京都大学防災研究所年報　第 50 号 B　平成 19 年 4 月
Annuals of Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., No. 50 B, 2007

バイアス補正を考慮するカルマンフィルタを導入した実時間流出予測

佐山敬洋・立川康人*・平田智行**・寶　馨

*京都大学工学研究科都市環境工学専攻
**野村総合研究所

要　旨

広域分布型流出予測システムと観測流量のデータ同化手法として，河道網に適用したマスキンガムクンジモデルのフィルタリング法を提案する。通常のカルマンフィルタを河道追跡モデルにのみ適用して数時間先の流量を予測する場合，主に斜面部の流出モデルが予測流量に影響を及ぼすので，フィルタリングの効果は小さくなる。それに対し，提案する方法は，斜面部の流出モデルに起因する予測のバイアスを，河道網の状態量と併せて逐次推定することにより，数時間先の予測にもフィルタリングの効果が及ぶ。提案する方法を桂川流域の洪水予測に適用し，バイアスを補正することによって洪水予測精度が向上することを明らかにした。

キーワード： 分布型降雨流出モデル，洪水予測，マスキンガムクンジ，データ同化

1.　はじめに

計画規模に匹敵するような豪雨は，治水整備の不十分な中小河川流域を中心に，甚大な洪水被害をもたらす。例えば，平成 16 年の新潟・福島豪雨では，五十嵐川や刈谷田川など 11 箇所で破堤し，16 命の死者・行方不明者をもたらした。また，平成 17 年の台風 14 号では，九州地方を中心に総雨量が 1000 ミリを超え，五ヶ瀬川や大淀川で大規模な越水氾濫が発生した。こうした中小河川流域では，治水施設の整備のみに依存した防災は今後も容易ではなく，詳細で確度の高い洪水予測と，それに基づく的確な住民避難が災害を軽減するための重要な対策となる。

これまでの洪水予測は，流域下流の主要な地点やダム地点を対象に，主に貯留関数法などの集中型モデルを用いて行ってきた。こうした予測手法は，モデルを同定するための流量が，予測対象地点で得られる場合には有効である。しかし，中小河川を含めて観測流量が得られない流域内部の任意の河道地点を対象に予測するためには，分布型流出モデルを流域全体に適用し，流域内部の河川流量を予測する必要がある。

筆者らは，流域全体の詳細な洪水予測を目指して，淀川流域を対象とした広域分布型流出予測システムを開発してきた (佐山ら, 2005)。現行のシステムでは，予測雨量を時々刻々入力し，6 時間先までの河川流量を予測している (立川ら, 2006)。モデルの初期状態は，実績降雨を入力したシミュレーションによって 1 時間毎に更新している。河川流量の観測情報は国土交通省の光ネットワークを通じてリアルタイムで入手しているものの，現行のシステムでは，その観測情報を状態量の推定には用いていない。今後，このシステムの予測結果を向上させるためには，流域内の複数地点で観測される河川流量を用いて広域分布型流出予測システムの状態量を同化するアルゴリズムを導入する必要がある。

流出モデルを観測流量で同化する方法については，1974 年に日野 (1974) がはじめてカルマンフィルタを流出モデルに適用して以来，数多くの手法が提案されてきた (例えば，宝ら 1984; 橋本ら 1992; (財) 北海道河川防災センター・研究所, 2006; Wood and Szollosi-Nagy, 1978; Kitandis and Bras, 1980; O'Connell and Clarke, 1981; Refsgaard, 1997)。例えば，高棹・椎葉 (1980) は単一斜面のキネマティックウェーブモデルを準線形化してカルマンフィルタを適用し，モデルの状態量を逐次推定する方法を提案している。また，高棹らの一連の研究 (1982a, 1982b, 1983) は，貯留関数法にカルマンフィルタを導入して実流域に適用するとと

もに，有色ノイズの応用や，複合流域への応用を示している。また，近年になって，流出予測の不確実性を評価するという観点から，アンサンブルカルマンフィルタ (Evansen, 1994) を比較的構造の単純な流出モデルに適用し，パラメタ分布と予測の不確実性を逐次推定する研究 (例えば，Moradkhani et al., 2005; Weerts et al., 2006; Romanowicz et al. 2006; Vrugt et al. 2007) が急速に進んでいる。

分布型流出モデルのフィルタリングについては，いまだ確立した方法は無いものの，近年になっていくつかの研究成果が報告されている。流域斜面系のフィルタリングとしては，例えば，キネマティックウェーブ型の分布型流出モデルにアンサンブルカルマンフィルタを導入した Kim et al. (2007) の研究や，HBV と呼ばれる分布型流出モデルの状態量を逐次更新する Wohling et al. (2006) の研究がある。いずれの方法も，分布型流出モデルで計算する状態量すべてをフィルタリングの対象とするのではなく，流域全体の貯留量をひとつの状態量とみなして更新する点にその特徴がある。また，空間分布する状態量をフィルタリングで個別に取り扱った事例としては，SAC-SMA モデルに変分法のデータ同化を適用した Seo et al. (2003) の研究がある。ただし，この研究で使用しているモデルの状態量は全部で 6 個であり，流域全体をグリッドで覆うタイプの分布型流出モデルには適用されていない。

一方，河道流れを追跡するモデルにフィルタリングを適用した事例もある。例えば，Fread and Ming (1993) は FLDWAV モデルに，藤田ら (2001) は河道網集中型キネマティックウェーブモデルに，Shiiba et al. (2000) はダイナミックウェーブモデルに，それぞれカルマンフィルタを適用している。洪水追跡モデルの状態量をフィルタリングの対象とするこれらの方法は，空間分布する状態量を複数地点の観測流量で同化できる点で優れている。また，流域斜面の状態量をすべてフィルタリングの対象とするよりも取り扱うべき状態量の数が少ない。従って，流域全体を計算するうえでは効率的な方法といえる。ただし，河川の状態量だけを更新して，流域斜面の状態量を更新しないこの方法は，予測のリードタイムが長くなると，予測結果が流域斜面のモデルに依存するため，河川の状態量を更新した効果が消えてしまうという欠点がある。つまり，流域斜面のモデルに起因する系統的な誤差をフィルタリングで予測・補正しなければ，河道網の状態量をフィルタリングする効果は十分に発揮できない。

この問題は，システム方程式に含む系統的な誤差を陽に考慮し，この誤差をフィルタリングで推定・補正することにより解決できる可能性がある。つまり，システム方程式に未知定数を加え，状態量とともにその未知定数を逐次推定する適応カルマンフィルタを応用することによって，流域斜面のモデルに起因する誤差を補正した河川流量の予測を実現できる可能性がある。ただし，未知定数の数が多い場合，とくに本論で取り扱う問題のように，状態量の数と未知定数の数が同じ場合には，計算すべき行列の次元が二倍に拡大するので，計算負荷の大きい非効率な解法となる。Friedland (1969) はこの問題に対し，行列計算の次元を状態量の数に抑えつつ，未知定数と状態量とを順に求める方法を提案している。また，これによって得られる推定量が，適応カルマンフィルタによる推定量と一致することを理論的に証明している。さらに，Dee and Da Silva (1998) は，Friedland (1969) によって提案された方法を拡張し，予測に含むバイアスを推定・補正するより実用的な方法を展開している。

本論は，広域分布型流出予測システムの状態量を観測流量で同化する方法として，河道部のマスキンガムクンジモデルにバイアスカルマンフィルタを導入する。開発するシステムを桂川流域に適用し，降雨流出モデルに起因するバイアスを考慮することの効果を分析する。また，下流地点の観測流量を用いてフィルタリングした結果が，上流域の予測に及ぼす影響を分析する。

本論の構成は以下の通りである。広域分布型流出予測システムについて **2.** で概説したうえで，計算安定化手法を適用した河道網全体のマスキンガムクンジモデルを行列形式で表示する方法を **3.** で述べる。**4.** では未知定数を含むシステム方程式のフィルタリング法として分離カルマンフィルタを導出し，それをもとにバイアスカルマンフィルタを導出する。**5.** では具体的な洪水予測のアルゴリズムを述べる。**6.** では提案する手法の桂川流域 (833 km^2) への適用結果を示し，**7.** において本論の結論をまとめる。

2.　広域分布型流出予測システム

本論で用いる広域分布型流出予測システムは，落水線型の分布型部分流域モデルと河道網の洪水追跡モデルで構成される。淀川流域全体を対象としたシステム (佐山ら，2005) は，これらのモデルに加えて，琵琶湖の湖沼モデルとダムモデルとを統合しているが，本論では，これらの影響を考慮する必要がない流域と期間を対象として以下の議論を進める。

広域分布型流出予測システムの構成手順は次の通りである。まず，1/25,000 の地形図に記載されている河道網を抽出し，それを合流点で分割する。分割した河道が 3 km 以上の場合には，その長さが 3 km 以下にな

るように河道をさらに分割する。つぎに，空間分解能 250 m の標高情報をもとに，最急勾配法で落水方向を決定し，各河道区分に流入する部分流域を抽出する (市川ら，2001)。それぞれの部分流域は，投影面積が 250 × 250 m の矩形斜面の集合であり，各矩形斜面に不飽和・飽和中間流・表面流モデル (立川ら，2004) を適用する。

各部分流域に適用した分布型流出モデルによって，河道区分への側方流入量を計算する。それを入力とする洪水追跡モデルには，これまでキネマティックウェーブモデルを用いてきたが，本論でカルマンフィルタを導入するにあたって，状態量の時間推移を線形の式で記述できるマスキンガムクンジ法を用いることにした。

広域分布型流出予測システムの構成とその再現性については文献 (佐山ら, 2005) に記述しているのでここでは省略し，本論に関連するマスキンガムクンジ法とその行列表示について **3.** でその詳細を述べる。

3.　マスキンガムクンジ法による洪水追跡計算

3.1　各河道区分における計算

広域分布型流出予測システムの洪水追跡計算にはマスキンガムクンジ法を用いる。上述の通り，本システムでは，河道の合流点および約 3 km 毎の河道地点で河道網を分割しており，その各河道区分に対して，以下に示すマスキンガムクンジ法を適用する。なお，流域の河道網が p 個の河道区分で構成される場合には，状態量とその時間変化を示す式がそれぞれ p 個ずつ存在することになり，河道網全体の流量を計算するためには，**3.4** に示す行列計算を解くことになる。

