京都大学防災研究所年報
Annuals of Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ.,

季節性を持つ水文時系列に基づくPDS法とAMS法の比較

西岡昌秋・寶　馨

要　旨

本研究は，わが国における豪雨と洪水を対象に，これらの発生過程が季節性を持つことを示す。このような水文事象に対して，毎年最大値系列（AMS）を抽出し，一般化極値（GEV）分布により確率水文量を推定する場合，過大な確率水文量が求められることを示している。ただし，水文事象の一年間の平均生起個数が4個程度以上であるか，AMS 解析と PDS 解析による確率水文量が一致する場合に，GEV 分布は精度の良い確率水文量を与える。

キーワード: 閾値超過系列，毎年最大値系列，モンテカルロシミュレーション，生起時間間隔，季節性

1. はじめに

水文統計解析において扱う標本の考え方は大きく分けて，極値系列（extreme value series）と閾値超過系列（partial duration series，PDS または peaks-over-threshold，POT）とに分類される。わが国の治水計画でよく用いられてきたのは，極値系列のうちの毎年最大値系列（annual maximum series，AMS）である。

閾値超過系列（PDS）を対象とした水文統計解析に関して，海外において比較的多くの研究事例がある（例えば，Cunnane，1973，1979; Rosbjerg，1985; Rasmussen，2001）。わが国においても，近年では，毎年最大値系列（AMS）に加え，閾値超過系列（PDS）を対象とした水文統計解析がおこなわれるようになっている（星，1998; 田中・宝，2001）。PDS による水文統計解析を行う場合，閾値の設定方法が問題となる。これについては，1年間の事象の平均生起数が1.65以上あれば，指数分布による PDS 解析が Gumbel 分布による AMS 解析よりも精度が高いとされている(Cunnane，1973，1989)。これは，事象の発生過程として定常ポアソン過程を仮定し，PDS の事象の大きさが指数分布にしたがう場合，AMS が Gumbel 分布にしたがうという理論にもとづいている。

本論文では，

①これまでのように，AMS を水文統計解析に用いられることが妥当かどうか

②AMS の代わりに PDS を用いた方が良いとしても，そのときの AMS と PDS の Poisson 過程に基づく理論的関係をそのまま用いてよいのかどうか

という点について，数値実験により明らかにすることを目的としている。

ここでは，わが国の洪水や豪雨のような水文事象の発生過程は，季節性を持ち，上記のポアソン過程とは異なることを示し，このような事象に対する PDS 法と AMS 法との比較検討を行った。

この結果，わが国の豪雨や洪水といった明確な季節性をもつ水文事象に対して，単純に AMS を抽出し，一般化極値（GEV）分布をあてはめて確率水文量を推定する場合，過大な確率水文量が求められる可能性が高いことを示した。

まず，洪水ピークと豪雨の生起時間間隔を統計解析した。これらの発生過程は，季節性を持ち，GEV 分布導出で仮定

されるポアソン過程とは異なることを示す。

さらに，実測の生起時間間隔と水文量のそれぞれにあてはめた確率分布にもとづくモンテカルロシミュレーションによる数値実験を行った。この実験では，発生させた PDS から AMS を抽出し，PDS と AMS に関する統計解析を行い，確率水文量や確率分布の母数の比較を行った。このとき，生起時間間隔の分布として，季節性がないポアソン過程にしたがう指数分布と，季節性を考慮した経験分布を考えることとした。

以下本論文において示されるように，わが国の豪雨や洪水といった明確な季節性をもつ水文事象に対して，単純に AMS を抽出し，一般化極値（GEV）分布をあてはめて確率水文量を推定する場合，過大な確率水文量が求められる可能性が高い。ただし，閾値を超過する事象の一年間の平均生起個数が4個程度以上であるか，もしくは AMS 法と PDS 法による確率水文量の結果が一致する場合には，AMS に一般化極値（GEV）分布を適用しても精度の良い確率水文量が得られる可能性が高い。

2. 閾値超過系列に関する統計理論

2.1 生起時間間隔

閾値超過系列の発生に対しては，その事象が生起する間隔を再現する必要がある。この生起間隔が期間 t を超えない確率を $P\{T<t\}=F(t)$ とする。希な事象の生起間隔と生起個数については，ポアソン過程が成立するといわれている。単位時間内における事象の発生率を λ としたとき，ある期間 t における事象の生起個数 N は，平均値を λt とするポアソン分布

$$P\{N=n\}=\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \tag{1}$$

にしたがい，事象の生起間隔は，平均値を $1/\lambda$ とする指数分布

$$F\{T<t\}=1-e^{-\lambda t} \tag{2}$$

にしたがうというものである(伊藤・亀田，1977)。

2.2 事象の大きさの確率分布

(1) PDS と AMS との関係

ポアソン過程にしたがう事象において発生率を λ とすると，期間 t に生起する事象の生起個数の期待値は λt となる。これを水文事象にあてはめて考える。期間として一年をとると，一年間の事象の生起数の期待値は λ となり，一年間に生起する水文事象の生起個数の分布は，(1)式において $t=1$ としたポアソン分布にしたがう。また，閾値

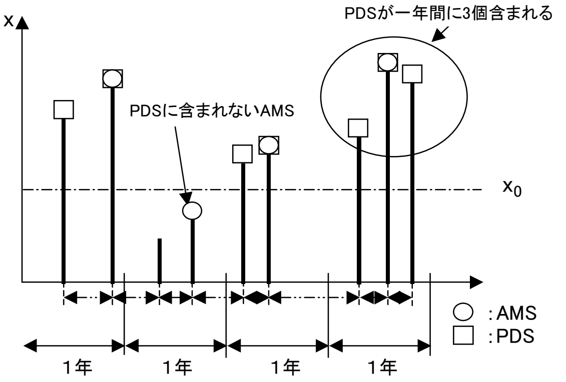

Fig. 1 Illustration of PDS and AMS

x_0 を超え，$X\le x$ となる事象の確率を $G(x)=P\{X\le x\,|\,x\ge x_0\}$ とすると，この事象の発生率 λ_* は,

$$\lambda_*=\lambda\{1-G(x)\} \tag{3}$$

となり，生起個数 N'の確率分布も発生率 λ_* のポアソン分布にしたがい,

$$P\{N'=n\}=\frac{\lambda_*^{\,n}e^{-\lambda_*}}{n!} \tag{4}$$

となる。

次に，この事象に対応する毎年最大値の確率分布(cdf)を $F_a(x)=P\{X\le x\}$ とする。$F_a(x)$ は一年間を通じて x を超えない確率を表す。したがって，(4)式において $n=0$ とおけば，(3)式を考慮して

$$F_a(x)=\exp\{-\lambda(1-G(x))\} \tag{5}$$

が得られる(Stedinger, et al., 1993;星, 1998)。

AMS の再現期間を T_a，PDS より得られる再現期間を T_p とすると，T_a と T_p との関係は,

$$\frac{1}{T_a}=1-\exp\left[-\lambda\{1-G(x)\}\right]=1-\exp\left(-\frac{1}{T_p}\right) \tag{6}$$

で表される。

(2) 事象の大きさの確率分布

PDS の水文量には一般化パレート（GP）分布，AMS の水文量には一般化極値（GEV）分布が適合すると言われている。ある閾値を超過する事象の水文量に対して GP 分布を仮定し，その発生過程がポアソン過程にしたがう場

合，その系列から得られる AMS は GEV 分布にしたがうことが理論的に **2.2(1)** の関係から求められる(Stedinger, et al., 1993)。すなわち，一般化パレート分布

$$G(x)=1-\left[1-\frac{\kappa}{a}\left(x-x_0\right)\right]^{\frac{1}{\kappa}} \qquad (7)$$

ただし、

$\kappa<0,\ x_0\le x<\infty$

$\kappa>0,\ x_0\le x\le x_0+a/\kappa$

κ：形状母数、a：尺度母数、x_0：位置母数

を(5)式に代入すると，GEV 分布が求められる。

$$\begin{aligned} F_a(x)&=\exp\left[-\lambda\left\{1-\frac{\kappa}{a}\left(x-x_0\right)\right\}^{\frac{1}{\kappa}}\right] \\ &=\exp\left[-\left\{1-\frac{\kappa}{a_a}\left(x-c\right)\right\}^{\frac{1}{\kappa}}\right] \end{aligned} \qquad (8)$$

