

統計学的に評価した空間不確定量の地下水流動モデルへの適用

浜口 俊雄

要 旨

本研究では、地下水流動モデルを対象とし、必ず発生する空間不確定量を地盤統計学的に評価した解析手法を提案した。透水係数の空間分布が異なる複数の仮想流域モデルを用いて、地下水位のモデル解析解・本提案モデル解・真値を三者比較したところ、本提案モデル解がモデル解析解よりも常に真値に近くなり、モデル誤差の大きい場合ほど本提案手法の効果が現れることが確認できた。以上より本提案手法の有効性を示すことができた。

キーワード：地下水、空間不確定性、地盤統計学、モデル誤差、偏り

1. 序論

実際の物理現象に対して、決定論的な物理モデルを用いて把握しようとした場合、そこには大なり小なり不確定的誤差が生じる。この誤差は、例えばモデル構造やそれに関連した諸項目(物性分布、物性の方向性、境界条件、初期条件など)に含まれる不確定量により発生しやすい。不確定的誤差は実現象の機構を捉えるモデル化の産物であり、文字通り不確かな素因が強いため、決定論的表記が困難なものである。故に、モデルで考察する場合、再現値(モデル解析値)が真値(観測/計測値とほぼ等価)に対して或る程度の誤差範囲にあって挙動傾向が合致していればモデルに再現性があると見なし、妥当性を伺い知ることができる。さらにその再現計算の精度向上を試みる際、モデル構造の単純化が施されていたり、モデル完成度が不十分である等といった場合であれば、適正に同定したモデルパラメータを使用するなどキャリブレーションを行って、その誤差を小さくすることも可能であるが、そこを重要視したところで小さくするには限界があり、所望の誤差範囲に収まらないこともある。そういった状況では、シミュレーションの面で大まかな現象把握に用いる目的ならば支障はなくとも、細部の現象の再現性を目的とするならば適切なモデルにはなり得ない。そこで本研究では、その様々な不確定的誤差による再現誤差を地

盤統計的に評価することで統計モデル化し、それと物理モデルとの複合化によって不確定量を含んだモデルやその再現値が得られるようにすることを目的とする。ここでは、地下水流動を対象として、モデル誤差を補完する物理・統計複合モデルを提案し、そのモデルの導入効果を検討する。

2. 空間不確定量

2.1 システム誤差

解析時に生じる誤差は

- [a] **現象モデル化誤差** … 理論/経験に基づく決定論的モデルと真の構造との差異に当たる誤差。
- [b] **数値モデル化誤差** … モデルの離散的処理や物性分布の離散化・区域化(zoning)など、数値モデル化で生じる誤差。
- [c] **モデル既定条件誤差** … 既定条件(境界条件・初期条件)の設定と真の構造との差異に当たる誤差。
- [d] **システム処理誤差** … 線形近似・有効桁数などによる数値の打ち切り/丸めといった数値処理で生じる誤差や繰返し収束計算などのアルゴリズム処理に起因した計算構造システムで生じる誤差。

に挙げた4つに大別できる(浜口ら, 1997a)。物理モデルに対する解析機構が数値計算システムとして扱われるの

であれば、上記の4つの誤差を総称して「システム誤差」と呼び、本稿では $\eta(z, t)$ と表記する。ただし、 z は空間座標、 t は時間を表す。

こうした再現計算時に現れる $\eta(z, t)$ は時空間的に不確定的なため、「時空間不確定量」とも呼ばれる。 $\eta(z, t)$ は、名称の如く不確定的であるが故に、純粋な物理的アプローチからのモデル化は難しい。よって、この不確定量をモデル評価する場合は統計的アプローチによるモデル化が最善と考えられる。ただし $\eta(z, t)$ は、上述の項目[a]~[d]を見てもわかるとおり、全くランダムな格好でなく、時間や空間が関わる物理過程のモデル化が引き金となって発生しているので、時空間を考慮した統計的アプローチが適切と考えられる。そこで、本研究では地盤統計学的アプローチの採用を提唱する。ところで、項目[d]を除くシステム誤差を「モデル誤差」と称するが、以降は、特にモデル誤差に着目して統計モデル評価の検討を進める。

2.2 空間不確定的偏りの導入

真値 $\phi(z, t)$ をトレンド成分 $m(z, t)$ とランダム成分 $w(z, t)$ に分解して考えると、

$$\phi(z, t) = m(z, t) + w(z, t) \quad (1)$$

となる。いま空間不確定量 $\eta(z, t)$ が時間に独立であると仮定することで、表記を $\eta(z)$ と改める。ところで真値 $\phi(z, t)$ は、決定論的モデル解析解である時空間確定値 $f(z, t)$ と空間不確定量 $\eta(z)$ との和でもあるから、

$$\phi(z, t) = f(z, t) + \eta(z) \quad (2)$$

と書ける。そこで $f(z, t)$ 、 $\eta(z)$ 、 $m(z, t)$ 、 $w(z, t)$ の関係を考えてみる。決定論的な解析モデルが単独で真のトレンド構造を網羅しているような状況は稀であり、解析モデルと真のトレンド構造は異なると考えておけば一般性を失わない。したがって $f(z, t)$ と $m(z, t)$ が等しくないを見なして考える。裏を返せば、式(1),(2)からシステム誤差 $\eta(z)$ とランダム成分 $w(z)$ の関係も一般的に等価ではないと考えることになる。そこで筆者は $\eta(z)$ に空間不確定的偏りと言うべき定数成分 \hat{b} の存在を考え、 $\eta(z)$ をその定数 \hat{b} と時間に依存しないランダム成分 $w(z)$ の和で構成させた結果、