ひとつの河道区分を考え，その下流端を j 地点，上流端を $j-1$ 地点とする。時刻 n の河川流量 x_j^n [m^3/s] は，上流端の境界条件 x_{j-1}^n，x_j^n，下流端の初期条件 x_j^{n-1}，および単位長さの側方流入量 d_j^n ($n-1$ から n の間の平均側方流入量) をもとに，マスキンガムクンジ法で次のように計算できる (池淵ら, 2006)。

$$x_j^n = C_1 x_{j-1}^n + C_2 x_{j-1}^{n-1} + C_3 x_j^{n-1} + C_4 d_j^n \quad (1)$$

ここに $C1$ から $C4$ は,

$$C_1 = \frac{c\Delta t/\Delta l - 2X}{2(1-X) + c\Delta t/\Delta l} \quad (2)$$

$$C_2 = \frac{c\Delta t/\Delta l + 2X}{2(1-X) + c\Delta t/\Delta l} \quad (3)$$

$$C_3 = \frac{2(1-X) - c\Delta t/\Delta l}{2(1-X) + c\Delta t/\Delta l} \quad (4)$$

$$C_4 = \frac{2c\Delta t}{2(1-X) + c\Delta t/\Delta l} \quad (5)$$

である。c は流れの伝播速度 [m/s] であり，マニングの抵抗則を用いれば,

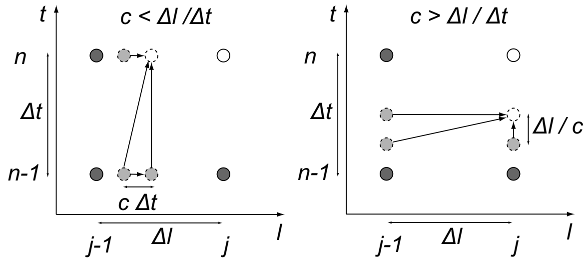

Fig. 1　Multi-step, Multi-reach stabilization method for Muskingum Cunge model

$$c = \frac{dx}{dA} = m\left(\frac{\sqrt{I}}{N}\right)^{\frac{1}{m}}\left(\frac{x_o}{B}\right)^{\frac{m-1}{m}} \quad (6)$$

となる。ここに，m：無次元の流量流積パラメタ (= 5 / 3)，i：河道の勾配 [rad]，N：Manning の粗度係数 [m$^{-1/3}$ s]，B：河道幅 [m]，Δt：計算の時間ステップ [s]，Δl：計算の空間ステップ [m] である。x_o は参照流量であり，本論では $x_o = x_{j-1}^{n-1}$ とする。また，(2) から (5) 式にある X は,

$$X = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x_o}{BcI\Delta l}\right) \quad (7)$$

とすることにより，数値拡散を物理的な拡散として扱うことができる。

3.2　Multi-step, Multi-reach 法による数値計算の安定化

マスキンガムクンジ法は，(1) 式に示した簡単な線形の式で河川流量を計算できる点にその特長がある。ただし，Δl と Δt のとり方によっては，$C_i (i = 1, \ldots, 4)$ や X が負の値になって，計算が不安定になることがある。

陸ら (1999) は，マスキンガムクンジ法による洪水追跡計算の安定性を確保する方法として，Multi-step, Multi-reach 法を提案しており，本論でもこの方法を採用することにした。Multi-step, Multi-reach 法の要点は，$\Delta l/\Delta t$ が流れの伝播速度 c とほぼ等しくなるように Δl と Δt を決定することにあって，これにより，$C_i (i = 1, \ldots, 4)$ や X が負の値になるのを防ぐ。本論の適用例では，Δl と Δt の初期設定値をそれぞれ各河道区分の長さ (約 3 km)，1 時間としておき，流れの伝播速度 c が $\Delta l/\Delta t$ がよりも小さい場合には，計算の空間ステップを $c\Delta t$ として短くとる。一方，流れの伝播速度 c が $\Delta l/\Delta t$ よりも大きい場合には，計算の時間ステップを $\Delta l/c$ として短くとる。

例えば，Fig. 1 の ($c < \Delta l/\Delta t$) の例では，計算の空間ステップを分割している。Multi-step, Multi-reach 法で

は，(1) 式の要領で $((j-1)+c\Delta t)$ 地点の流量をまず求め，それを上流の境界条件として，つぎに $((j-1)+2c\Delta t)$ 地点の流量を求める。これを繰り返せば，求めるべき地点の流量 x_j^n を得る。なお，計算の空間ステップを分割する場合には，$(j-1)$ 地点と j 地点の間の初期流量が必要となるが，ここでは，x_{j-1}^{n-1} と x_j^{n-1} との流量を線形内挿してこれらの値を求めている。Fig. 1の $(c>\Delta l/\Delta t)$ は時間ステップを分割する場合であり，その手順は空間ステップを分割する場合と同様である。

3.3　時空間ステップを変更する場合の係数について

Multi-step, Multi-reach 法は，計算の時空間ステップを変化させることにより，河道追跡計算の安定性を確保する。計算の時空間ステップが変化することは，上流から下流に向かって順次計算を進める場合には問題ではない。しかし，本論のようにカルマンフィルタを適用する場合には，状態量の時間変化を行列形式で表現する必要がある。Multi-step, Multi-reach 法を適用すると，行列の次元や時間ステップの幅が変化することになり，そのままではカルマンフィルタを適用することができなくなる。従って，次のような工夫が必要となる。

河道区分を空間的に分割する Fig. 1の $(c<\Delta l/\Delta t)$ のケースをまず考えてみる。Multi-step, Multi-reach 法では，上述の通り $c/\Delta t$ ずつ下流に移動しながら流量を求めていく。従って，最終的に求まる下端の流量 x_j^n は (1) 式を満たさなくなってしまう。

ただし，(1) 式を解析的に解けば，未知量である x_j^n と既知量であるその他の流量との関係を，線形の式 (8) で記述することができて，

$$x_j^n = A_1 x_{j-1}^n + A_2 x_{j-1}^{n-1} + A_3 x_j^{n-1} + A_4 d_j^n \tag{8}$$

そのときの (8) 式の係数 $A_i (i=1,\dots,4)$ は，

$$A_1 = C_1^{n_l} \tag{9}$$

$$A_2 = \left\{ A_{2,n_l} | A_{2,m} = C_1 A_{2,m-1} + C_2 \left(1 - \frac{m-1}{n_l}\right) + C_3 \left(1 - \frac{m}{n_l}\right);\ m=1,\dots,n_l,\ A_{2,0}=0 \right\} \tag{10}$$

$$A_3 = \left\{ A_{3,n_l} | A_{3,m} = C_1 A_{3,m-1} + C_2 \frac{m-1}{n_l} + C_3 \frac{m}{n_l};\ m=n_l,\ A_{3,0}=0 \right\} \tag{11}$$

$$A_4 = C_4 n_l \tag{12}$$

となる。ここに，$n_l (=\Delta l/c\Delta t)$ は Multi-step, Multi-reach 法における空間分割数である。同様に，時間ステップを $n_t (=c\Delta t/\Delta l)$ 分割する場合の係数は，

$$A_1 = \left\{ A_{1,nt} | A_{1,m} = C_3 A_{1,m-1} + C_2 \frac{m-1}{n_t} + C_1 \frac{m}{n_t};\ m=1,\dots n_t,\ A_{1,0}=0) \right\} \tag{13}$$

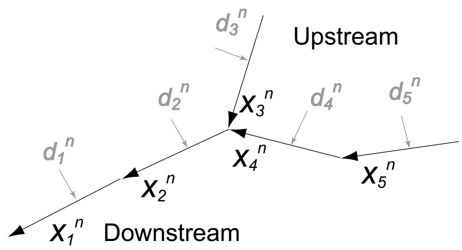

Fig. 2　Example of river channel network composed of five segments

$$A_2 = \left\{ A_{2,nt} | A_{2,m} = C_3 A_{2,m-1} + C_2 \left(1 - \frac{m-1}{n_t}\right) + C_1 \left(1 - \frac{m}{n_t}\right);\ m=1,\dots,n_t,\ A_{2,0}=0 \right\} \tag{14}$$

$$A_{3,m} = C_3^{n_t} \tag{15}$$

$$A_4 = C_4 n_t \tag{16}$$

となる。これにより，Multi-step，Multi-reach 法を適用した各河道区分のマスキンガムクンジ式を (8) 式の線形の式で表すことができる。

3.4　マスキンガムクンジ法の河道網全体への適用

上ではひとつの河道区分を対象にした場合のマスキンガムクンジ法による洪水追跡計算法を述べた。つぎに複数の河道区分が存在する河道網を対象にした場合に，どのように (8) 式を連立させ，河道網全体の流量を計算するかについて説明する。ここでは簡単のため Fig. 2 に示す河道網を対象にして以下の議論を進める。

Figure 2 は，5 つの河道区分が河道網を構成している例である。それぞれの河道区分には (8) 式を適用する。例えば，河道区分 3 の下端の流量を x_3^n，4 の流量を x_4^n とすれば，河道区分 2 の下端の流量 x_2^n は，

$$x_2^n = A_1^2 \left(x_3^n + x_4^n\right) + A_2^2 \left(x_3^{n-1} + x_4^{n-1}\right) + A_3^2 x_2^{n-1} + A_4^2 d_2^n \tag{17}$$

となる。なお，A の肩につけた 2 という数字は，それが河道区分 2 を対象にして求めた係数であることを意味している。同様の式を各河道区分で構成すれば，河道網全体の河川流量を次のように行列表示できる。

$$\begin{bmatrix} 1 & -A_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -A_1^2 & -A_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -A_1^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ x_3^n \\ x_4^n \\ x_5^n \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} A_3^1 & A_2^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3^2 & A_2^2 & A_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3^4 & A_2^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_3^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{n-1} \\ x_2^{n-1} \\ x_3^{n-1} \\ x_4^{n-1} \\ x_5^{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_4^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_4^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_4^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_4^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^n \\ d_2^n \\ d_3^n \\ d_4^n \\ d_5^n \end{bmatrix} \tag{18}
$$

(18) 式に示したように，x_j^n を下流から上流に向かって順にならべて行列表示すれば，左辺の係数行列は上三角行列になるので，逆行列を比較的容易に求めることができる。その逆行列を両辺にかけた式を，ベクトル表示すれば，

$$
\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{x}_{n-1} + \boldsymbol{D}_n \boldsymbol{d}_n \tag{19}
$$

