

# 円孔ボイドスラブの弾性力学性状とスラブ厚さ算定式の導出

諸岡繁洋

京都大学防災研究所

## 要 旨

本論では、円孔ボイドスラブ構造について、曲げ剛性および応力集中の評価を行う評価係数（正確にはボイド孔直径 - スラブ厚比の関数）を導入し、これらの係数によりボイドスラブを直交異方性板として解析できることを示す。続いて、この直交異方性板を等方性板として扱えることを示し、そこから導かれる解析的な式を用いて、孔の有無により生じる鉛直変位等の弾性力学的な性状の違いを述べる。また、RC 規準と同等な手法によりスラブ厚の算定式を導出し、孔の大きさによる有効スパンへの影響を調べる。

キーワード：円孔、ボイドスラブ、剛性評価、応力集中、直交異方性、設計式

## 1. はじめに

円孔ボイドスラブの床構造としての合理性は、円筒鋼管等を断面中央に埋め込み、スラブの曲げ剛性を確保しつつ、スラブ重量の軽減をはかることにある。

国内で最初の建築物に採用されたRC中空スラブは、松井（松井、1988）の構造設計による1962年の館林市庁舎のT型梁片持ちスラブである。最近の集合住宅では、小梁を無くし間仕切りの配置を自由にでき、将来のリフォームを容易にするため、大型スラブに円孔ボイドスラブ工法が採用される計画が増加している。

通常の円孔ボイドスラブは、ボイドの孔直径 ( $d$ ) - スラブ厚 ( $t$ ) 比が  $d/t=0.5$  程度であり、正方形中空ボイドスラブの載荷実験（入江・松井、1994；藤本、1996）によると、ボイドを一方に配列しても2方向板に近い性状を示すことが報告されている。

円孔ボイドスラブは、ボイド平行方向と直交方向の曲げ剛性が異なる直交異方性スラブであると推定される。ボイド平行方向の曲げ剛性は、ボイドを考慮したI型断面梁として評価することが可能であると確かめられている。しか

し、ボイド直交方向の曲げ剛性については、森村・藤谷（1988）による荷重変形特性の検討に採用した格子梁モデルの例がみられるが、円孔ボイドを並列に配置した場合の曲げ剛性を解析的に検討した研究は少ないのが現状である。

一方、中空スラブの応力集中に関する解析的研究としては、以下のような報告がある。入江（1973）は、双極座標を用いた近接2円孔を含む無限板の平面問題として解析し、モルタル模型実験と三次元光弾性実験で検討している。松井・塚越（1991）は、床荷重による垂直せん断を受ける場合の円孔・楕円孔・長方形孔を有する中空スラブのせん断応力集中を応力関数がラプラス方程式を満たすとし、境界要素法で解析している。

本論文では、円孔ボイドをその中心間隔がスラブ厚と同じになるように並列に配置した、円孔ボイドスラブを取り扱う。このとき、各方向の曲げ剛性と応力集中は孔直径 ( $d$ ) - スラブ厚 ( $t$ ) 比の関数として評価することができる。本論文では、はじめに、これらの評価係数（関数）を求める。これらの係数を用いることで、ボイドスラブを直交異方性板として合理的に設計することも可能であるが、本論では

この直交異方性板を等方性板として取り扱うことが可能であることを示し、孔の空いていないスラブと本論で取り扱う円孔ポイドスラブの弾力学的な性状の違いを考察する。また、通常の等方性板として取り扱うことができることから、鉄筋コンクリート構造計算規準・同解説 (1991) (以後、RC 規準) に掲載されている通常のスラブ厚算定式の導出と同等な手法により、当該構造物のスラブ厚算定式の導出を行う。

なお、本論で行っている数値解析結果は線形理論の範囲に於けるものであり、終局耐力や変形性能などを評価するものではない。

## 2. 円孔ポイドスラブの剛性と応力集中

本論で対象としている円孔ポイドスラブの形状と主な記号を Fig. 1 に示す。従来 I 型梁の連続として設計された経緯があることからわかるように、ポイドスラブは孔の上下端におけるせん断応力度が大きくなるため、短辺方向 (図の  $x$  方向) にポイドの方向を合わせている。また、本論では円孔ポイドはその中心間隔がスラブ厚と同じになるように並列に配置している。

本章では、 $x$ 、 $y$  方向の曲げ剛性評価係数  $k_x$ 、 $k_y$  および部材内に生じる応力集中を評価する係数  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  を数値解析的に導出する。これらの係数は先に述べた通り、スラブの板厚 ( $t$ ) に対する孔の直径 ( $d$ ) の比 ( $\phi = d/t$ ) 以後、孔直径 - 板厚比と呼ぶ) の関数として求められる。

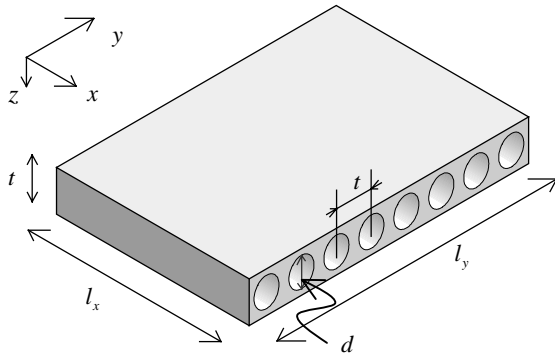


Fig. 1 Circular hole Void Slab and its Geometry

### 2.1 曲げ剛性評価

等方性材料を用いたときの 2 次元板曲げ解析に使用する応力 - 歪み関係式は鉛直方向変位を  $w$  と表すと、以下のようになる。

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -K \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ただし、

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

ここに、 $E$  は縦弾性係数、 $t$  は板厚、 $\nu$  は Poisson 比を表す。

異方性の主軸が  $x$ 、 $y$  軸と一致している直交異方性板については、その性状を定めるために 4 個の定数が必要となり、応力と歪みを関連付けるマトリクス  $[D]$  は以下ようになる。

$$[D] = - \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}$$

ここで、 $D_x$ 、 $D_y$ 、 $D_1$ 、 $D_{xy}$  は等方性の板要素からの比を表す係数 (以後、剛性評価係数と呼ぶ)  $k_x$ 、 $k_y$ 、 $k_1$ 、 $k_{xy}$  により、以下のように表すことができると仮定する。

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -K \begin{bmatrix} 1 \times k_x & \nu \times k_1 & 0 \\ \nu \times k_1 & 1 \times k_y & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \times k_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

これら係数の内  $k_x$ 、 $k_y$  は、孔の無い梁の断面 2 次モーメント

$$I_0 = \frac{bt^3}{12}$$

の比として求めることが出来ると考えられる。ここに、 $b$  はポイドスラブの単位幅を示す。ポイドの軸と一致する方向を  $x$  軸とすると、剛性評価係数  $k_x$  は、直径  $d$  の孔を持つ断面の断面 2 次モーメント  $I_x$  と孔が無い場合の断面 2 次モーメント  $I_0$  の比により以下のように得ることが出来る。

$$k_x = \frac{I_x}{I_0} = \left( \frac{bt^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} \right) / \frac{bt^3}{12} \quad (4)$$

剛性評価係数  $k_y$  は、ポイドによる断面の欠損部分が  $x$  軸に沿って変化するため、上記の手法は採用できない。本論では、中空断面を持つ平板の面内純曲げ解析を境界要素法を用いることによって行い、以下のように  $k_y$  を算出することにする。

単純支持された中空断面を持つ平板と、持たない平板に同じ大きさの曲げモーメントを要素の両端から外力として与え、その端部の水平方向変位を求める。中空断面を持つ平板に於ける端部の水平方向変位を  $d_v$ 、持たない平板に生じるそれを  $d_p$  とする。

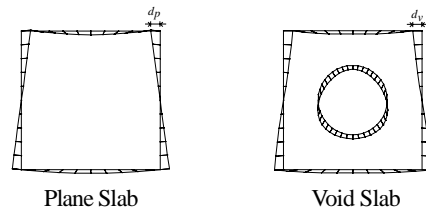


Fig. 2 Deformation of unit under bending moment

このとき、曲げを受ける梁要素の曲げモーメント - 曲率関係式  $M = EI\kappa$  (ここに、 $M$  は梁断面の合モーメント、 $E$  はヤング係数、 $I$  は断面 2 次モーメント、 $\kappa$  は曲率変化を示す) より、 $I_v$ 、 $\kappa_v$  を中空断面を持つスラブの断面 2

次モーメントおよび曲率、また  $I_p (= I_o)$ 、 $\kappa_p$  を中空断面を持たないスラブのそれらとすると、同じ大きさの曲げモーメントを与えているので次式が成り立つ。

$$M = EI_v \kappa_v = EI_p \kappa_p$$

よって、基準断面 2 次モーメント  $I_o$  に対する比  $k_y$  は  $d_p$ 、 $d_v$  を用いて以下のように計算できる。

$$k_y = \frac{I_v}{I_p} = \frac{\kappa_p}{\kappa_v} \cong \frac{d_p}{d_v} \quad (5)$$

この  $k_y$  の値は、孔直径 - 板厚比 ( $\phi = d/t$ ) により定まる。そこで、孔直径 - 板厚比を、0.4、0.6、0.7、0.8 とし、ユニットに面内純曲げ解析を行い、境界に於ける変形を示したものが Fig. 3 である。(なお、数値解析には境界要素法を用い、境界要素は一次要素、上下端部を 30 等分割、左右端部を 20 等分割、孔の周りを 80 等分割している) 図中、 $d_b$  は左右上下端に当たる点での水平変位、 $d_{max}$  は左右の境界に於ける水平変位の最大値を示している。孔直径 - 板厚比が小さいときにはこれらの値は同じであるが、孔直径 - 板厚比が 70% 辺りで  $d_b$  と  $d_{max}$  はほぼ同じ値を取ることがわかる。図を見ると明らかのように、孔の無い場合か孔の小さいスラブの場合、梁の断面に当たる左右両端部の変形は直線的であり、要素の左右上下端部の 4 点に於ける水平方向変位を上式の  $d_v$  の値として用いることは問題ないことがわかる。しかしながら、孔が大きくなると、両端部の変形は平面を保持しているとは言い難いほどの変形をすることがわかる。

