}} + L^{(i)}\mathbf{n}^{(i)}\mathbf{n}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{cT}}\right)\Delta\omega\end{aligned} \tag{39}$$

ここに，

$$K_{\mathrm{L/U}} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varepsilon'} \tag{40}$$

$$G_{\mathrm{L/U}}^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma^{(i)}} \tag{41}$$

$$H^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon'} \tag{42}$$

$$L^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon''} \tag{43}$$

式(39)の右辺の第１項，第２項は，それぞれ圧縮伸張およびせん断に関する増分形を表し，対称マトリクスである。第３項は圧縮伸張へのダイレイタンシーの影響，第４項はせん断機構の拘束圧依存性および液状化状態依存性，第５項はせん断機構に与えるダイレイタンシーの影響を表すものである。これら第３～５項は，いずれも圧縮伸張の機構とせん断に関する機構のカップリングの３種類の機構を示すもので，非対称マトリクスとなる。

## 5. 積分形の構成式（非液状化解析）

非液状化解析の積分形の基本形は，式(20)を単純化して，以下のとおり，有効体積ひずみ $\varepsilon'$，および仮想単純せん断ひずみ $\gamma^{(i)}$ の関数として，以下で与える。

$$q^{(i)} = q^{(i)}(\gamma^{(i)},\ \varepsilon') \tag{44}$$

### 5.1 圧縮伸張成分 $p$ の定式化

非液状化解析においては，圧力 $p$ を，正規圧密の場合と過圧密の場合に分けて与える。ここに，正規圧密と過圧密は，有効体積ひずみの履歴を基に，以下のとおり定義する。

正規圧密：$-\varepsilon' \geq \max(-\varepsilon')$ and $-\mathrm{d}\varepsilon' > 0$ の時

過圧密：$-\varepsilon' < \max(-\varepsilon')$ or $-\mathrm{d}\varepsilon' < 0$

これらに応じて，圧力 $p$ は，$0 \leq n_K < 1$ に対して，以下のように与える。

(1)正規圧密の場合

$$\eta = -(1-n_K)\varepsilon'/\varepsilon_{\mathrm{Lma}} \tag{45}$$

ここに，規準応力 $p = p_{\mathrm{a}}$ における体積弾性係数を $K_{\mathrm{La}}$ として，

$$\varepsilon_{\mathrm{Lma}} = p_{\mathrm{a}} / K_{\mathrm{La}} \tag{46}$$

$\eta \geq \eta_{\mathrm{low}} (= 0.3)$ の時：

$$p = p_{\mathrm{a}}\eta^{\frac{1}{1-n_K}} \tag{47}$$

$\eta < \eta_{\mathrm{low}} (= 0.3)$ の時：

$$p = -K_{\mathrm{Llow}} \left( \varepsilon' - \varepsilon'_{\mathrm{low}} \right) + p_{\mathrm{low}} \tag{48}$$

ここに、$p_{\mathrm{low}}$、$K_{\mathrm{Llow}}$、$\varepsilon'_{\mathrm{low}}$ は、それぞれ、$\eta = \eta_{\mathrm{low}}$ の時の $p$ 、$K_{\mathrm{L}}$ 、$\varepsilon'$ の値，すなわち、

$$p_{\mathrm{low}} = p_{\mathrm{a}} \eta_{\mathrm{low}}^{\frac{1}{1-n_K}} \tag{49}$$

$$K_{\mathrm{Llow}} = K_{\mathrm{La}} \left( \frac{p_{\mathrm{low}}}{p_{\mathrm{a}}} \right)^{n_K} \tag{50}$$

$$\varepsilon'_{\mathrm{low}} = -\frac{\eta_{\mathrm{low}}}{(1-n_K)} \varepsilon_{\mathrm{Lma}} \tag{51}$$

(2)過圧密の場合

正規圧密からの除荷開始時点での圧力および有効体積ひずみをそれぞれ

$$p_{\mathrm{r}} = p_{\mathrm{a}} \left( -(1-n_K) \varepsilon' / \varepsilon_{\mathrm{Lma}} \right)^{\frac{1}{1-n_K}} \tag{52}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{r}}' = -\max(-\varepsilon') \tag{53}$$

とおき，これらを用いて，以下を定義する。

$$\eta_r = -(1-n_K)(\varepsilon' - \varepsilon_{\mathrm{r}}') / \varepsilon_{\mathrm{mr}} \tag{54}$$

ここに，除荷開始時点での体積弾性係数を $K_{\mathrm{Ur}}$ として，

$$\varepsilon_{\mathrm{mr}} = p_{\mathrm{r}} / K_{\mathrm{Ur}} \tag{55}$$

$$K_{\mathrm{Ur}} = K_{\mathrm{Ua}} \left( \frac{p_{\mathrm{r}}}{p_{\mathrm{a}}} \right)^{n_K} \tag{56}$$

これを用いて、

$\eta_{\mathrm{r}} \ge \eta_{\mathrm{rlow}} (= -0.7)$ の時

$$p = p_{\mathrm{r}} \left( \eta_{\mathrm{r}} + 1 \right)^{\frac{1}{1-n_K}} \tag{57}$$

$\eta_{\mathrm{r}} < \eta_{\mathrm{rlow}} (= -0.7)$ の時

$$p = -K_{\mathrm{Ulow}} (\varepsilon' - \varepsilon'_{\mathrm{low}}) + p_{\mathrm{rlow}} \tag{58}$$

ここに、$p_{\mathrm{rlow}}$、$K_{\mathrm{Ulow}}$、$\varepsilon'_{\mathrm{rlow}}$ は、それぞれ、$\eta_r = \eta_{\mathrm{rlow}}$ の時の $p$ 、$K_{\mathrm{U}}$、$\varepsilon'$ の値，すなわち、

$$p_{\mathrm{rlow}} = p_r (\eta_{\mathrm{rlow}} + 1)^{\frac{1}{1-n_K}} \tag{59}$$

$$K_{\mathrm{Ulow}} = K_{\mathrm{Ua}} \left( \frac{p_{\mathrm{rlow}}}{p_{\mathrm{a}}} \right)^{n_K} \tag{60}$$

$$\varepsilon'_{\mathrm{rlow}} = -\frac{\eta_{\mathrm{rlow}}}{(1-n_K)} \varepsilon_{\mathrm{mr}} + \varepsilon_{\mathrm{r}}' \tag{61}$$

## 5.2 せん断成分 $q^{(i)}$ の定式化

多重せん断モデルの定式化に基づき，式(20)における仮想単純せん断モデルを，骨格曲線上では，以下のように双曲線型で与える。

$$q^{(i)} = \frac{\gamma^{(i)} / \gamma_{\mathrm{v}}}{1 + \left| \gamma^{(i)} / \gamma_{\mathrm{v}} \right|} q_{\mathrm{v}} \tag{62}$$