ただし、

$\kappa<0,\ \mathrm{c}+a_a/\kappa<x$

$\kappa>0,\ x<c+a_a/\kappa$

κ：形状母数、a_a：尺度母数、c：位置母数

GP 分布と GEV 分布の母数の関係は，

$$\left.\begin{aligned} a_a&=a\lambda^{-\kappa} \\ c&=x_0+\frac{a}{\kappa}(1-\lambda^{-\kappa}) \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

3. 資料の概要と統計解析

3.1 使用する水文量

本研究では，治水計画における水文統計解析を想定し，河川流域における流域平均2日雨量と洪水ピーク流量を用いる。

(1) 流域平均2日雨量

わが国のある河川の基準地点上流域の43年間にわたる流域平均2日雨量（日単位雨量を用いてティーセン法により算定）を用いた。

流域内の代表的な３つの観測所を選定し，日雨量が100㎜を超える降雨事象もしくは時間雨量が30㎜ を超える一連の降雨事象を収集した。PDS 解析を行うため，年間第2位以下の降雨が含まれるように，1年間に少なくとも5つの事象を収集することにより合計485事象を収集した。その際，降雨が3日以上連続する事象の場合，その中で最大の2日雨量を採用した。すなわち，Δd≧1.0となるようにした。

これらの雨量資料は，ある観測所における時間単位の雨量が大きいものの，観測所地点の総雨量や流域平均単位での総雨量でみた場合には，非常に小さい降雨となる場合がある。このため，これらの雨量資料から，ある閾値以上の降雨資料を抽出した。閾値は，PDS 法と AMS 法との比較検討を実施する観点から，流域平均2日雨量の毎年最大値資料の最小値とした。このようにすると，PDS に含まれない AMS がないこととなる。この結果，合計174個の降雨資料を得た。

(2) ピーク流量

ピーク流量は，湿潤温帯地域のある河川流域における雨量データを用いて，流出モデルにより変換した流量模擬系列から求めた。

雨量データは以下のようにして収集した。流域内の降雨分布を代表すると考えられる雨量観測所を選定し，これらの観測所における年間第3位までの雨量資料を46年間収集した。さらに，水系内の基準地点における流量観測資料や水位資料を参考に，年間第3位程度までの流量を生起させる降雨事象を包含しているかチェックした。年間第3位程度までを選定するのは，PDS 解析を行うため，年間第2位以下の洪水も含まれるようにするためである。

流出モデルは貯留関数法を使用した。水系内基準地点において選定した複数の洪水を対象に，基準地点の観測流量と計算流量とを比較し，モデル定数の妥当性を検証した。このモデル定数は全ての事象に対して一定値を与えた。流出解析から得られる流量時系列の最大値をピーク流量として抽出した。

3.2 統計的特性

流域平均 2 日雨量およびピーク流量の資料に関する統計的特性をそれぞれ Table1，Table2，および Table3，Table4 に示す.

ある事象 i の生起日を d_i，その次の事象 $i+1$ の生起日を d_{i+1} とした場合，時間間隔 $\Delta d_i=d_{i+1}-d_i$ を“生起時間間隔”と呼ぶ。ここで用いた流域平均 2 日雨量の場合は，降雨の始まりと終わりの時刻が分かっているので，その中央時刻を d_i とした。Fig.2 は流域平均 2 日雨量の生起時間間隔を月別に集計し，その頻度分布を示したものである。Fig.3 はその平均値，最大値および最小値を示している。Fig.3 より 11 月の最小値は 120 日，最大値は 260 日であることから，11 月に生起した豪雨の次の豪雨は，そ

Table 1　Characteristics of 2-day areal rainfall

	平均	標準偏差	ひずみ係数
雨量(PDS)	177.8 mm	79.9 mm	1.689
雨量(AMS)	259.7 mm	99.6 mm	0.811
生起間隔	89 日	104 日	1.328
年間生起数	4.05 個	—	—

Table 3　Characteristics of peak discharge

	平均	標準偏差	ひずみ係数
ピーク流量(PDS)	1655 m^3/s	1077 m^3/s	0.987
ピーク流量(AMS)	2385 m^3/s	1127 m^3/s	0.433
生起間隔	141 日	134 日	0.634
年間生起数	2.54 個		

Table 2　Number of events (2-day areal rainfall)

月	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月
個数	0	1	2	14	7	27
月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
個数	24	45	39	10	5	0

Table 4　Number of events (Peak discharge)

月	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月
個数	0	1	2	8	4	27
月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
個数	24	20	23	7	0	1

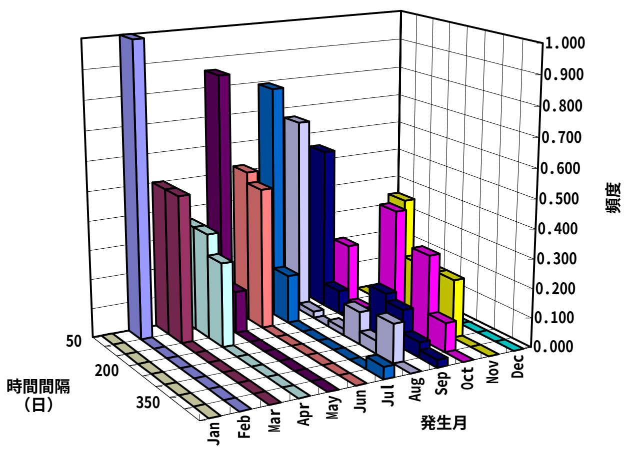

Fig. 2 Frequency of inter event time (2-day areal rainfall)

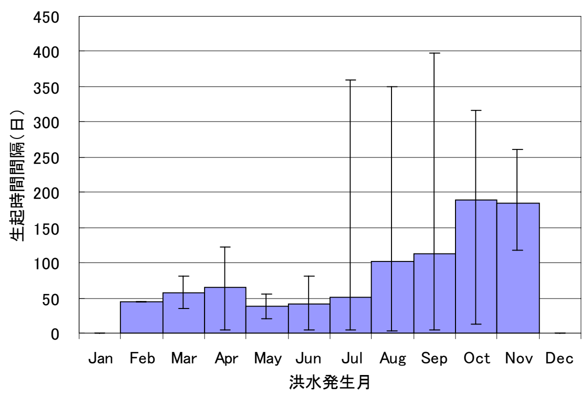

Fig. 3 Average and range of inter event time (2-day areal rainfall)

の年の 12 月および翌年の 1 月には生起しない。

Fig.4 はピーク流量の生起時間間隔を月別に集計し，その頻度分布を示したものである。Fig.5 はその平均値，最大値および最小値を示している。10 月の最大値は 260 日，最小値は 110 日であり，10 月に生起した洪水の次の洪水は，その年の 11 月，12 月には生起しない。

3.3　生起時間間隔の確率分布

流域平均 2 日雨量とピーク流量の生起時間間隔Δd の頻度分布に指数分布をあてはめた結果を Fig.6 および Fig.7 に示す。次の水文事象までの生起時間間隔であることから，ここに図示する事象の数は，(もとの事象数-1) 個となる。流域平均 2 日雨量，ピーク流量ともに，300 日付近で極大値をもつような分布形となっており，単調減少の指数分布とはならないことがわかる。なお，**3.1** で述べたようにΔd≧1.0 であるが，ここではΔd≧0 としている。0≦Δd≦1 となるのは，流域平均 2 日雨量で約 1%，ピーク流量で約 0.6%である。

3.4　生起時間間隔と水文量の大きさの相関関係

(1)　流域平均 2 日雨量

生起時間間隔と流域平均 2 日雨量との相関係数を Fig.8 に示す。図中の棒グラフは相関係数（値は左側の縦軸で表示）を，◆のプロットはデータの個数（値は右側の縦軸で表示）を示す。横軸は事象の発生した月を表す。ただし，最も左側に示す値は 173 個全てのデータに関する結果を示す。173 個全体での相関係数は-0.005 であり，流域平均 2 日雨量の大きさと生起時間間隔との間に相関はないと言