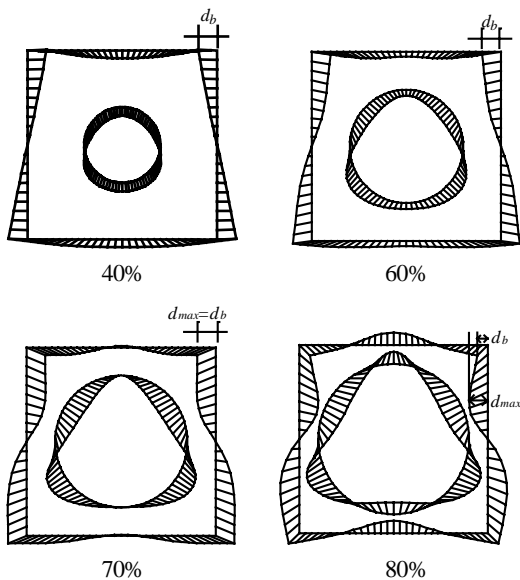


Fig. 3 Deformations of unit under bending moment

実際には、ポイドに直交する平面で切断したポイドスラブの形状は、ユニットが横方向に直線上に並んだものとなっており、横に存在するユニットによる変位拘束が起きるので、このような変形をすることはない。Fig. 4 に孔直径

- 板厚比が 80% のユニットを 7 つ並べた梁を示す。Fig. 4 中の記号 は、境界要素の両端の点あるいは変位、応力等を評価する内点を示している。内点はユニットの境界に当たる部分と、上下端から 30mm に当たる部分に配置している。(ここで示す計算結果は、板厚を 500mm としている)。また、境界要素は一次要素であり、上下端部を 70 等分割、左右端部を 20 等分割、孔の周りを 40 等分割している。

Fig. 4 に示す梁を左右両端の中心で単純支持し純曲げ解析したときの変位状態を Fig. 5 に示す。1 つのユニットで求めた孔直径 - 板厚比が 80% のポイドスラブの変形性状は、ユニットの境界部が平面を保持しているとは言い難いものであったが、このように複数の要素を並べた形状を解析してみると、ユニット間に於ける変形はほぼ直線になっていることがわかる。

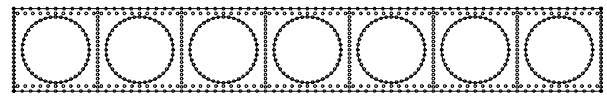


Fig. 4 Boundary elements and Points of estimation for stresses

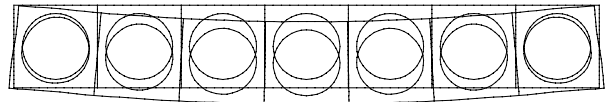


Fig. 5 Deformation of Boundary points

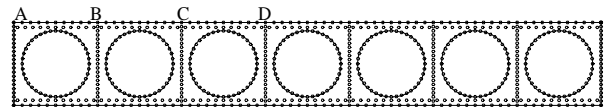


Fig. 6 Cutoff lines A~D between units

ここで、ユニット間の変形を示すため、Fig. 6 に示す A ~ D の境界線を考える。A は要素全体としての境界部、B、C、D はユニット間の境界部に相当する。孔直径 - 板厚比 10% ~ 90% のスラブについて、縦軸をそれぞれ A ~ D の境界に於ける水平方向変位  $d_v$  を同じ点に於ける孔の無いスラブの水平方向変位  $d_p$  で割った値、横軸を部材の中立軸から上下端部までの距離を板厚の半分で正規化したものとし、変形状態を示したものが Fig. 7 である。(変形状態は上下逆対称なので板厚の半分だけ示している)。

要素全体の境界部に当たる境界 (A) を破線で、その他のユニット間に当たる境界 (B、C、D) を実線で示している。要素全体の境界部 (A) は、直線上の変形 (即ち断面の平面保持) をしていないが、ユニット間の境界部 (B、C、D) は直線上に変形していることがわかる。特に境界部より梁せいの 2 倍ほど中に入った C、D に当たる部分ではほぼ一定の曲率を生じていることがわかるので、ここでは、C および D のユニット間の境界に於けるこれらの  $d_v/d_p$  の値の平均値を出し、その逆数を  $k_y$  として採用する。結果を先に示した剛性評価係数  $k_v$  とともに Fig. 8 に示す。ポイドに直交

する方向の剛性の低下率はポイドに平行な方向のその2倍強となっていることがわかる。

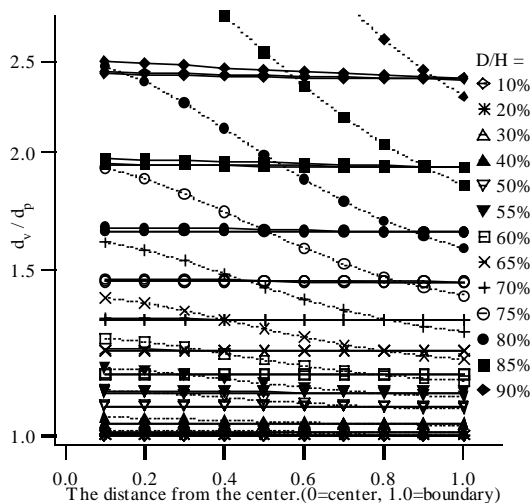


Fig. 7 Deformation of cutoff lines A~D

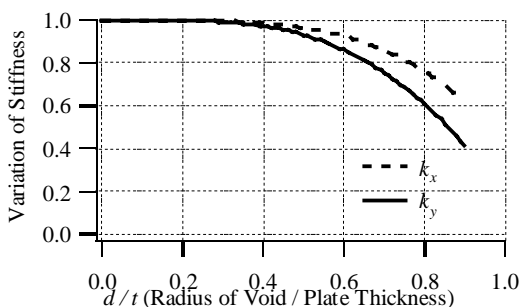


Fig. 8 diameter-thickness ratio ( $d/t$ ) v.s. coef.s  $k_x, k_y$

なお、せん断応力度に関する係数  $k_x, k_y$  は、係数  $k_y$  と同様な手法により 3次元の有限要素法等の直接数値解析法を用いて計算することも出来るが、これらの値は幾何学的に係数  $k_x, k_y$  の間にあると考えられることと、係数  $k_x, k_y$  の差が余りないことから、係数  $k_x, k_y$  の相加平均あるいは相乗平均と仮定しても大きな影響を与えないと考えられるので、本論では求めていない。

## 2.2 曲げ変形による応力集中評価

スラブの応力状態は曲げ変形とせん断変形の重ね合わせであると考えられる。これらの変形状態の主応力分布の例を Fig. 9 に示す。図中の  $\sigma_x$  の中心が応力を評価した点を示し、直径と  $t$  の中にある線がその大きさと向きを示している。何れの状態においても応力集中は孔の上下端で生じていることがわかる。また、Fig. 7 に示した変形や Fig. 9 の主応力図からもわかるように、純曲げを受ける梁のユニット境界部では、理論解析時に適用される平面保持の仮定は成立しており、合モーメントを生じさせている材軸方向の応力度  $\sigma_x$  の分布は直線的であることがわかる。つまり、外力により生じる曲げモーメント  $M$  の応力度分布は、ユニッ

ト境界部では通常の梁やスラブと同様に直線的であり、最大応力度は梁の上下端で生じ、その値は梁せいを  $t$  とするとき、 $\sigma_{max}=6M/t^2$  (ただし、 $M$  を単位幅当たりとしている) として求めることができる。ユニット境界部での主応力度分布が軸方向にほぼ一致し、かつ、直線的な分布をしていることから、曲げ変形による孔の上下端に生じる応力集中を、この  $\sigma_{max}$  との比として求めることとする。

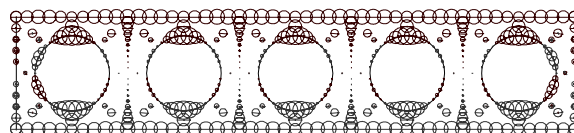


Fig. 9.1 Principal stresses (Simply supported beam, under pure bending analysis)

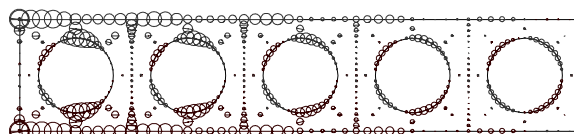


Fig. 9.2 Principal stresses (Cantilever beam, fixed at left end, vertical load at right end)

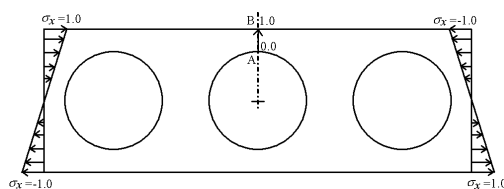


Fig. 10 Distributions of stress are estimated along AB axis

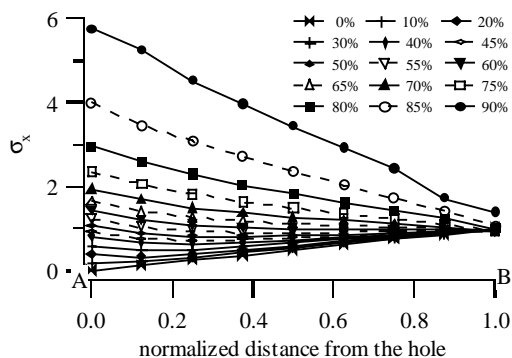


Fig. 11 Distributions of Axial stresses along AB axis (Position A=0.0, B=1.0)

ユニットを 3、5 および 7 つ並べた形状に対し試計算を行った結果、Fig. 10 に示すユニットを 3 つ並べた形状で境界要素を細かく切ること、その中央にある孔の上下端の応力度分布を調べれば十分な精度で応力度分布が得られることがわかった。単純支持梁の上下端部を 90 等分割、左右端部を 20 等分割、孔の周りを 80 等分割し、梁の両端から最大軸方向応力度が 1.0 となる曲げモーメントを与えた場合、孔の上端部 AB 間に於ける応力度分布を Fig. 11 に示す。横軸を孔の上端から梁の上端への距離を正規化し

たもの、縦軸を応力度 $\sigma_x$ としている。

AB間の応力度分布は直線的であり、梁の上下端B(図中の横軸が1.0の点)では $\alpha_x$ の値は殆ど変わらないが、孔が大きくなるに従い孔の上下端A(図中の横軸が0.0の点)に於ける垂直応力度が急速に増大していくことがわかる。