ここに，$q_{\mathrm{v}}$，$\gamma_{\mathrm{v}}$ は，仮想単純せん断モデルのせん断強度，(せん断) 規準ひずみであり，せん断強度 $\tau_{\mathrm{m}}$ およびせん断弾性係数 $G_{\mathrm{m}}$ と，以下のように関係づけられる。

$$G_{\mathrm{m}} = \frac{q_{\mathrm{v}}}{\gamma_{\mathrm{v}}} \sum_{i=1}^{I} \sin^2 \omega_i \Delta\omega \tag{63}$$

$$\tau_{\mathrm{m}} = q_{\mathrm{v}} \sum_{i=1}^{I} \sin \omega_i \Delta\omega \tag{64}$$

逆に解けば，

$$\gamma_{\mathrm{v}} = \left( \frac{\sum_{i=1}^{I} \sin^2 \omega_i \Delta\omega}{\sum_{i=1}^{I} \sin \omega_i \Delta\omega} \right) \frac{\tau_{\mathrm{m}}}{G_{\mathrm{m}}} = \left( \frac{\sum_{i=1}^{I} \sin^2 \omega_i \Delta\omega}{\sum_{i=1}^{I} \sin \omega_i \Delta\omega} \right) \gamma_{\mathrm{m}} \tag{65}$$

$$q_{\mathrm{v}} = \frac{\tau_{\mathrm{m}}}{\sum_{i=1}^{I} \sin \omega_i \Delta\omega} \tag{66}$$

ここに，$\gamma_{\mathrm{m}}$ は，(せん断) 規準ひずみである。

なお，$I \to \infty$ の時，

$$\gamma_{\mathrm{v}} = \frac{\pi}{4} \gamma_{\mathrm{m}} \tag{67}$$

$$q_{\mathrm{v}} = \tau_{\mathrm{m}} / 2 \tag{68}$$

仮想単純せん断機構が履歴ループに入った際には，拡張 Masing 則を用いる(Iai *et al.*, 1990)。履歴ループに入った際の仮想せん断ひずみに応じて，妥当な

履歴減衰を表現するように定められるパラメタ $\xi$, $\zeta$ を用いて，あらかじめ，以下の正規化を行う。

$$\tilde{q}^{(i)} = \frac{q^{(i)}/q_{\mathrm{v}}}{\zeta} \tag{69}$$

$$\tilde{\gamma}^{(i)} = \frac{\gamma^{(i)}/\gamma_{\mathrm{v}}}{\xi} \tag{70}$$

これらを用いて，履歴ループ内での仮想せん断応力は，次のとおり与えられる（詳細は文献参照のこと）。

$$\frac{\tilde{q}^{(i)} - \tilde{q}_{\mathrm{r}}^{(i)}}{2\delta} = \frac{\dfrac{\tilde{\gamma}^{(i)} - \tilde{\gamma}_{\mathrm{r}}^{(i)}}{2\delta}}{1 + \left|\dfrac{\tilde{\gamma}^{(i)} - \tilde{\gamma}_{\mathrm{r}}^{(i)}}{2\delta}\right|} \tag{71}$$

非液状化解析時は，せん断強度，せん断弾性係数を以下のとおり与える。

$$\tau_{\mathrm{m}} = p\sin\phi_{\mathrm{f}} = m_1 p \tag{72}$$

$$G_{\mathrm{m}} = G_{\mathrm{ma}}\left(\frac{p}{p_{\mathrm{a}}}\right)^{m_G} \tag{73}$$

よって，規準ひずみの拘束圧依存性は，以下のとおり与えられる。

$$\gamma_{\mathrm{m}} = \frac{\tau_{\mathrm{m}}}{G_{\mathrm{m}}} = m_1 \frac{p}{G_{\mathrm{ma}}}\left(\frac{p}{p_{\mathrm{a}}}\right)^{-m_G} \tag{74}$$

### 5.3 ダイレイタンシーの収縮的成分の定式化

式(23)におけるダイレイタンシーの収縮的成分 $\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}$ は，以下で与える。

$$\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}} = \int \mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}} \tag{75}$$

$$\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}} = -r_{\varepsilon_{\mathrm{d}}} r_{\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}} r_{S_0} \sum_{i=1}^{I} \mathrm{M}_{\mathrm{v}}^{(i)} \left|\mathrm{d}\gamma^{(i)}\right| \Delta\omega \tag{76}$$

ここに，

$$\mathrm{M}_{\mathrm{v}}^{(i)} = \frac{\mathrm{M}_{\mathrm{v0}}}{\left(1 + \dfrac{\mathrm{M}_{\mathrm{v0}}\gamma^{\mathrm{c}(i)}}{-\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{cm}}/\left(\pi r_{\varepsilon_{\mathrm{d}}} r_{\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}}\right)}\right)^2 r_{\mathrm{M}}^{(i)}} \tag{77}$$

$$\mathrm{M}_{\mathrm{v0}} = \frac{\mathrm{M}_{\mathrm{p}}}{\sum_{i=1}^{I}\left|\sin\omega_i\right|\Delta\omega} \tag{78}$$

ここに，$r_{\varepsilon_{\mathrm{d}}}$ は収縮的ダイレイタンシーおよび膨張的ダイレイタンシーに共通してかかるパラメタ，$r_{\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}}$ は収縮的成分のみにかかるパラメタである。また，非液状化解析の場合には $r_{S_0} = 1$ とする。さらに，変相角を $\phi_{\mathrm{p}}$ として，

$$\mathrm{M}_{\mathrm{p}} = \sin\phi_{\mathrm{p}} \tag{79}$$

### 5.4 ダイレイタンシーの膨張的成分の定式化

式(23)におけるダイレイタンシーの膨張的成分 $\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}$ は，以下で与える。

$$\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}} = r_{\varepsilon_d} \sum_{i=1}^{I}\left[\left|\frac{\gamma^{(i)}}{\gamma_{\mathrm{v}}}\right| - \ln\left(1 + \left|\frac{\gamma^{(i)}}{\gamma_{\mathrm{v}}}\right|\right)\right]\gamma_{\mathrm{v}} m_{1\mathrm{v}} \Delta\omega \tag{80}$$

ここに，

$$m_{1\mathrm{v}} = \frac{m_1}{\sum_{i=1}^{I}\sin\omega_i\Delta\omega} \tag{81}$$

## 6. 増分形の構成式（非液状化解析）

非液状化解析の増分形の基本形は，式(33)～(43)において，積分形における式(44)の変更点に対応して，仮想有効体積ひずみに関する微分 $L^{(i)}$ の項を省略でき，接線剛性マトリクスは，以下で与えられる。

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= K_{\mathrm{L/U}}\mathbf{n}^{(0)}\mathbf{n}^{(0)\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{I} G_{\mathrm{L/U}}^{(i)}\mathbf{n}^{(i)}\mathbf{n}^{(i)\mathrm{T}}\Delta\omega \\ &\quad - K_{\mathrm{L/U}}\mathbf{n}^{(0)}\mathbf{n}_{\mathrm{d}}{}^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{I} H^{(i)}\mathbf{n}^{(i)}\mathbf{n}^{(0)\mathrm{T}}\Delta\omega \\ &\quad - \sum_{i=1}^{I} H^{(i)}\mathbf{n}^{(i)}\mathbf{n}_{\mathrm{d}}{}^{\mathrm{T}}\Delta\omega\end{aligned} \tag{82}$$