$$\eta(z) = \hat{b} + w(z) \quad (3)$$

を得る。この \hat{b} は空間不確定量の一部であるがランダム成分ではなく、むしろ全体における不確定的定数傾向を表すものとなっている。したがって、 $m(z, t)$ は

$$m(z, t) = f(z, t) + \hat{b} \quad (4)$$

という式を満たすものであると解釈できる。

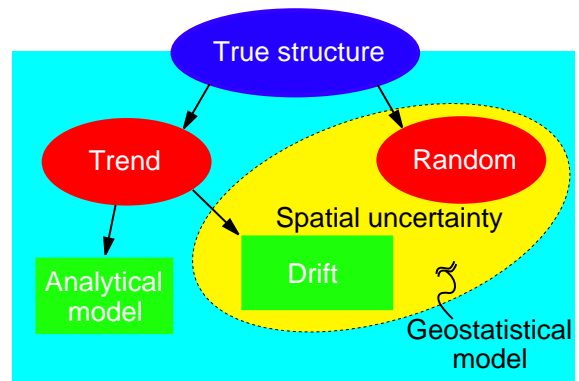


Fig.1 Schematic view of the proposed model

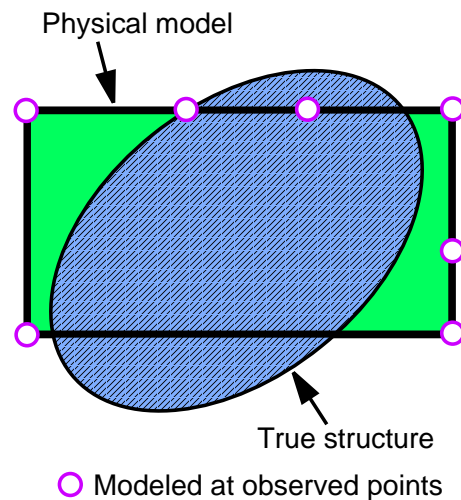


Fig.2 Schematic view of physical modeling

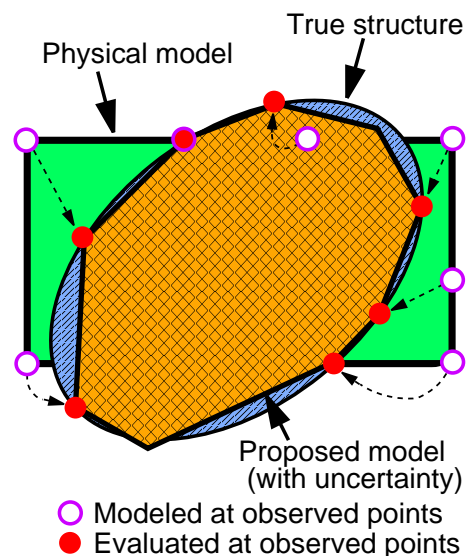


Fig.3 Schematic view of proposed modeling

2.3 空間不確定量の評価

$\eta(z)$ が物理過程のモデル化に起因して発生した空間不確定量(システム誤差)であるので、地盤統計モデル

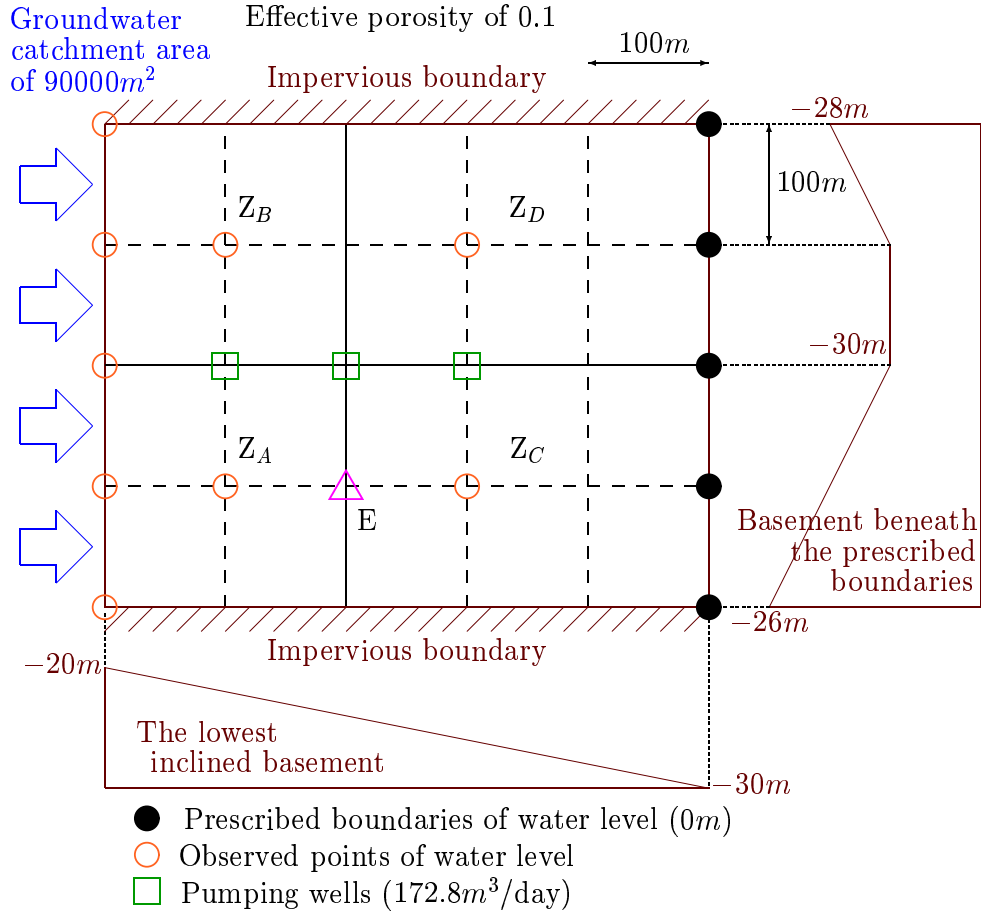


Fig.4 Hypothetical groundwater basin

(例えば Wackernagel, 1995) によって評価することを提案する。ここまでの内容を表した模式図が Fig.1 である。その外枠が本提案の物理・統計複合モデルとなっている。なお \hat{b} は地盤統計学の分野で言う「ドリフト」に相当するものと見なせる。

本提案モデルの概念を Fig.2, 3 に示す。Fig.2 は、真の構造(丸みを帯びた図形)と、真の挙動再現を目的として当てはめた物理モデル(四角形)の関係を簡潔に描いたものである。○印は観測点上のモデル解析解(再現値)を表している。与えた物理モデルでモデル誤差最小となった最善のモデル状態が同図の四角形であるとおく。本研究は Fig.3 に示す提案モデル(多角形)を導入することで、真の構造にもっと近づくように誤差を埋めることを提唱するものである。ここに、●印は観測点上の提案モデル値である。図にあるように全観測点上のモデル解析解は真値を再現できるようになるため、物理モデルのみの場合よりも地盤統計モデルを加味した分だけ残差が小さくなっていくと期待できる。

次に数学的に検討した結果を述べる。kriging を採用した地盤統計モデルによる $\eta(z)$ の評価結果は

$$\eta(z) = \hat{b} + \mathbf{k}(z)^T \mathbf{K}^{-1} \hat{\mathbf{w}} \quad (5)$$

ただし、

$$\hat{b} = \frac{\alpha^T \mathbf{K}^{-1} \phi}{\alpha^T \mathbf{K}^{-1} \alpha} \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{w}} = \phi - \alpha \frac{\alpha^T \mathbf{K}^{-1} \phi}{\alpha^T \mathbf{K}^{-1} \alpha} \quad (7)$$