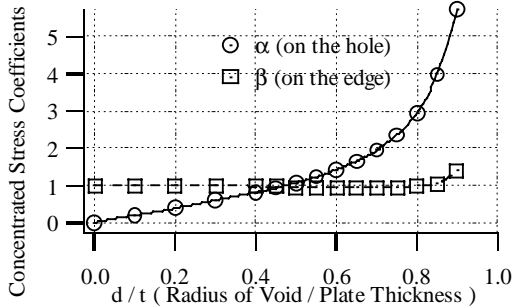


Fig. 12 Coefficients  $\alpha, \beta$  that estimates axial stress concentration

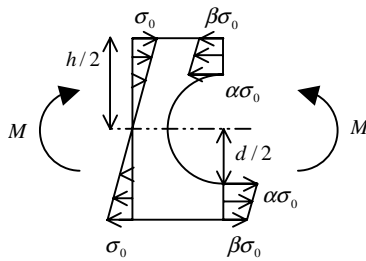


Fig. 13 Distribution of axial stresses

孔の上端および梁の上端に生じる応力度をそれぞれ $\alpha, \beta$ とし、横軸を孔直径・板厚比として図示したものがFig. 12である。AB間の応力度分布が直線で近似できるとすると、Fig. 13に示すような応力度分布の釣合が成り立つと考えられる。

コンクリート構造物の場合、引張応力を鉄筋が負担し、かつ、中立軸の位置が図心からずれることになるが、Fig. 12に示す引張応力の合力を鉄筋が負担すると考えると、鉄筋量は幅 $b$ 当たり、

$$a_t = \frac{6M}{f_t t^2} \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \frac{(t-d)}{2} \cdot b \quad (6)$$

となることがわかる。

### 2.3 せん断強度評価係数 $\gamma$

本論で取り扱っている力の釣合の仮定では、面外曲げを受けるスラブのせん断力は、以下に示す力の釣合式より曲げモーメントから2次的に得られる値となっている。

$$Q_x = M_{x,x} + M_{y,x,y}, \quad Q_y = M_{y,y} + M_{x,y,x} \quad (7)$$

前章で示した方法で評価された曲げモーメントをこの式に適用し、せん断力を求めることは、孔の上下端のみを評価していることになり問題がある。よって、本論では、7つの孔を持つ梁を両端で固定支持し、上下端部で鉛直分

布外力を受けるFig. 14に示すモデルを用いて、前章と同じ $\sigma_{max}$ との比としてせん断力を評価する係数 $\gamma$ を導入する。図中の印は境界要素の両端に当たる主要な節点を示している。上下端を140等分割、左右端部を20等分割、孔の周りを60等分割している。図中に示す数字は主要な節点の節点番号であり、斜体で表す数字は境界節点以外に応力を評価する内点の番号を示している。また、梁左端部と梁中央部のユニット内にはせん断強度を評価するための内点を挿入している。

境界要素法により要素内部の点における応力、変位を評価する場合、内点は境界要素の節点より境界要素長さ以上離れていなければならないことが知られている。Fig. 15にコンクリートのせん断強度を評価するための内点と境界節点の関係を示す。境界節点は、板厚方向およびユニット幅当たりの幅方向に20等分割した点と孔の円周を60等分割した点を採用している。境界節点より境界要素長さ以上離れた点を内点とする必要があるため、ここでは、板厚方向および幅方向に12等分した内点のうち、ポイドの中心からポイドの半径の1.2倍より遠方の点を内点として採用した。その結果、孔直径・板厚比により採用される内点の数は異なるものとなっている。

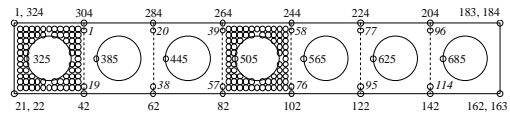


Fig. 14 Points for estimation of shear stresses and load condition

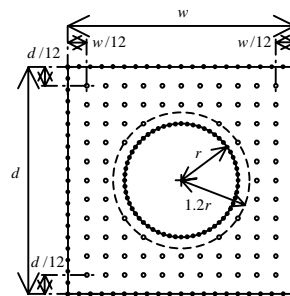


Fig. 15 Inner points for estimation

以上より梁端部および梁中央部に於けるコンクリートのせん断力集中度を求めるための係数をそれぞれ $\gamma_1, \gamma_2$ とすると、

- $\gamma_1$ は境界節点1~21、325~384および梁端部の内点に於ける $\sigma_{xy}$ の最大値を境界節点324に於ける $\sigma_x$ で割った値
- $\gamma_2$ は内点39~57、境界節点505~564および梁中央部の内点に於ける $\sigma_{xy}$ の最大値を境界節点264に於ける $\sigma_x$ で

割った値

として求めることが出来る。結果を Fig. 16 に示す。梁端部  $\gamma_1$  および梁中央部  $\gamma_2$  の区別無く、それらの最大値を孔直径 - 板厚比により、境界節点に於ける値を、内点に於ける値を  $\gamma$  としている。

孔直径 - 板厚比に関係なく、せん断応力の最大値は、スラブ内ではなく境界部に生じていることがわかる。よって、せん断応力を評価する係数  $\gamma$  は Fig. 16 に示す となる。

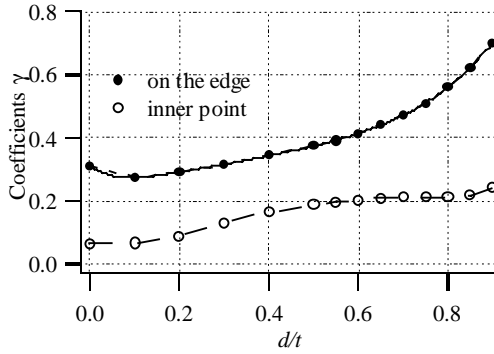


Fig. 16 Coefficient  $\gamma$  that estimates shear stresses

なお、この評価係数  $\gamma$  はスラブのせん断方向の応力度を評価するものであり、主応力の向きを考えると、 $\sqrt{2}$  を掛ける必要がある。

#### 2.4 直交異方性板としての円孔ポイドスラブ解析手順

有限要素法等の直接数値計算法を用い、当該構造物を直交異方性板として解析する手順は、以下のようになる。

(a) Fig. 8 に示す剛性評価係数  $k_x, k_y$  と、これらの相加平均 (あるいは相乗平均) として求める  $k_1, k_{xy}$  を(3)式に適用し、直交異方性板として数値解析する。

(b) 解析結果として得られる孔に直交する方向のモーメント  $M_y$  より、ユニット境界部のスラブ上下端で生じていると考えられる最大応力度  $\sigma_0 = 6M/t^2$  を用いて、以下の コンクリートの圧縮強度、および コンクリートのせん断に関する応力集中を評価する。

コンクリートの圧縮強度

$$\sigma_o \times \max(\alpha, \beta, 1.0) \leq f_c = F_c / 3$$

コンクリートのせん断

$$\sigma_o \times \gamma \sqrt{2} \leq F_c / 30$$

(c) 中立軸が材軸と一致していると仮定するとき、鉄筋量について、以下の の式と、 釣合鉄筋比を確認する。

鉄筋量

・ 孔に直交する方向

$$a_i = \frac{6M}{f_t^2} \frac{\alpha + \beta}{2} \frac{(t-d)}{2} \cdot b$$

・ 孔に平行あるいは孔のないスラブ

$$a_i = \frac{M \cdot b}{f_t \cdot j}$$

釣合鉄筋比

(鉄筋コンクリート構造計算規準・解説 14 条(9)式)

各評価係数を孔直径 - 板厚比 ( $d/t$ ) の 7 次の多項式で近似した係数を示す。孔直径 - 板厚比が 1.0 より充分小さく 7 乗まで行う必要があるので、有効桁数を充分に採らないといけない。

$$K = \sum_{i=0}^7 k_i (d/t)^i, \quad 0.0 \leq (d/t) \leq 0.9 \quad (8)$$

ここに、 $K$  は各評価係数、 $k_i$  は各評価係数を多項式近似したときの係数であり以下の表に結果を示す。これらの式の適用範囲は孔直径 - 板厚比が 0.0 ~ 0.9 である。

なお、係数  $k_x$  は(4)式において  $b = t$  として以下のように表される。

$$k_x = \frac{I_x}{I_o} = \left( \frac{bt^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} \right) / \frac{bt^3}{12} = 1 - \frac{3\pi}{16} \left( \frac{d}{t} \right)^4 \quad (9)$$

Table 1 各評価係数を求めるための係数

	$k_y$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
0	0.999999335	-0.000235303	0.999525919	0.310857050
1	-0.002917688	2.499170544	1.247240914	-0.992865230
2	0.059260510	-11.689883771	-26.10700388	9.053549080
3	-0.503056702	85.375702609	191.575881305	-34.921459710
4	1.070996779	-297.927624018	-670.283517766	76.868905200
5	-5.117693858	540.919259353	1,209.438805831	-96.581384920
6	5.682210207	-488.859601810	-1,089.245990350	64.872618760
7	-2.017524918	177.637813356	389.553058042	-17.710717770

### 3. 直交異方性スラブから等方性スラブへの変換

本章では、前章で示した直交異方性板を等方性板として取り扱うための手順を示し、当該構造物と通常の無孔スラブの関係をどのように考えればよいかを示す。

#### 3.1 辺長の変化

通常の無孔スラブの応力 - 歪み関係式は先に示した通り、

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -K \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

である。力の釣合式は、先に示したモーメントとせん断力の釣合式(7)と、以下のせん断力と分布荷重 ( $p$ ) の釣合式(10)で表される。

$$M_{x,x} + M_{y,y} = Q_x, \quad M_{y,y} + M_{x,x} = Q_y \quad (7)$$

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} = -p \quad (10)$$

(7)、(10)式より、

$$M_{x,xx} + 2M_{y,xy} + M_{y,yy} = -p \quad (11)$$

また、(1)式を上式に代入すると

$$-Kw_{,xxxx} - Kw_{,yyyy} - 2Kw_{,xxyy} = -p \quad (12)$$

が得られるので、通常の無孔スラブの支配方程式は以下のようになる。

$$(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)^2 w = p/K \quad (13)$$

当該構造物の場合、孔があるために剛性が低下したと考え、(1)式を以下の(3)式と仮定した。

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -K \begin{bmatrix} 1 \times k_x & \nu \times k_1 & 0 \\ \nu \times k_1 & 1 \times k_y & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \times k_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