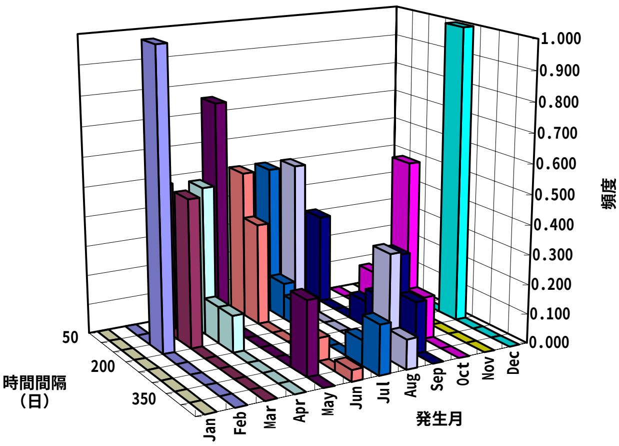

Fig. 4 Frequency of inter event time (Peak discharge)

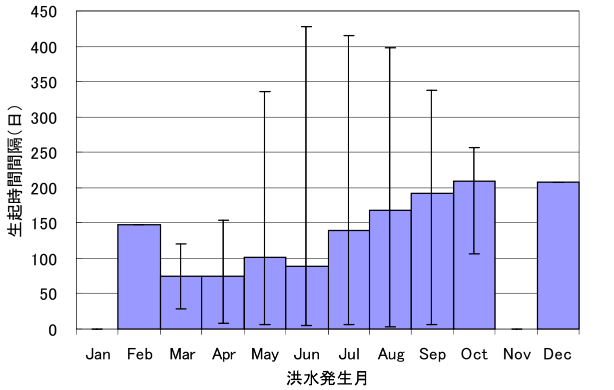

Fig. 5 Average and range of inter event time (Peak discharge)

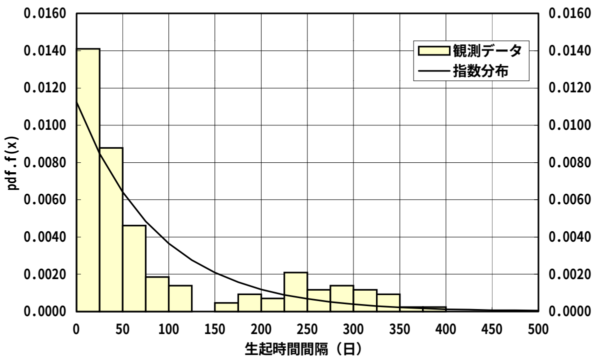

Fig. 6 Frequency of inter event time on 2-day areal rainfall (Empirical and exponential distributions)

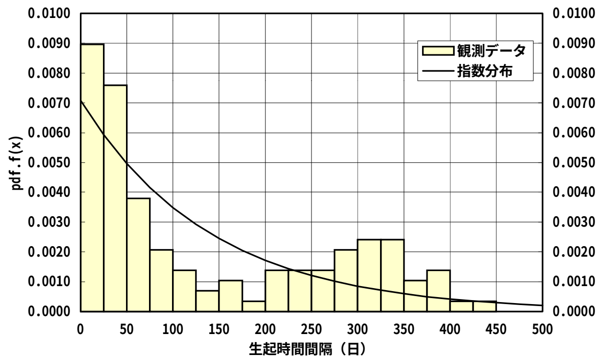

Fig. 7 Frequency of inter event time on peak discharge (Empirical and exponential distributions)

える。

(2) ピーク流量

ピーク流量について同様に整理した結果を Fig.9 に示す。全洪水(116 個)の相関係数は 0.291 であり，流域平均 2 日雨量よりもわずかに相関係数は大きいが，生起時間間隔とピーク流量との相関関係は無いと言える。月別にみた場合には，5 月に発生した洪水の生起時間間隔とピーク流量との相関係数が 0.967 とみかけ上高い値を示すが，このときのデータ個数は 4 個である。

3.5 水文量の確率分布

(1) PDS 解析

収集した 174 個の流域平均 2 日雨量を標本として，3 母数の一般化パレート分布（GP 分布）を，L 積率法によりあてはめた。適合度の指標である SLSC(standard least-squares criterion)は，0.03 以下の場合，標本と理論値との適合度が良いことが知られている（宝,1998）。Table5 に示すように，GP 分布は SLSC が 0.018 であることから，標本との適合度が高いことが分かる。

ピーク流量についても GP 分布の SLSC は 0.017 であり適合度が高い（Table6 参照)。

(2) AMS 解析

流域平均 2 日雨量の PDS から AMS（43 個）を抽出し，水文統計解析を行った(Table7)。GEV（一般化極値）分布（L 積率法）の適合度 SLSC は 0.028 であり，標本との適合度が良好であることを示している。

ピーク流量についても同様に GEV 分布の SLSC は 0.024 であり，標本との適合度が良好である（Table8)。

4. モンテカルロシミュレーションによる PDS 法と AMS 法の比較

4.1 生起時間間隔の分布モデル

ポアソン過程にしたがって発生する事象の生起時間間隔は，指数分布にしたがうことが知られている。しかし，ここで用いた豪雨や洪水の事象の生起時間間隔は，30 日以下と 300 日付近で極大値をもち，単調減少の指数分布と

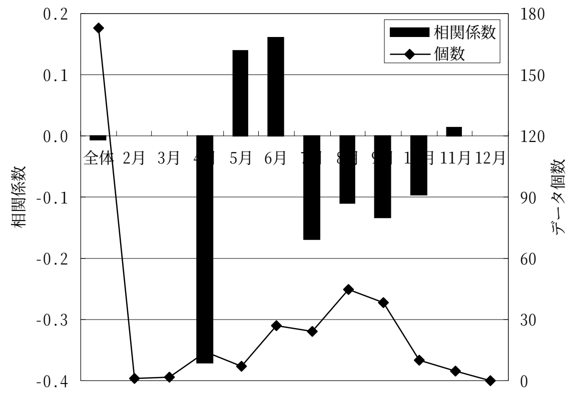

Fig. 8 Correlation coefficient between inter event time and 2-day areal rainfall
◆: Number of data calculated correlation coeffcient

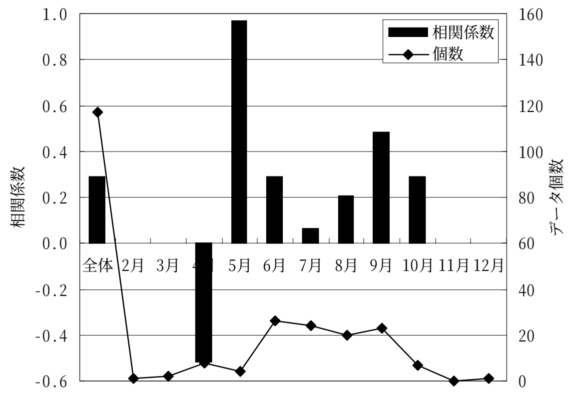

Fig. 9 Correlation coefficient between inter event time and peak discharge
◆ : Number of data calculated correlation coeffcient

Table 5 Goodness of fit (SLSC) and 100-year quantile estimated for several distributions: PDS (2-day areal rainfall)

分布形	*母数推定法*	*SLSC*	*確率水文量 (T=100 年)*
GP	L 積率法	0.018	560.2 mm
対数ピアソンIII型	対数標本の積率法	0.031	665.7 mm
対数正規	石原・高瀬法	0.045	585.4 mm
対数正規	岩井法	0.039	611.7 mm

Table 6 Goodness of fit (SLSC) and 100-year quantile estimated for several distributions: PDS (Peak discharge)

分布形	*母数推定法*	*SLSC*	*確率水文量 (T=100 年)*
GP	L 積率法	0.017	5120 m^3/s
対数ピアソンIII型	対数標本の積率法	0.016	6182 m^3/s
対数正規	石原・高瀬法	0.028	5775 m^3/s
対数正規	岩井法	0.020	7416 m^3/s

Table 7 Goodness of fit (SLSC) and 100-year quantile estimated for several distributions: AMS (2-day areal rainfall)

分布形	*母数推定法*	*SLSC*	*確率水文量 (T=100 年)*
GEV	L 積率	0.028	549.3 mm
Gumbel	L 積率	0.023	580.5 mm
対数ピアソンIII型	対数標本の積率法	0.023	551.2 mm
対数正規	石原・高瀬法	0.025	563.2 mm
対数正規	岩井法	0.022	543.8 mm

Table 8 Goodness of fit (SLSC) and 100-year quantile estimated for several distributions: AMS (Peak discharge)