となる。これをシステム方程式として，次章で述べるカルマンフィルタの一連の式を適用する。

4. バイアス補正を行うカルマンフィルタの導出

4.1 問題の定式化

マスキンガムクンジ法の状態ベクトル $\boldsymbol{x}_n$ ($p \times 1$ 次元) は，時刻 n とともに線形的に変化する量であり，斜面部の流出モデルで計算する側方流入量を $\boldsymbol{d}_n$ ($p \times 1$) として，モデルの不確かさを表現するシステムノイズ項を $\boldsymbol{\xi}_n$ を加えれば，

$$
\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{x}_{n-1} + \boldsymbol{D}_n \boldsymbol{d}_n + \boldsymbol{\xi}_n \tag{20}
$$

のように表すことができる。ここに，$\boldsymbol{A}_n$ と $\boldsymbol{D}_n$ は ($p \times p$) の次元を持つ係数行列である。また，通常のカルマンフィルタでは $\boldsymbol{\xi}_n$ の白色正規性を仮定して，その期待値と共分散行列を次のように設定する。

$$
E\{\boldsymbol{\xi}_n\} = 0 \tag{21}
$$

$$
E\{\boldsymbol{\xi}_n \boldsymbol{\xi}_m^T\} = \boldsymbol{Q}_n \delta_{nm} \tag{22}
$$

ここに，$E\{\cdot\}$ は期待値操作を表す。δ_{nm} はクロネッカーのデルタであり，Q_n はシステムノイズの大きさを表す ($p \times p$) 次元の行列である。

一方，観測ベクトル $\boldsymbol{y}_n$ ($r \times 1$ 次元) は，係数行列 $\boldsymbol{H}_n$ ($r \times p$) を用いて以下のように表す。

$$
\boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{H}_n \boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{\eta}_n \tag{23}
$$

ここに，$\boldsymbol{\eta}_n$ は観測ノイズであり，システムノイズと同様，白色正規性を仮定して次のように設定する。

$$
E(\boldsymbol{\eta}_n) = 0 \tag{24}
$$

$$
E(\boldsymbol{\eta}_n \boldsymbol{\eta}_m^T) = \boldsymbol{R}_n \delta_{nm} \tag{25}
$$

ここに，$\boldsymbol{R}_n$ は観測ノイズの大きさを示す ($r \times r$) 次元の行列である。

ところで，(20) 式をシステム方程式，(23) 式を観測方程式として，観測量をもとに状態量を逐次推定するカルマンフィルタのアルゴリズムは Kalman(1960) によって提案され，それ以降，降雨流出予測の分野にも数多く適用されてきた。ただし，(20) 式における定数項 $\boldsymbol{D}_n \boldsymbol{d}_n$ を分布型部分流域モデルで算定し，その結果を既知の定数として加える本論の適用例では，$\boldsymbol{D}_n \boldsymbol{d}_n$ の推定によって生ずるバイアスを考慮にいれたうえで，状態量 (河川流量) を推定・予測することが望ましい。そこで本論では，(20) 式と (23) 式に未知のバイアス項 $\boldsymbol{\beta}$ ($p \times 1$ 次元) を加えた (26) 式と (27) 式をそれぞれシステム方程式・観測方程式とし，状態量と未知のバイアスを併せて推定するカルマンフィルタを導入することを考えた。

$$
\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{x}_{n-1} + \boldsymbol{D}_n \boldsymbol{d}_n + \boldsymbol{B}_n \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\xi}_n \tag{26}
$$

$$
\boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{H} \boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{C}_n \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\eta}_n \tag{27}
$$

ここに，$\boldsymbol{B}_n$ は ($p \times p$) 次元の係数行列である。基礎式の一般性を持たせるため，観測方程式にも $\boldsymbol{C}_n \boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{C}$: $r \times p$ 次元の係数行列) の項を加えて以下の導出を行う。

4.2 適応カルマンフィルタ

未知定数 $\boldsymbol{\beta}$ を含むシステム方程式に対しては，以下に示す適応カルマンフィルタを利用するのが一般的な解法である。これは，推定すべき状態量 $\boldsymbol{x}_n$ と未知定数 $\boldsymbol{\beta}_n$ を併せて新たなベクトル $\boldsymbol{z}_n = [\boldsymbol{x}_n^T \boldsymbol{\beta}_n^T]^T$ ($2p \times 1$ 次元) を定義し，この $\boldsymbol{z}_n$ をカルマンフィルタで次のように推定するものである (Jazwinski, 1970)。

$$
\hat{\boldsymbol{z}}_n^- = \Phi_n \hat{\boldsymbol{z}}_{n-1} + \boldsymbol{D}_n' \boldsymbol{d}_n' \tag{28}
$$

$$
\boldsymbol{P}_z^-(n) = \Phi_n \boldsymbol{P}_z(n-1) \Phi_n^T + \boldsymbol{Q}_n' \tag{29}
$$

$$
\boldsymbol{K}_z(n) = \boldsymbol{P}_z^-(n) \boldsymbol{L}_n^T \left[\boldsymbol{L}_n \boldsymbol{P}_z^-(n) \boldsymbol{L}_n^T + \boldsymbol{R}_n \right]^{-1} \tag{30}
$$

$$
\hat{\boldsymbol{z}}_n = \hat{\boldsymbol{z}}_n^- + \boldsymbol{K}_z(n) \left[\boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{L}_n \hat{\boldsymbol{z}}_n^- \right] \tag{31}
$$

$$
\boldsymbol{P}_z(n) = \left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_z(n) \boldsymbol{L}_n \right] \boldsymbol{P}_z^-(n) \tag{32}
$$

ここに，$\hat{\boldsymbol{z}}_n$ ($2p \times 1$) は $\boldsymbol{z}_n$ の推定量であり，$\boldsymbol{K}_z(n)$ ($2p \times r$) は拡大システムのカルマンゲイン，$\boldsymbol{P}_z^-(n)$ は $\boldsymbol{z}$ の共分散行列である。上式の ’ − ’ の記号は $\boldsymbol{z}_n$ や $\boldsymbol{P}_n$ を前時間ステップ ($n-1$) の情報をもとに推定したことを意味する。また，$\boldsymbol{\Phi}_n$ ($2p \times 2p$)，$\boldsymbol{L}_n$ ($r \times 2p$)，$\boldsymbol{D}_n' \boldsymbol{d}_n'$ ($2p \times 1$)，$\boldsymbol{Q}_n$ ($2p \times 2p$) は，それぞれ拡大システムにおける状態推移行列，状態量から観測量への変換行列，既知の定数ベクトル，システムノイズの共分散行列であり，以下のように定義する。

$$
\boldsymbol{\Phi}_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_n & \boldsymbol{B}_n \\ \mathbf{o} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{L}_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_n & \boldsymbol{C}_n \end{bmatrix} \tag{33}
$$

$$\boldsymbol{D}'_n\boldsymbol{d}'_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_n\boldsymbol{d}_n \\ \mathbf{o} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{Q}'_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_n & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} \end{bmatrix} \tag{34}$$

4.3　分離カルマンフィルタ

上記の適応カルマンフィルタは，(26)，(27) 式で表される系において，最適推定量を得るための一般的な解法である。しかし，状態量ベクトルとそのバイアスベクトルがそれぞれ $(p \times 1)$ の次元を持ち，かつ p が大きくなる本論の問題においては，計算する行列の次元が $(2p \times 2p)$ に拡大するため，計算負荷が大きくなる。

その問題を克服するため，Friedland (1969) は行列の次元を $(2p \times 2p)$ に拡大することなく，状態量ベクトル $\boldsymbol{x}_n$ とそのバイアスベクトル $\boldsymbol{\beta}$ を $(p \times p)$ の次元のままで順次求める方法を提案している。この方法は，分離カルマンフィルタと呼ばれ，Friedland (1969) の提案以降，より一般化した問題への展開 (例えば，Hsieh and Chen, 1999 ; Ignagni, 2000) や，Friedland (1969) とは異なった方法でのアルゴリズムの導出が進められてきた。以下では，Friedland (1969) に比べて，簡潔的な導出方法を示した Igagni (1981) の方法に従って，分離カルマンフィルタの導出過程を追う。

(1)　バイアスを無視した場合と既知の場合とのカルマンフィルタの比較

分離カルマンフィルタを導出するにあたり，まず (26) 式における未知定数の項 (バイアス項) を無視した場合のシステム方程式と観測方程式を想定する。

$$\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{D}_n\boldsymbol{d}_n + \boldsymbol{\xi}_n \tag{35}$$

$$\boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{H}_n\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{\eta}_n \tag{36}$$

この問題に対し，バイアス項を無視した通常のカルマンフィルタは次のようになる。

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_n^- = \boldsymbol{A}_n\tilde{\boldsymbol{x}}_{n-1} + \boldsymbol{D}_n\boldsymbol{d}_n \tag{37}$$

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_x^-(n) = \boldsymbol{A}_n\tilde{\boldsymbol{P}}_x^-(n)\boldsymbol{A}_n^T + \boldsymbol{Q}_x \tag{38}$$

$$\tilde{\boldsymbol{K}}_x(n) = \tilde{\boldsymbol{P}}_x^-(n)\boldsymbol{H}_n^T\left[\boldsymbol{H}_n\tilde{\boldsymbol{P}}_x^-(n)\boldsymbol{H}_n^T + \boldsymbol{R}_n\right]^{-1} \tag{39}$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_n = \tilde{\boldsymbol{x}}_n^- + \tilde{\boldsymbol{K}}_x(n)\left[\boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{H}_n\tilde{\boldsymbol{x}}_n^-\right]^{-1} \tag{40}$$

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_x(n) = \left[\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{K}}_x(n)\boldsymbol{H}_n\right]\tilde{\boldsymbol{P}}_x^-(n) \tag{41}$$

ここに，$\tilde{\boldsymbol{x}}_n$ はバイアスを無視して推定した状態量ベクトルであり，$\tilde{\boldsymbol{P}}_x(n)$ はバイアスを無視して推定した $\tilde{\boldsymbol{x}}_n$ の共分散行列である。

つぎにバイアス $\boldsymbol{\beta}$ が既知である場合を想定する。バイアスが既知であると仮定した場合の状態ベクトルの推定量 $\hat{\boldsymbol{X}}_n^-$ と $\hat{\boldsymbol{X}}_n$ は，

$$\hat{\boldsymbol{X}}_n^- = \boldsymbol{A}_n\hat{\boldsymbol{X}}_{n-1} + \boldsymbol{D}_n\boldsymbol{d}_n + \boldsymbol{B}_n\boldsymbol{\beta} \tag{42}$$

$$\hat{\boldsymbol{X}}_n = \hat{\boldsymbol{X}}_n^- + \tilde{\boldsymbol{K}}_x(n)\left[\boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{H}_n\hat{\boldsymbol{X}}_n^- - \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{\beta}\right] \tag{43}$$