力の釣合条件式は、無孔スラブと同じであるので(11)式が成立する。この(11)式中に含まれる断面力の微分を(3)式を用いて記述すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} M_{x,xx} &= -K(k_x w_{,xxxx} + k_1 \nu w_{,xyxy}) \\ 2M_{xy,xy} &= -2(1-\nu)K \cdot k_{xy} w_{,xyxy} \\ M_{y,yy} &= -K(k_y w_{,yyyy} + k_1 \nu w_{,xyxy}) \end{aligned} \quad (14)$$

孔がない通常の平板の場合、上式中に含まれる係数が、

$$k_x = k_y = k_{xy} = k_1 = 1 \quad (15)$$

であるから、(12)式が成立し、支配方程式として(13)式が得られた。ここで、以下の  $x, y$  方向のスケールリングを考える。

$$\xi = S_x x, \quad \eta = S_y y \quad (16)$$

とすると、

$$(\partial^2/\partial x^2) = S_x^2 (\partial^2/\partial \xi^2), \quad (\partial^2/\partial y^2) = S_y^2 (\partial^2/\partial \eta^2)$$

より、断面力の式(14)に含まれる各項は以下のようになる。

$$\begin{aligned} k_x w_{,xxxx} &= S_x^4 k_x w_{,\xi\xi\xi\xi}, \quad k_y w_{,yyyy} = S_y^4 k_y w_{,\eta\eta\eta\eta} \\ k_1 w_{,xyxy} &= S_x^2 S_y^2 k_1 w_{,\xi\xi\eta\eta}, \quad k_{xy} w_{,xyxy} = S_x^2 S_y^2 k_{xy} w_{,\xi\xi\eta\eta} \end{aligned}$$

これらの式で

$$S_x^4 k_x = 1, \quad S_y^4 k_y = 1, \quad S_x^2 S_y^2 k_1 = 1, \quad S_x^2 S_y^2 k_{xy} = 1 \quad (17)$$

が成り立つとすると、(14)式は、

$$\begin{aligned} M_{x,xx} &= -K(w_{,\xi\xi\xi\xi} + \nu w_{,\xi\xi\eta\eta}) \\ 2M_{xy,xy} &= -2(1-\nu)K w_{,\xi\xi\eta\eta} \\ M_{y,yy} &= -K(w_{,\eta\eta\eta\eta} + \nu w_{,\xi\xi\eta\eta}) \end{aligned} \quad (18)$$

となり、

$$(\partial^2/\partial \xi^2 + \partial^2/\partial \eta^2)^2 w = p/K \quad (19)$$

が成立し、通常の曲げを受ける平板の支配方程式(13)と一致することとなる。

前章で求めた  $k_x, k_y$  を用いて  $S_x$  および  $S_y$  を表すと、

$$S_x = k_x^{-1/4}, \quad S_y = k_y^{-1/4} \quad (20)$$

であり、 $k_1$  および  $k_{xy}$  は数値解析的に求めていないが、これらを(17)式が成り立つように、

$$k_1 = k_{xy} = S_x^{-2} S_y^{-2} = k_x^{1/2} k_y^{1/2} \quad (21)$$

と、 $x, y$  方向の曲げ剛性の相乗平均によりこれらの値を仮定すれば、通常の無孔スラブの支配方程式と当該構造物のそれは一致することとなる。

つまり、(16)および(20)式より、矩形な当該構造物の  $x, y$  方向のスパンを  $l_x, l_y$  とするとき、剛性のみを考えると、

それらが  $k_x^{-1/4} l_x, k_y^{-1/4} l_y$  のスパンの無孔スラブと同一であると考えることができる。孔直径 - 板厚比とこれら  $k_x^{-1/4}, k_y^{-1/4}$  の関係を Fig. 17 に示す。

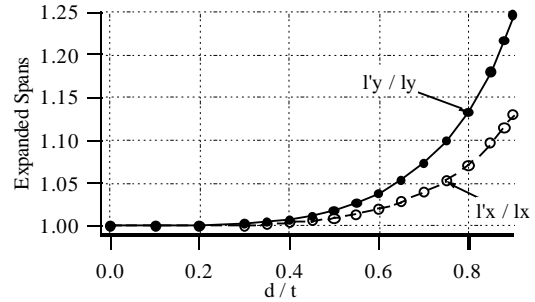


Fig. 17 Expanded spans equivalent to reduction of bending stiffness

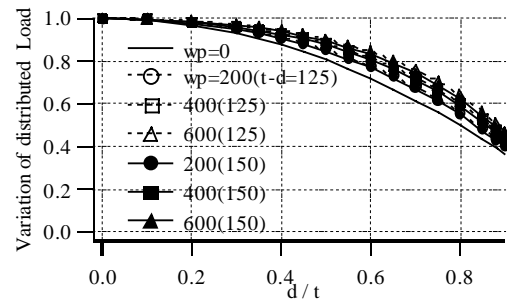


Fig. 18 Reduction of weight

### 3.2 分布荷重の変化

RC の 1mm 厚さ、 $1m^2$  単位面積当たり重量を  $\gamma[kg/m^2/mm]$ 、仕上げ材と積載荷重の和 (以後、積載荷重等と呼ぶ) を  $w_p[kg/m^2]$  とすると、無孔スラブの分布荷重は、

$$p = \gamma t + w_p [kg/m^2]$$

で表される。(ただし、スラブ厚  $t$  の単位は mm)、ポイドスラブの分布荷重  $p'$  (以後、prime を付けた変数はポイドスラブの場合を示す) は、孔直径 - 板厚比  $\phi$  を用いて、

$$p' = \gamma t \left(1 - \frac{\pi}{4} \phi^2\right) + w_p [kg/m^2]$$

と書き表すことができる。よって、孔があることによる分布荷重の変化は

$$\frac{p'}{p} = \left[ \gamma t \left(1 - \frac{\pi}{4} \phi^2\right) + w_p \right] / [\gamma t + w_p] \quad (22)$$

となり、無孔スラブとの比較を行うためには、何らかの 1 つの物理的な長さを与えなければならないことがわかる。よって、ここではポイド管に対するコンクリートのかぶり厚の 2 倍の値  $s (= t - d)$  を与えることにすると、分布荷重の変化式(22)は以下の式で表すことができる。

$$\frac{p'}{p} = \left[ \gamma s \left\{1 - \frac{\pi}{4} \phi^2\right\} + w_p (1 - \phi) \right] / [\gamma s + w_p (1 - \phi)] \quad (23)$$

コンクリートのかぶり厚  $s (= t - d)$  を 125 および 150[mm]、

積載荷重等  $w_p$  を 0, 200, 400, 600[kg/m<sup>2</sup>]とした場合の分布荷重の変化を Fig. 18 に示す。積載荷重等  $w_p$  を 0 とした場合には、かぶり厚  $s$  の関数とはならないので 7 つの組み合わせになる。

### 3.3 ボイドスラブ構造とは

以上まとめると、ボイドスラブ構造の全体的な弾性力学的性状は、Fig. 19 に示すように、その  $x, y$  方向のスパン長さをそれぞれ(20)式 (Fig. 17)により長くし、分布荷重を(22)式 (Fig. 18)により低減した孔のないスラブと同等と考えることができることがわかる。

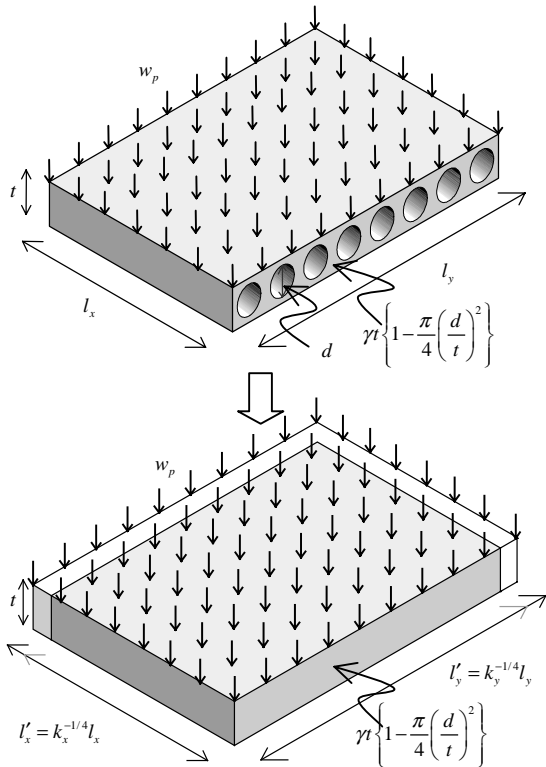


Fig. 19 Transformation of a void slab into a plane slab

## 4 . 有孔スラブと無孔スラブの比較

ボイドスラブを通常の無孔スラブとして取り扱うことができることがわかったので、本章では、同一スパン、同厚のスラブが孔の有無により、その鉛直方向変位や断面力、応力度がどのように変化するかを解析的な手法により検証する。

### 4.1 鉛直方向変位

鉛直方向変位の変化を調べるため、エネルギー法の1つである Riz による近似解法により変位を表す(半谷, 1995), 矩形の固定境界条件を満足する変位関数  $w$  として

$$w = C \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right)$$

を採用する。固定境界における歪みエネルギー  $U$  と外部工

ネルギー  $W$  の差として以下の全ポテンシャルエネルギー  $\Pi$  が得られる。

$$\Pi = \frac{K}{2} \iint \{ (w_{,xx} + w_{,yy})^2 \} dx dy - \iint p w dx dy$$

停留条件  $\partial \Pi / \partial C = 0$  より、

$$C = \frac{p l_y^4}{4K\pi^4} \frac{1}{3\lambda^4 + 3 + 2\lambda^2}, \quad \lambda = l_y / l_x$$

が得られる。当該構造物ではスラブのスパン  $l_x, l_y$  が  $k_x^{-1/4} l_x, k_y^{-1/4} l_y$  となることを考慮すると以下の式が成り立つ。

$$C' = \frac{p l_y^4}{4K\pi^4} \frac{1}{3k_x \lambda^4 + 3k_y + 2\sqrt{k_x k_y} \lambda^2}$$

鉛直方向変位の孔による変化率は、これらの比により以下のように求められる。

$$\frac{w'}{w} = \frac{p'}{p} \frac{3\lambda^4 + 3 + 2\lambda^2}{3k_x \lambda^4 + 3k_y + 2\sqrt{k_x k_y} \lambda^2} \quad (24)$$