### 6.1 $K_{\mathrm{L/U}} = -\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varepsilon'}$ の計算

(1)正規圧密の場合

体積成分に関する式(45)～(51)より，$K_{\mathrm{L}}$ は以下のとおり与えられる。

$\eta \geq \eta_{\mathrm{low}} (= 0.3)$ の時：

$$K_{\mathrm{L}} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\varepsilon'} = K_{\mathrm{La}}\left(\frac{p}{p_{\mathrm{a}}}\right)^{n_K} \tag{83}$$

$\eta < \eta_{\text{low}} (= 0.3)$ の時：

$$K_{\text{L}} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varepsilon'} = K_{\text{Llow}} \tag{84}$$

(2)過圧密（除荷）の場合

体積成分に関する式(54)～(61)より，$K_{\text{U}}$ は以下のとおり与えられる。

$\eta_{\text{r}} \geq \eta_{\text{rlow}} (= -0.7)$ の時

$$K_{\text{U}} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\eta_{\text{r}}} \frac{\mathrm{d}\eta_{\text{r}}}{\mathrm{d}\varepsilon'} = K_{\text{Ua}} \left( \frac{p}{p_{\text{a}}} \right)^{n_K} \tag{85}$$

$\eta_{\text{r}} < \eta_{\text{rlow}} (= -0.7)$ の時

$$K_{\text{U}} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varepsilon'} = K_{\text{Ulow}} \tag{86}$$

### 6.2 $G_{\text{L/U}}^{(i)} = \dfrac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma^{(i)}}$ の計算

せん断成分に関する式(62)～(71)より，$G_{\text{L/U}}^{(i)}$ は以下のとおり与えられる。

(1)骨格曲線上：

$$G_{\text{L}}^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma^{(i)}} = \frac{1}{\left(1 + \left|\gamma^{(i)} / \gamma_{\text{v}}\right|\right)^2} \frac{q_{\text{v}}}{\gamma_{\text{v}}} = \frac{1}{\left(1 + \left|\gamma^{(i)} / \gamma_{\text{v}}\right|\right)^2} \frac{G_{\text{m}}}{\sum_{i=1}^{I} \sin^2 \omega_i \Delta\omega} \tag{87}$$

(2)履歴ループ上：

$$G_{\text{L/U}}^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma^{(i)}} = \frac{1}{\left(1 + \left|\dfrac{\tilde{\gamma}^{(i)} - \tilde{\gamma}_{\text{r}}^{(i)}}{2\delta}\right|\right)^2} \frac{\zeta}{\xi} \frac{G_{\text{m}}}{\sum_{i=1}^{I} \sin^2 \omega_i \Delta\omega} \tag{88}$$

### 6.3 $H^{(i)} = \dfrac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon'}$ の計算

まず，

$$H^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon'} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon'} \tag{89}$$

$$\frac{\partial q^{(i)}}{\partial p} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial q_{\text{v}}} \frac{\partial q_{\text{v}}}{\partial p} + \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma_{\text{v}}} \frac{\partial \gamma_{\text{v}}}{\partial p} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial q_{\text{v}}} \frac{\partial q_{\text{v}}}{\partial \tau_{\text{m}}} \frac{\partial \tau_{\text{m}}}{\partial p} + \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma_{\text{v}}} \frac{\partial \gamma_{\text{v}}}{\partial \gamma_{\text{m}}} \frac{\partial \gamma_{\text{m}}}{\partial p} \tag{90}$$

これらの順に計算していく。

まず，$\dfrac{\partial q^{(i)}}{\partial q_{\text{v}}}$，$\dfrac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma_{\text{v}}}$ は，以下のように計算される。

(1)骨格曲線上：式(62)より，

$$\frac{\partial q^{(i)}}{\partial q_{\text{v}}} = \frac{\gamma^{(i)} / \gamma_{\text{v}}}{1 + \left|\gamma^{(i)} / \gamma_{\text{v}}\right|} \tag{91}$$

$$\frac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma_{\text{v}}} = -\frac{\gamma^{(i)} / \gamma_{\text{v}}}{\left(1 + \left|\gamma^{(i)} / \gamma_{\text{v}}\right|\right)^2} \frac{q_{\text{v}}}{\gamma_{\text{v}}} = -\frac{\gamma^{(i)} / \gamma_{\text{v}}}{\left(1 + \left|\gamma^{(i)} / \gamma_{\text{v}}\right|\right)^2} \frac{G_{\text{m}}}{\sum_{i=1}^{I} \sin^2 \omega_i \Delta\omega} \tag{92}$$

(2)履歴ループ上：式(69)(70)(71)より，

$$\frac{\partial q^{(i)}}{\partial q_{\text{v}}} = \frac{\dfrac{\tilde{\gamma}^{(i)} - \tilde{\gamma}_{\text{r}}^{(i)}}{2\delta}}{1 + \left|\dfrac{\tilde{\gamma}^{(i)} - \tilde{\gamma}_{\text{r}}^{(i)}}{2\delta}\right|} 2\delta\zeta \tag{93}$$

$$\frac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma_{\text{v}}} = -\frac{\dfrac{\tilde{\gamma}^{(i)} - \tilde{\gamma}_{\text{r}}^{(i)}}{2\delta}}{\left(1 + \left|\dfrac{\tilde{\gamma}^{(i)} - \tilde{\gamma}_{\text{r}}^{(i)}}{2\delta}\right|\right)^2} \frac{q_{\text{v}}}{\gamma_{\text{v}}} 2\delta\zeta = -\frac{\dfrac{\tilde{\gamma}^{(i)} - \tilde{\gamma}_{\text{r}}^{(i)}}{2\delta}}{\left(1 + \left|\dfrac{\tilde{\gamma}^{(i)} - \tilde{\gamma}_{\text{r}}^{(i)}}{2\delta}\right|\right)^2} \frac{2\delta\zeta G_{\text{m}}}{\sum_{i=1}^{I} \sin^2 \omega_i \Delta\omega} \tag{94}$$

また，$\dfrac{\partial q_{\text{v}}}{\partial \tau_{\text{m}}}$，$\dfrac{\partial \gamma_{\text{v}}}{\partial \gamma_{\text{m}}}$ は，以下のように計算される。

$$\frac{\partial q_{\text{v}}}{\partial \tau_{\text{m}}} == \frac{1}{\sum_{i=1}^{I} \sin \omega_i \Delta\omega} \tag{95}$$

$$\frac{\partial\gamma_{\mathrm{v}}}{\partial\gamma_{\mathrm{m}}}=\left(\frac{\sum_{i=1}^{I}\sin^{2}\omega_{i}\Delta\omega}{\sum_{i=1}^{I}\sin\omega_{i}\Delta\omega}\right) \tag{96}$$

さらに,式(72)(74)より

$$\frac{\partial\tau_{m}}{\partial p}=m_{1} \tag{97}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\gamma_{m}}{\partial p}&=(1-m_{G})m_{1}\frac{1}{G_{\mathrm{ma}}}\left(\frac{p}{p_{\mathrm{a}}}\right)^{-m_{G}}\\&=\frac{(1-m_{G})m_{1}}{G_{\mathrm{m}}}\end{aligned} \tag{98}$$