のように表される。

(2)　パラメタ $\boldsymbol{U}_n$, $\boldsymbol{V}_n$, $\boldsymbol{S}_n$ の定義と計算法

バイアスを無視した場合のフィルタリング前後の推定量 $\tilde{\boldsymbol{x}}_n^-$，$\tilde{\boldsymbol{x}}_n$ と，バイアスが既知であると仮定した場合のフィルタリング前後の推定量 $\hat{\boldsymbol{X}}_n^-$，$\hat{\boldsymbol{X}}_n$ との関係を，

$$\hat{\boldsymbol{X}}_n^- = \tilde{\boldsymbol{x}}_n^- + \boldsymbol{U}_n\boldsymbol{\beta} \tag{44}$$

$$\hat{\boldsymbol{X}}_n = \tilde{\boldsymbol{x}}_n + \boldsymbol{V}_n\boldsymbol{\beta} \tag{45}$$

と仮定し，係数行列 $\boldsymbol{U}_n$ と $\boldsymbol{V}_n$ ($p \times p$ 次元) を求めることを考える。

$\tilde{\boldsymbol{X}}_n^-$ と $\tilde{\boldsymbol{x}}_n^-$ との関係は，(37)，(42)，(44)，(45) 式から，

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{X}}_n^- - \tilde{\boldsymbol{x}}_n^- &= \boldsymbol{U}_n\boldsymbol{\beta} \\ &= \boldsymbol{A}_n\left(\hat{\boldsymbol{X}}_{n-1} - \tilde{\boldsymbol{x}}_{n-1}\right) + \boldsymbol{B}_n\boldsymbol{\beta} \\ &= \left(\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{V}_{n-1} + \boldsymbol{B}_n\right)\boldsymbol{\beta}\end{aligned} \tag{46}$$

となるので，$\boldsymbol{U}_n$ と $\boldsymbol{V}_{n-1}$ との関係は，

$$\boldsymbol{U}_n = \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{V}_{n-1} + \boldsymbol{B}_n \tag{47}$$

と表される。

同様に，$\hat{\boldsymbol{X}}_n$ と $\tilde{\boldsymbol{x}}_n$ との関係は，(40)，(43)，(44)，(45) 式から，

$$\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{X}}_n - \tilde{\boldsymbol{x}}_n = \boldsymbol{V}_n\boldsymbol{\beta} \\ &= \hat{\boldsymbol{X}}_n^- - \tilde{\boldsymbol{x}}_n^- + \tilde{\boldsymbol{K}}_x(n)\left[-\boldsymbol{H}_n(\hat{\boldsymbol{X}}_n^- - \tilde{\boldsymbol{x}}_n^-) - \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{\beta}\right] \\ &= \left[\boldsymbol{U}_n - \tilde{\boldsymbol{K}}_x(n)\left(\boldsymbol{H}_n\boldsymbol{U}_n + \boldsymbol{C}_n\right)\right]\boldsymbol{\beta}\end{aligned} \tag{48}$$

となる。いま $\boldsymbol{S}_n$ ($r \times p$ 次元) を，

$$\boldsymbol{S}_n = \boldsymbol{H}_n\boldsymbol{U}_n + \boldsymbol{C}_n \tag{49}$$

と定義すれば，$\boldsymbol{V}_n$ と $\boldsymbol{U}_n$ との関係は，

$$\boldsymbol{V}_n = \boldsymbol{U}_n - \tilde{\boldsymbol{K}}_x(n)\boldsymbol{S}_n \tag{50}$$

となる。(47)，(49)，(50) の三つの式をみれば，$\boldsymbol{V}_{n-1}$ をもとに $\boldsymbol{U}_n$, $\boldsymbol{S}_n$, $\boldsymbol{V}_n$ を求める式になっており，この三つの式を再帰的に解くことにより，(44)，(45) 式における $\boldsymbol{U}_n$ と $\boldsymbol{V}_n$ を求めることができる。

(3)　β を推定するためのカルマンフィルタ

未知の定数項 β を逐次推定する方程式を以下に導出する。まず，$\boldsymbol{\beta}$ の伝達方程式は，

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_n^- = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{n-1} \tag{51}$$

とする。$\boldsymbol{\beta}$ の観測方程式については，バイアスを無視した場合のイノベーションを以下のように $\boldsymbol{r}_n$ ($r \times 1$) と定義し，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_n &= \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{H}_n\tilde{\boldsymbol{x}}_n^- \\ &= \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{H}_n\left[\hat{\boldsymbol{X}}_n^- - \boldsymbol{U}_n\boldsymbol{\beta}\right]\end{aligned} \tag{52}$$

(52) 式の右辺第 1 項と第 2 項にそれぞれ $-\boldsymbol{C}_n\boldsymbol{\beta}$ と $\boldsymbol{C}_n\boldsymbol{\beta}$ を加えれば，

$$\boldsymbol{r}_n = \left(\boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{H}_n\hat{\boldsymbol{X}}_n^- - \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{\beta}\right) \tag{53}$$

$$+\left(\boldsymbol{H}_n\boldsymbol{U}_n + \boldsymbol{C}_n\right)\boldsymbol{\beta} \tag{54}$$

$$= \boldsymbol{S}_n\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{v}_n \tag{55}$$

となるので，この (55) 式を $\boldsymbol{\beta}$ の観測方程式と見立てる。ここに，$\boldsymbol{v}_n$ は $(\boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{H}_n\hat{\boldsymbol{X}}_n^- - \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{\beta})$ で定義する p 次元のベクトルであり，$\boldsymbol{v}_n$ の共分散行列は次のように表される。

$$E\{\boldsymbol{v}_n\boldsymbol{v}_n^T\} = \boldsymbol{H}_n\tilde{\boldsymbol{P}}_x^-(n)\boldsymbol{H}_n^T + \boldsymbol{R}_n \tag{56}$$

これより $\boldsymbol{\beta}$ を逐次推定するためのカルマンフィルタは次のようになる。

$$\boldsymbol{P}_\beta^-(n) = \boldsymbol{P}_\beta(n-1) \tag{57}$$

$$\boldsymbol{K}_\beta(n) = \boldsymbol{P}_\beta^-(n)\boldsymbol{S}_n^T \times \left[\boldsymbol{H}_n\tilde{\boldsymbol{P}}_x^-(n)\boldsymbol{H}_n^T + \boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_\beta^-(n)\boldsymbol{S}_n^T + \boldsymbol{R}_n\right]^{-1} \tag{58}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_n = \hat{\boldsymbol{\beta}}_n^- + \boldsymbol{K}_\beta(n)\left[\boldsymbol{r}_n - \boldsymbol{S}_n\hat{\boldsymbol{\beta}}_n^-\right] \tag{59}$$

$$\boldsymbol{P}_\beta(n) = \left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_\beta(n)\boldsymbol{S}_n\right]\boldsymbol{P}_\beta^- \tag{60}$$

上式の中で，$\tilde{\boldsymbol{P}}_x^-(n)$ と $\boldsymbol{r}_n$ はバイアスを無視したカルマンフィルタで求めることができる。また，$\boldsymbol{S}_n$ は (47), (49)，(50) 式で求めることができる。つまり，バイアスを無視したカルマンフィルタで $\tilde{\boldsymbol{x}}$ を推定し，バイアス推定のためのカルマンフィルタで $\boldsymbol{\beta}$ を推定し，それらの値を (42) 式と (43) 式に代入すれば，バイアスを補正した状態量 $\hat{\boldsymbol{x}}_n^-$，$\hat{\boldsymbol{x}}_n$ を推定することができる。

$$\hat{\boldsymbol{x}}_n^- = \tilde{\boldsymbol{x}}_n^- + \boldsymbol{U}_n\hat{\boldsymbol{\beta}}_n^- \tag{61}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_n = \tilde{\boldsymbol{x}}_n + \boldsymbol{V}_n\hat{\boldsymbol{\beta}}_n \tag{62}$$

(4)　バイアス補正後の共分散行列

バイアス補正後の状態量ベクトルとバイアスベクトルの共分散行列 $\hat{\boldsymbol{P}}_x$，$\hat{\boldsymbol{P}}_{x\beta}$ は以下の式で計算できる (Igagni (1981))。

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{P}}_x^-(n) &= E\{(\hat{\boldsymbol{x}}_n^- - \boldsymbol{x}_n)(\hat{\boldsymbol{x}}_n^- - \boldsymbol{x}_n)^T\}\\ &= \tilde{\boldsymbol{P}}_x^-(n) + \boldsymbol{U}_n\boldsymbol{P}_\beta^-(n)\boldsymbol{U}_n^T \end{aligned}\tag{63}$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{P}}_{x\beta}^-(n) &= E\{(\hat{\boldsymbol{x}}_n^- - \boldsymbol{x}_n)(\hat{\boldsymbol{\beta}}_n^- - \boldsymbol{\beta})^T\}\\ &= \boldsymbol{U}_n\boldsymbol{P}_\beta^-(n)\end{aligned}\tag{64}$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{P}}_x(n) &= E\{(\hat{\boldsymbol{x}}_n - \boldsymbol{x}_n)(\hat{\boldsymbol{x}}_n - \boldsymbol{x}_n)\}\\ &= \tilde{\boldsymbol{P}}_x(n) + \boldsymbol{V}_n\boldsymbol{P}_\beta(n)\boldsymbol{V}_n^T\end{aligned}\tag{65}$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{P}}_{x\beta}(n) &= E\{(\hat{\boldsymbol{x}}_n - \boldsymbol{x}_n)(\hat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta})^T\}\\ &= \boldsymbol{V}_n\boldsymbol{P}_\beta(n)\end{aligned}\tag{66}$$

以上をまとめると，分離カルマンフィルタは，(37) から (41) 式でバイアスを無視した推定量を求め，(51) から (60) 式でバイアスを推定し，(61) から (66) 式でバイアスを補正する一連のアルゴリズムであった。なお，分離カルマンフィルタの推定量は，適応カルマンフィルタによる推定量と理論的に一致することが Friedland (1969) によって証明されている。

4.4　バイアスカルマンフィルタ

分離カルマンフィルタは，行列の次元を拡大することなく，状態量と未知定数を順次推定できる。ただし，実際の問題で合理的な推定量を得るためには，$\boldsymbol{P}_x$ や $\boldsymbol{P}_\beta$ の初期値を適切に設定する必要がある。これは，上述のアルゴリズムを工学的な問題に適用するうえで十分に留意すべき点である。