積載荷重等  $w_p$  を 400[kg/m<sup>2</sup>]、かぶり厚  $s$  を 125[mm]とした場合の、鉛直方向変位の孔による変化を、辺長比  $\lambda (= l_y / l_x)$  について Fig. 20 に示す。スパン長さの増大よりも、分布荷重の減少が大きく影響し、孔が大きいくほど鉛直変位が減少することがわかる。また、当然であるが、辺長比が大きくなるほど変位の変化は小さくなっている様子もわかる。

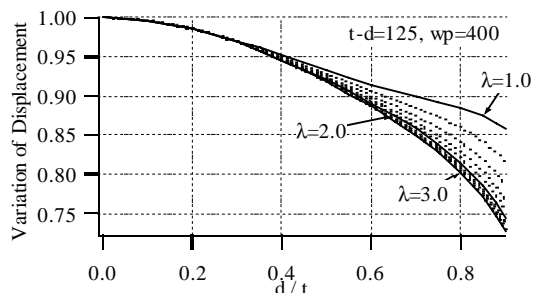


Fig. 20 Reduction of vertical displacement at center (thickness of cover concrete : 125mm/2)

### 4.2 最大モーメントの変化

矩形スラブのモーメント分布を解析的に求めた例は幾つかあるが収束計算を行う必要があるため、本論では、最大モーメント値の変化を RC 規準 9 条の 4 辺固定長方形スラブの式を用いて検証する。式のみを掲載すると以下のようになっている。

短辺  $x$  方向の曲げモーメント

- ・両端最大負曲げモーメント :  $M_{x1} = -\frac{1}{12} w_x l_x^2$
- ・中央部最大正曲げモーメント :  $M_{x2} = \frac{1}{18} w_x l_x^2$

長辺  $y$  方向の曲げモーメント

- ・両端最大負曲げモーメント :  $M_{y1} = -\frac{1}{24} w l_x^2 \quad (25)$



・中央部最大正曲げモーメント： $M_{y2} = \frac{1}{36} w l_x^2$  (26)

ここに、

$l_x$ ：短辺有効スパン、 $l_y$ ：長辺有効スパン、

$w$ ：単位面積についての全荷重

$$w_x = \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} w = \frac{\lambda^4}{1 + \lambda^4} w$$

である。単位面積についての全荷重  $w$  は、本論では無孔スラブの場合  $p$ 、有孔スラブの場合  $p'$  と表している。このとき、各方向の両端最大負曲げモーメントは以下ようになる。

$$M_{x1} = -\frac{1}{12} \frac{\lambda^4}{1 + \lambda^4} p l_x^2, \quad M'_{x1} = -\frac{1}{12} \frac{k_x \lambda^4}{k_y + k_x \lambda^4} p' \sqrt{k_x} l_x^2$$

$$M_{y1} = -\frac{1}{24} p l_x^2, \quad M'_{y1} = -\frac{1}{24} p' \frac{l_x^2}{\sqrt{k_x}}$$

$M_{x2}$  は  $M_{x1}$  と  $M_{y2}$  は  $M_{y1}$  とそれぞれ係数が異なるだけなので、各方向の曲げモーメントの変化率は以下ようになる。

$$\frac{M'_{x1}}{M_{x1}} = \frac{M'_{x2}}{M_{x2}} = \frac{\sqrt{k_x}(1 + \lambda^4)}{k_y + k_x \lambda^4} \frac{p'}{p}, \quad \frac{M'_{y1}}{M_{y1}} = \frac{M'_{y2}}{M_{y2}} = \frac{1}{\sqrt{k_x}} \frac{p'}{p}$$

$M_x$  の変化は辺長比  $\lambda$  および荷重比 ( $p'/p$ ) の関数であるので、かぶり厚を 125mm、積載荷重等を 400[kg/m<sup>2</sup>] と固定し、辺長比  $\lambda$  を変化させた場合の結果を Fig. 21 に示す。一方、 $M_y$  の変化は辺長比  $\lambda$  の関数となっていないので、かぶり厚および積載荷重等を鉛直変位の変化を示した Fig. 18 と同一の組み合わせにより Fig. 22 に示す。鉛直変位と同様に孔が大きくなるほど最大モーメント値は小さくなることわかる。

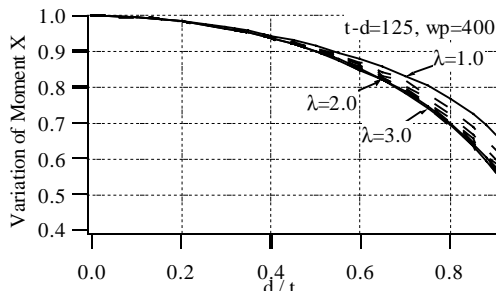


Fig. 21 Variation of  $M_x$

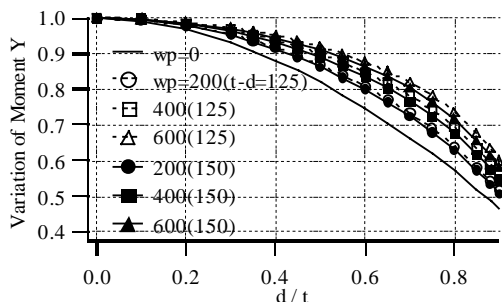


Fig. 22 Variation of  $M_y$

#### 4.3 最大応力度 $\sigma_x, \sigma_y$ の変化

$x, y$  面に生じているこれらの応力度は、前節の  $M_x$  および  $M_y$  より求めることができる。これらのモーメントが生じているときの応力度分布はそれぞれ Fig. 23、Fig. 24 のようになっている。Fig. 24 中に示す  $\alpha, \beta$  は Fig. 12 で示した応力集中係数を示している。

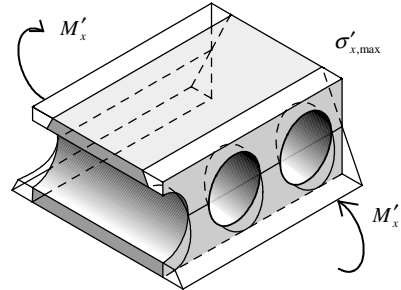


Fig. 23 Distribution of Axial stress  $\sigma_x$

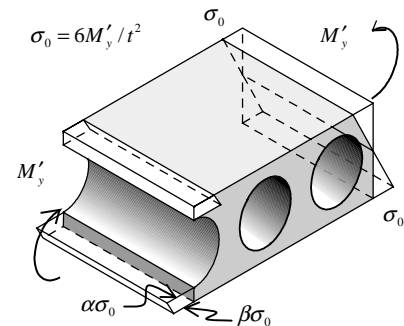


Fig. 24 Distribution of Axial stress  $\sigma_y$

$x$  面に生じる最大応力度は、通常の以下の式を用いて求められる。

$$\sigma_{x,max} = \frac{M_{x1}}{I_0} y_0$$

ここに、 $I_0$  は中空を持たない場合の断面 2 次モーメント、 $y_0$  は中立軸から最端部への距離を示す。この距離が変わらないと仮定し、中空断面の断面 2 次モーメントが  $k_x I_0$  と表されることを用いると、当該構造物の場合、

$$\sigma'_{x,max} = \frac{M'_{x1}}{k_x I_0} y_0$$

となるので、 $x$  方向の応力度の変化は以下のように表される。

$$\frac{\sigma'_{x,max}}{\sigma_{x,max}} = \frac{1}{k_x} \frac{M'_{x1}}{M_{x1}}$$

$y$  方向は、Fig. 12 で示した応力集中評価関数  $\alpha, \beta(d/t)$  を用いて以下のように表される。

$$\frac{\sigma'_{y,max}}{\sigma_{y,max}} = \max(\alpha, \beta, 1.0) \frac{M'_{y1}}{M_{y1}}$$

応力度の変化を Fig. 25、Fig. 26 に示す。図の表し方は前節のモーメントの変化率の図と同様である。 $x$  断面では無孔スラブと殆ど変わらない(数パーセント程度しか違わな

い) 応力度が生じることがわかる。一方、y 断面では、応力集中により、孔直径 - 板厚比が 0.5 を超えると、無孔スラブより大きな応力度が生じることがわかる。

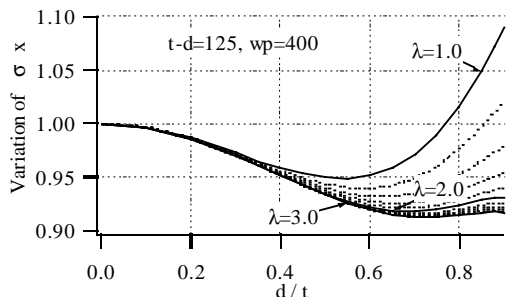


Fig. 25 Variation of  $\sigma_x$

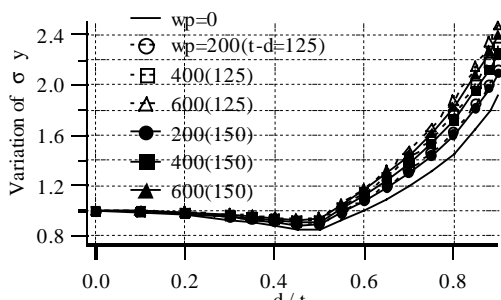


Fig. 26 Variation of  $\sigma_y$

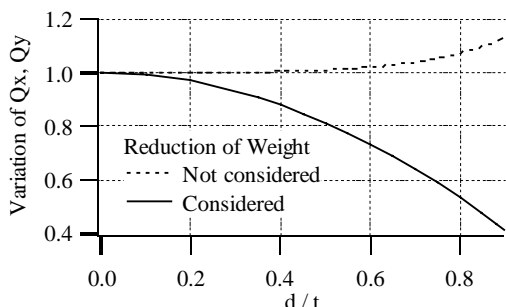


Fig. 27 Variation of  $Q_x, Q_y$

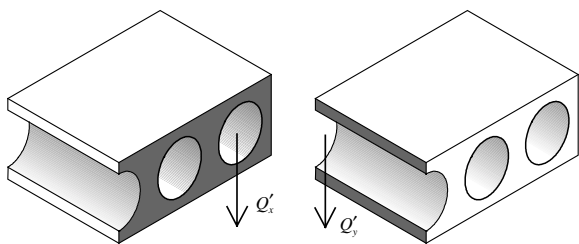


Fig. 28 Minimum Sectional Area

#### 4.4 最大せん断力の変化

「等分布荷重を受ける周辺固定スラブの固定辺のせん断力は、その辺の反力に等しく、(RC 規準)10 条 1 に述べる荷重分配法に従って近似的に求めることが出来る (RC 規準 9 条 2 解説より)」。このとき、単位長さあたりの最大せん断力は、短辺方向有効スパン  $l_x$  と分布荷重  $p$  を用いて、

$$Q = \frac{p \cdot l_x}{2}$$

と表すことができる。よって、スパンと分布荷重の変化より、最大せん断応力の変化は以下の式となる。

$$\frac{Q'_x}{Q_x} = \frac{Q'_y}{Q_y} = \frac{1}{k_x^{1/4}} \frac{p'}{p}$$

Fig. 27 に分布荷重の変化がないと考えた場合 ( $p' / p = 1.0$ ) の最大せん断力の変化を破線で、分布荷重を自重のみ ( $w_p = 0$ ) と考えた場合のその変化を実線で示す。孔が大きくなると分布荷重の減少によりせん断力は減少し、その割合は最大モーメント  $M_y$  の変化 (Fig. 22) と同程度であることがわかる。積載荷重を考えた場合には、Fig. 22 と同様に分布荷重の変化 (Fig. 18) により増加する。