よって,

$$H^{(i)}=-K_{\mathrm{L/U}}m_{1}\left(\frac{\partial q^{(i)}}{\partial q_{\mathrm{v}}}\frac{\partial q_{\mathrm{v}}}{\partial\tau_{\mathrm{m}}}+\frac{1-m_{G}}{G_{\mathrm{m}}}\frac{\partial q^{(i)}}{\partial\gamma_{\mathrm{v}}}\frac{\partial\gamma_{\mathrm{v}}}{\partial\gamma_{\mathrm{m}}}\right) \tag{99}$$

ここに, $K_{\mathrm{L/U}}$ は式(83)～(86)で与えられる。

## 6.4　$\mathbf{n}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}$ の計算

ダイレイタンシーの収縮的成分は，式(76)より,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}&=-r_{\varepsilon_{\mathrm{d}}}r_{\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}}r_{S_{0}}\sum_{i=1}^{I}\mathrm{M}_{\mathrm{v}}^{(i)}\left|\mathbf{n}^{(i)\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\right|\Delta\omega\\&=-r_{\varepsilon_{\mathrm{d}}}r_{\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}}r_{S_{0}}\left(\sum_{i=1}^{I}\mathrm{M}_{\mathrm{v}}^{(i)}\left|\mathbf{n}^{(i)}\right|^{*}\Delta\omega\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\end{aligned} \tag{100}$$

ここに,

$\mathbf{n}^{(i)\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\geq 0$ の時

$$\left|\mathbf{n}^{(i)}\right|^{*}=\mathbf{n}^{(i)} \tag{101}$$

$\mathbf{n}^{(i)\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}<0$ の時

$$\left|\mathbf{n}^{(i)}\right|^{*}=-\mathbf{n}^{(i)} \tag{102}$$

式(30)に式(100)を代入して，両辺を比較すれば,

$$\mathbf{n}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}=-r_{\varepsilon_{\mathrm{d}}}r_{\varepsilon_{d}^{c}}r_{S_{0}}\left(\sum_{i=1}^{I}\mathrm{M}_{\mathrm{v}}^{(i)}\left|\mathbf{n}^{(i)}\right|^{*}\Delta\omega\right) \tag{103}$$

なお, $\gamma^{(i)}-\gamma_{0}{}^{(i)}\geq\gamma_{\mathrm{c0}}$ の場合のみ、$\mathrm{M}_{\mathrm{v}}^{(i)}$ を通常どおり発生させるが、それ以外では $\mathrm{M}_{\mathrm{v}}^{(i)}=0$ とする点に注意する。また,非液状化解析では, $r_{S_{0}}=1$ とする。

## 6.5　$\mathbf{n}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}$，$\mathbf{n}_{\mathrm{d}}$ の計算

次に，ダイレイタンシーの膨張的成分については，式(80)の両辺を微分して，

$$\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}=\sum_{i=1}^{I}\frac{\partial\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}}{\partial\gamma^{(i)}}\mathrm{d}\gamma^{(i)}+\frac{\partial\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}}{\partial\gamma_{\mathrm{v}}}\mathrm{d}\gamma_{\mathrm{v}} \tag{104}$$

ここに，

$$\frac{\partial\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}}{\partial\gamma^{(i)}}=r_{\varepsilon_{\mathrm{d}}}m_{1\mathrm{v}}\left(\frac{\gamma^{(i)}/\gamma_{\mathrm{v}}}{1+\left|\gamma^{(i)}/\gamma_{\mathrm{v}}\right|}\right)m_{1\mathrm{v}}\Delta\omega \tag{105}$$

$$\frac{\partial\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}}{\partial\gamma_{\mathrm{v}}}=r_{\varepsilon_{d}}\sum_{i=1}^{I}\left(\frac{\left|\gamma^{(i)}/\gamma_{\mathrm{v}}\right|}{1+\left|\gamma^{(i)}/\gamma_{\mathrm{v}}\right|}-\ln\left(1+\left|\frac{\gamma^{(i)}}{\gamma_{\mathrm{v}}}\right|\right)\right)m_{1\mathrm{v}}\Delta\omega \tag{106}$$

式(28)より，

$$\mathrm{d}\gamma^{(i)}=\mathbf{n}^{(i)\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{107}$$

次に，

$$\mathrm{d}\gamma_{\mathrm{v}}=\frac{\partial\gamma_{\mathrm{v}}}{\partial\gamma_{\mathrm{m}}}\frac{\partial\gamma_{\mathrm{m}}}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial\varepsilon'}\mathrm{d}\varepsilon' \tag{108}$$

これに，式(98)を代入して，

$$\mathrm{d}\gamma_{\mathrm{v}}=-K_{\mathrm{L/U}}\frac{(1-m_{G})m_{1}}{G_{\mathrm{m}}}\frac{\partial\gamma_{\mathrm{v}}}{\partial\gamma_{\mathrm{m}}}\mathrm{d}\varepsilon' \tag{109}$$

ここに, $K_{\mathrm{L/U}}$ は式(83)～(86), また，$\dfrac{\partial\gamma_{\mathrm{v}}}{\partial\gamma_{\mathrm{m}}}$ は式(96)で与えられる。

式(21)と(29)より

$$\mathrm{d}\varepsilon'=\left(\mathbf{n}^{(0)}-\mathbf{n}_{\mathrm{d}}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{110}$$

これらを式(108)に代入すると，

$$\mathrm{d}\gamma_{\mathrm{v}}=-K_{\mathrm{L/U}}\frac{(1-m_{G})m_{1}}{G_{\mathrm{m}}}\frac{\partial\gamma_{\mathrm{v}}}{\partial\gamma_{\mathrm{m}}}\left(\mathbf{n}^{(0)}-\mathbf{n}_{\mathrm{d}}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{111}$$

これらと式(107)を式(104)に代入すると，

$$d\varepsilon_d^d = [\sum_{i=1}^{I} \frac{\partial \varepsilon_d^d}{\partial \gamma^{(i)}} \mathbf{n}^{(i)T} - K_{L/U} \frac{(1-m_G)m_1}{G_m} \frac{\partial \varepsilon_d^d}{\partial \gamma_v} \frac{\partial \gamma_v}{\partial \gamma_m} \left(\mathbf{n}^{(0)} - \mathbf{n}_d\right)^T ] d\boldsymbol{\varepsilon} \tag{112}$$

よって，式(31)より，

$$\mathbf{n}_d^d = \sum_{i=1}^{I} \frac{\partial \varepsilon_d^d}{\partial \gamma^{(i)}} \mathbf{n}^{(i)} - K_{L/U} \frac{(1-m_G)m_1}{G_m} \frac{\partial \varepsilon_d^d}{\partial \gamma_v} \frac{\partial \gamma_v}{\partial \gamma_m} \left(\mathbf{n}^{(0)} - \mathbf{n}_d\right) \tag{113}$$

ここに $\frac{\partial \varepsilon_d^d}{\partial \gamma^{(i)}}$，$\frac{\partial \varepsilon_d^d}{\partial \gamma_v}$ は，それぞれ式(105)(106)で，また，$K_{L/U}$ は式(83)～(86)で与えられる。