分布形	*母数推定法*	*SLSC*	*確率水文量 (T=100 年)*
GEV	L 積率	0.024	5645 m^3/s
Gumbel	L 積率	0.032	6141 m^3/s
対数ピアソンIII型	対数標本の積率法	0.024	5763 m^3/s
対数正規	石原・高瀬法	0.027	5438 m^3/s
対数正規	岩井法	0.027	6201 m^3/s

はならない。さらに，豪雨では 12 月から 3 月に，洪水では 11 月から 3 月に，それぞれの事象の生起数が，他の月と比較して少ないという季節性が見られる。本研究では，生起時間間隔の季節性に着目し，以下の３つの生起時間間隔の分布を考え比較する。

①指数分布にしたがうと考える（季節性がない）
②季節性を配慮した経験分布にしたがうと考える
③経験分布にしたがうと考えるが季節性を考えない

4.2 水文量の大きさの確率分布モデル

水文量の大きさの確率分布は，PDS に対しては GP 分布で良好に表されることがわかった。このことから，水文量の大きさは，それぞれの資料から推定される母数をもつ GP 分布にしたがって発生させる。また，生起時間間隔と事象の大きさとの間には相関関係がみられないことから独立であると仮定し，それぞれの分布にしたがうように独立に発生させる。

4.3　シミュレーションの方法

シミュレーションは以下のように行った。

(1)　生起時間間隔が指数分布にしたがう場合

手順 1)

生起時間間隔の分布（$F_t(t)$ と表す），すなわち指数分布にしたがう乱数を（n-1）個発生させ，生起時間間隔 t を算定する。

手順 2)

事象の大きさの分布（$F_p(x_p)$ と表す），すなわち GP 分布にしたがう乱数を n 個発生させる。

手順 3)

手順 1)から手順 2)の手順を m 回繰り返して行う。

(2)　季節性を配慮した生起時間間隔の経験分布にしたがう場合

生起時間間隔が季節性をもつと考える場合には，月別に生起時間間隔の分布が異なる。このため，初期値，すなわち 1 個目の事象の生起日により，それ以降の事象の生起日が異なる。したがって，初期値を月別の発生個数の経験分布にしたがって発生させる必要がある。シミュレーションの手順は以下のとおりである。

手順 1)

一様乱数を 1 個発生させ, 豪雨の場合は Table2 に, 洪水の場合は Table4 に示した月別の事象の生起個数の累積分布に応じた日数（t_0 日）を求める。計算開始日から数えて t_0 日後を 1 個目の事象の生起日とする。

手順 2)

生起時間間隔の月別の経験分布にしたがうように, 2 個目以降の事象を発生させる。ただし，事象の生起日が標本の経験分布では発生していない月（例えば流域平均 2 日雨量では 1 月と 12 月）になる場合，その乱数は用いないこととした。これは，事象の発生しない月に生起する場合，その次の事象を発生させることができないためである。

手順 3)

事象の大きさの発生方法は **1)** の手順 2)と同様である。

手順 4)

手順 1)から手順 3)を m 回繰り返す。

(3)　生起時間間隔が季節性を考慮しない経験分布にしたがう場合

上記の **1)** 手順 1)における指数分布のかわりに生起時間間隔の経験分布を採用し，これにしたがうような乱数を発生させる。あとの手順は，**1)** と同様である。

乱数の発生組数は m=100 とし，乱数の発生個数は n=10000 とした。

ただし，**1)** と **2)** については，流域平均 2 日雨量に対しては n=400，ピーク流量に対しては n=200 のケースを追加した。1 年間に生起する事象の平均は，流域平均 2 日雨量の場合 4.05 個，ピーク流量の場合 2.54 個である。したがって，発生させた 10000 個のデータから抽出した毎年最大値系列の大きさが，流域平均 2 日雨量の場合は 100 個程度，ピーク流量の場合は 80 個程度得られる。これらのケースは，毎年最大値系列を用いた水文統計解析を行う場合，今日我々が得ることのできる標本の大きさを想定したものである。

ある分布にしたがう乱数を発生させる場合，一様乱数を発生させて得られた 0 から 1 までの乱数系列から，所定の確率分布の逆関数を用いて変換する。本研究では，一様乱数の発生は，富士通科学用サブルーチンライブラリ SSL Ⅱの，Lehmer による合同法による手法を採用したサブルーチン「RANU2」を用いた。

5.　統計解析の結果

5.1　記号の説明

本章では，水文量等の記号を以下のように記述する。

$x_{o,pds}$　：収集した PDS の観測データ系列

$x_{o,ams}$　：$x_{o,pds}$ から抽出した AMS

$x_{r,pds}$　：GP 分布にしたがう乱数を発生させて得られた PDS

$x_{r,ams}$　：$x_{r,pds}$ から抽出した AMS

$GP_{o,pds}$　：$x_{o,pds}$ にあてはめた GP 分布

$GP_{r,pds}$　：$x_{r,pds}$ にあてはめた GP 分布

$GEV_{o,ams}$　：$x_{o,ams}$ にあてはめた GEV 分布

$GEV_{r,ams}$　：$x_{r,ams}$ にあてはめた GEV 分布

$\hat{x}_{r,100}$　：$x_{r,ams}$ のプロッティングポジションから内挿により推定した 100 年確率水文量

$\hat{x}_{g,100}$　：$x_{r,ams}$ にあてはめた GEV 分布より推定される 100 年確率水文量

5.2　流域平均 2 日雨量

(1)　確率紙での比較

(a)　生起時間間隔が指数分布にしたがう場合

Fig.10 は 174 個の $x_{o,pds}$ (+)と，$x_{o,pds}$ にあてはめた GP 分布 $GP_{o,pds}$ (実線)および 10000 個の乱数を発生させて得られた $x_{r,pds}$ (○)とを Gumbel 確率紙にプロットした結果である。プロッティングポジションは Cunnane 公式

$$F_i = \frac{i-\alpha}{n+1-\alpha} \tag{10}$$

ただし、
n : データ数
i : 資料を小さい方から並べたときの順位
$\alpha = 0.4$

を用いた。$GP_{o,pds}$ と $x_{r,pds}$ とはよく一致しており，乱数発生の精度が高いことを示している。

発生させた 10000 個の $x_{r,pds}$ から抽出した AMS $x_{r,ams}$ に GEV 分布を適合させた。m=1 の結果を Gumbel 確率紙にプロットした（Fig.11 参照）。10000 個の PDS に対して，乱数の発生組により AMS の個数は異なる。100 組の PDS に対して AMS は平均的には 2439 個得られた。Fig.9 に示した m=1 の場合は 2429 個である。$x_{o,ams}$ (+), $x_{r,ams}$ (○), $GEV_{o,ams}$ (破線), $GEV_{r,ams}$ (実線)の４つの分布は全般的に一致している。

Fig.6 に示したように，生起時間間隔を指数分布にしたがい発生させた場合，次の豪雨までの時間間隔が 1 年以上となる場合が約 2%ある。生起時間間隔が 1 年以上となる場合に，豪雨が生起しない年が発生する。この豪雨の発生していない年の毎年最大値を 0mm とした。生起時間間

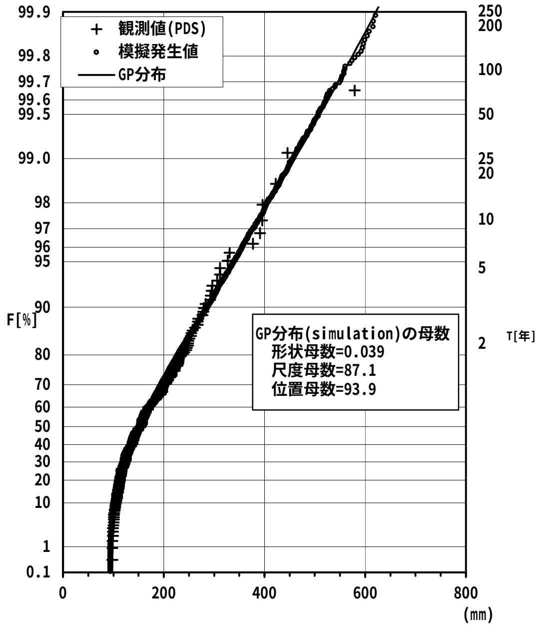

Fig. 10 Observed PDS and GP distribution applied to it (10000 PDS generated by the distribution are also shown)