となる(浜口ら, 1999; 浜口, 2001a; 浜口, 2001b)。ここに、観測数を n 個として、 α : 成分が全て 1 の定数ベクトル $[n \times 1]$, ϕ : 観測値ベクトル $[n \times 1]$, $\mathbf{k}(z)$: 求める推定値 z と各観測点間の共分散ベクトル $[n \times 1]$, \mathbf{K} : 各観測点間の $w(z)$ の共分散行列 $[n \times n]$ である。以上より推定値 $\phi^*(z, t)$ は

$$\phi^*(z, t) = f(z, t) + \hat{b} + \mathbf{k}(z)^T \mathbf{K}^{-1} \hat{\mathbf{w}} \quad (8)$$

のように求まる。

3. 地下水解析への適用

3.1 数値実験の設定

本研究ではFig.4のような仮想地下水流域を想定した。この流域の不透水基盤面は、流れ断面が谷状になっており、流下方向に一定傾斜している。図中の○印は水位観測位置(9点)、●印は水位境界(5点)、□印は揚水位置(3点)である。また図の左端(地下水集水域)と上方(地表面)から地下水涵養があるものと設定して、有限要素法(FEM)を用いた非定常平面不圧地下水モデルの数値実験を試みた。同モデルの基礎方程式は

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ k(h-s) \frac{\partial h}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ k(h-s) \frac{\partial h}{\partial y} \right\} + \varepsilon \quad (9)$$

で表される。ここに λ , h , k , s , ε は順に有効間隙率, 地下水位, 透水係数, 基盤高, 地下水涵養量を表す。なお, 当実験では全域で $\lambda=0.1$ かつ等方性を想定する。ここで有限要素法による解の導出に関しては付録1を参照されたい。実験では透水係数同定後のモデル解析で得られた地下水位解と観測値との残差から地盤統計学的に水位の空間不確定量を評価し, それをモデル解析解に補完して得られる水位解の算出を目的とする。ここでは透水係数分布に関するシステム誤差(モデル誤差)に言及する。

3.2 モデル最適化

決定論的モデルを最適化するため, そのモデルパラメータ(透水係数)の最尤同定値が必要と思われる。本稿の場合, 空間不確定量を取り除いた状態でモデルパラメータを求めねばならないという問題がある。そこで, 逆解析手法には拡張Kalmanフィルタ有限要素法(例えば長谷川ら, 1994; 浜口ら, 1997b)を採用する。同手法はシステム誤差 $w(z)$ をフィルタしながら, 観測値を使ってパラメータを同定する処理機構であるため, 空間不確定量を評価した本提案モデルに対する逆解析としては極めて理に適った方策である。同手法のアルゴリズムをFig.5に示す。いま状態変数 x_t を式(10)のように与える。

$$x_t = \begin{Bmatrix} h_t^1 \\ L_t \end{Bmatrix} \quad (10)$$

ここに, h_t^1 は未知水位量, $L_t (= \log k_t)$ は常用対数透水係数量を表す。同フィルタで用いる状態遷移行列 F_t の算出方法については付録2を参照されたい。