#### 4.5 最大せん断応力の変化

せん断応力度の分布が面内一定であると仮定すると、その変化率は、各方向のせん断力の変化率を断面積の比で割ることにより得られる。Fig. 28 に示すように孔断面積が  $x$  面については矩形面積より孔の面積を引いた値として、 $y$  面についてはの中心を通る断面について考えるものとする、断面積の変化率は次式のように表される。

$$\frac{A'_x}{A_x} = 1 - \frac{\pi}{4} \phi^2, \quad \frac{A'_y}{A_y} = 1 - \phi$$

よって、平均せん断応力度の変化率は以下のように表すことができる。

$$\frac{Q'_x / Q_x}{A'_x / A_x} = \frac{p'}{p} \frac{1}{k_x^{1/4}} \left(1 - \frac{\pi}{4} \phi^2\right)^{-1} \quad (27)$$

$$\frac{Q'_y / Q_y}{A'_y / A_y} = \frac{p'}{p} \frac{1}{k_x^{1/4}} \frac{1}{1 - \phi} \quad (28)$$

このせん断応力度変化の値は、スラブの境界部における垂直方向の切断面に生じる値となっている。一方、2 章で示したように孔の周辺では応力集中が生じている。この応力集中によるせん断応力度を求める。

RC 規準 9 条 ((25)、(26)式) より  $|M'_{y1}| > |M'_{y2}|$  であるから、せん断強度評価係数  $\sqrt{2} \gamma$  に掛ける  $\sigma_0$  は以下ようになる。

$$\sigma_0 = \frac{6 |M'_{y1}|}{t^2} = \frac{1}{4t^2} \frac{l_x^2}{\sqrt{k_x}} p'$$

無孔スラブの平均せん断応力度を  $\tau$  で表せば、

$$\tau = \frac{Q_y}{t} = \frac{p l_x}{2 t}$$

であるから、応力集中による最大せん断応力度と平均せん断応力度の比は以下ようになる。

$$\frac{\sqrt{2} \gamma \sigma_0}{\tau} = \frac{\gamma}{\sqrt{2} k_x} \frac{p' l_x}{p t} \quad (29)$$

Fig. 29 に平均せん断応力度の変化率 ((27)、(28)式) と応力集中によるせん断応力度の変化率 ((29)式) を示す。図中、 $\tau_x$  は(27)式、 $\tau_y$  は(28)式、 $\tau'_y$  は(29)式を示している。

ただし、応力集中によるせん断応力度の変化率は短辺方向有効スパン長さを板厚で割った値 ( $l_x/t$ ) の関数となっているが、比較のため、その値を 30.0 と仮定している。それぞれについて、分布荷重の変化がないと考えた場合 ( $p'/p = 1.0$ ) の値を破線で分布荷重を自重のみ ( $w_p = 0$ ) と考えた場合の値を実線で示す。

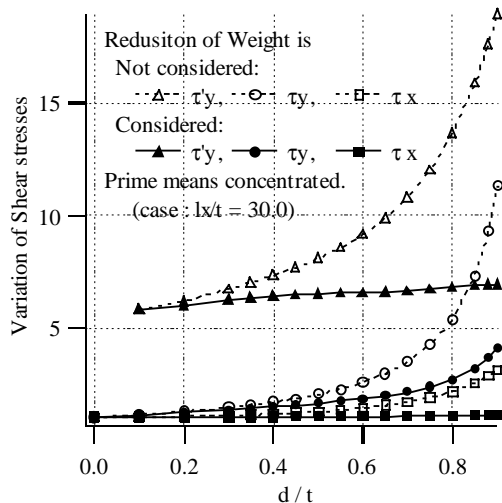


Fig. 29 Variation of Shear Stresses

応力集中により生じる最大せん断応力度は、鉛直面の平均せん断応力度に比べ非常に大きな値となっているが、その値は、分布荷重の変化を考慮した場合 (図中の実線) には、孔直径 - 板厚比 ( $\phi = d/t$ ) に関わらず、殆ど同じ値となることがわかる。なお、松井 (1984) の示すせん断の場合の応力集中率が孔直径 - 板厚比により大きく変化しているのは、Fig. 29 の破線 (つまり分布荷重に変化がないと考えた場合) に相当すると考えられる。

孔直径 - 板厚比に関する、この分布荷重の変化を考慮した最大せん断応力度の変化が直線的であることから、以下のような評価式を考えることが出来る。

(29)式の短辺方向有効スパン長さを板厚で割った値 ( $l_x/t$ ) を 1.0、分布荷重が自重のみ ( $w_p = 0$ ) であると考えた場合の孔直径 - 板厚比によるその変化を Fig. 30 に記号  $\gamma$  で示す。これらの値を孔直径 - 板厚比  $\phi$  に関する一次式として以下の近似式を作成し、図中に直線で示す。

$$\tau'_y/(l_x/t) = 0.039\phi - 0.198$$

上式に、短辺方向有効スパン長さを板厚で割った値 ( $l_x/t$ ) と、積載荷重の変化を与える式を掛けることにより、応力集中による最大せん断応力度の評価式が導ける。

$$\tau_{\max} = (0.039\phi - 0.198) \frac{l_x}{t} \frac{\gamma t (1 - \frac{\pi}{4} \phi^2) + w_p}{(\gamma t + w_p) (1 - \frac{\pi}{4} \phi^2)} \quad (30)$$

この値がせん断許容応力度  $F_c/30$  より小さければよいことになる。

ただし、本論において、せん断強度評価係数  $\gamma$  の値は、7

ユニットを繋げた両端固定梁の数値解析より、面内方向応力とせん断応力度の関係として得られたものである。スラブはスパンが長くなるに従い、曲げ応力度が大きくなることから、この係数は梁スパンが 7 ユニットより長いとき、せん断応力度を過大に評価するとも考えられるが、厳密には定かではない。パラメトリックな数値解析により係数  $\gamma$  を評価する必要があると考えられる。

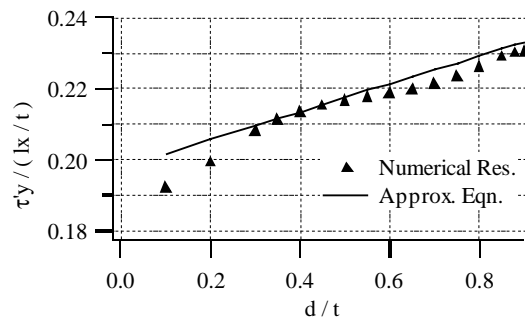


Fig. 30 Generalized ratio of stress concentration

#### 4.6 ボイドスラブの弾性力学的性状

本章では、ボイドスラブの力学的な性状を、鉛直変位および断面力、応力度についてまとめた。鉛直変位および断面力は、剛性の低下よりも分布荷重 (特に自重) の低下による影響が大きく、孔が大きくなるほど、これらは小さくなるのがわかる。変断面のために生じる面内方向応力度の集中は、孔の真上 (真下) で生じ、孔直径 - 板厚比が 0.5 ~ 0.6 より大きくなると無孔スラブのその応力度より大きくなるのがわかる。また、せん断応力度の応力集中度は非常に高く、設計において支配的な要素であることが確認できる。しかしながら、この値は孔直径 - 板厚比についてほぼ線形に変化し、急激な変化をするものではないこともわかる。

なお、本章で示したせん断応力度は、スラブの境界部に於けるものであり、円孔ボイドを境界部より少しスラブ側に入ったところから配置すれば、スラブの面的な中心からの距離との比によりこの値は減少することは明らかである。

#### 5. 円孔ボイドスラブ厚さ算定式

本章では、RC 規準に示されている周辺固定のスラブ厚さの算定式 (以後、RC 規準式と呼ぶ) 導出と同等な手法により、本論で対象としている円孔ボイドスラブ厚さ算定式の導出を行う。設計規準式の導出は、設計者の利便性を第一に考えているため、数値的な近似式を多数含み、式に含まれる変数の単位に気を付けて使用する必要がある。当該構造物の算定式の導出では、RC 規準式の導出時に使用している近似式も使用するため、本章では初めに RC 規準式導出の概要 (岡田ら (2001) による定式化を参考にした)

を示し、その後、当該構造物のスラブ厚算定式の導出を行う。

### 5.1 RC 規準式の誘導

周辺固定スラブの中央弾性たわみの略算式として、スラブを直交する2つの梁に置き換え、両方向の荷重分担率を決める Grashof - Rankine の方法により、以下の式を採用する。

$$\delta_e = \frac{1}{32} \frac{\lambda^4}{1 + \lambda^4} \frac{w l_x^4}{E t^3} = \frac{3}{8} \alpha \frac{w l_x^4}{E t^3}, \quad w = \gamma t + w_p \quad (31)$$

ここに、

- $t$ : スラブ厚、 $E$ : コンクリートヤング係数
- $l_x, l_y$ : 短辺および長辺有効スパン、 $w$ : 全荷重
- $\gamma$ : コンクリート部材の単位容積重量
- $w_p$ : 仕上荷重 + 積載荷重、 $\lambda$ : 辺長比 ( $= l_y / l_x$ )