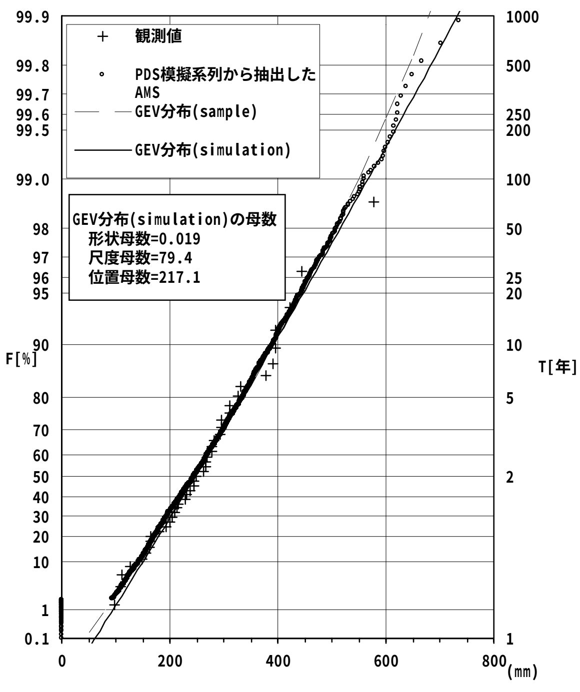

Fig. 11 An example of GEV distributions applied to observed AMS and extracted AMS from generated PDS (Inter event time: exponential distribution)

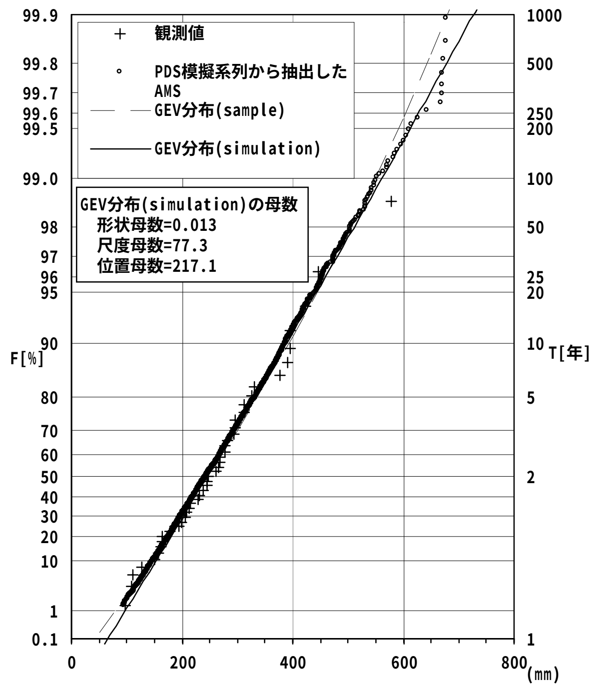

Fig. 12 An example of GEV distributions applied to observed AMS and extracted AMS from generated PDS (Inter event time: empirical distribution considering seasonality)

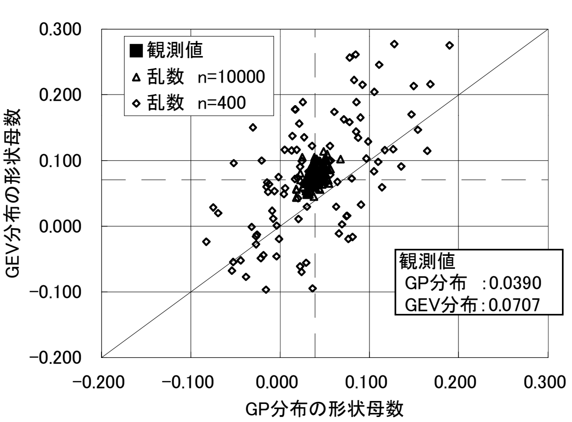

Fig. 13 Relationship between shape parameters (Inter event time: exponential distribution)

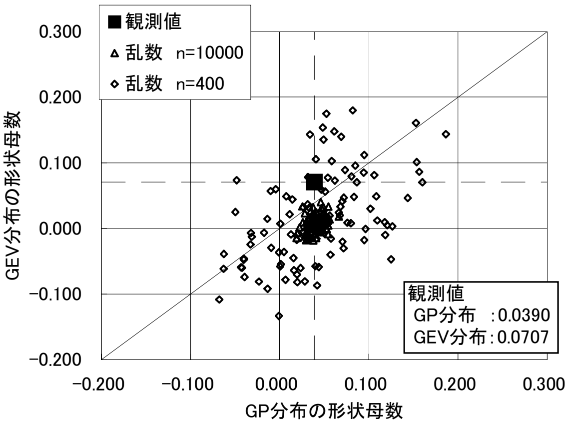

Fig. 14 Relationship between shape parameters (Inter event time: empirical distribution considering seasonality)

隔が 1 年以上となり豪雨が発生しない年は，100 回のシミュレーションで 2400 年程度のうち平均的に 40 年存在した。$x_{r,ams}$ が 0mm となるところでの $x_{o,ams}$ との一致度は低い。

(b)　生起時間間隔が季節性を考慮した経験分布にしたがう場合

$x_{r,pds}$ から抽出したAMS $x_{r,ams}$ にGEV分布を適合させ，m=1 の場合を Gumbel 確率紙にプロットした結果を Fig.12 に示す。10000 個の PDS に対して AMS は平均的には 2463 個程度得られた。この方法によると，a)とは異なり，生起時間間隔が一年以上になることがないため，豪雨は毎年発生する。また，$x_{o,ams}$，$x_{r,ams}$，$GEV_{o,ams}$，$GEV_{r,ams}$ の４つの分布は，$x_{o,ams}$ の最大値である 578mm 以下の範囲でよく一致している。

(2)　形状母数の比較

生起時間間隔が指数分布にしたがう場合について，$GP_{r,pds}$ の形状母数と $GEV_{r,ams}$ の形状母数の比較を行った結果を Fig.13 に示す。$GP_{o,pds}$ の形状母数 $\kappa = 0.0390$，$GEV_{o,ams}$ の形状母数 $\kappa = 0.0707$ である。GP 分布および GEV 分布のいずれの形状母数についても，標本での推定値（破線の交点）を中心として，その周りに分布している。n=400 の場合には，n=10000 の場合と比較してばらつきの度合いが大きい。GEV 分布は，形状母数が正のとき上側有界であり，標本から推定した $GEV_{o,ams}$ のように，Gumbel 確率紙上では下に凸の形状となる。n=400 のとき，$GEV_{r,ams}$ の形状母数が負となる場合がある。このことは，$GEV_{r,ams}$ の形状が $GEV_{o,ams}$ とは異なる場合があることを示している。

生起時間間隔が，季節性を考慮した経験分布にしたがう場合について，同様に比較した結果を Fig.14 に示す。前述とは異なり，シミュレーションによる形状母数は標本での推定値を中心としたばらつきを示さない。これは，ポアソン過程にもとづく理論的背景を持つ GEV 分布に対して，シミュレーションでは季節性を考慮しているため，ポアソン過程とは異なる生起時間間隔の発生を行っているためである。

(3)　100 年確率水文量の比較

生起時間間隔が指数分布にしたがう場合について，$GP_{r,pds}$ および $GEV_{r,ams}$ のそれぞれの 100 年確率水文量を推定した結果を Fig.15 に示す。標本からの推定値は，$GP_{o,pds}$ が 560.2mm，$GEV_{o,pds}$ が 549.3mm であり，GP 分布の方が大きい値を推定している。n=10000 のときは，標本からの推定値の周りに分布しており，GP 分布の推定値が GEV 分布の推定値よりも大きい。n=400 のときは，推定値の範囲が大きくなるとともに，GEV 分布の方が大きい推定値となる場合がある。

生起時間間隔が，季節性を考慮した経験分布にしたがう場合の結果を Fig.16 に示す。n=10000 の場合，GP 分布による確率水文量と GEV 分布による確率水文量はほぼ一致している。n=400 の場合は，推定値の変動幅が大きくなり，GEV 分布の推定値が GP 分布の推定値よりも大きくなる場合があるのは，前記と同様である。