3.3 透水係数分布が2区域の数値実験

真の透水係数分布は, Fig.4の Z_A と Z_B , Z_C と Z_D がそれぞれ同一透水係数区域になったものとして, 順に

Table 1 Identification results of permeabilities in the cases 1 and 2

Zone	Z_A	Z_B	Z_C	Z_D
Case 1	208.4886			
Case 2	150.0000		300.0000	

Unit: m/day

150(m/day), 300(m/day)を設定した。まずこの設定に対して順解析を行い, Fig.4で示した9点の観測点での模擬観測値を作成した。透水係数分布に関するモデル化は, **Case 1**: 領域 $Z_A \sim Z_D$ 全て一様均質な透水域 **Case 2**: 領域 Z_A+Z_B , Z_C+Z_D が各々一様均質な透水域 という2つの区域化設定を検討対象とした。

次に先述の逆解析手法を用いて, 各Case毎に透水係数を同定した。Table 1にその最尤同定結果を示す。

同表から明らかに**Case 2**は真値を同定できており, 空間不確定量も任意の観測点・任意時刻で全て0となることから, 解析モデルだけで正確な評価が出来たと言える。その他の**Case 1**では, 先述の同定値からモデル解析解(水位)を算出し, 観測点上での残差を求めた。その後, 空間不確定量を地盤統計学的に評価して観測点での任意時刻の水位残差が0になる推定を行った。この手法によって, 観測点以外の各節点の残差もモデル解析解に比べて小さくなるのが期待できる。

一例として, Fig.4のE点における水位変動をFig.6に示す。ここに, 実線は真の変動, ×印はモデル解析解, ○印は本提案モデル解を表す。同図より, 任意の時間においても, ○印の方が×印よりも実線に近いことが見て取れる。これは決定論的モデルによる解析解に空間不確定量を評価し加味することで再現性の精度が向上していることがわかる。両記号の差異が空間不確定補完量となる。これより不確定量を評価した効果の程が確認できる。

さらに, 推定誤差をFig.7に示す。実線や記号はFig.6で示すものと同一であり, エラーバーは取り得る推定誤差範囲を示す。ただし, 誤差範囲があまりに小さくて○印と重なる程度である部分については考察に支障がないとの判断から見やすくするために省略している。その部分に関する誤差範囲は高々○印の大きさ程度の範囲であると見なして十分である。同図から, **Case 1**の結果は推定誤差の範囲も比較的小さく, また, 真値もその範囲内ないしはその近くであることから比較的高精度に推定できていることが分かる。

