京都大学防災研究所年報 第 50 号 B 平成 19 年 4 月
Annuals of Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., No. 50 B, 2007

均質化理論に基づくアップスケーリングの水文学的適用法

浜口 俊雄・小尻 利治・Mohamed SABER*

*京都大学大学院工学研究科

要 旨

本研究では，分布型流出解析において用いる分布型モデルの水文パラメータを均質化理論に基づいて定める手法とその適用法について講述する。解析時にはグリッドサイズに応じたパラメータ値になるように定めることが必要である。その際，微小 (ミクロ) または肉眼 (マクロ) サイズのパラメータ分布情報ならびに分布型流出解析に必要な落水線情報を基にして，それを物理挙動 (量的バランス) の整合性が確保されるようにグリッドサイズまで均質化理論でアップスケーリングするという手法を示している。これにより，既往の最も単純な重み付き算術平均パラメータは物理挙動を考慮してない分，不十分な値であることがわかる。

キーワード：均質化，アップスケーリング，水文モデルパラメータ，透水係数，マニングの粗度係数，巨視モデル

1. 序論

分布型流出解析を行う際に，採用された分布型モデルに用いる水文パラメータは解析グリッドサイズに適った値が与えられるべきである。すなわち，分布型モデルは格子で離散化されていて，その格子サイズ以下の水文パラメータ分布はモデル化過程に考慮されておらず，最小単位の格子セル内では一様に見なされることになるため，それに見合うパラメータ値を定める必要がある。その適合値の求め方は単純なものから理論立てたものまで様々な手法が考えられるが，再現値の推定精度や基になる情報の信頼度がどの程度かで選択肢が変わる。本稿では客観性を重視した手法を選択し，パラメータ詳細分布の既知情報を基に物理挙動や物理量バランスの整合性を考慮して均質化理論からアップスケーリングする手法で適切なセルパラメータを求める。

ここで対比されるのは，単純に平均化された値，または，面積比で重みをつけて平均化された値と本手法の値である。最終的に，これらは河川流量観測点での計算結果の精度と計算労力の関係で定まるものであるが，セル内の詳細分布で差異のあるパラメータ値がばらついて分布していれば，それだけ本手法の有効性が現れ，あまり差異のないパラメータが偏っていれば，それだけ面積比で重みを付けた状態に近くなり，本手法の有効性が薄れることは事前に推察できる。本研究では，一様化が難しい前者を対象に考えることを目的としている。

2. モデリングに用いる均質化

2.1 均質化

モデリングは，その構造スケールの細かさをどこまで反映するかで表現能力に違いが現れる。すなわち，モデル構造をかなり細かいスケール (微小スケール or ミクロスケール) で定義される非一様性を全て考慮するか，微小スケールで非一様な物理量を (積分) 平均量で置き換えて考慮するかによって結果が異なってくる。前者は現実にかなり近づけるがミクロスケールでの幾何的状況や材料組成の情報不足からモデリングが困難な上に，計算出来たとしても多大な計算労力を要するため，現実的なモデリングとは言えない。これに対して後者は非均質材料を等価な均質材料と見なすモデリングであり，通常の物理現象のモデリング作業では無意識に行われている近似である。この近似は，非均質材料の物理現象から非均質性を初めから無視したするか取り除いた状態として扱うものであり,「陰的均質化」と呼ばれる。これに対して，非均質材料の分布情報が十分な微小体積要素を設定して，非一様

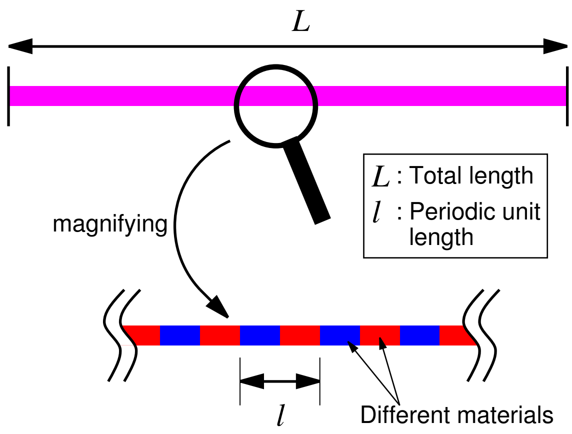

Fig.1 Homogeneous material in one dimension (寺田・菊池，2003)