Dee and Da Silva (1998) は，推定結果が $\boldsymbol{P}_\beta$ の初期値に大きく依存するという分離カルマンフィルタの問題点を指摘したうえで，バイアスの共分散行列 $\boldsymbol{P}_\beta$ を $\boldsymbol{P}_x$ から簡単な方法で求め，より安定したフィルタリングのアルゴリズムを提案している。そのアルゴリズムは，分離カルマンフィルタと同様に行列の次元を $(r\times r)$ に抑えて計算し，かつより少ない手順で状態量とバイアスを推定することができる。さらに，推定したバイアスを状態量の伝達にフィードバックさせることにより，バイアスを無視したカルマンフィルタの計算を省略できるように工夫がなされている。本論では，このアルゴリズムをバイアスカルマンフィルタとよび，分離カルマンフィルタの一連の式からバイアスカルマンフィルタを導出する。

まず，ここからの議論で用いるバイアス (p 次元ベクトル) を，

$$\boldsymbol{b}_n^- \equiv E[\tilde{\boldsymbol{x}}_n^- - \boldsymbol{x}_n] \tag{67}$$

と定義する。$\boldsymbol{b}_n$ は $\boldsymbol{x}$ の推定量 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ に含むバイアスであり，分離カルマンフィルタの説明で用いた $\boldsymbol{\beta}$ とは異なっていることに注意する。(61) と (67) 式から $\boldsymbol{b}_n^-$ と $\boldsymbol{\beta}$ との間には，

$$\boldsymbol{b}_n^- \equiv E[\hat{\boldsymbol{x}}_n^- - \boldsymbol{x}_n] - E[\boldsymbol{U}_n\hat{\boldsymbol{\beta}}_{n-1}] \tag{68}$$

$$= -\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{\beta} \tag{69}$$

の関係があるので，フィルタリング前後のバイアス推定量は，

$$\hat{\boldsymbol{b}}_n^- = \boldsymbol{U}_n\hat{\boldsymbol{\beta}}_n^-\boldsymbol{U}_n^T \tag{70}$$

$$\hat{\boldsymbol{b}}_n = \boldsymbol{U}_n\hat{\boldsymbol{\beta}}_n\boldsymbol{U}_n^T \tag{71}$$

となる。また，バイアス推定量の共分散行列は，

$$\hat{\boldsymbol{P}}_b^-(n) = -\boldsymbol{U}_n\hat{\boldsymbol{P}}_\beta^-(n) \tag{72}$$

$$\hat{\boldsymbol{P}}_b(n) = -\boldsymbol{U}_n\hat{\boldsymbol{P}}_\beta(n) \tag{73}$$

となる。

つぎに (49) と (50) 式から $\boldsymbol{V}_n$ は，

$$\boldsymbol{V}_n = \boldsymbol{U}_n - \tilde{\boldsymbol{K}}_x(n)[\boldsymbol{H}_n\boldsymbol{U}_n + \boldsymbol{C}_n] \tag{74}$$

となり，観測にはバイアスがないと仮定 ($\boldsymbol{C}_n = 0$) すれば，

$$\boldsymbol{V}_n = [\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{K}}_x(n)\boldsymbol{H}_n]\boldsymbol{U}_n \tag{75}$$

となる。この $\boldsymbol{V}_n$ を (62) 式に代入することで，バイアス補正後の状態量 $\hat{\boldsymbol{x}}_n$ の推定式を以下のように得ることができる。

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}_n &= \tilde{\boldsymbol{x}}_n + \boldsymbol{V}_n\hat{\boldsymbol{\beta}}_n \\ &= \tilde{\boldsymbol{x}}_n + [\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{K}}_x(n)\boldsymbol{H}_n]\boldsymbol{U}_n\hat{\boldsymbol{\beta}}_n \\ &= \tilde{\boldsymbol{x}}_n - [\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{K}}_x(n)\boldsymbol{H}_n]\hat{\boldsymbol{b}}_n \\ &= \tilde{\boldsymbol{x}}_n^- + \tilde{\boldsymbol{K}}_x(n)[\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_n^-] \\ &\quad -[\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{K}}_x(n)\boldsymbol{H}_n]\hat{\boldsymbol{b}}_n \\ &= \tilde{\boldsymbol{x}}_n^- - \hat{\boldsymbol{b}}_n \\ &\quad + \tilde{\boldsymbol{K}}_x(n)[\boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{H}_n(\tilde{\boldsymbol{x}}_n^- - \hat{\boldsymbol{b}}_n)] \end{aligned} \tag{76}$$

ここで，$\tilde{\boldsymbol{x}}_n^-$ はバイアス補正前の予測状態量である。前述の分離カルマンフィルタでは $\tilde{\boldsymbol{x}}_n^-$ を (37) 式で求めた。つまり，バイアス項を無視した通常のカルマンフィルタを実行することにより $\tilde{\boldsymbol{x}}_{n-1}$ を求め，それを初期値として時刻 n の状態量を予測した。一方，バイアスカルマンフィルタでは，$\tilde{\boldsymbol{x}}_n^-$ を求める際に以下の式を用いる。

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_n^- = \boldsymbol{A}_n\hat{\boldsymbol{x}}_{n-1} + \boldsymbol{D}_n\boldsymbol{d}_n \tag{77}$$

これは，バイアス補正後の状態量 $\hat{\boldsymbol{x}}_{n-1}$ を初期値として，$\tilde{\boldsymbol{x}}_n^-$ を予測することを意味する。これにより，最新のバイアス推定量を状態量の伝達式にフィードバックするとともに，バイアスを無視したカルマンフィルタを省略できるので，分離カルマンフィルタに比べて計算の手順が少なくなる。ただし，バイアスカルマンフィルタの推定結果はこの操作により準最適推定となることに注意が必要である (Dee and Silva (1999))。

$\boldsymbol{b}_n$ を推定するためのカルマンゲイン $\boldsymbol{K}_b(n)$ は，(58) 式の両辺に $-\boldsymbol{U}_n$ を掛けて，$\boldsymbol{K}_b(n)$ を $\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{K}_\beta(n)$ と定義すれば，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_b(n) &= \boldsymbol{P}_b^-(n)\boldsymbol{H}_n^T \times \\ &[\boldsymbol{H}_n\tilde{\boldsymbol{P}}_x^-(n)\boldsymbol{H}_n + \boldsymbol{H}_n\boldsymbol{P}_b^-(n)\boldsymbol{H}_n + \boldsymbol{R}_n]^{-1}\end{aligned} \tag{78}$$

として求めることができる。同様に，(59) 式の両辺に $-\boldsymbol{U}_n$ を掛けることで，$\hat{\boldsymbol{b}}_n$ の更新方程式は次のようになる。

$$\hat{\boldsymbol{b}}_n = \hat{\boldsymbol{b}}_n^- - \boldsymbol{K}_b(n)(\boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{H}_n\tilde{\boldsymbol{x}}_n^- + \boldsymbol{H}_n\boldsymbol{b}_n^-) \tag{79}$$

以上がバイアスカルマンフィルタにおける，状態量 $\hat{\boldsymbol{x}}_n$ とバイアス $\hat{\boldsymbol{b}}_n$ の推定法である。

バイアスを補正した状態量の共分散行列は，(63) と (79) 式から，

$$\hat{\boldsymbol{P}}_x^-(n) = \tilde{\boldsymbol{P}}_x^-(n) + \boldsymbol{P}_b^-(n) \tag{80}$$

の関係がある。これは，バイアスを無視して推定した状態量の共分散行列 $\tilde{\boldsymbol{P}}_x^-$ に，バイアスの共分散行列 $\boldsymbol{P}_b^-$ を加えた値が，バイアスを補正後の状態量の共分散行列 $\hat{\boldsymbol{P}}_x^-(n)$ となることを意味する。

分離カルマンフィルタは，この $\boldsymbol{P}_b$ に相当するバイアスの共分散行列を逐次更新するアルゴリズムとなっているが，バイアスカルマンフィルタでは，$\boldsymbol{P}_b$ が $\boldsymbol{P}_x$ と同じ空間構造で生ずると仮定し，(81) 式を用いて $\boldsymbol{P}_b$ を簡単に推定する。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_b^-(n) &= \gamma\hat{\boldsymbol{P}}_x^-(n) \\ \tilde{\boldsymbol{P}}_x^-(n) &= (1-\gamma)\hat{\boldsymbol{P}}_x^-(n)\end{aligned} \tag{81}$$

ここで，γ は $\boldsymbol{P}_b$ と $\tilde{\boldsymbol{P}}_x^-$ の割合を決めるスカラ量のパラメタであり 0 から 1 の値をとる。γ が 1 に近ければ，バイアス推定のカルマンゲインが相対的に大きくなり，観測量と予測量との差の情報は主にバイアスの更新に用いることになる。一方，γ が 0 に近ければ，状態量のカルマンゲインが相対的に大きくなり，観測量と予測量との差の情報は主に状態量の更新に用いることになる。なお，γ が 0 のときはバイアスは更新されないので，バイアスカルマンフィルタの推定結果はバイアスを考慮しない通常のカルマンフィルタになる。

以下にバイアスカルマンフィルタのアルゴリズムをまとめる。

- 状態量とバイアスの予測

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_n^- = \boldsymbol{A}_n\hat{\boldsymbol{x}}_{n-1} + \boldsymbol{D}_n\boldsymbol{d}_n \tag{82}$$

$$\hat{\boldsymbol{b}}_n^- = \hat{\boldsymbol{b}}_{n-1} \tag{83}$$

- 予測結果のバイアス補正

$$\hat{\boldsymbol{x}}_n^- = \tilde{\boldsymbol{x}}_n^- - \hat{\boldsymbol{b}}_n^- \tag{84}$$

- 共分散行列の予測

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_x^-(n) = \boldsymbol{A}_n\tilde{\boldsymbol{P}}(n)\boldsymbol{A}_n^T + \boldsymbol{Q}_x(n) \tag{85}$$

$$\hat{\boldsymbol{P}}_x^-(n) = \frac{1}{1-\gamma}\tilde{\boldsymbol{P}}_x^-(n) \tag{86}$$

$$\boldsymbol{P}_b^-(n) = \frac{\gamma}{1-\gamma}\tilde{\boldsymbol{P}}_x^-(n) \tag{87}$$