他の節点上でも同様の傾向が見られ, 本設定での数値実験では, 本提案手法の有効性が確認できる。

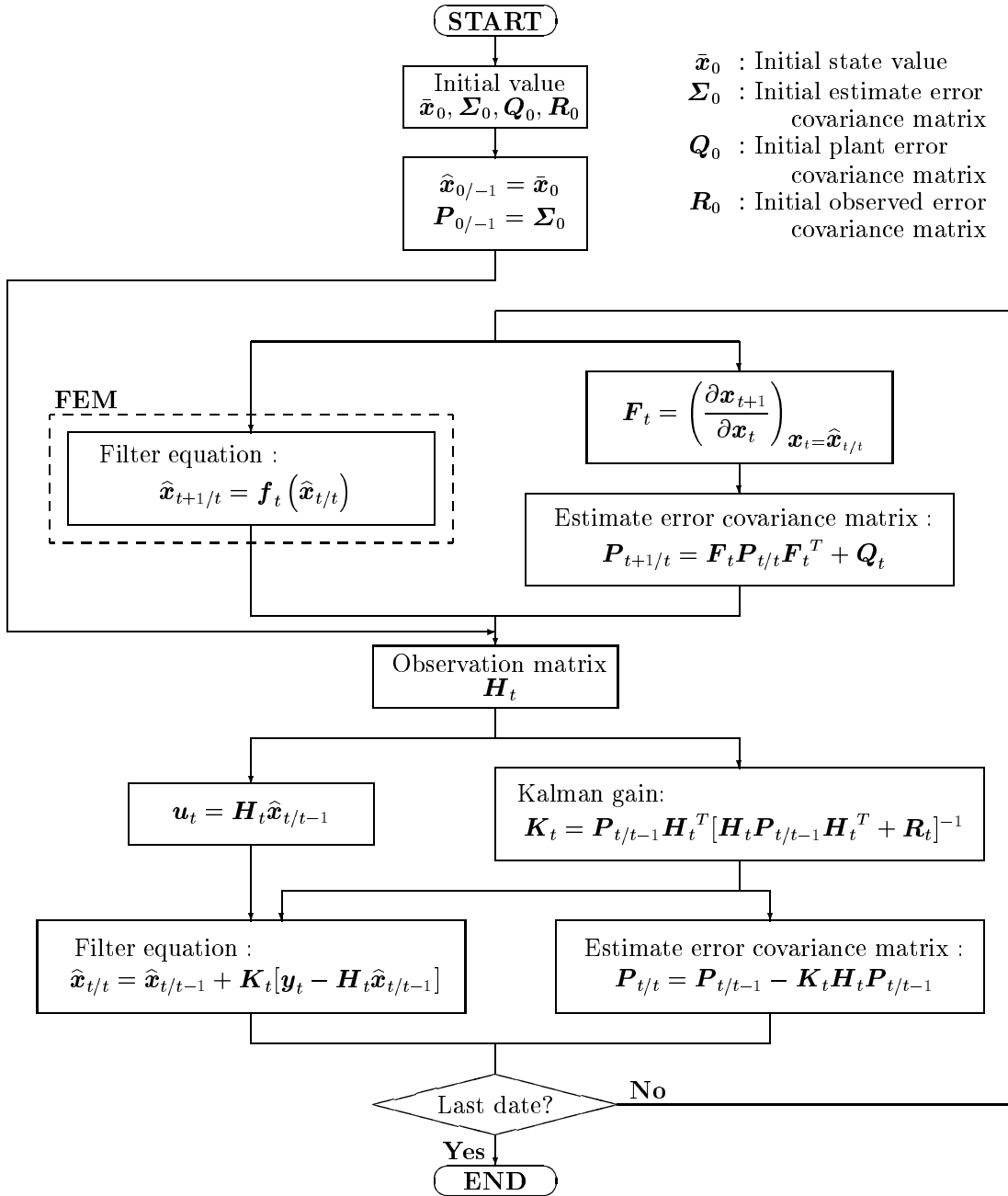


Fig.5 Extended Kalman filter-FEM

Table 2 Identification results of permeabilities in the cases 3, 4 and 5

Zone	Z_A	Z_B	Z_C	Z_D
Case 3	214.9693			
Case 4	138.4683		374.3410	
Case 5	100.0000	200.0000	300.0000	400.0000

Unit: m/day

3.4 透水係数分布が4区域の数値実験

真の透水係数分布は、Fig.4の Z_A , Z_B , Z_C , Z_D を各々同一透水係数の区域として、順に100(m/day), 200(m/day), 300(m/day), 400(m/day)を設定した。ま

ず前節と同様にして模擬観測値を作成した。透水係数分布に関するモデル化は、

Case 3 : 領域 $Z_A \sim Z_D$ 全て均質な透水域

Case 4 : 領域 Z_A+Z_B , Z_C+Z_D が各々均質な透水域

Case 5 : 領域 Z_A , Z_B , Z_C , Z_D が個々に均質な透水域という3つの区域化設定を検討対象とした。

続いて前節同様に各Case毎に透水係数を同定した。

Table 2にその最尤同定結果を記す。同表から明らかに

Case 5は真値を同定できており、**Case 2**と同じく解析モデルだけで正確な評価が出来たと言える。その他の**Case 3, 4**では、同定値からモデル解析解(水位)を算出

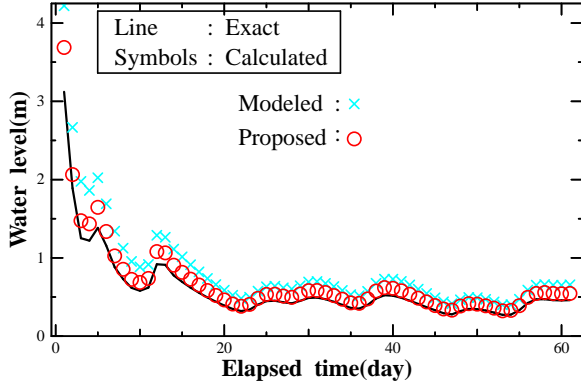


Fig.6 Variation in water levels at the point E in the case 1

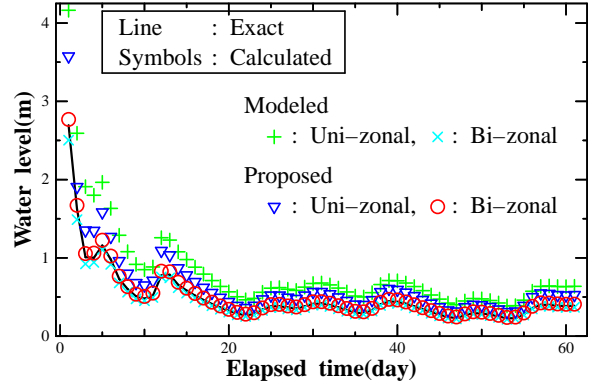


Fig.8 Variation in water levels at the point E in the case 3 and 4

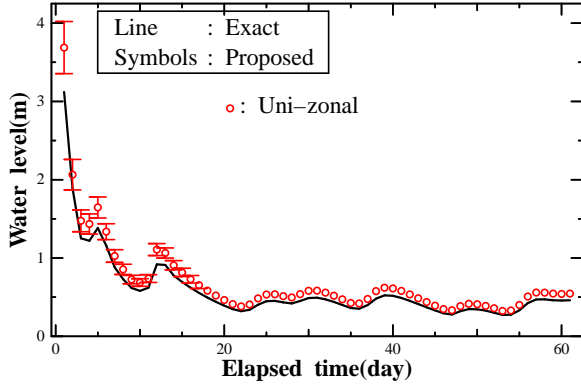


Fig.7 Estimation error ranges at point E in the case 1

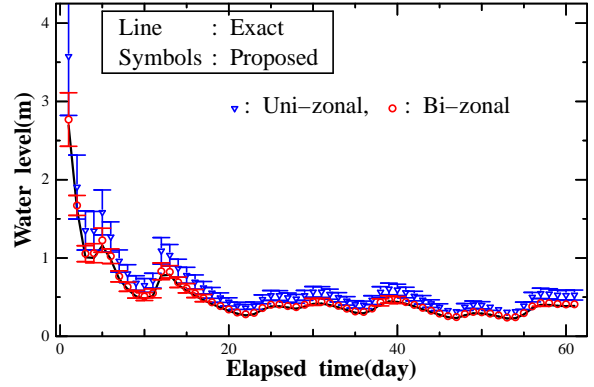


Fig.9 Estimation error ranges at point E in the case 3 and 4

し、観測点上での残差を求めた。この後の地盤統計学的の評価を加味した水位推定も **Case 1** と同様の過程で行った。

ここでも **Case 1** と同様に、一例として Fig.4 の E 点における水位変動を Fig.8 に示す。ここに、実線は真の変動、+、× 両印は順に **Case 3** と **Case 4** でのモデル解析解、▽、○ 両印は順に **Case 3** と **Case 4** での本提案モデル解を表す。同図より、任意の時間においても、+印の方が▽印よりも実線に近く、○印の方が×印よりもさらに実線に近いことが見て取れる。+と▽、×と○の差異が各々の分布における空間不確定量を評価した効果の程、すなわち、空間不確定性的補完量として把握できる。これは **Case 1** での結果と同様で、再現性の精度向上が確認できる。特にモデル誤差の大きな **Case 3** の方が顕著に現れている。また真値との比較においては **Case 4** の評価結果の方が **Case 3** よりも再現性が高いと言える。