式(32)に式(113)を代入して，

$$\mathbf{n}_d = \mathbf{n}_d^c + \sum_{i=1}^{I} \frac{\partial \varepsilon_d^d}{\partial \gamma^{(i)}} \mathbf{n}^{(i)} - K_{L/U} \frac{(1-m_G)m_1}{G_m} \frac{\partial \varepsilon_d^d}{\partial \gamma_v} \frac{\partial \gamma_v}{\partial \gamma_m} \left(\mathbf{n}^{(0)} - \mathbf{n}_d\right) \tag{114}$$

よって，$\mathbf{n}_d$ は以下のとおり計算される。

$$\mathbf{n}_d = \left(1 - K_{L/U} \frac{(1-m_G)m_1}{G_m} \frac{\partial \varepsilon_d^d}{\partial \gamma_v} \frac{\partial \gamma_v}{\partial \gamma_m}\right)^{-1} [\mathbf{n}_d^c + \{\sum_{i=1}^{I} \frac{\partial \varepsilon_d^d}{\partial \gamma^{(i)}} \mathbf{n}^{(i)} - K_{L/U} \frac{(1-m_G)m_1}{G_m} \frac{\partial \varepsilon_d^d}{\partial \gamma_v} \frac{\partial \gamma_v}{\partial \gamma_m} \mathbf{n}^{(0)}\}] \tag{115}$$

なお，定式化の完結のため，これを式(113)に代入すれば $\mathbf{n}_d^d$ が求まる。

## 7. 積分形の構成式（液状化解析）

### 7.1 圧縮伸張成分 $p$ の定式化

液状化解析においては，式(19)における圧力 $p$ を以下で表す。
まず，

$$\eta = -(1-l_K)\left(\varepsilon' - \varepsilon_0'\right) / \varepsilon_{m0} \tag{116}$$

とおく（ただし，$l_K > 1$）。ここに，$\varepsilon_{m0}$ は，体積ひずみに関する規準ひずみ（規準体積ひずみ）であり，液状化解析開始時点（初期自重解析後）の圧力 $p_0$，体積弾性係数 $K_{U0}$ および低減パラメタ $r_K$ により，以下で与える。

$$\varepsilon_{m0} = p_0 / \left(r_K K_{U0}\right) \tag{117}$$

これを用いて，

$\eta > 0$ の時：

$$p = p_0 \left(\eta + 1\right)^{\frac{1}{1-l_K}} \tag{118}$$

$\eta \le 0$ の時：

$$p = p_0 \left[\frac{\eta}{1+|\eta|} r_\eta + 1\right]^{\frac{1}{1-l_K}} \tag{119}$$

ここに，　$p$ の上限値を $p_m = r_p p_0$ のようにパラメタ $r_p$ を用いてあらわせば，以下の式によりパラメタ $r_\eta$ が与えられる。

$$r_\eta = 1 - r_p^{\,1-l_K} \tag{120}$$

当面、$r_p = 10$（プログラム内固定値）としておく。

### 7.2 せん断成分 $q^{(i)}$ の定式化

液状化解析時には，式(62)～(71)までの定式化は液状化解析時と同じであるが，$q^{(i)}$ を規定する式(62)(65)(66)では，状態変数 $S$ および液状化フロントパラメタ $S_0$ を用いて，以下のような拘束圧力依存性および液状化状態依存性を与える。

$S_0 > S_{0bd}$ の場合：

$$\tau_m = \tau_{m0} S \tag{121}$$

$$G_m = \tau_m / \gamma_{m0} \tag{122}$$

$$\gamma_m = \gamma_{m0} \tag{123}$$

$S_0 < S_{0bd}$ の場合：

$$\tau_m = \tau_{m0} S + \Delta \tau_m \tag{124}$$

$$G_m = \tau_m / \gamma_m \tag{125}$$

$$\gamma_{\mathrm{m}} = \gamma_{\mathrm{m0}} / (S_0 / S_{\mathrm{0bd}}) \tag{126}$$

ここに,

$$S_{\mathrm{0bd}} = 1.0 \tag{127}$$

$$\Delta\tau_{\mathrm{m}} = \Delta r_{\mathrm{m}} p_0 \tag{128}$$

$$\Delta r_m = (m_1 - m_2)(S_{\mathrm{0bd}} - S_0)(0.4 / S_{\mathrm{0bd}}) \tag{129}$$

ここに,内部摩擦角,変相角をそれぞれ$\phi_{\mathrm{p}}$,$\phi_{\mathrm{f}}$とすると, $m_1 = \sin\phi_{\mathrm{f}}$, $m_2 = \sin\phi_{\mathrm{p}}$。

また,状態変数および液状化フロントパラメタは,以下で与える。

$$S = p / p_0 + S_1 \tag{130}$$

$$S_0 = \min\left| p'' / p_0 \right| + S_1 \tag{131}$$

ここに,$S_1$はパラメタで,小さな正の値。式(131)における仮想圧力$p''$は,圧力を規定する式(116)～(120)に準じて,仮想有効体積ひずみ$\varepsilon''$により,以下のとおり与える。まず,

$$\eta'' = -(1 - l_K)\left(\varepsilon'' - \varepsilon_0''\right) / \varepsilon_{\mathrm{m0}} \tag{132}$$

とおき、$\eta'' \geq 0$であれば,

$$p'' = p_0 \left(\eta'' + 1\right)^{\frac{1}{1 - l_K}} \tag{133}$$

$\eta'' < 0$であれば、以下を用いる。

$$p'' = p_0 \left[ \frac{\eta''}{1 + |\eta''|} r_{\eta''} + 1 \right]^{\frac{1}{1 - l_K}} \tag{134}$$

ここに,

$$r_{\eta''} = r_\eta \tag{135}$$

### 7.3 ダイレイタンシーの定式化

液状化解析におけるダイレイタンシーは,収縮的成分,膨張的成分ともに,非液状化解析の場合と同じで,式(75)～(81)により定式化する。ただし,式(76)において,

$$r_{S_0} = S_0^{\left[q_2(1 - \exp(-r / r_0))\right]} \tag{136}$$

## 8. 増分形の構成式(液状化解析)

### 8.1 $K_{\mathrm{L/U}} = -\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varepsilon'}$の計算

体積成分に関する式(116)～(119)より, $K_{\mathrm{L/U}}$は以下のとおり与えられる。

$\eta > 0$の時:

$$K_{\mathrm{L/U}} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\varepsilon'} = r_K K_{\mathrm{U0}} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{l_K} \tag{137}$$

$\eta \leq 0$の時:

$$K_{\mathrm{L/U}} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\varepsilon'} = r_K K_{\mathrm{U0}} \left[ \frac{\eta}{1 + |\eta|} r_\eta + 1 \right]^{\frac{l_{\mathrm{K}}}{1 - l_{\mathrm{K}}}} \left( \frac{1 + |\eta| + \eta}{(1 + |\eta|)^2} r_\eta \right) \tag{138}$$