分布の物理量をモデルに明示しつつ，物理量をミクロスケールでの体積積分平均量に置き換えて全体の挙動をモデリングする近似は,「陽的均質化」と呼ばれる。ここに,物理量の体積積分平均化が可能な最小単位は一般に「代表体積要素 (RVE:Representative Volume Element)」と呼ばれる。上記の陰的均質化は人為的な仮定による結果であるため，この陽的均質化が均質化理論における”均質化”(寺田・菊池，2003) に相当する。

2.2 ミクロスケールからマクロスケール

この要素が対象域に1～3次元空間的に配列されていて,対象域全体を見た肉眼視スケール (マクロスケール) では等価な均質状態にあると見なせる場合，同じ平均量をもつ上記要素で対象空間が全て覆われてなければならららない。従ってミクロスケールで見れば，非均質性が空間周期的に同じ様に並んでいる必要がある。つまり，ミクロスケールからマクロスケールにアップスケーリングするには非均質性を空間周期的に表してやればよい。その周期の最小となる単位がRVEに一致する。これを線状または単位幅あたりの一次元材料で模式図にしたものがFig.1である。肉眼では全体が一様に均質材料で構成されているように見えているが，ミクロスケールまで拡大して見てみると，2つの異なる材料が交互に並んでいたとする。この2つの材料から成る1組が最小周期になっていることから，これをユニットセルと呼び，空間周期構造単位となる。ユニットセル長は2つの材料を合わせた長さ ℓ となる。いま材料の全長を L，空間周期数を N としたとき，ユニットセルの相対長 ε は

$$\varepsilon = \frac{1}{N} = \frac{\ell}{L} \tag{1}$$

で定義できる。ユニットセルが無限小，つまり $\varepsilon \to 0$，または，ユニットセルが無限個，つまり $N \to \infty$ になるとき，全体は一様に均質材料と見なせる言える。すなわち均質化の意味するところは，数学的見解で言えば「極限 $\varepsilon \to 0$ を取ること」に等しく，最小周期ユニットの大きさは無限小であることからも構造全体から見れば “点” に過ぎないことを表している。物理的見解で言えば，非均質性を “無視” することに等しい。ただし，ミクロ構造があることをモデルに反映し，ユニットセル内を積分平均化している。実際のミクロ挙動は，非均質材料が並んでいるため不連続なものになり，均質化して初めて “連続” と近似できるのである。その導関数に関する物理挙動も同様である。構造全体を均質な材料で与え得るには，ミクロ構造で最小周期ユニットとなるRVEが存在し，かつ,有限サイズのREVを無限小(点)に近似できることが条件となる。例えば，浸透流の場合，土粒子間空隙や岩盤クラックのNavier-Stokes式に従う流動現象を対象としているのはミクロスケールであるのに対し，土粒子または岩盤という間隙骨格構造まで含めながら領域一様と見なして流量を積分平均で均質化したDarcy則の様な流動現象を対象としているのはマクロスケールである。

2.3 マクロスケールからメガスケール

各々均質化された結果が異なるマクロスケール要素 (区域) が1～3次元空間的に配列されていて対象域全体を等価な均質状態と見なした結果の同域全体のサイズは容易に目で見ることの出来る巨視スケール，つまり，メガスケールと呼ぶ。これは検討元のスケールが均質な状態であるため，単なる体積積分平均となる。先例で言えば，異なる透水係数要素 (区域) の均質化に匹敵し，得られた値は巨視的等価透水係数と呼ばれる。