5.3　ピーク流量

(1)　確率紙での比較

(a)　生起時間間隔が指数分布にしたがう場合

流域平均雨量と同様に，$GP_{o,pds}$ と模擬発生値 $x_{r,pds}$ とはよく一致しており，乱数発生の精度が高いことを示している（Fig.17 参照）。

m=1 の場合の，$x_{r,ams}$ および $GEV_{r,ams}$ の分布を Fig.18

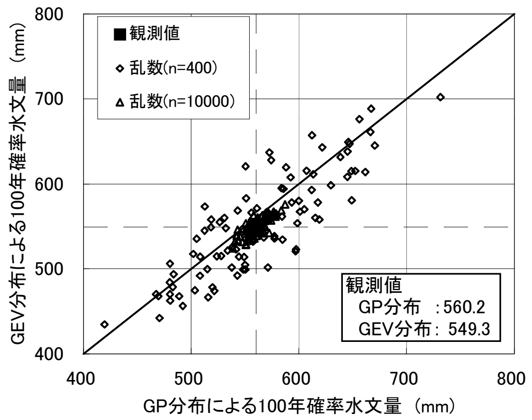

Fig. 15 100-year quantiles estimated by GP and GEV distributions (Inter event time: exponential distribution)

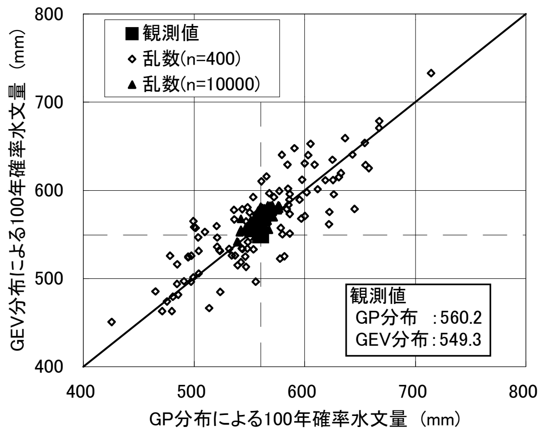

Fig. 16 100-year quantiles estimated by GP and GEV distributions (Inter event time: empirical distribution considering seasonality)

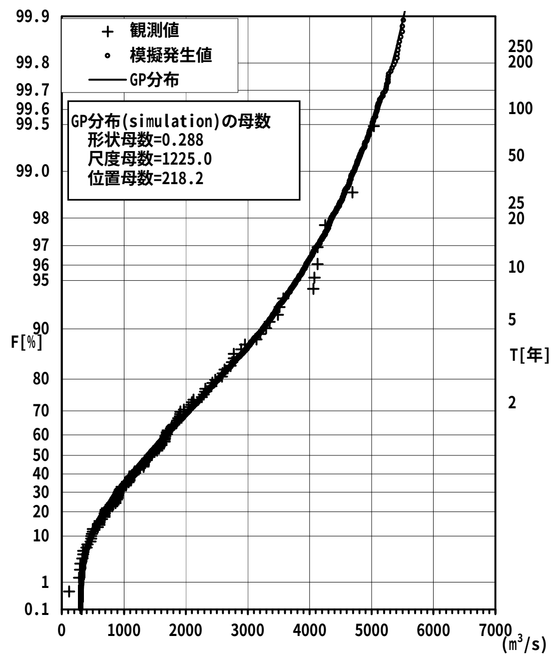

Fig. 17 Observed PDS and GP distribution applied to it (10000 PDS generated by the distribution are also shown)

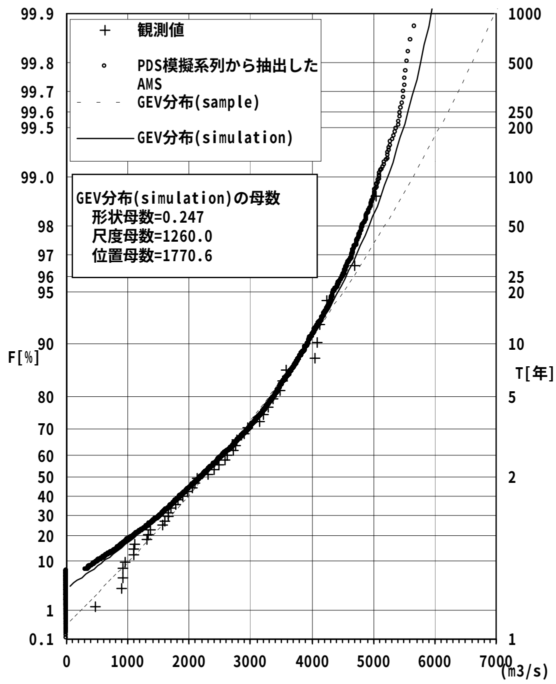

Fig. 18 An example of GEV distributions applied to observed AMS and extracted AMS from generated PDS (Inter event time: exponential distribution)

に示す。10000 個の PDS に対して，AMS は m=1～100 の平均で 3869 個得られた。

$x_{r,ams}$ と $GEV_{r,ams}$ とは比較的一致している。流域平均 2 日雨量の場合と同様に，生起時間間隔を指数分布にしたがい発生させた場合，次の洪水までの時間間隔が 1 年以上となる場合が約 5%ある。流域平均 2 日雨量の場合と同様に，洪水の生起していない年の毎年最大値は 0m^3/s とした。このため 1000m^3/s 以下の範囲で $x_{o,ams}$ と $x_{r,ams}$ との一致度は低い。洪水生起間隔が 1 年以上となり洪水が発生しない年は，平均的に 3869 年間のうち 292 年存在した。

(b) 生起時間間隔が季節性を考慮した経験分布にしたがう場合

$x_{r,pds}$ から抽出した AMS $x_{r,ams}$ に GEV 分布を L 積率法で適合させ，m=1 の場合を Gumbel 確率紙にプロットした結果を Fig.19 に示す。10000 個の PDS に対して AMS は平均的には 3844 個得られた。この方法によると，(a)とは異なり，洪水は毎年発生する。

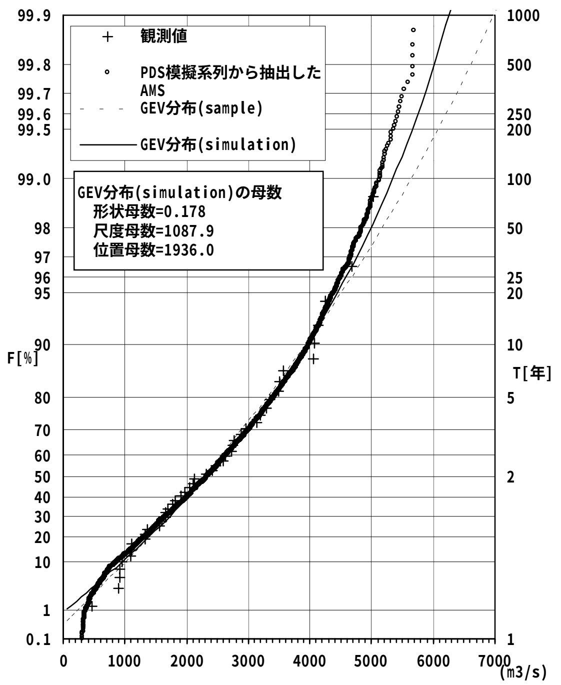

Fig. 19 An example of GEV distributions applied to observed AMS and extracted AMS from generated PDS (Inter event time: empirical distribution considering seasonality)

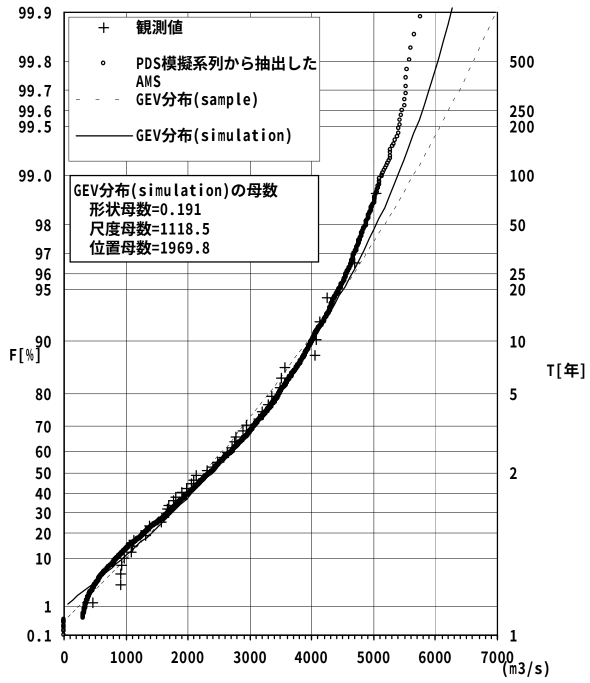

Fig. 20 An example of GEV distributions applied to observed AMS and extracted AMS from generated PDS (Inter event time: empirical distribution not considering seasonality)