液状化解析,非液状化解析における体積ひずみ,ダイレイタンシーによる体積ひずみ,と圧力の関係は,Fig. 1 に示すとおりとなる。

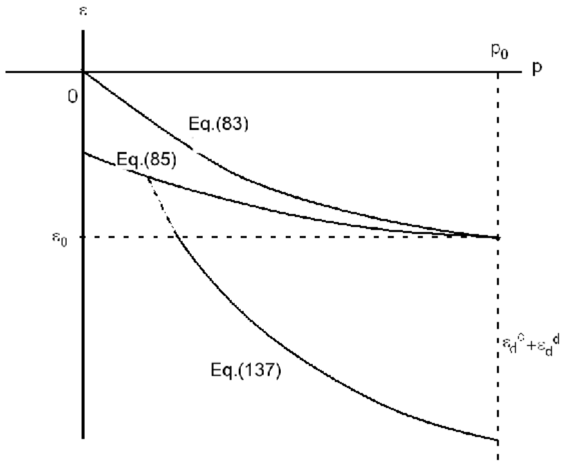


Fig. 1 Schematic figure of volumetric strain, dilatancy, and pressure

### 8.2 $G^{(i)}_{\mathrm{L/U}} = \dfrac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma^{(i)}}$の計算

$G^{(i)}_{\mathrm{L/U}}$は,液状化解析と同じ式(87)(88)で与えられる。

### 8.3 $H^{(i)} = \dfrac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon'}$の計算

まず，

$$H^{(i)}=\frac{\partial q^{(i)}}{\partial\varepsilon'}=\frac{\partial q^{(i)}}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial\varepsilon'} \tag{139}$$

以下，順に計算していく。
まず，　次のようにおく。

$$\frac{\partial q^{(i)}}{\partial S}=\frac{\partial q^{(i)}}{\partial q_{\mathrm{v}}}\frac{\partial q_{\mathrm{v}}}{\partial\tau_{\mathrm{m}}}\frac{\partial\tau_{\mathrm{m}}}{\partial S}+\frac{\partial q^{(i)}}{\partial\gamma_{\mathrm{v}}}\frac{\partial\gamma_{\mathrm{v}}}{\partial\gamma_{\mathrm{m}}}\frac{\partial\gamma_{\mathrm{m}}}{\partial S} \tag{140}$$

ここに，$\dfrac{\partial q^{(i)}}{\partial q_{\mathrm{v}}}$，$\dfrac{\partial q^{(i)}}{\partial\gamma_{\mathrm{v}}}$ は，式(91)～(94)で，また，

$\dfrac{\partial q_{\mathrm{v}}}{\partial\tau_{\mathrm{m}}}$，$\dfrac{\partial\gamma_{\mathrm{v}}}{\partial\gamma_{\mathrm{m}}}$ は，式(95)(96)で，非液状化解析と同じように与えられる。また，
式(140)の残りの項は，以下で与えられる。

$$\frac{\partial\tau_{\mathrm{m}}}{\partial S}=\tau_{\mathrm{m0}} \tag{141}$$

$$\frac{\partial\gamma_{\mathrm{m}}}{\partial S}=0 \tag{142}$$

式(139)の右辺の中間の項は，式(130)より

$$\frac{\partial S}{\partial p}=p_0^{-1} \tag{143}$$

式(140)～(143)および式(40)を式(139)に代入すれば，
(1)骨格曲線上：

$$H^{(i)}=-\frac{\gamma^{(i)}/\gamma_{\mathrm{v}}}{1+\left|\gamma^{(i)}/\gamma_{\mathrm{v}}\right|}\frac{m_1K_{\mathrm{L/U}}}{\sum_{i=1}^{I}\sin\omega_i\Delta\omega} \tag{144}$$

(2)履歴ループ上：

$$H^{(i)}=-\frac{\dfrac{\tilde{\gamma}^{(i)}-\tilde{\gamma}_{\mathrm{r}}^{(i)}}{2\delta}}{1+\left|\dfrac{\tilde{\gamma}^{(i)}-\tilde{\gamma}_{\mathrm{r}}^{(i)}}{2\delta}\right|}\frac{2\delta\zeta m_1K_{\mathrm{L/U}}}{\sum_{i=1}^{I}\sin\omega_i\Delta\omega} \tag{145}$$

## 8.4　$L^{(i)}=\dfrac{\partial q^{(i)}}{\partial\varepsilon''}$ の計算

まず，

$$L^{(i)}=\frac{\partial q^{(i)}}{\partial\varepsilon''}=\frac{\partial q^{(i)}}{\partial S_0}\frac{\partial S_0}{\partial p''}\frac{\partial p''}{\partial\varepsilon''} \tag{146}$$

として，順に計算していく。
まず，　次のようにおく。

$$\frac{\partial q^{(i)}}{\partial S_0}=\frac{\partial q^{(i)}}{\partial q_{\mathrm{v}}}\frac{\partial q_{\mathrm{v}}}{\partial\tau_{\mathrm{m}}}\frac{\partial\tau_{\mathrm{m}}}{\partial S_0}+\frac{\partial q^{(i)}}{\partial\gamma_{\mathrm{v}}}\frac{\partial\gamma_{\mathrm{v}}}{\partial\gamma_{\mathrm{m}}}\frac{\partial\gamma_{\mathrm{m}}}{\partial S_0} \tag{147}$$

ここに，$\dfrac{\partial q^{(i)}}{\partial q_{\mathrm{v}}}$，$\dfrac{\partial q^{(i)}}{\partial\gamma_{\mathrm{v}}}$ は，式(91)～(94)で，また，

$\dfrac{\partial q_{\mathrm{v}}}{\partial\tau_{\mathrm{m}}}$，$\dfrac{\partial\gamma_{\mathrm{v}}}{\partial\gamma_{\mathrm{m}}}$ は，式(95)(96)で与えられる。

また,式(121)～(129)より，$S_0>S_{\mathrm{0bd}}$ の場合：

$$\frac{\partial\tau_{\mathrm{m}}}{\partial S_0}=0 \tag{148}$$

$$\frac{\partial\gamma_{\mathrm{m}}}{\partial S_0}=0 \tag{149}$$

$S_0<S_{\mathrm{0bd}}$ の場合：

$$\frac{\partial\tau_{\mathrm{m}}}{\partial S_0}=-(m_1-m_2)(0.4/S_{\mathrm{0bd}})\,p_0 \tag{150}$$

$$\frac{\partial\gamma_{\mathrm{m}}}{\partial S_0}=-\gamma_{\mathrm{m}}/S_0 \tag{151}$$

式(131)より，$\mathrm{d}p''<0$ の時，

$$\frac{\partial S_0}{\partial p''}=p_0^{-1} \tag{152}$$

$\mathrm{d}p''\geq 0$ の時，

$$\frac{\partial S_0}{\partial p''}=0 \tag{153}$$

式(132)～(134)より，

$\eta''>0$ の時：

$$K_{\mathrm{L/U}}''=-\frac{\mathrm{d}p''}{\mathrm{d}\varepsilon''}=-\frac{\mathrm{d}p''}{\mathrm{d}\eta''}\frac{\mathrm{d}\eta''}{\mathrm{d}\varepsilon''}=r_KK_{\mathrm{U0}}\left(\frac{p''}{p_0}\right)^{l_K} \tag{154}$$