2.4 メガスケールからギガスケール

同様に，メガスケール要素 (区域) に対してアップスケールしたものが巨大スケール，つまり，ギガスケールの領域で，これが最大スケールとなる。水文分野では支流域・流域・越境統合流域のスケールに相当し，集中型水文モデルはここに属する。ここまでの規模となれば得られた値は，集中化モデル透水係数と呼ぶことになり，もはや流量バランスのみの表現値となり，モデル物理挙動の詳細に空間的意味を見いだすことは難しくなる。

分布型流出解析を考察対象にする場合，同モデルは数メートルから数キロ程度のメガスケールに相当するため，ミクロスケールまたはマクロスケールからメガスケールへアップスケーリング分布した水文モデルパラメータが

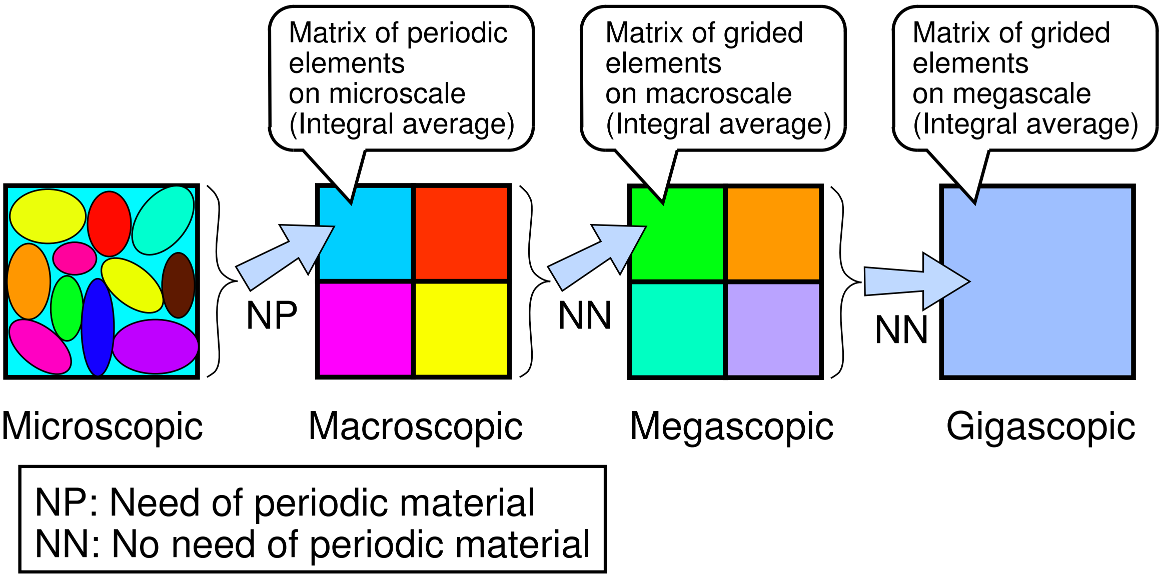

Fig.2 Homogenization of an upscaled model

必要になる。以上をまとめたものがFig.2になる。

以降では流出解析において，解析準備段階で直面する機会が最も多いため，マクロスケールのManning粗度係数nや透水係数kからメガスケールの等価均質化パラメータ値n^*，k^*へアップスケールする式を示す。

2.5 均質化される定常式

本稿では表面流ならびに地下水流(浸透流)への適用を考える。表面流ならびに地下水流はミクロスケールからマクロスケールへの領域均質化により，それぞれManning則，Darcy則となる。さらにマクロスケールからメガスケールへの領域均質化によって，均質化パラメータn^*，k^*が得られる。その際，均質化パラメータは定常非定常に関わらず成立する定数であるので，以下では全て定常状態で算出するものとする。

Manning則を含むkinematic wave法の定常基礎式は

$$q = \alpha A h^m \tag{2}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = r_e \tag{3}$$