$x_{r,ams}$ は全般的に標本 $x_{o,ams}$ とよく一致している。$x_{r,ams}$ とあてはめた GEV 分布 $GEV_{r,ams}$ とは，水文量の大きい部分での一致度が低い。ここで扱った洪水事象は，GEV 分布の理論的背景であるポアソン過程とは異なるためである。

(c) 生起時間間隔が季節性を考慮しない経験分布にしたがう場合

(a)と同様に，$x_{r,pds}$ から抽出した AMS $x_{r,ams}$ に GEV 分布を L 積率法で適合させ，m=1 の場合を Gumbel 確率紙にプロットした結果を Fig.20 に示す。10000 個の PDS に対して，AMS は平均的には 3839 個得られた。洪水が発生しない年が平均的に 47 年間存在するが，(a)と比較するとその年数は小さい。

(b)と同様に，水文量の大きい部分において，$x_{r,ams}$ と GEV 分布との適合度が，(a)の場合と比較して悪くなっている。これは，(b)の原因と同様と考えられる。適合度を SLSC で比較すると，Fig.20 の場合が 0.017 に対して，Fig.18 の場合は 0.021 である。ただし，Fig.18 の場合には，$x_{r,ams}$ =0m^3/s の部分が SLSC を大きくしていると考えられる。$x_{r,ams}$ =0m^3/s を除いて算出した SLSC は 0.007 であり，Fig.20 の場合と比較して SLSC は小さく，適合度は高いと言える。

(2) 形状母数の比較

生起時間間隔が指数分布にしたがう場合について，$GP_{r,pds}$ の形状母数と $GEV_{r,ams}$ の形状母数の比較を行った結果を Fig.21 に示す。$GP_{o,pds}$ の形状母数 $\kappa = 0.289$，$GEV_{o,ams}$ の形状母数 $\kappa = 0.098$ である（■のプロットで示す)。GP 分布と GEV 分布の形状母数は理論上同一で，理想的なポアソン過程にしたがうそれぞれの分布の形状母数は，Fig.21 に示すような対角線上にプロットされる。n=10000 の場合をみると，推定した GP 分布と GEV 分布の形状母数は，ほぼ一致し対角線付近にプロットされている。

次に，生起時間間隔が，季節性を考慮した経験分布にしたがう場合について，同様に比較した結果を Fig.22 に示す。このときは，GEV 分布の形状母数が GP 分布よりも小さくなり対角線付近から離れるとともに，観測値から推定した形状母数に近づく。このことは，事象の発生過程がポアソン過程にしたがう場合には，両者の形状母数が一致し（対角線に近づき)，ポアソン過程とは異なる季節性を考慮した場合には，対角線から離れ，標本から推定した形状母数に近づくことを意味している。

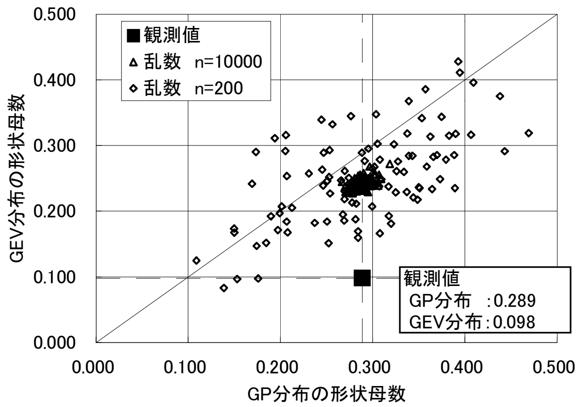

Fig. 21 Relationship between shape parameters (Inter event time: exponential distribution)

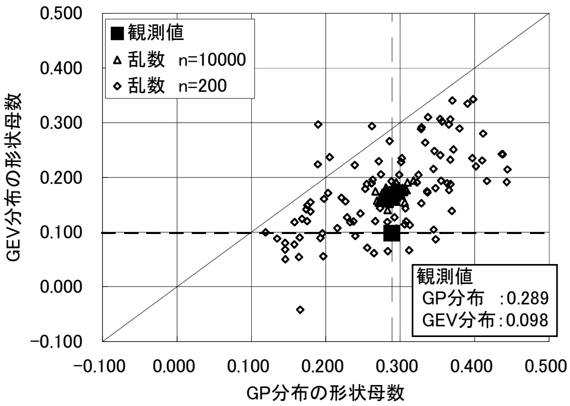

Fig. 22 Relationship between shape parameters (Inter event time: empirical distribution considering seasonality)

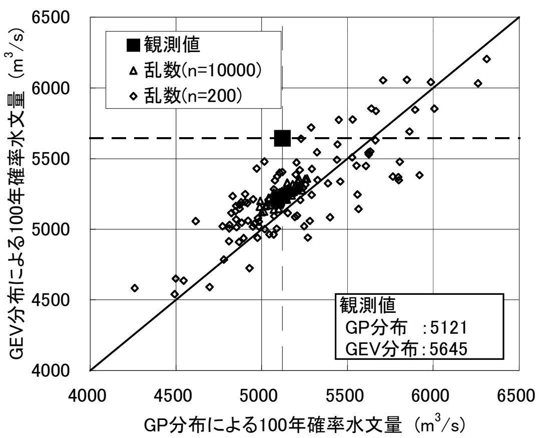

Fig. 23 100-year quantiles estimated by GP and GEV distributions (Inter event time: exponential distribution)

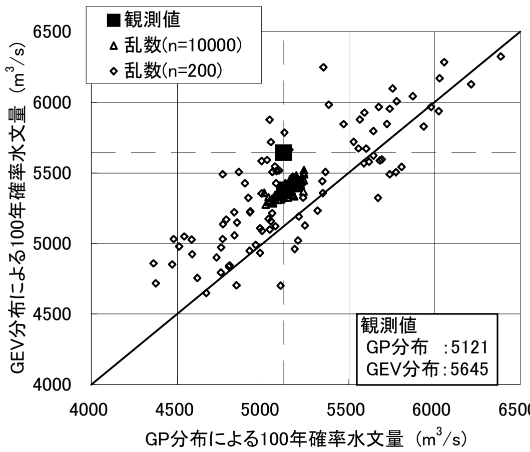

Fig. 24 100-year quantiles estimated by GP and GEV distributions (Inter event time: empirical distribution considering seasonality)

(3) 100年確率水文量の比較

生起時間間隔が指数分布にしたがう場合について，$GP_{r,pds}$ および $GEV_{r,ams}$ のそれぞれの 100 年確率水文量を推定した結果を Fig.23 に示す。元の標本からの推定値は，$GP_{o,pds}$ が 5120m³/s，$GEV_{o,pds}$ が 5645m³/s である。$GEV_{r,ams}$ の推定値は $GP_{r,pds}$ よりも大きい値となる。n=200 のときは，n=10000 の場合と比較して，ばらつきが大きく，元の標本からの場合と逆に $GP_{r,pds}$ の推定値が大きい場合が 100 ケースのうち 37 ケースであった。

生起時間間隔が，季節性を考慮した経験分布にしたがう場合について，同様に比較した結果を Fig.24 に示す。$GEV_{r,ams}$ は $GP_{r,pds}$ よりも大きい値を推定し，Fig.23 の場合よりも対角線から離れる(n=10000 の場合)。これは，Fig.21 および Fig.22 で示した結果と同様に，事象の発生過程として，ポアソン過程と季節性を考慮した発生過程との間の違いを表している。

次に，ピーク流量に関して $x_{r,ams}$ のプロッティングポジションから内挿により推定した 100 年確率水文量 $\hat{x}_{r,100}$ と，$x_{r,ams}$ にあてはめた GEV 分布より推定した 100 年確率水文量 $\hat{x}_{g,100}$ とを比較した結果を Fig.25 に示す。n=10000 の場合をみると，$\hat{x}_{g,100}$ は $\hat{x}_{r,100}$ よりも大きい値を推定している。10000 個の PDS から抽出した 3800 個程度の標本 $x_{r,ams}$ による経験分布が母分布に限りなく近いと考え，これによる確率水文量を真値とみなす。ポアソン過程を仮定できないような標本（季節性を考慮しなければならない標本）に対し，GEV 分布を適合させて推定される確率水文量は，母集団に想定される確率水文量(真値)に対して過大評価をする可能性が高いことを示している。