$\eta''\leq 0$ の時：

$$K_{\mathrm{L/U}}" = -\frac{\mathrm{d}p"}{\mathrm{d}\eta"}\frac{\mathrm{d}\eta"}{\mathrm{d}\varepsilon"}$$

$$= r_K K_{\mathrm{U0}}\left[\frac{\eta"}{1+|\eta"|}r_{\eta"}+1\right]^{\frac{l_{\mathrm{K}}}{1-l_{\mathrm{K}}}}\left(\frac{1+|\eta"|+\eta"}{(1+|\eta"|)^2}r_{\eta"}\right) \tag{155}$$

式(147)～(155)を式(146)に代入すれば，$S_0 < S_{0\mathrm{bd}}$ かつ $\mathrm{d}p" < 0$ の場合：

$$L^{(i)} = -[(m_1 - m_2)(0.4/S_{0\mathrm{bd}})p_0\frac{\partial q^{(i)}}{\partial q_{\mathrm{v}}}\frac{\partial q_{\mathrm{v}}}{\partial \tau_{\mathrm{m}}} + \frac{\gamma_{\mathrm{m}}}{S_0}\frac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma_{\mathrm{v}}}\frac{\partial \gamma_{\mathrm{v}}}{\partial \gamma_{\mathrm{m}}}]\frac{K_{\mathrm{L/U}}"}{p_0} \tag{156}$$

ここに，$\dfrac{\partial q^{(i)}}{\partial q_{\mathrm{v}}}$，$\dfrac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma_{\mathrm{v}}}$ は，式(91)～(94)で，また，$\dfrac{\partial q_{\mathrm{v}}}{\partial \tau_{\mathrm{m}}}$，$\dfrac{\partial \gamma_{\mathrm{v}}}{\partial \gamma_{\mathrm{m}}}$ は，式(95)(96)で与えられる。

なお，$S_0 \geq S_{0\mathrm{bd}}$ または $\mathrm{d}p" \geq 0$ の場合は，

$$L^{(i)} = 0 \tag{157}$$

## 8.5　$\mathbf{n}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}$ の計算

液状化解析では，非液状化解析の場合の式(103)と同じであるが，$r_{S_0}$ を式(136)で与える。

## 8.6　$\mathbf{n}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}$ の計算

液状化解析では，非液状化解析の場合の式(104)～(107)は同じとなる。次に，

$$\mathrm{d}\gamma_{\mathrm{v}} = \frac{\partial \gamma_{\mathrm{v}}}{\partial \gamma_{\mathrm{m}}}\frac{\partial \gamma_{\mathrm{m}}}{\partial S_0}\frac{\partial S_0}{\partial p"}\frac{\partial p"}{\partial \varepsilon"}\mathrm{d}\varepsilon" \tag{158}$$

これに，式(151)～(155)を代入すると，$S_0 < S_{0\mathrm{bd}}$ かつ $\mathrm{d}p" < 0$ の場合：

$$\mathrm{d}\gamma_{\mathrm{v}} = -\frac{\gamma_{\mathrm{v}}}{S_0}\frac{K_{\mathrm{L/U}}"}{p_0}\mathrm{d}\varepsilon" \tag{159}$$

なお，$S_0 \geq S_{0\mathrm{bd}}$ または $\mathrm{d}p" \geq 0$ の場合は，

$$\mathrm{d}\gamma_{\mathrm{v}} = 0 \tag{160}$$

式(30)と式(27)より，

$$\mathrm{d}\varepsilon" = \left(\mathbf{n}^{(0)} - \mathbf{n}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{161}$$

これらを式(158)に代入すると，$S_0 < S_{0\mathrm{bd}}$ かつ $\mathrm{d}p" < 0$ の場合：

$$\mathrm{d}\gamma_{\mathrm{v}} = -\frac{\gamma_{\mathrm{v}}}{S_0}\frac{K_{\mathrm{L/U}}"}{p_0}\left(\mathbf{n}^{(0)} - \mathbf{n}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{162}$$

なお，$S_0 \geq S_{0\mathrm{bd}}$ または $\mathrm{d}p" \geq 0$ の場合は，

$$\mathrm{d}\gamma_{\mathrm{v}} = 0 \tag{163}$$

これらと式(107)を式(104)に代入すると，$S_0 < S_{0\mathrm{bd}}$ かつ $\mathrm{d}p" < 0$ の場合：

$$\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}} = [\sum_{i=1}^{I}\frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}}{\partial \gamma^{(i)}}\mathbf{n}^{(i)\mathrm{T}} - \frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}}{\partial \gamma_{\mathrm{v}}}\frac{\gamma_{\mathrm{v}}}{S_0}\frac{K_{\mathrm{L/U}}"}{p_0}\left(\mathbf{n}^{(0)} - \mathbf{n}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}\right)^{\mathrm{T}}]\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{164}$$

なお，$S_0 \geq S_{0\mathrm{bd}}$ または $\mathrm{d}p" \geq 0$ の場合は，

$$\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}} = \left[\sum_{i=1}^{I}\frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}}{\partial \gamma^{(i)}}\mathbf{n}^{(i)\mathrm{T}}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{165}$$

よって，式(31)より，$S_0 < S_{0\mathrm{bd}}$ かつ $\mathrm{d}p" < 0$ の場合：

$$\mathbf{n}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}} = \sum_{i=1}^{I}\frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}}{\partial \gamma^{(i)}}\mathbf{n}^{(i)} - \frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}}{\partial \gamma_{\mathrm{v}}}\frac{\gamma_{\mathrm{v}}}{S_0}\frac{K_{\mathrm{L/U}}"}{p_0}\left(\mathbf{n}^{(0)} - \mathbf{n}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}\right) \tag{166}$$

また，$S_0 \geq S_{0\mathrm{bd}}$ または $\mathrm{d}p" \geq 0$ の場合は，

$$\mathbf{n}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}} = \sum_{i=1}^{I}\frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}}{\partial \gamma^{(i)}}\mathbf{n}^{(i)} \tag{167}$$

ただし，式(166)(167)における $\dfrac{\partial \varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}}{\partial \gamma^{(i)}}$，$\dfrac{\partial \varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}}{\partial \gamma_{\mathrm{v}}}$ は，それぞれ式(105)(106)で，また，$K_{\mathrm{L/U}}"$ は式(154)(155)で与えられる。

### 8.7　$\mathbf{n}_{\mathrm{d}}$の計算

$\mathbf{n}_{\mathrm{d}}$は，式(32)に，式(103)および式(166)(167)を代入することにより求まる。

## 9.　適用例

以上の定式化に基づき，ゆるい砂および密な砂についての非排水繰返しせん断挙動の数値解析を実施した。解析に用いたモデルパラメタは，Table 1 に示すとおりである。解析結果は，Figs. 2, 3 に示すとおり，ゆるい砂ではひずみ振幅が急増するが，密な砂ではひずみ振幅が漸増する傾向などを含め，室内試験で得られる標準的な砂の挙動の特徴を表現することができている。