ここに，$\alpha = \dfrac{\sqrt{\sin\theta}}{n}$，　q：流量，h：水深，A：流積，$m = 5/3$，r_e：有効降雨量，θ：斜面勾配角

となる。本稿は均質化した場合の，αまたはnの流量等価パラメータα^*またはn^*を求める。また，Darcy則を含む浸透の定常式は

$$q = -kA\frac{\partial h}{\partial x} \tag{4}$$

である。同様に均質化した場合のkの流量等価パラメータk^*を求める。

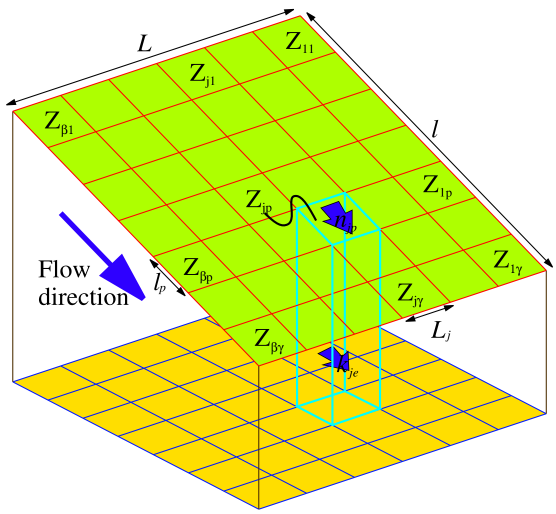

Fig.3 Two-dimensional schematic view of sloping cells on macroscale

2.6 斜面マクロセルの均質化

分布型流出モデルでは落水線を設定して流下方向を規定している。これを踏まえて，Fig.3の様に流下方向にγ個，それに垂直な方向にβ個配置されたマクロスケールセルから1つのメソスケールセルが形成されているときの各流出モデルパラメータについての均質化を試みる。Fig.4に示す順で均質化を考えると，Fig.5のように流下方向に平行な帯形状にした等価パラメータ$\alpha_j{}^*$ならびに等価透水係数$k_j{}^*$は

$$\alpha_j{}^* = \frac{\ell}{\displaystyle\sum_{p=1}^{\gamma} \frac{\ell_p}{\alpha_{jp}}} \tag{5}$$

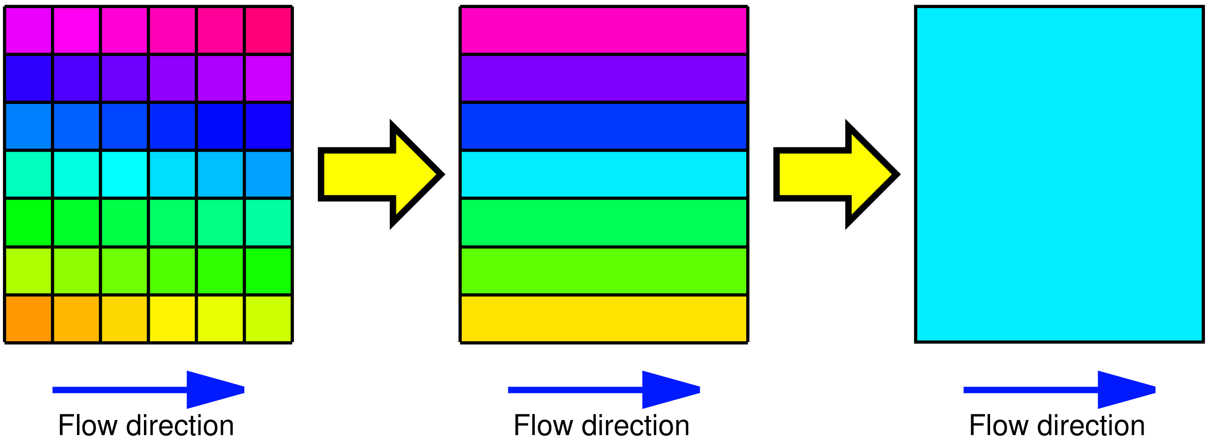

Fig.4　Homogenization steps of sloping cells in two dimentions

$$k_j{}^* = \frac{\ell}{\displaystyle\sum_{p=1}^{\gamma} \frac{\ell_p}{k_{jp}}} \tag{6}$$