- バイアスの更新

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_b = \boldsymbol{P}_b^-(n)\boldsymbol{H}_n^T[&\boldsymbol{H}_n\boldsymbol{P}_b^-\boldsymbol{H}_n^T \\ &+\boldsymbol{H}_n\tilde{\boldsymbol{P}}_x^-\boldsymbol{H}_n^T + \boldsymbol{R}_n]^{-1}\end{aligned} \tag{88}$$

$$\hat{\boldsymbol{b}}_n = \hat{\boldsymbol{b}}_n^- - \boldsymbol{K}_b[\boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{H}_n(\tilde{\boldsymbol{x}}_n^- - \hat{\boldsymbol{b}}_n^-)] \tag{89}$$

- 状態量の更新

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_x = \tilde{\boldsymbol{P}}_x^-&(n)\boldsymbol{H}_n^T \\ &\times[\boldsymbol{H}_n\tilde{\boldsymbol{P}}_x^-(n)\boldsymbol{H}_n^T + \boldsymbol{R}_n]^{-1}\end{aligned} \tag{90}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_n = (&\tilde{\boldsymbol{x}}_n^- - \hat{\boldsymbol{b}}_n) \\ &+\boldsymbol{K}_x[\boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{H}_n(\tilde{\boldsymbol{x}}_n^- - \hat{\boldsymbol{b}}_n)]\end{aligned} \tag{91}$$

- 共分散行列の更新

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_x(n) = [\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{K}}_x(n)\boldsymbol{H}_n]\tilde{\boldsymbol{P}}_x^- \tag{92}$$

5. バイアスカルマンフィルタを導入した洪水予測アルゴリズム

マスキンガムクンジ法による洪水追跡計算に，バイアスカルマンフィルタを導入する。以下に，そのアルゴリズムを組み込んだ広域分布型流出予測システムによる流量予測の具体的な手順を述べる。現在時刻を n とし，$n-1$ のフィルタリング後の状態量が得られている状況を想定する。

Step 1 $n-1$ から n までの観測降雨を入手する。

Step 2 各部分流域に適用した分布型流出モデルを実行し，各河道区分への側方流入量 $\boldsymbol{d}_n$ を計算する。

Step 3 マスキンガムクンジモデルを実行し，時刻 n の河川流量 $\tilde{\boldsymbol{x}}_n^-$ を計算する。

Step 4 n-1 で求めたバイアス $\hat{\boldsymbol{b}}_{n-1}(=\hat{\boldsymbol{b}}_n^-)$ をもとに，バイアスを補正する $(\hat{\boldsymbol{x}}_n^- = \tilde{\boldsymbol{x}}_n^- - \hat{\boldsymbol{b}}_n^-)$。

Step 5 状態量の共分散行列 $\tilde{\boldsymbol{P}}_x^-(n)$，$\hat{\boldsymbol{P}}_x^-(n)$ と，バイアスの共分散行列 $\boldsymbol{P}_b^-(n)$ を計算する。

Step 6 時刻 n の観測流量 $\boldsymbol{y}$ を入手する。

Step 7 (88) 式から (92) 式を実行し，バイアス，状態量，共分散行列を更新する。

Step 8 Step 2 で得た流出モデルの状態量と，Step 7 で更新した河道モデルの状態量を初期条件として，$n+1$ までの予測流量を計算を実行し，Step 6 で推定したバイアスをもとに予測結果を補正する。

Step 9 Step 7 で得たバイアス補正後の状態量を初期値として，$n+2$ までの予測計算を実行し，同様に予測結果をバイアス補正する。この予測計算を必要とするリードタイムまで繰り返す。

6. 桂川流域への適用

6.1 対象流域と計算条件

バイアスカルマフィルタを導入した広域分布型流出予測システムを，桂川流域 (桂地点上流: 833 km^2) に適用する。計算対象期間の 1992 年と 1993 年当時は上流域に主要なダムが存在しないので，自然流況で予測性能を検証できる。また，Fig. 3 に示すように，主川に沿って複数の流量観測所が存在するので，流域下端でフィルタリングした効果の上流に及ぼす影響や，複数地点の流量を更新に用いた場合の効果などを分析できる。なお，広域分布型流出予測システムは桂川流域の河道網を 193 の河道区分に分割しており，バイアスカルマンフィルタの主な行列計算の次元は (193×193) になる。

本論の適用例では，1992 年 8 月 18 日 0 時から 23 日 0 時までの 5 日間の洪水イベント (1992 年イベント) と，1993 年 8 月 14 日 0 時から 19 日 0 時までの 5 日間の洪水イベント (1993 年イベント) の二つを計算対象洪水とした。1992 年イベントは一山洪水であり，1993 年イベントは複数のピークが連続する洪水である。

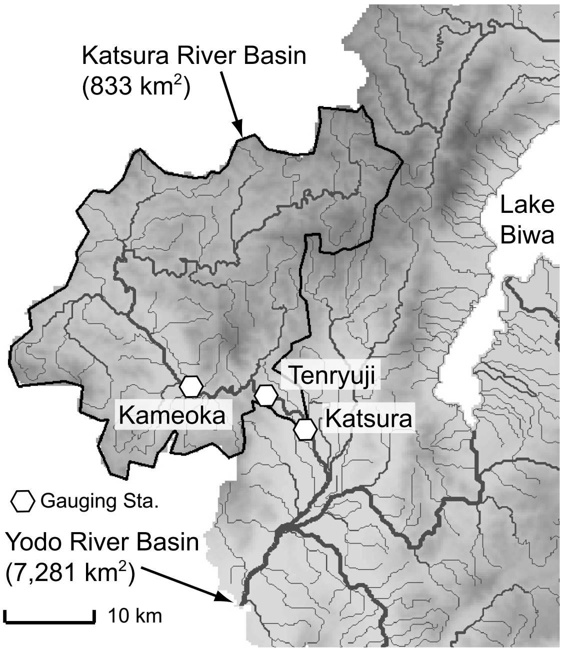

Fig. 3 Locations of gauging stations in the Katsura River Basin

入力降雨については，流域内 13ヶ所で観測された地上雨量 (時間分解能: 1 時間) を最近隣法で空間内挿したものを用いる。フィルタリング手法の性能を明らかにすることが本論の目的なので，予測降雨についても実績降雨と同じ降雨分布を用いた。

状態量の更新に用いる河川流量は，特に断らない限り，桂地点一地点の観測流量 (時間分解能: 1 時間) とし，**6.2** (2) で亀岡地点の流量をフィルタリングに用いた例を示す。

バイアスカルマンフィルタのパラメタについては，システムノイズの分散を 10 [m^6/s^2]，観測ノイズの分散を 100 [m^6/s^2]，バイアスの共分散行列の大きさを規定するパラメタ γ を 0.5 に設定した。広域分布型流出予測システムのパラメタは既往の研究 (佐山ら 2005) で同定したパラメタと同じ値を用いた。

6.2 結果と考察

(1) バイアス補正の効果

Figure 4 に 1992 年の洪水イベントを対象にしてバイアスカルマンフィルタを適用した結果を示す。リードタイムをそれぞれ 0, 1, 2, 3 時間として予測したときの桂地点の流量を示している。また，バイアスカルマンフィルタの結果 (Bias filter) と比較するために，バ

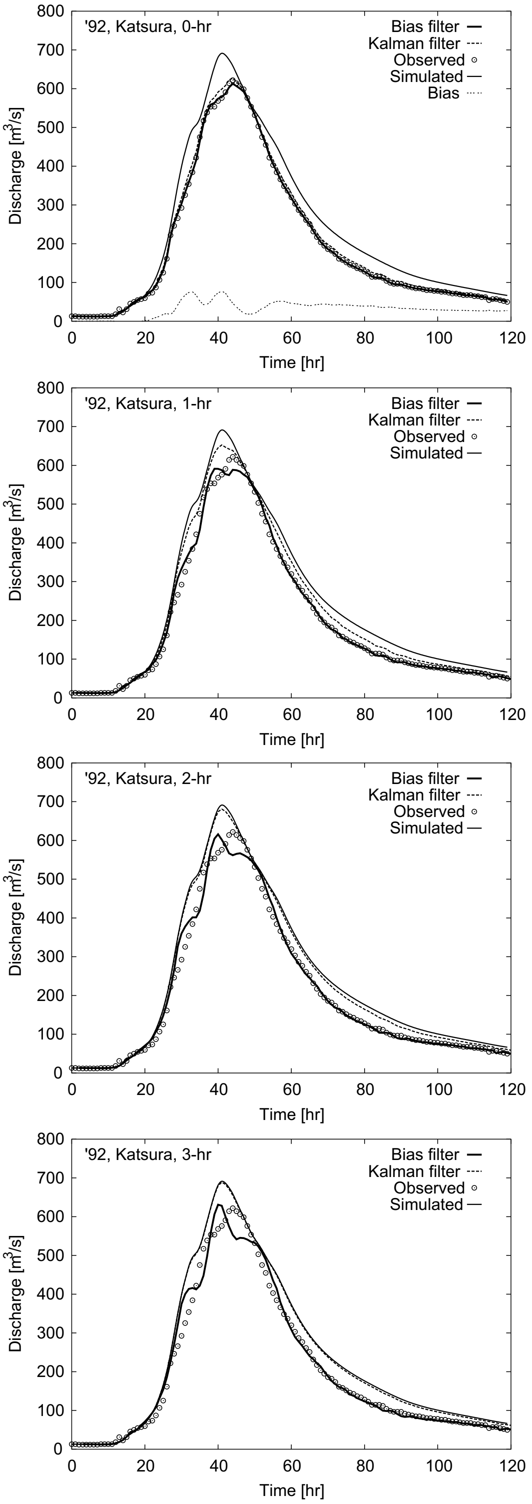

Fig. 4 Analysis (0-hr) and predictions with 1, 2, 3-hr lead time for 1992 event at Katsura