さらに、推定誤差を Fig.9 に示す。実線や記号は Fig.8 で示すものと同一であり、エラーバーは取り得る推定誤差範囲を表す。ただし、誤差範囲があまりに小さくて○印と重なる程度である部分については **Case 1** と同様の理由で省略している。その部分に関する誤差範囲は高々各記号程度の範囲であると見なして参照いただきたい。同図

から、**Case 3** の結果は Fig.7 と比較しても分かる通り、**Case 1** の結果と似た結果となっている。**Case 4** の結果は推定誤差の狭い範囲に真値が全て収まっていることから全時間で高精度に推定できていることが伺える。

Case 3 と **Case 4** でも **Case 1** と同様に、他の節点上でも同様の傾向が見られ、これらの実験から本研究の提案手法の有効性が示している。

3.5 空間不確定性的偏りの導入効果

ここでは、本提案モデルにおいて一般性を失わせないために導入した空間不確定性的偏り \hat{b} の効果について検証してみる。

筆者は変動係数 δ_t について着目した。変動係数は

$$\delta_t = \frac{\sigma_t}{\hat{b}} \quad (11)$$

で表される。ここに σ_t は $w(z)$ の標準偏差である。 δ_t は変動の相対的比較が可能となる指標であるが、

- \hat{b} が 0 を取り得る可能性のあること
- 注目すべき \hat{b} が δ_t の分母にあるために \hat{b} の変動傾向と δ_t の変動傾向が逆に現れること
- 上記の理由で \hat{b} が 0 に近づくとつれて δ_t が極端に大

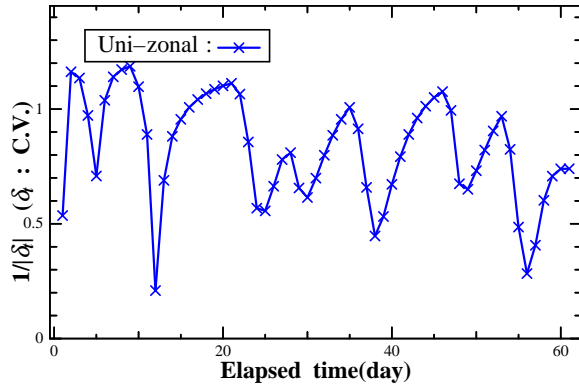


Fig.10 Effects on bias of spatial uncertainty in the case 1

きくため、0付近の \hat{b} における δ_t を他と比較するには不向きであること

といった理由から、考察には都合のよい δ_t の逆数を考えることとした。またその際 \hat{b} の符号は定め得ないため、その絶対値を考える。よって、

$$\frac{1}{|\delta_t|} = \frac{|\hat{b}|}{\sigma_t} \quad (12)$$

の値を、空間不確定的偏り \hat{b} の導入効果の検討対象値とする。この値は \hat{b} が分子にあるので、値が大きい程、 \hat{b} への依存度が高い状態であると言える。

Case 1における $1/|\delta_t|$ の変遷をFig.10に、**Case 3**と**Case 4**における $1/|\delta_t|$ の変遷をFig.11に示す。ここにFig.11で×印の付いた実線が**Case 3**の、○印の付いた実線が**Case 4**の $1/|\delta_t|$ をそれぞれ表す。まずFig.10においてはFig.6を参照すると、或る時間のモデル解析解と真値との差異(モデル誤差)がその時間近辺の差異に比べて小さくなった場合に $1/|\delta_t|$ は大きくなり、逆に大きくなった場合に $1/|\delta_t|$ は小さくなっていることが分かる。これは、特に解析後半部において σ_t があまり変化していないにも関わらず、 $1/|\delta_t|$ は何度も大きく変化し、その変動幅も差異の大きな解析前半部とあまり変わっていないことから、 \hat{b} が $1/|\delta_t|$ の変化に支配的一因であることが分かる。よって、相対的に大きな値の時間帯は \hat{b} の導入効果が大きく出ており、相対的に小さな値の時間帯は \hat{b} の導入効果が小さく出ていると言える。

次にFig.11を見ると、**Case 3**と**Case 4**ではともにFig.10と同様の変遷傾向が見受けられる。**Case 1**と**Case 3**は特に酷似しているが、値が全体的に0.3程度小さくなっており、また変動幅も**Case 3**は**Case 4**に比べてモデル誤差が大きく、それだけ \hat{b} への依存度も大きくなったと思われる。理に適う。以上から提案モデルの導入効果は十分現れていると言える。