の様になる。さらに，Fig.6のように流下方向に横並びの帯領域を均質化した等価パラメータ α^* ならびに等価透水係数 k^* は

$$\alpha^* = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{\beta} L_j \alpha_j{}^* = \frac{\ell}{L}\sum_{j=1}^{\beta} \frac{L_j}{\displaystyle\sum_{p=1}^{\gamma}\frac{\ell_p}{\alpha_{jp}}} \tag{7}$$

$$k^* = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{\beta} L_j k_j{}^* = \frac{\ell}{L}\sum_{j=1}^{\beta} \frac{L_j}{\displaystyle\sum_{p=1}^{\gamma}\frac{\ell_p}{k_{jp}}} \tag{8}$$

となる。特に，斜面勾配が一様の時，式(5)と式(7)はそれぞれ等価粗度 $n_j{}^*$，n^* に単純化されて，

$$n_j{}^* = \frac{1}{\ell}\sum_{p=1}^{\gamma} \ell_p n_{jp} \tag{9}$$

$$n^* = \frac{L}{\displaystyle\sum_{j=1}^{\beta}\frac{L_j}{n_j{}^*}} = \frac{L}{\ell}\cdot\frac{1}{\displaystyle\sum_{j=1}^{\beta}\frac{L_j}{\displaystyle\sum_{p=1}^{\gamma}\ell_p n_{jp}}} \tag{10}$$

となる。

ところで，規則性のある格子上での流出解析であれば，各方向ごとに均等幅格子となり，$\ell_p = \Delta\ell = \ell/\gamma$，$L_j = \Delta L = L/\beta$ とおけば，式(7)と式(8)は

$$\alpha^* = \frac{\gamma}{\beta}\sum_{j=1}^{\beta}\frac{1}{\displaystyle\sum_{p=1}^{\gamma}\frac{1}{\alpha_{jp}}} \tag{11}$$

$$k^* = \frac{\gamma}{\beta}\sum_{j=1}^{\beta}\frac{1}{\displaystyle\sum_{p=1}^{\gamma}\frac{1}{k_{jp}}} \tag{12}$$