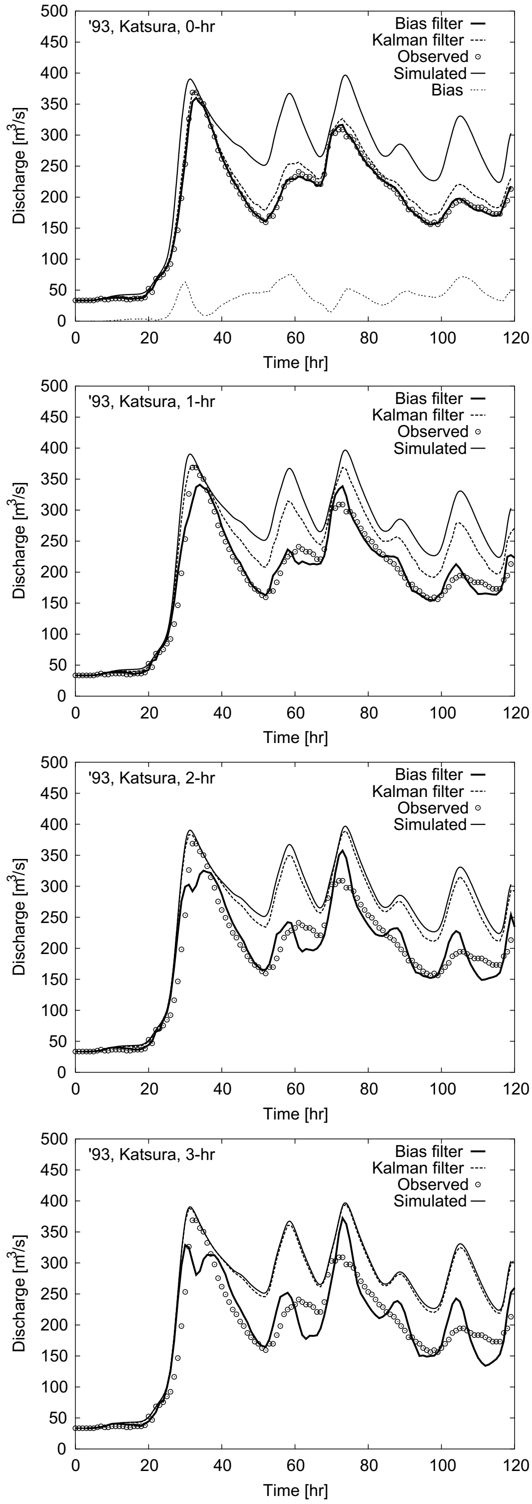

Fig. 5 Analysis (0-hr) and predictions with 1, 2, 3-hr lead time for 1993 event at Katsura

イアスを考慮しない通常のカルマンフィルタ (Kalman filter) と，オフラインシミュレーション (Simulated) の結果を併せて示す。リードタイム 0 時間の予測，すなわちフィルタリング直後の解析結果を示すパネルには，推定した桂地点のバイアス (Bias) も併記している。

まず，フィルタリング直後の解析結果に着目すると，バイアスカルマンフィルタと通常のカルマンフィルタとの違いはほとんど見られず，いずれも観測流量に近

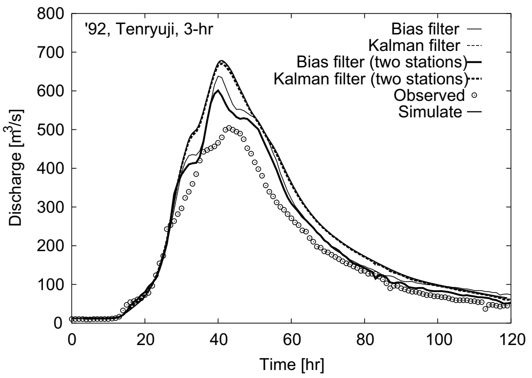

Fig. 6 Prediction results with 3-hr lead time. Comparison of the results filtered with observed discharge only at Katsura and both at Katsura and Kameoka (two stations).

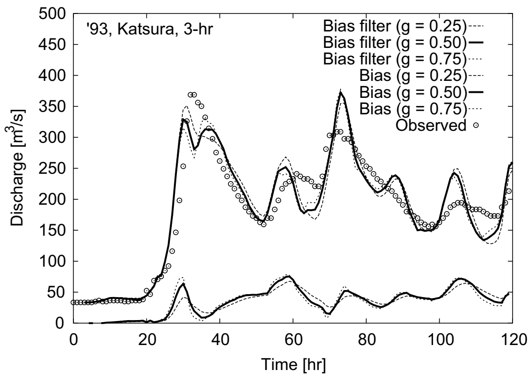

Fig. 7 Effect of the parameter γ on prediction result with 3-hr lead time and bias estimation

い値をとっていることがわかる。フィルタリングを実行した後の河川流量は，システムノイズと観測ノイズの大きさをいかにとるかに依存しており，この計算例では観測ノイズを相対的に小さく設定しているために，解析結果が観測流量に近い値になっている。推定したバイアスの時系列は，概ねオフラインシミュレーションと観測流量の差の時系列に類似している。バイアスの大きさは，例えばピークに近い計算開始後 40 時間の結果で見れば，バイアスが約 70 $\mathrm{m^3/s}$，オフラインと観測流量との差が約 100 $\mathrm{m^3/s}$ であるから，オフラインと観測流量との差の約 7 割程度で推移していることになる。

次に予測結果に着目する。リードタイムが 1 時間の場合，バイアスを考慮することによって，洪水の立ち上がり部や逓減部の予測が観測流量に近づく。また，ピーク直前もバイアスを考慮することによって予測結果が下方修正され，観測流量に近づいている。

予測のリードタイムが 3 時間の場合に着目すると，バイアスを考慮しない通常のカルマンフィルタの予測はオフラインシミュレーションの結果とほぼ一致し，フィルタリングの効果が見られないことがわかる。これは，観測情報をもとに河川流量を更新したとしても，3 時間が経過すれば，河川の流量が斜面部の流出モデルに大きく依存するためである。それに対して，バイアスカルマンフィルタは流出モデルに起因するバイアスを逐次推定して，河川流量の予測を補正するので，リードタイムが 3 時間の場合でもフィルタリングの効果が現れる。

同様の傾向は Fig. 5 に示した 1993 年イベントの結果でも見られる。特にオフラインシミュレーションの結果が継続的に観測流量よりも大きくなっている計算開始から 40 時間後以降は，バイアスを考慮する効果がはっきりと現れる。ただし，30 時間後のピーク前後では，洪水の立ち上がり部で推定したバイアスが正の値をとっているのに対し，ピーク時のオフラインシミュレーションが観測結果に近いので，予測結果を小さく見積もる結果になっている。

(2) 上流地点におけるフィルタリングの効果

Figure 6 は，リードタイムを 3 時間とした場合の天竜寺地点における予測結果である。桂地点の約 5 km 上流に天竜寺地点は位置する。バイアス補正をする場合としない場合，また，桂地点だけで流量を更新する場合と天竜寺から約 10 km 上流の亀岡地点でも流量を更新する場合について，4 種類の計算結果を示している。

桂地点だけで流量を更新する場合にまず着目すると，バイアスカルマンフィルタの結果はオフラインシミュレーションのそれより観測流量に近づいていることが分かる。これは，下流桂地点で流出モデルのバイアスを検知したことが，上流地点の予測にも効果を及ぼすことを意味する。また，上流の亀岡地点にも観測情報がある場合には，さらに予測結果が向上する。

本論で行ったシミュレーションはフィルタリングの検証を目的としているので，あえて用いる観測流量を制限して計算した。しかし，洪水予測の実務においては，可能な限り多地点の信頼できる観測流量を用いてフィルタリングすればよい。フィルタリングの効果は流量観測が無い上流地点にも及ぶので，従来洪水予測の難しかった中小河川においても，バイアスカルマンフィルタを導入した分布型流出モデルを用いることにより，確度の高い洪水予測を実現できる可能性がある。

(3) パラメタ γ の影響について

バイアスカルマンフィルタには，バイアスの共分散行列の大きさを決める γ というパラメタがある。上述

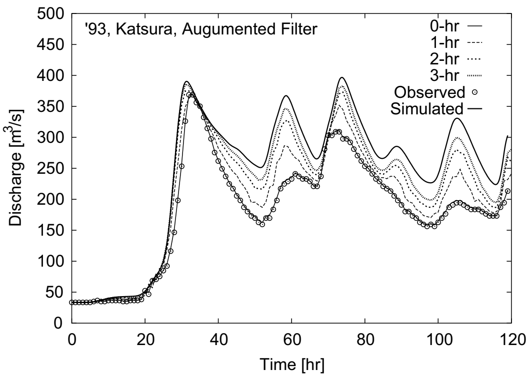

Fig. 8 Prediction results for 1993 event at Katsura with Adaptive Kalman Filter

のシミュレーションでは，この値を 0.5 に設定したが，ここでは，γ の値をかえて予測計算を行い，それが予測結果に及ぼす影響を考察する。

Figure 7 は 1993 年の洪水を対象にしたリードタイム 3 時間の予測結果である。γ を 0.25，0.5，0.75 と変えて計算している。γ が大きくなれば $\boldsymbol{P}_b$ が大きくなり，カルマンフィルタでバイアス推定量を更新する際に観測をより重視することになる。つまり，γ が大きいほうが，バイアスはより鋭敏に変化する。その傾向はバイアスの推定結果 (Bias) から確認できる。ただし，その違いによる予測結果の違いはそれほど顕著ではない。γ の値は経験的に決定するしかないが，本論の適用例では $\gamma = 0.5$ としておいて特に問題はないと考える。

(4) 適応カルマンフィルタとの比較

バイアスカルマンフィルタは，**4.** に示したように，適応カルマンフィルタから派生した方法であり，両者の予測結果の違いを比較しておく必要がある。Figure 8 は，1993 年の洪水イベントを対象に適応カルマンフィルタによる桂地点の予測結果を示している。計算開始後 30 時間後から 40 時間後に現れる洪水のピーク付近は，バイアスカルマンフィルタのように過小評価をすることもなく，適応カルマンフィルタの予測結果は良好である。また，Fig. 4 に示した通常のカルマンフィルタ (Kalman filter) に比べて，各リードタイムで適応カルマンフィルタの予測が観測流量と近づいている。つまり，未知定数をシステムに加えたことによる予測結果の向上を確認できる。しかし，リードタイムが長くなるほど，予測結果がオフラインシミュレーションの結果に近づき，リードタイムが 3 時間の場合にはフィルタリングの効果が現れない。この傾向は，通常のカルマンフィルタと同様であり，その点において，バイアスカルマンフィルタは，適応カルマンフィルタよりも優れているといえる。

両者の手法の違いは，主に未知定数項 (バイアス項) の共分散行列の取り扱いにあり，拡大システムによるカルマンフィルタはそれを逐次更新していくのに対し，バイアスカルマンフィルタでは状態量の共分散行列と同じ空間構造を持つと仮定して推定している。前者の方法は，理論的には正しいといえるが，今回の適応カルマンフィルタの例では，逐次計算して求めた共分散行列の値が，初期値とほとんど同じ値であることを確認しており，初期値の設定が未知定数項の推定に大きく影響を及ぼした可能性がある。流出予測の実務では，長期にわたって連続的に予測とフィルタリングを繰り返す必要があり，初期値に大きく依存しないバイアスカルマンフィルタの方法はより実用的な手法であると考える。また，より大きな流域への展開を想定した場合に，行列計算の次元が拡大しないという点も，バイアスカルマンフィルタの特長といえる。