この値が、短辺有効スパンの4000分の1となる(クリープにより中央弾性たわみが16倍となっても、短辺有効スパンの250分の1に収まる)ときのスラブ厚 $t$ を求める。つまり以下の式を満たすスラブ厚 $t$ を求める。

$$\delta_e = \frac{3}{8} \alpha \frac{(\gamma t + w_p) l_x^4}{E t^3} = \frac{l_x}{4000}$$

スラブ厚 $t$ に関して以下のように整理する。

$$t^3 + 3pt + 2q = 0 \quad (32)$$

$$p = -500\alpha \frac{l_x^3}{E} \gamma, \quad q = -750\alpha \frac{l_x^3}{E} w_p \quad (33)$$

この形式の3次方程式は Cardano により解が求められており、

$$s = \frac{p^3}{q^2} = -\frac{2000}{9} \alpha \frac{l_x^3}{E} \frac{\gamma^3}{w_p^2} \quad (34)$$

とするとき、

$$t = (-q)^{1/3} \left\{ (1 - \sqrt{1+s})^{1/3} + (1 + \sqrt{1+s})^{1/3} \right\}$$

として得られる。ただし、判別式  $(1+s)$  が正または0の時のみである。このため、 $l_x$  に解の範囲の制限が生じる。詳細は述べないが、通常のスパンの範囲(12~13mまで)では成り立っており、 $s$  の値として-1.0~0.0 を考えればよい。

この $s$ の範囲において以下の近似式を導入する。近似式の精度を Fig. 31 に示す。

$$\left\{ (1 - \sqrt{1+s})^{1/3} + (1 + \sqrt{1+s})^{1/3} \right\} \cong 2^{1/3} - \left( \frac{s}{2} \right)^{1/3} \quad (35)$$

よって、

$$t \cong (-q)^{1/3} \left\{ 2^{1/3} - \left( \frac{s}{2} \right)^{1/3} \right\}$$

上式に(33)、(34)式を代入し整理すると、

$$t = \left( \frac{750}{E} \right)^{1/3} \alpha^{1/3} l_x \left\{ (2w_p)^{1/3} + \left( \frac{2000}{9E} \right)^{1/3} \alpha^{1/3} l_x \gamma (2w_p)^{-1/3} \right\} \quad (36)$$

ここで、以下の近似式を導入する。近似式の精度を Fig. 32、Fig. 33 に示す。(ただし、 $w_p$  の単位は  $\text{kgf/cm}^2$  である)

$$(2w_p)^{1/3} = 0.3(1 + 10w_p) \quad (37)$$

$$\alpha^{1/3} = 0.46 \left( \frac{\lambda - 0.7}{\lambda - 0.6} \right) \quad (38)$$

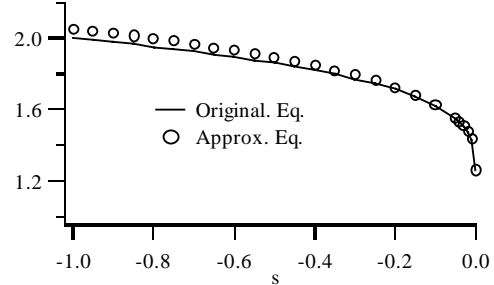


Fig. 31 Accuracy of equation (35)

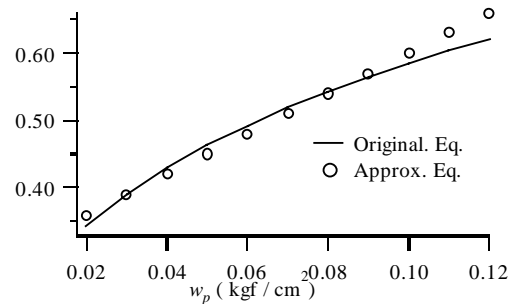


Fig. 32 Accuracy of equation (37)

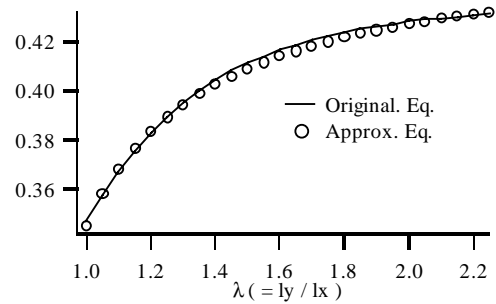


Fig. 33 Accuracy of equation (38)

これらを代入し整理すると、

$$t = \left( \frac{750}{E} \right)^{1/3} 0.46 \times 0.3 \left( \frac{\lambda - 0.7}{\lambda - 0.6} \right) l_x \times \left\{ 1 + 10w_p + \left( \frac{2000}{9E} \right)^{1/3} \frac{0.46\gamma}{0.3^2} \left( \frac{\lambda - 0.7}{\lambda - 0.6} \right) l_x \right\}$$

ここでヤング係数  $E = 2.1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ 、単位容積重量  $\gamma = 2.4 \times 10^{-3} \text{ kgf/cm}^2$  とすると、

$$\left( \frac{750}{E} \right)^{1/3} 0.46 \times 0.3 \cong 0.021094 \cong 0.02$$

$$\left(\frac{2000}{9E}\right)^{1/3} \frac{0.46\gamma}{0.3^2} \cong 0.00125$$

また、 $w_p$  と辺長比 $\lambda$ の関数部である以下の項について、

$$\frac{\left(\frac{\lambda-0.7}{\lambda-0.6}\right)}{(1+10w_p)} \cong \frac{1}{1.25}$$

と考えることにより、周辺固定スラブ厚さの RC 規準式が以下のように得られる。

$$t = 0.02 \left(\frac{\lambda-0.7}{\lambda-0.6}\right) l_x \left\{1+10w_p + \frac{l_x}{1000}\right\} \quad (39)$$

## 5.2 円孔ポイドスラブの厚さ算定式

前節の無孔スラブと異なる点と考えるのは、各方向の有効スパンが、 $k_x^{-1/4}l_x$ 、 $k_y^{-1/4}l_y$  となる、分布荷重が孔のため減少するの 2 点である。

ところで、ポイドスラブを設計・施工する場合、かぶり厚さを最初に仮定し、スラブ厚を求めることが最良であると考えられる。しかしながら、かぶり厚さを仮定し、スラブ厚  $t$  についての方程式の解を近似的に表すことは非常に困難であるため、本論では孔直径 - 板厚比 ( $d/t$ ) を初期値として与え、それに対応するスラブ厚  $t$  を求めることとする。つまり、本来、孔直径 - 板厚比はスラブ厚  $t$  の関数であるが、 $t$  の関数でないとする。分布荷重  $w$  は以下のように変化する。

$$w' = \gamma t \left(1 - \frac{\pi}{4} \phi^2\right) + w_p \quad (40)$$

有効スパンが孔により変化したときの辺長比を $\lambda'$ とすると、

$$\lambda' = \frac{k_y^{-1/4} l_y}{k_x^{-1/4} l_x} = \frac{k_x^{1/4}}{k_y^{1/4}} \lambda$$

であり、これらの記号を用いて、円孔ポイドスラブの周辺固定時中央弾性たわみ式(31)は以下のように表すことが出来る。

$$\delta_{ev} = \frac{1}{32} \frac{(\lambda')^4}{1+(\lambda')^4} \frac{w' k_x^{-1} l_x^4}{Et^3} = \frac{3}{8} \beta \frac{w' l_x^4}{Et^3} \quad (41)$$

ここに、

$$\beta = \frac{1}{12} \frac{\lambda^4}{k_y + k_x \lambda^4} \quad (42)$$

である。RC 規準式の導出時に用いた $\alpha$ に対応している。短辺方向有効スパンの 4000 分の 1 となる条件を用いると、RC 規準式の導出時と同じくスラブ厚 $t$ に関する 3 次方程式となり、(36)式の $\alpha$ を $\beta$ 、 $\gamma$ を $\gamma(1 - \pi\phi^2/4)$ と置き換えることで $t$ に関する解が以下のように得られる。

$$t = \left(\frac{750}{E}\right)^{1/3} \beta^{1/3} l_x \times \left\{ (2w_p)^{1/3} + \left(\frac{2000}{9E}\right)^{1/3} \beta^{1/3} l_x \gamma \left(1 - \frac{\pi}{4} \phi^2\right) (2w_p)^{-1/3} \right\} \quad (43)$$

$\alpha^{1/3}$ の近似式(38)を参考にして、以下の $\beta^{1/3}$ に関する近似式を導入する。なお、 $\beta$ に含まれる $k_y$ は第2章で示した $\phi$ に関する7次の多項式(8)、 $k_x$ は(9)式を用いている。(精度を Fig. 34 に示す)

$$\beta^{1/3} \cong 0.46(1+0.37\phi^5) \left(\frac{\lambda-0.7}{\lambda-0.6}\right) \quad (44)$$

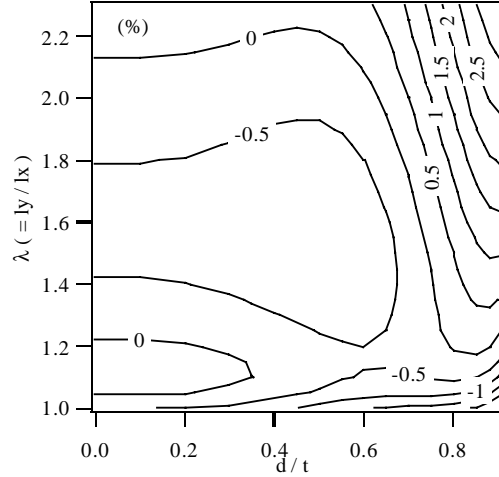


Fig. 34 Accuracy of equation (44), (% , v.s. approximate equation)

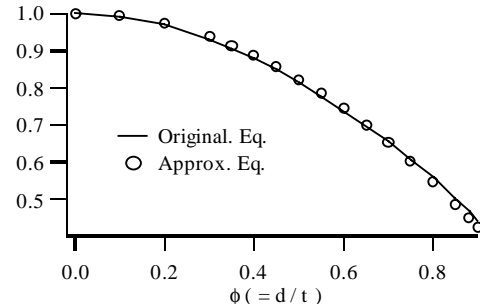


Fig. 35 Accuracy of equation (45)