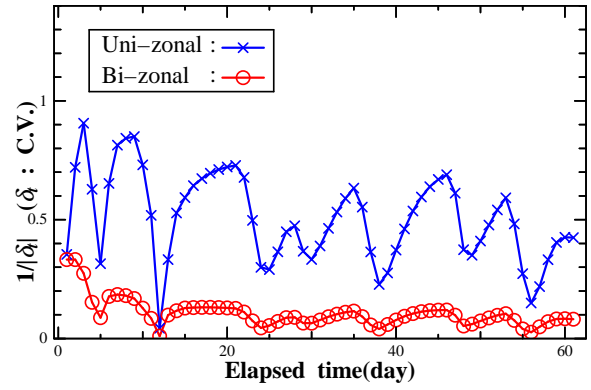


Fig.11 Effects on bias of spatial uncertainty in the case 3 and 4

4. 結論

本研究では、地下水流動モデルに対して、モデル誤差を補完するような物理・統計複合モデルを導入することで、地下水位の提案モデル解はモデル解析解よりも残差が小さくなり、真の地下水位変動に近い表現を推定できると分かった。今後は実問題に適用して、実用面での展開を行う予定である。

付録1

平面不圧地下水モデルの有限要素方程式と解

本来 *Boussinesq* 方程式 (9) を用いるが、理解を容易にするため、ここではあえて線形化 *Boussinesq* 方程式 (A1-2) を用いて説明する。非線形な場合の式展開は、式 (A1-3) の段階で、後述の d_0 に相当する $h-s$ が、

$$h-s = (1-\theta)h_t + \theta h_{t+1} - s \quad (A1-1)$$

となることに注意して、下記にある線形化の場合の式展開を参照しながら h_{t+1} を繰返し計算で収束させてやれば導出できる。なお θ に関しては後述の式展開中に説明している。さて、線形化 *Boussinesq* 方程式は

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} = kd_0 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + \varepsilon \quad (A1-2)$$

$$\text{境界条件: } h = \hat{h} \quad \text{on } S_h$$

$$q = -\hat{q} = kd_0 \frac{\partial h}{\partial n} \quad \text{on } S_q$$

(ただし、 S_h : 水位境界、 S_q : 流量境界)

である。ここに d_0 は平均水深を表す。領域 V において積分した式 (A1-2) の弱形式を求め、これを形状関数 ϕ により空間的に離散化し、時間差分パラメータ θ ($0 \leq \theta \leq 1$) を用いて \tilde{h} を式 (A1-1) にあるような時間展開を施し、 $\partial \tilde{h} / \partial t$ に関して時間差分を行うと、式 (A1-3)~(A1-8) を得る。

$$A h_{t+1} = B h_t + \omega_{t+\theta} \quad (A1-3)$$

ここに,

$$A = \frac{1}{\Delta t} M + \theta S \quad (A1-4)$$

$$B = \frac{1}{\Delta t} M - (1 - \theta) S \quad (A1-5)$$

$$M = \int_V \lambda \phi^T \phi dV \quad (A1-6)$$

$$S = \int_V k d_0 \frac{\partial \phi^T}{\partial z_i} \frac{\partial \phi}{\partial z_i} dV \quad (A1-7)$$

$$\omega_{t+\theta} = - \int_{S_q} \hat{q} \phi^T dS + \int_V \varepsilon \phi^T dV \quad (A1-8)$$

いま未知量解を求める上で、時刻 $t+1$ における水位ベクトル \mathbf{h}_{t+1} の成分を、時刻 $t+1$ での未知量 (添字 1) と境界既知量 (添字 2) に分割したかたちに分割して考察する。

$$\mathbf{h}_{t+1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{h}_{t+1}^1 \\ \mathbf{h}_{t+1}^2 \end{Bmatrix} \quad (A1-9)$$

これに呼応して、同様に

$$\mathbf{h}_t = \begin{Bmatrix} \mathbf{h}_t^1 \\ \mathbf{h}_t^2 \end{Bmatrix} \quad (A1-10)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (A1-11)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (A1-12)$$

$$\omega_{t+\theta} = \begin{Bmatrix} \omega_{t+\theta}^1 \\ \omega_{t+\theta}^2 \end{Bmatrix} \quad (A1-13)$$

となる。ただし、

$$A_{ij} = \frac{1}{\Delta t} M_{ij} + \theta S_{ij} \quad (A1-14)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{\Delta t} M_{ij} - (1 - \theta) S_{ij} \quad (A1-15)$$

($i, j = 1, 2$)

式 (A1-3) を部分行列表記に書き改めれば、

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{h}_{t+1}^1 \\ \mathbf{h}_{t+1}^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{h}_t^1 \\ \mathbf{h}_t^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega_{t+\theta}^1 \\ \omega_{t+\theta}^2 \end{Bmatrix} \quad (A1-16)$$

となる。 \mathbf{h}_t^2 と $\omega_{t+\theta}^1$ が既知量、 $\omega_{t+\theta}^2$ が未知量であることに留意して、式 (A1-16) を \mathbf{h}_{t+1}^1 について解くと、

$$\mathbf{h}_{t+1}^1 = A_{11}^{-1} [B_{11} \mathbf{h}_t^1 + B_{12} \mathbf{h}_t^2 - A_{12} \mathbf{h}_{t+1}^2 + \omega_{t+\theta}^1] \quad (A1-17)$$