7. おわりに

広域分布型流出予測システムの観測流量データ同化手法として，河道網に適用したマスキンガムクンジモデルのフィルタリング法を提案した。以下に，本論で示した手法の概要とシミュレーションの結論をまとめる。

1. 計算安定化手法を導入したマスキンガムクンジ法をもとに，空間分布する河川流量の時間推移を行列式で表現する方法を示した。
2. マスキンガムクンジ法で予測する河川流量をフィルタリングで更新する対象とした。また，流出モデルに起因するバイアスをシステム方程式に加え，河川流量とともに推定すべき対象とした。
3. 状態量とともに未知定数を推定するフィルタリング法として，適応カルマンフィルタを示したうえで，その代替法として，行列の次元を拡大せずに状態量と未知定数を推定する分離カルマンフィルタの導出を示した。さらに，バイアスの推定問題に特化して，より計算効率を高めた方法として，バイアスカルマンフィルタを導出した。
4. バイアスカルマンフィルタをマスキンガムクンジ法に適用して，桂川流域の洪水を予測した結果，通常のカルマンフィルタではフィルタリングの効果をほとんど発揮しない 3 時間先の予測についても，バイアスカルマンフィルタではその効果を発揮し，予測結果が全般的に観測流量に近づくことを示した。
5. 流量観測が得られない上流の地点においても，バイアスカルマンフィルタの方法では，フィルタリ

ングの効果が及ぶことを明らかにした。ただし，観測地点から離れればその効果は小さくなるので，洪水予測の実務ではできるだけ多くの流量情報をフィルタリングに用いるべきである。提案した方法は，複数地点の流量観測情報を同じアルゴリズムで同化することができて，流量情報を増やすことによって予測結果が向上する事例を示した。

以上のように，本論で提案した方法は，流出モデルに起因する予測のバイアスを，カルマンフィルタのアルゴリズムで状態量とともに逐次推定し，予測結果の補正を行うものである。今後はこの手法を淀川全流域体に適用するとともに，稼働中のリアルタイム予測システムに導入する予定である。

謝　辞

本研究は，科学研究費補助金・若手研究 (B) 18760373 (代表: 佐山敬洋)，および (財) 河川環境管理財団・河川整備基金助成事業の補助を得ました。ここに記して謝意を申し上げます。

参考文献

池淵周一・椎葉充晴・宝 馨・立川康人 (2006)：エース水文学, 朝倉書店.

市川 温・村上将道・立川康人・椎葉充晴 (2001)：流域地形の新たな数理表現形式に基づく流域流出系シミュレーションシステムの開発, 土木学会論文集, No. 691 / II - 57, pp. 42 – 52.

(財) 北海道河川防災研究センター・研究所 (2006)：実践流出解析ゼミ [講義テキスト編].

佐山敬洋・立川康人・寶 馨・市川 温 (2005)：広域分布型流出予測システムの開発とダム群治水効果の評価, 土木学会論文集, No. 803 / II - 73, pp. 13 – 27.

高棹琢馬・椎葉充晴 (1980)：状態空間法による流出予測 - kinematic wave 法を中心として -, 京都大学防災研究所年報, 第 23 号, B-2, pp. 211 – 226.

高棹琢馬・椎葉充晴・宝 馨 (1982a)：集中型流出モデルの構成と流出予測手法, 京都大学防災研究所年報, 第 25 号, B-2, pp. 221 – 243.

高棹琢馬・椎葉充晴・宝 馨 (1982b)：貯留モデルによる実時間流出予測に関する基礎的研究, 京都大学防災研究所年報，第 25 号, B-2, pp. 245 – 267.

高棹琢馬・椎葉充晴・宝 馨 (1983)：複合流域における洪水流出の確率予測手法, 京都大学防災研究所年報, 第 26 号, B-2, pp. 181 – 196.

宝 馨・高棹琢馬・椎葉充晴 (1984)：洪水流出の確率予測における実際的手法，第 28 回水理講演会論文集, pp. 415 – 422.

立川康人・佐山敬洋・可児良昭・宝 馨・松浦秀起・山崎友也 (2006)：広域分布型流出予測モデルを用いた実時間流出予測システムの開発と淀川流域への適用, 京都大学防災研究所年報, 49, B, pp. 13 – 26.

立川康人・永谷 言・寶 馨 (2004)：飽和・不飽和流れの機構を導入した流量流積関係式の開発, 水工学論文集, 第 48 巻, pp. 7 – 12.

橋本識秀・兪 朝夫・星　清 (1992)：洪水流出予測における実際的課題とその解決法, 水工学論文集, 第 36 巻, pp. 567 – 572.

日野幹雄 (1974)：水文流出系予測へのカルマン・フィルター理論の適用, 土木学会論文報告集, 第 221 号, pp. 39 – 47.

藤田 暁・大東秀光・上坂 薫・椎葉充晴・立川康人・市川 温 (2001)：分布型流出モデルに基づくダム流入量実時間予測モデルについて, 水工学論文集, 第 45 巻, pp. 115 – 120.

陸 旻皎・小池俊雄・早川典生 (1999)：Multi-step, Multi-reach Muskingum-Cunge 法を用いた分布型水文モデルの開発, 水文・水資源学会，Vol. 12, No. 5, pp. 384 – 390.

Dee, D.P. and Da Silva, A.M. (1998)：Data assimilation in the precense of forecast bias, Q.J.R. Meteorol. Soc., 124, pp. 269 – 295.

Evansen, G. (1994)：Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics, J. Geophys. Res., 99, pp. 10,143 – 10,162.

Freed, D. L. and Ming, J. (1993)：A Kalman filter enhanced real-time dynamic flood routine model. In Proceedings of XXV Congress of International Association for Hydraulic Research, Tokyo.

Friedland, B. (1969)：Treatment of bias in recursive filtering, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 14, No. 4, pp. 359 – 367.

Hsieh, C. and Chen F. (1999)：Optimal solution of the two-stage Kalman estimator, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 44, No. 1, pp. 194 – 199.

Ignagni, M. (1981)：An alternate derivation and extension of Friedland's two-stage Kalman estimator, Vol. 26, No. 3, pp. 746 – 750.

Ignagni, M. (2000)：Optimal and suboptimal separate-bias Kalman estimators for a stochastic bias, Vol. 45, No. 3, pp. 547 – 551.

Jazwinski, A. H. (1970)：Stochastic processes and filtering theory, Academic Press, New York.

Kalman, R. E. (1960)：A new approach to linear filtering and prediction problems, J. of. Basic Engineering, 82, pp. 35 – 45.

Kim, S., Tachikawa, Y. and Takara, K. (2007) : Applying a recursive update algorithm to a distributed hydrologic model, Journal of hydrologic engineering, ASCE, Vol. 12, No. 3, pp. 336 – 344.

Kitandis, P. K. and Bras, R. L. (1980) : Real-time forecasting with a conceptual hydrologic model 1. analysis of uncertainty, Water Resour. Res., Vol. 16, No. 6, pp. 1025 – 1033.

Moradkhani, H. M., Hsu, K. L., Gupta, H. and Sorooshian, S. (2005) : Uncertainty assessment of hydrologic model states and parameters: sequential data assimilation using the particle filter, Water Resour. Res., Vol. 41, W05012.

O'Connell, P. E. and Clarke, R. T. (1981) : Adaptive hydrological forecasting - a review, Hydrol. Sci. Bull., Vol. 26, No. 2, pp. 179 – 205.

Refsgaard, J. C. (1997) : Validation and intercomparison of different updating procedures for real-time forecasting, Nord. Hydro., Vol. 28, pp. 65 – 84.

Romanowicz, R. J., Young, P. C. and Beven, K. J. (2006) : Data assimilation and adaptive forecasting of water levels in the river Severn catchment, United Kingdom, Water Resourc. Res., Vol. 42, W06407.

Seo, D. J., Koren V. and Cajina, N. (2003) : Real-time assimilation of radar-based precipitation data and streamflow observations into a distributed hydrological model, Proc. of symposium HS03 held during IUGG2003 at Sapporo, July 2003, IAHS Publ., no. 282, pp. 138 – 142.

Shiiba, M., Laurenson, X. and Tachikawa Y. (2000) : Real-time stage and discharge estimation by a stochastic-dynamic flood routing model, Hydrol. Process., 14, pp. 481 – 495.

Weerts, A. H. and El Serafy, G. Y. H. (2006) : Particle filtering and ensemble Kalman filtering for state updating with hydrological conceptual rainfall-runoff models, Water Resourc. Res., Vol. 42, W09403.

Wohling, T. and Lennartz, F. and Zappa M. (2006) : Technical note: updating procedure for flood forecasting with conceptual HBV-type models, Hydrol. Earth Syst. Sci., Vol. 10, pp. 783 – 788.

Wood, E. F. and Szollosi-Nagy, A. (1978) : An adaptive algorithm for analyzing short-term structual and parameter changes in hydrologic prediction models, Water Resourc. Res., Vol. 14, No. 4, pp. 577 – 581.

Vrugt, J. A. and Robinson B. A. (2007) : Treatment of uncertainty using ensemble methods: comparison of sequential data assimilation and Bayesian model averaging, Water Resourc. Res., Vol. 43, W01411.

Real-time Flood Forecasting Incorporating Kalman Filter with Bias Correction

Takahiro SAYAMA, Yasuto TACHIKAWA*, Tomoyuki HIRATA** and Kaoru TAKARA

*Graduate School of Urban and Environment Engineering, Kyoto University
**Nomura Research Institute

Synopsis

As a data assimilation method of a distributed rainfall-runoff flood prediction system and river discharge observation data, this study proposes a filtering method of Muskingum Cunge river routing models. Application of the conventional Kalman filter to river routing models is not effective because hillslope models have significant impact on the flood predictions. In order to overcome this problem, the proposed method estimates biases induced by rainfall-runoff models as well as state variables in the filtering algorithm, so that the filtering has effect on the predictions with lead time of few hours. Demonstrated flood predictions at the Katsura river basin show that the bias correction improves the accuracy.

Keywords:distributed rainfall-runoff model, Muskingum Cunge, flood prediction, data assimilation