## 10.　結論

本稿では，砂のダイレイタンシーによる体積ひずみを，仕事をしないせん断機構を表現する膨張的成分と累積せん断ひずみに比例して発生する収縮的成分から構成されるとする新たなダイレイタンシーモデルを提案し，その定式化をひずみ空間での多重せん断モデルに組み込む形で提示した。あわせて，基本的な非排水繰返し載荷挙動の解析を行い，その全体的な妥当性を確認した。

Table 1 Model parameters

| Loose sand | Dense sand |
|---|---|
| $p_a(\sigma_{ma}') = 98\mathrm{kPa}$ | $P_{\mathrm{a}}(\sigma_{\mathrm{ma}}') = 98\mathrm{kPa}$ |
| $G_m = 8.449\times10^5\mathrm{kPa}$ | $G_{\mathrm{m}} = 1.141\times10^5\mathrm{kPa}$ |
| $m_G = 0.5$ | $m_G = 0.5$ |
| $K_{\mathrm{La}} = 2.203\times10^5\mathrm{kPa}$ | $K_{\mathrm{La}} = 2.974\times10^5\mathrm{kPa}$ |
| $K_{\mathrm{Ua}} = 2.203\times10^5\mathrm{kPa}$ | $K_{\mathrm{Ua}} = 2.974\times10^5\mathrm{kPa}$ |
| $n_K = 0.5$ | $n_K = 0.5$ |
| $H_{\max} = 0.24$ | $H_{\max} = 0.24$ |
| $\phi_{\mathrm{f}} = 39.67°$ | $\phi_{\mathrm{f}} = 43°$ |
| $\phi_{\mathrm{p}} = 28°$ | $\phi_{\mathrm{p}} = 28°$ |
| $\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{cm}} = 0.2$ | $\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{cm}} = 0.1$ |
| $r_{\varepsilon_{\mathrm{dc}}} = 1.0$ | $r_{\varepsilon_{\mathrm{dc}}} = 0.5$ |
| $r_{\varepsilon_{\mathrm{d}}} = 0.2$ | $r_{\varepsilon_{\mathrm{d}}} = 0.2$ |
| $q_1 = 0.5$ | $q_1 = 0.5$ |
| $q_2 = 1.0$ | $q_2 = 1.5$ |
| $r_0 = 0.1$ | $r_0 = 0.1$ |
| $l_K = 2.0$ | $l_K = 2.0$ |
| $r_K = 0.5$ | $r_K = 0.5$ |
| $S_1 = 0.005$ | $S_1 = 0.005$ |
| $\gamma_{\mathrm{c0}} = 10^{-4}$ | $\gamma_{\mathrm{c0}} = 3.94\times10^{-4}$ |
| | $\sigma_{\mathrm{m0}}' = 98\mathrm{kPa}$ |

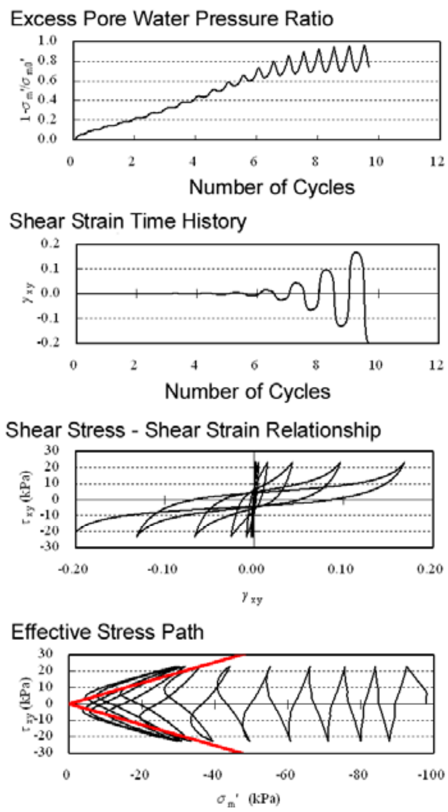


Fig. 2 Computed stress strain relationship for loose sand

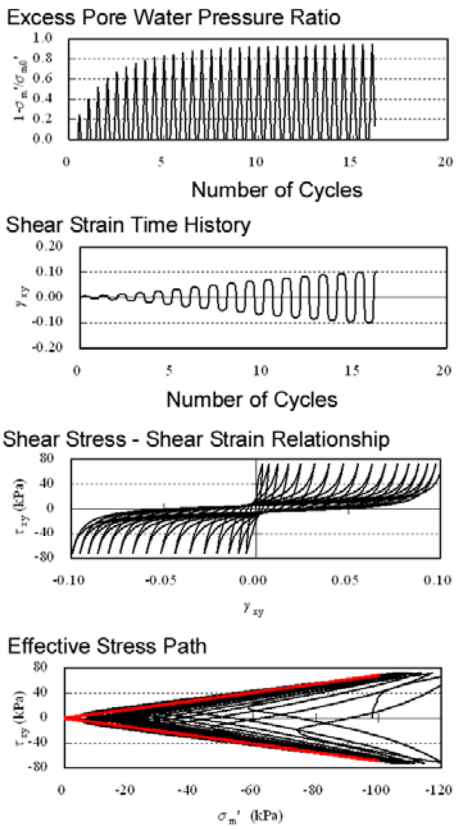


Fig. 3 Computed stress strain relationship for dense sand

## 参考文献


Iai, S., Matsunaga, Y. and Kameoka, T. (1990). "Parameter identification for a cyclic mobility model." *Report of the Port and Harbour Research Institute*, 29 (4): 57-83.

Iai, S., Matsunaga, Y. and Kameoka, T. (1992). "Strain space plasticity model for cyclic mobility." *Soils and Foundations*, 32 (2): 1-15.

Iai, S. (1994). "A new look at the stress dilatancy relation in Cam-Clay model." *Soils and Foundations*, 34 (2): 1-12.

Iai, S. and Ozutsumi, O. (2005). "Yield and cyclic behaviour of a strain space multiple mechanism model for granular materials." *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 29 (4): 417-442.

Roscoe, K. H., Schofield, A. N. and Thurairajah, A. (1963). "Yielding of clays in states wetter than critical." *Geotechnique*, 13 (3): 211-240.

Schofield, A. N. and Wroth, C. P. (1968). *Critical State Soil Mechanics*. London: McGraw-Hill.


## Stress Dilatancy Relation in Strain Space Multiple Mechanism Model for Cyclic Behavior of Sand


Susumu IAI, Tetsuo TOBITA and Osamu OZUTSUMI*

*Lecturer, Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University/Meisosha Co.



### Synopsis

The paper proposes a new stress-dilatancy relationship that will be incorporated into a strain space multiple mechanism model for cyclic behavior of sand. The proposed relationship is based on the hypothesis that the dilative component of dilatancy represents the mechanism that consumes no energy, whereas the contractive component of dilatancy is in proportion to the cumulative shear strain. An example of cyclic behavior of sand simulated by the proposed model is given to demonstrate the capability of the model.



**Keywords:** constitutive equations, cyclic behavior, dilatancy, sand