を得る。

付録 2

拡張 Kalman フィルタ FEM の状態遷移行列

付録 1 の結果を参照して状態遷移行列 F_t を求めると、以下の 4 つの感度行列から構成される。

$$F_t = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{h}_{t+1}^1}{\partial \mathbf{h}_t^1} \right)_{\mathbf{h}_t^1 = \hat{\mathbf{h}}_t^1} & \left(\frac{\partial \mathbf{h}_{t+1}^1}{\partial \mathbf{L}_t} \right)_{\mathbf{L}_t = \hat{\mathbf{L}}_t} \\ \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{t+1}}{\partial \mathbf{h}_t^1} \right)_{\mathbf{h}_t^1 = \hat{\mathbf{h}}_t^1} & \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{t+1}}{\partial \mathbf{L}_t} \right)_{\mathbf{L}_t = \hat{\mathbf{L}}_t} \end{bmatrix} \quad (A2-1)$$

$$= \begin{bmatrix} J_{hh} & J_{hL} \\ J_{Lh} & J_{LL} \end{bmatrix} \quad (A2-2)$$

ここに、

$$J_{hh} = A_{11}^{-1} B_{11} \quad (A2-3)$$

$$J_{hL} = A_{11}^{-1} \left[\frac{\partial B_{11}}{\partial \mathbf{L}_t} \hat{\mathbf{h}}_{t/t}^1 + \frac{\partial B_{12}}{\partial \mathbf{L}_t} \mathbf{h}_t^2 - \frac{\partial A_{11}}{\partial \mathbf{L}_t} \hat{\mathbf{h}}_{t+1/t}^1 - \frac{\partial A_{12}}{\partial \mathbf{L}_t} \mathbf{h}_{t+1}^2 \right] \quad (A2-4)$$

$$J_{Lh} = \mathbf{0} \quad (A2-5)$$

$$J_{LL} = I_n \quad (A2-6)$$

となる。この J_{hL} は以下のようにして求める。 J_{hL} を列ベクトルに分解し、

$$J_{hL} = [j_{1c}^h, \dots, j_{nc}^h] \mathbf{x}_{t/t} = \hat{\mathbf{x}}_{t/t} \quad (A2-7)$$

第 c 列ベクトルを考えると、

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial L_t^c} = \theta \frac{\partial S_{ij}}{\partial L_t^c} = \theta (\ln 10) S_{ij}^c \quad (A2-8)$$

$$\text{ここに } S_{ij}^c = \frac{\partial S_{ij}}{\partial k_t^c} \text{ とする}$$

同様にすれば、

$$\frac{\partial B_{ij}}{\partial L_t^c} = -(1 - \theta) (\ln 10) S_{ij}^c \quad (A2-9)$$

よって

$$j_c^h = -(\ln 10) A_{11}^{-1} \left[(1 - \theta) \left\{ S_{11}^{\alpha} \hat{\mathbf{h}}_{t/t}^1 + S_{12}^{\alpha} \mathbf{h}_t^2 \right\} + \theta \left\{ S_{11}^c \hat{\mathbf{h}}_{t+1/t}^1 + S_{12}^c \mathbf{h}_{t+1}^2 \right\} \right] \quad (A2-10)$$

参考文献

- 長谷川高士・村上 章・浜口俊雄 (1994): 拡張 Kalman フィルタによる地下水モデルのパラメータ同定と地下水位変動量評価による揚水量決定, 土木学会論文集, No.505/III-29.
- 浜口俊雄 (2001a): 地下水流況推定における地盤統計学的アプローチの効用, 京都大学防災研究所年報, 第 44 号 B-2, pp.455-463.
- 浜口俊雄 (2001b): 不良な計測情報下での Cokriging による地下水位分布の最適推定と相互相関的補間効果, 水工学論文集, 第 45 巻, pp.343-348.
- 浜口俊雄・長谷川高士・青山威康 (1997a): 平面地下水モデルにおいて既定境界の不確定性を統計的に評価した

- 逆解析手法：地盤工学における逆解析の適用と施工管理に関するシンポジウム発表論文集, pp.111-114.
- 浜口俊雄・長谷川高士・青山威康 (1999) : 地下水貯留域の最適推定において多変量統計モデルから生じる相互相関的補間効果, 第44回地盤工学シンポジウム発表論文集, pp.19-24.
- 浜口俊雄・村上 章・長谷川高士 (1997b) : 平面解析で移動境界を考慮した地下水モデルと逆解析への応用, 土木学会論文集, No.568/III-39, pp.133-145.
- Parzen, E., K. Tanabe and G. Kitagawa Editors (1998) : Selected paper of Hirotugu Akaike, Springer, pp.215-222.
- Chilés, J, and P. Delfiner (1999) : Geostatistics Modeling Spatial Uncertainty, *John Wiley & Sons, Inc.*.
- Cressie, N. (1991) : Statistics for spatial data, *A Wiley-Interscience Publication*, New York, pp.105-209.
- Gooovaerts, P. (1997) : Geostatistics, for Natural Resources Evaluation, *Oxford University Press, Inc.*.
- Journel, A. G. and Ch. J. Huijbregts (1978) : Mining geostatistics, *Academic Press, Inc.*, pp.324-343.
- Wackernagel, H. (1995) : Multivariate Geostatistics, *Springer*.

Statistical Evaluation of Spatial Uncertainty and Its Application to Groundwater Flow Model

Toshio HAMAGUCHI

Synopsis

This study proposes a numerical strategy of analytical and geostatistical modeling for unsteady groundwater flow with spatial uncertainty. A hypothetical aquifer is designed to get sufficient complexity to allow testing various aspects of the modeling problem of spatial uncertainty. The true aquifer is divided into some constant-permeability zones. The changes in the water levels to be calibrated are assessed in the modeled aquifers with heterogeneity. The scheme to geostatistically model spatial uncertainty including modeling errors is herein attempted. All the results to be discussed can be seen that the proposed estimates are successfully in best agreement with the true ones.

Keywords : groundwater, spatial uncertainty, geostatistics, modeling error, bias