と書ける。先程と同様に斜面勾配が一様の場合を考える

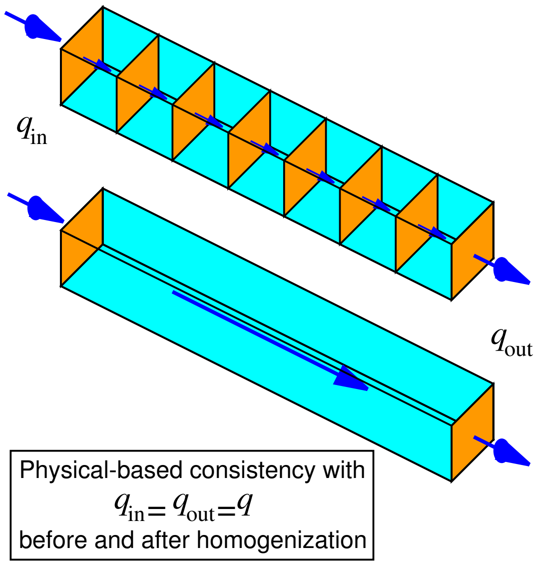

Fig.5　Schematic view of longitudinal homogenization

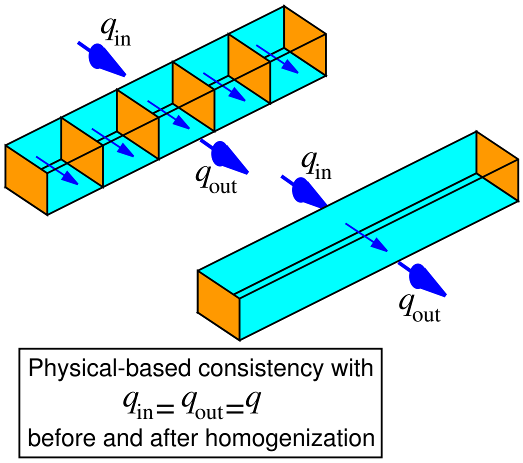

Fig.6　Schematic view of transversal homogenization

と，式(11)は

$$n^* = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{1}{\displaystyle\sum_{j=1}^{\beta} \frac{1}{\displaystyle\sum_{p=1}^{\gamma} n_{jp}}} \tag{13}$$

を得る。さらに，分割数が同じならば，$\beta = \gamma (= \mu)$ より，式(11)〜(13)は

$$\alpha^* = \sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\displaystyle\sum_{p=1}^{\mu} \frac{1}{\alpha_{jp}}} \tag{14}$$

$$k^* = \sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\displaystyle\sum_{p=1}^{\mu} \frac{1}{k_{jp}}} \tag{15}$$

$$n^* = \frac{1}{\displaystyle\sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\displaystyle\sum_{p=1}^{\mu} n_{jp}}} \tag{16}$$

となる。セル中央でＶ字谷となっているのならば，片斜面は$\beta/\gamma = 2$を代入し，式(11)〜(13)は

$$\alpha^* = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2\gamma} \frac{1}{\displaystyle\sum_{p=1}^{\gamma} \frac{1}{\alpha_{jp}}} \tag{17}$$

$$k^* = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2\gamma} \frac{1}{\displaystyle\sum_{p=1}^{\gamma} \frac{1}{k_{jp}}} \tag{18}$$

$$n^* = \frac{2}{\displaystyle\sum_{j=1}^{2\gamma} \frac{1}{\displaystyle\sum_{p=1}^{\gamma} n_{jp}}} \tag{19}$$

となる。

2.7 面積による加重平均の等価粗度

セル内の斜面勾配を一定として，面積による加重平均でセルの等価パラメータとする方法は，従来の分布型流出解析において頻繁に見受けられる。流下方向に横並びの帯状態の分布を仮定して，等価粗度の均質化計算を施す。この場合，流下長はどれも同じであることからL_jが面積加重に相当することになる。式(10)を変形して面積比S_jで表すと，

$$\begin{aligned} n^* &= \frac{L}{\displaystyle\sum_{j=1}^{\beta} \frac{L_j}{n_j{}^*}} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{j=1}^{\beta} \frac{1}{n_j{}^*} \cdot \frac{L_j}{L}} \\ &= \frac{1}{\displaystyle\sum_{j=1}^{\beta} \frac{1}{n_j{}^*} \cdot S_j} \end{aligned} \tag{20}$$

を得る。すなわち，

$$\frac{1}{n^*} = \sum_{j=1}^{\beta} \frac{1}{n_j{}^*} \cdot S_j \tag{21}$$

一方，従来の手法では，

$$n^* = \sum_{j=1}^{\beta} n_j{}^* \cdot S_j \tag{22}$$

から算出される。式(21),(22)を比較すれば明らかな様に，従来と異なり，粗度の逆数を加重平均すれば均質化法に則った結果になると言える。

3. その他の均質化法

ここで紹介した，非均質材料の周期性に着目した領域積分による均質化法のほかに，局所的に一部が非均質である場合には等価介在物法が適切と言える。【分布型材料】=【均質材料】+【非均質材料】と考え,【均質材料】の物理挙動を先に捉えた後で,【非均質材料】だけの挙動を重ね合わせる。大半が【均質材料】で，一部のみ【非均質材料】のため局所挙動を問題視する場合には非常に有益な手法である。水文モデルの場合，メガモデルまたはギガモデルでの活用が期待される。一般の土木分野ではクラックや空洞，不浸透部，斜面上の突部などに活用され得る。本稿では分布型流出解析に的を絞ったため，今回等価介在物法は紹介のみとする。