RC 規準式で用いた近似式(37)、新たに導入した近似式(44)およびRC規準式の作成時に用いた諸量を(43)式に代入すると、

$$t = \left(\frac{750}{E}\right)^{1/3} 0.46 \times 0.3 \left(\frac{\lambda-0.7}{\lambda-0.6}\right) l_x (1+0.37\phi^5)$$

$$\times \left\{ 1+10w_p + \left(\frac{2000}{9E}\right)^{1/3} \frac{0.46\gamma}{0.3^2} \left(\frac{\lambda-0.7}{\lambda-0.6}\right) l_x (1+0.37\phi^5) \left(1 - \frac{\pi}{4} \phi^2\right) \right\}$$

より、

$$t = 0.02 \left(\frac{\lambda-0.7}{\lambda-0.6}\right) l_x (1+0.37\phi^5)$$

$$\times \left\{ 1+10w_p + \frac{l_x}{1000} (1+0.37\phi^5) \left(1 - \frac{\pi}{4} \phi^2\right) \right\}$$

ここで以下の近似を行う。(精度を Fig. 35 に示す)

$$(1+0.37\phi^5) \left(1 - \frac{\pi}{4} \phi^2\right) \cong 1 - 0.71\phi^2 \quad (45)$$

以上より、等間隔の円孔を持つスラブの厚さの算定式は以下のように RC 規準式(39)の一部に孔直径 - 板厚比 $\phi$ の多項式が入った式として求められる。

$$t = 0.02 \left( \frac{\lambda - 0.7}{\lambda - 0.6} \right) l_x (1 + 0.37\phi^5) \left\{ 1 + 10w_p + \frac{l_x(1 - 0.71\phi^2)}{1000} \right\} \quad (46)$$

### 5.3 孔による有効スパン $l_x$ の増加

ポイドスラブは自重を減らすことでスパンを大きくすることが出来るといわれている。前節で示したスラブ厚算定式を用いて、その検証を行う。スラブ厚  $t$ 、孔直径 - 板厚比 $\phi$ 、辺長比 $\lambda$ 、および積載荷重  $w_p$  を与えると(46)式より有効スパン  $l_x$  を得ることが出来る。

孔直径 - 板厚比および辺長比により、短辺方向有効スパン  $l_x$  がどのように変化するかを、(i)板厚が一定で積載荷重が変化する場合と、(ii)積載荷重が一定で板厚が変化する場合の2つの場合に分けて考察する。

#### (i) 板厚が一定で積載荷重が変化する場合

板厚が一定で積載荷重が変化する場合の、有効スパンの増加率の変化を孔直径 - 板厚比および辺長比について Fig. 36 に示す。孔がない場合の有効スパンより何%大きくすることができるかを示している。積載荷重が増加するほどスパンの増加率は減少するが、孔が大きいほど有効スパンが増加するのではなく、板厚が一定の場合、ある孔直径 - 板厚比の値で最も有効スパンを大きくすることができ、その値は辺長比により殆ど変化することがないことがわかる。

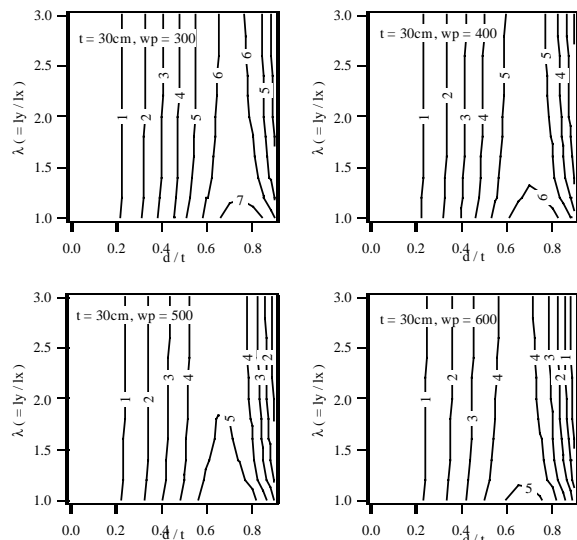


Fig. 36 Expansion of effective span  $l_x$  (% , constant plate thickness, varied live loads)

#### (ii) 積載荷重が一定で板厚が変化する場合

積載荷重が一定で板厚が変化する場合の、有効スパンの増加率の変化を孔直径 - 板厚比および辺長比について Fig. 37 に示す。孔がない場合の有効スパンより何%大きくする

ことができるかを示している。板厚が増加するほど、有効スパンは大きくなることわかる。また、(i)の板厚が一定の時には変化しなかった最もスパンの増加を見込める孔直径 - 板厚比の値は、板厚の増加とともに大きくなっていくことがわかる。

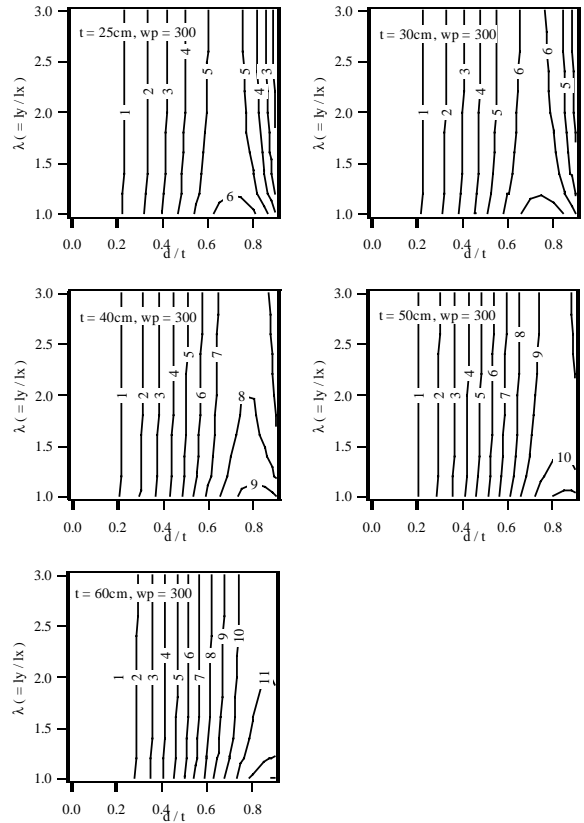


Fig. 37 Expansion of effective span  $l_x$  (% , constant live load, varied plate thicknesses)

## 6 . まとめ

本論では、板厚と同じ間隔で等間隔に並ぶ円孔ポイドスラブについて、初めに、剛性および応力集中の評価を行い、導入した評価係数(正確にはポイド孔直径 - スラブ厚比の関数)を用いて直交異方性板として解析できることを示した。続いて、直交異方性板を等方性板として解析できることを示し、そこから導かれる解析的な式を用いて、有効スラブと無孔スラブの弾性力学的な性状の違いを述べた。また、RC 規準と同等な手法によりスラブ厚の算定式を導出し、孔の大きさによる有効スパンへの影響を調べた。

本論で扱っている円孔ポイドスラブは、3章で示した通り、同じ厚さの通常のスラブのスパンを少し大きくし、自重を減少させたものと、応力度レベルを除くと、同一であると考えられる。このような考え方でポイドスラブの全体像を理解し、その後、応力集中を評価すればよい。

本論では、板厚とポイド管の中心間隔が等しいものを対象にしているが、これらを独立な変数とし、2章で示した

手順により本論中の剛性、応力集中評価係数等を数値解析的に求めることも可能である。

なお、ここで示した結果は線形理論の範囲に於けるものであり、終局耐力や変形性能などを評価するものではない。これらの評価については、今後、実験等を通じ明らかにしていく。また、本論では、せん断力の応力集中をせん断応力度の最大値として評価したが、本論中にも述べているように、パラメトリックな数値解析を通して主応力度により評価する必要があると考えられる。このせん断強度評価係数を含む本論で示した評価係数は、ポイドスラブを力学的な合理性により設計たらしめているポイド管の剛性を評価せず導出したものであり、この剛性を考慮すればより実状に近い設計式を提案できると考えられる。これらのことも今後の課題としたい。

#### 謝 辞

本研究を進めるにあたり、フジモリ産業株式会社に多大なるご支援を頂いた。記して感謝の意を表します。また、本研究の一部は國枝治郎・本学名誉教授が防災研究所に在籍された期間に共同で行ったものである。

#### 参考文献

入江善久 (1973) : 中空スラブのせん断性状に関する研究 (その1) せん断応力集中についての考察、日本建築学会論文報告集、第 213 号、pp21-28

入江善久・松井源吾 (1994) : ポイドスラブのせん断強度に関する実験的研究 (その1) 正方形スラブについての予備実験、日本建築学会大会学術講演梗概集、pp635-636  
岡田克也・岡本晴彦・太田義弘 (2001) : 鉄筋コンクリートスラブのたわみ制御を目的とした最小厚さ算定式、日本建築学会構造系論文集、第 539 号、pp.95-102  
藤本敬之 (1996) : 正方形中空スラブのせん断破壊に関する実験的研究、日本建築学会構造系論文集、第 490 号、pp169-177  
半谷裕彦著 (1995) : 平板の基礎理論、平板構造シリーズ 1、彰国社  
森村毅・藤谷義信 (1988) : せん断破壊する正方形中空スラブの荷重変形曲線直交異方性鉄筋コンクリートスラブの荷重変形特性に関する実験および解析的研究 (Part 3) 日本建築学会構造系論文集、第 389 号、pp88-98  
日本建築学会 (1991) : 鉄筋コンクリート構造設計規準・同解説  
松井源吾編著 (1984) : 二方向中空スラブの実施例、建築技術、No. 392、pp55-56  
松井源吾編著 (1988) : 中空スラブの計画と設計、彰国社  
松井源吾・塚越治夫 (1991) : 垂直せん断を受ける中空スラブのせん断応力集中 中空スラブのせん断応力に関する研究 (その1) 日本建築学会構造系論文集、第 421 号、pp109-116

## Characteristics of Elasticity of Circular Hole Void Slab and Derivation of Design Code of Its Thickness

Shigehiro MOROOKA

### Synopsis

In the first part of this paper, the characteristics of the bending rigidity of the void slab and stress concentrations are confirmed and clarified by direct numerical method. These characteristics are estimated by the coefficients that are obtained in accordance with void diameter-thickness ratio. In the second part, it is shown that this ortho-tropic slab can be treated as an isotropic slab. Using the analytical equation, the difference between characteristics of elasticity by the existence of the hole such as the vertical displacement is described. Finally, the design code of the slab thickness is deduced by the technique which is equivalent to the derivation of the RC standard, and the effect on the effective span by the size of the hole is examined.

**keywords:** circular hole, void slab, stiffness estimation, stress concentration, ortho-tropic, design code