この結果は，Fig.26 に示した流域平均 2 日雨量を標本

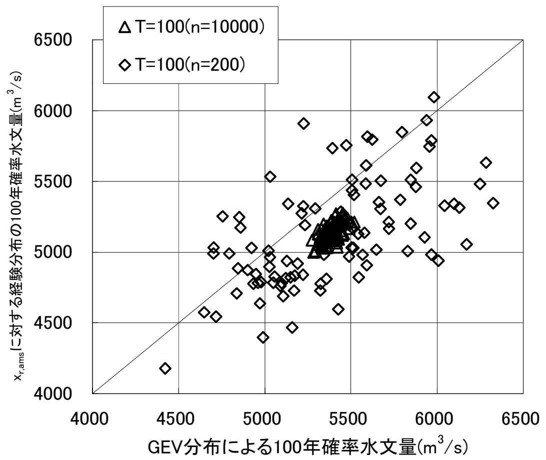

Fig. 25 Comparison of $\hat{x}_{o,100}$ and $\hat{x}_{g,100}$ (Peak discharge)

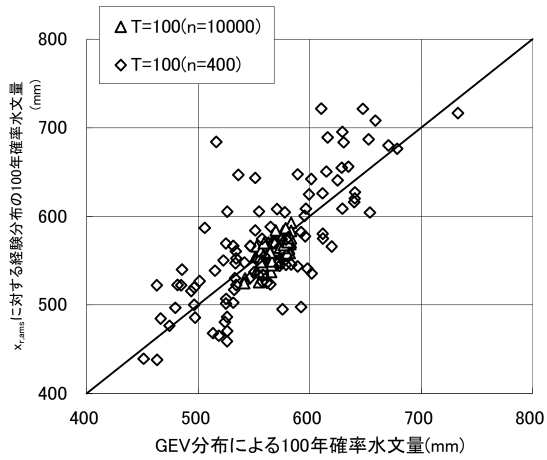

Fig. 26 Comparison of $\hat{x}_{o,100}$ and $\hat{x}_{g,100}$ (2-day areal rainfall)

とした場合と異なる。これについて考えられる要因は以下の 2 点である。

①事象の一年間の平均生起個数

一年間の平均生起個数は，流域平均 2 日雨量が 4.05 個に対し，ピーク流量は 2.04 個である。PDS の 1 年間に含まれる事象の数が大きいほど，それより抽出される AMS が，理想的な毎年最大値の母集団により近づくためと考えられる。

②GP 分布により推定した確率水文量と GEV 分布により推定した確率水文量の差異

元のデータに対して GP 分布から推定した確率水文量（ここでは 100 年確率）と GEV 分布から推定した確率水文量とを比較すると，流域平均 2 日雨量については，GP 分布の推定値が 560.2mm に対して GEV 分布の推定値が 549.3mm（誤差=2%）である。一方，ピーク流量については，GP 分布の推定値が 5120 m^3/s に対し，GEV 分布の推定値は 5645m^3/s（誤差=10%）である。

以上の結果から，GEV 分布を用いた確率水文量の推定を行う場合には，以下のことを確認する必要がある。

①一年間に閾値を超える事象の平均生起数が 4 個程度以上ある

②GP 分布を用いて推定した確率水文量が，GEV 分布を用いて推定した確率水文量と一致する

いずれかの条件が満たされない場合，GEV 分布は母集団の特性を表現しておらず，推定した確率水文量は過大評価となる可能性が高い。

6. 結論

極値水文事象（流域平均 2 日雨量とピーク流量）の生起時間間隔に着目し，モンテカルロシミュレーションによる数値実験を通じて，PDS 法と AMS 法との関係について調べた。本論文で得られた結果を要約すると以下のとおりである。

①本研究で取り扱った水文量の生起時間間隔は，その生起数が冬期には少なく夏期に多いという季節性を持つことを示した。これは，希な水文事象の発生過程として一般的に言われるポアソン過程とは異なるものである。

②生起時間間隔の季節性を考慮したモンテカルロ実験を行ったところ，乱数を発生させて得られた PDS から抽出した AMS の経験分布は，元のデータの AMS とほぼ一致する。これは，本研究で対象とした水文事象の発生過程が，ポアソン過程とは異なる（季節性をもつ）ことを示している。

③乱数を発生させて得られた PDS から抽出した AMS の経験分布による 100 年確率水文量とその AMS にあてはめたGEV分布による100年確率水文量とを比較した。ピーク流量を対象とした場合，GEV 分布による推定値の方が大きい。前者の経験分布による確率水文量の推定値が真値に近いと考えると，ポアソン過程にもとづく GEV 分布による確率水文量は，それに比べて過大評価となった。このことは，季節性をもつ水文事象に対して GEV 分布をあてはめると，過大評価となる可能性が高いことを示している。

④流域平均 2 日雨量を対象とした場合には，③のような過大評価となる可能性が低い。この理由は，一年間の水文事象の生起数が平均的に 4 個以上存在することと，PDS 法による GP 分布の確率水文量と AMS 法による GEV 分布の確率水文量とが一致するためと推察される。

参考文献

伊藤學・亀田弘行(訳) (1977)：土木建築のための確率・統計の基礎，p.120，丸善

星　清(1998):洪水ピークの確率評価手法について，開発土

木研究所月報, **539,** pp. 34-47.
宝　馨(1998)：水文頻度解析の進歩と将来展望，水文・水資源学会誌, **11(**7), pp. 740-756.
田中茂信・宝　馨(2001):洪水頻度解析における AMS と PDS の比較，水工学論文集, **45,** pp. 205-210
Cunnane, C. (1973): A particular comparison of annual maxima and partial duration series methods of flood frequency prediction, Journal of Hydrology, **18**, pp. 257-271.
Cunnane, C. (1979): A note on the Poisson assumption in partial duration series models, Water Resources Research, **15(**2), pp.489-494.
Cunnane, C. (1989): Statistical distribution for flood frequency analysis, WMO Operational Hydrology, Report No.33, WMO-No.718, Geneva, Switzerland.
Stedinger, J. R., Vogel, R. M. and Foufoula-Georgiou, E. (1993): Frequency analysis of extreme events, in Handbook of Hydrology, Chap.18, (ed.) Maidment, D. R., McGraw-Hill, New York
Rasmussen, P. F. (2001): Generalized probability weighted moments: Application to the generalized pareto distribution, Water Resources Research, **37(**6), pp. 1745-1751.
Rosbjerg, D. (1985): Estimation in partial duration series with independent and dependent peak values, Journal of Hydrology, **76**, pp. 183-195.

A Comparison between PDS Method and AMS Method Based on the Generation of Hydrological Time Series with Seasonality

MASAAKI Nishioka and TAKARA Kaoru

Synopsis

This paper compares AMS (Annual Maximum Series) method with PDS (Partial Duration Series) method in hydrologic frequency analysis through a Monte Carlo experiment. The numerical experiment takes into account the seasonality inherent in hydrologic processes. Based on 174 two-day areal rainfall series in 43 years and 117 flood peak discharge series in 47 years, statistical analysis has revealed the difference between the actual occurrence process and the Poisson process that holds for rare events.

For two series of two-day rainfalls and peak discharges, the Monte Carlo experiment deals with distribution of occurrence interval and distribution of extreme rainfalls and discharges. The exponential distribution for inter event time is used for the Poisson process, while the empirical distributions obtained by the statistical analysis are used for seasonal rainfall and discharge series.

The experiment has revealed the importance of the effect of seasonality. When applying the GEV (Generalized Extreme Value) distribution to AMS, one would overestimate 100-year quantile because of ignoring the seasonality. However, if the quantile estimate obtained by the GP (Generalized Pareto) distribution for PDS is almost the same as the one by GEV-AMS approach, the use of GEV can be justified. It was also concluded that the average number of PDS elements in a year should be four or more to avoid the overestimation by the GEV-AMS approach.

Key Word: Partial duration series, Annual maximum series, Monte Carlo simulation, Inter event time, Seasonality