4. 結論

本研究では，均質化法に基づくアップスケーリングによって得られる等価水文パラメータの求め方を詳述し，式を導出した。その結果から得られる特徴的な事として，均等幅格子状セルのアップスケール結果が縦横のセル数($beta, \gamma$)とマクロスケールのパラメータ値(本稿ではk_{jp}, α_{jp})のみから定まり，幅の大きさ(ℓ_p, L_j)に独立である点は興味深い。故に，領域が長方形でも正方形でも縦横のセル数が同じ($beta$=γ)ならば，マクロスケールのパラメータ値だけで等価値が求まるとわかる。斜面勾配も含めて粗度の流量等価な均質化が容易に可能となることは得られた式の特徴のひとつと言える。また，メガスケールセルへアップスケールする場合，従来のように単純に面積加重平均したのでは流量等価という点で不適切である。面積加重平均を用いるならば，粗度の逆数で検討することが望ましいことが示された。

こうしたアップスケールによる均質化によって，当初から本研究の目的として考えていた以下の利用法が今後期待される。

(1) 局所的に不均質な透水係数または粗度係数が存在して流出に影響が出る場合，本来ならばその局所サイズに合わせて格子サイズを設定すべきであるが，それを均質化法で求めた透水係数または粗度係数の適用を考えれば，どんなサイズのセルにも影響を正しく反映させた等価パラメータで考えることが出来る。例えば，乾燥地帯におけるワジ(Wadi)，水はけの悪い地域の湿地帯などを，比較的大きな幅の格子を採用する流出解析でも容易に組み込んで検討が出来る。

(2) 谷状のセルを考える際に，谷(河川)がセル内の任意位置を通っても等価な透水係数または粗度係数となる。これは谷の左右両斜面の和がセルでの流出量になることから，等価パラメータを用いていれば，どこを通っても等価流量になる。故に，河川位置を実際に近いかたちで設定しても計算は従来と何ら変わらない。これは，セル内の流出を平面2次元で捉える効果に類似したものであり，落水線を用いて1次元挙動としてモデル化している流出解析の精度を向上させることになる。

(3) 急激な変化が伴う表面地形の形状がセルサイズ以下で存在していた場合，解析精度を上げるためにはその地形変化サイズに合わせて格子サイズを設定すべきであるが，それを均質化法で求めた勾配の適用を考えれば，どんなサイズのセルにも影響を正しく反映させた勾配で評価することが出来る。例えば，局所的な窪地あるいは丘陵地，崖状の斜面などを比較的大きな幅の格子を用いる流出解析でも容易に組み込んで検討が出来る。

本研究の結果を踏まえてDEMを活用した際の分布型流出解析設定に巧みに反映させることが望まれる。

参考文献

寺田賢二郎，菊池　昇：均質化法入門，pp.13–34，丸善，2003。

Hydrological Application of Upscaling Technique Based on Homogenization Theory

Toshio HAMAGUCHI, Toshiharu KOJIRI and Mohamed SABER*

*Graduate School of Engineering, Kyoto University

Synopsis

This study proposes a homogenization method of upscaling hydrologic parameters related to a distributed runoff model from macroscopic aspects up to megascopic ones. These parameters are equivalently derived from the mathematically formulated descriptions based on the conservation of surface and subsurface water quantities. A surface flow direction prescribed through a flow direction/routing map is significant to calculate the homogenized values of upscaling hydrologic model parameters. It can be proven that equivalently homogenized parameters stem just from the macroscopic-modeled parameters and the numbers of the longitudinal and its transverse cells, and that a conventional way of equivalent parameters by weighted arithmetic mean is simple and easy but inadequate to figure out.

Keywords : homogenization, upscaling, hydrologic model parameter, hydraulic conductivity, Manning's (roughness) coefficient, megascopic model