

## 地下水流況推定における地盤統計学的アプローチの効用

浜口 俊雄

### 要 旨

水位観測情報が不足した状況下において地下水流況を把握するため、水位観測データとそれに相関性のある基盤高のボーリングデータから水位分布を cokriging 推定した。すると相互相関係数の変化から、cokriging の推定システムが基盤高との相互相関性を補助観測データとして活用して分布推定していることが見て取れた。cokriging は推定精度の低下を最小限に抑える効用があり、FEM より良好で妥当な推定分布を算出することが分かった。

キーワード：地下水位，基盤高，地盤統計学，コクリギング，相互相関性

### 1. 序論

或る時刻の地下水位の空間分布を観測井の計測水位データから推定することは地下水の流況管理において重要な資料となる。しかし観測井の幾つかが計測不能に陥る、または、初めから観測数が少ない場合、観測情報の不足から推定精度の低下が生じることは想像に難くない。例えば、観測数の少ない条件下で、有限要素法などによる数値シミュレーションを行った場合を想定してみよう。そのシミュレーションが計測値と一致するように再現できたとしても、計測数が少ない状態であることを思い起こせば全体の信憑性が高いとは言い切れない。よって、少ない情報を如何に活用して信頼性が向上するよう情報を増やすか、または、他の情報を如何にうまく取り込むかが思案のしどころとなる。そこで本研究では、水位分布推定に対して地盤統計学的アプローチに着目し、上記問題での精度低下の緩和を期待して、不透水性基盤層標高(以降、基盤高と呼ぶ)との相互相関性が補助的に最大限活用できる cokriging (Journel and Huijbregts, 1978) を採用する。

ところで上記アプローチは推定域を、観測値が拘束条件となった条件付き確率場としてとらえ、それを空間分布関数のかたちで求める手法である。この手法とその結果は様々な特徴を有しているため、その特徴を活かせば

上記以外の諸問題にも活用できる。例えば、得られた推定値がその曖昧さを推定誤差値のかたちで推定値とともに評価されていることを踏まえれば、信頼度の付帯する一種の観測値と見なして逆解析にも容易に用いる事ができる。また単純に非定常な数値シミュレーションの初期値として活用することもできる。このように現象解析への用途も広いだけに、情報不足を解消する本手法の確立が早急に望まれる。

以上を念頭に置いて、本稿では同手法が発揮する補助データ活用の効力の程や妥当性を検証すべく、水位観測データを段階的に減少させた数値実験を行う。その実験では、不圧の広域地下水を対象として、筆者らが以前に提唱した式(1)の擬似地下水位 $\bar{h}$ を利用(浜口ら, 1997a)し、貯留地下水の渚線がなす移動境界を考慮することで地下水が貯留されている領域も特定する。Fig.1には平面地下水解析における移動境界の概念図を示す。ここに図中の $V_F^s$ は貯留域、 $V_E^s$ は非貯留域(不飽和受水域とも呼ばれる)、 $V_F^s$ の周囲の太線部 $S_i$ は地下水渚線である移動境界を表す。

$$\bar{h} = s + (h - s) \cdot u(h - s) \quad (1)$$

ここに、 $h$ ：地下水位、 $s$ ：基盤高、 $u(\bullet)$ ：単位階段関数を表す。Fig.2は、Fig.1上の $S_i$ 周辺域における鉛直断面において、式(1)が示す概念を図化したものである。

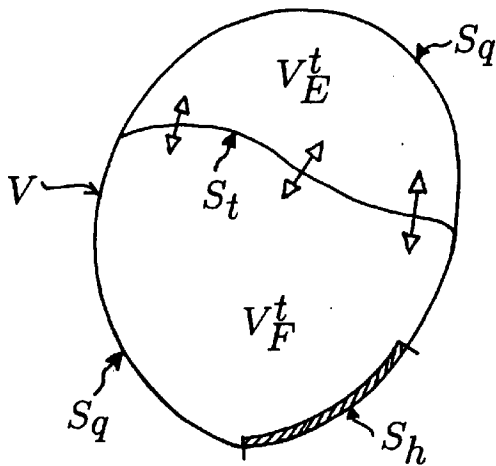


Fig.1 Schematic of moving boundaries

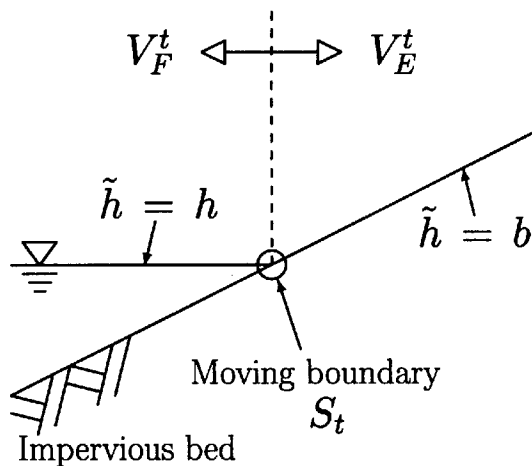


Fig.2 Schematic of  $\tilde{h}$

## 2. 地盤統計学的手法の効用

地下水に限らず、地盤工学や水文学の一般分野に携わる技術者や研究者は、現場の散在した計測値から或る空間変量の分布を急ぎ補間推定する必要性に迫られることがある。そういった局面を打破する手段は2通り考えられる。一つは、求めるべき空間分布の変量が含まれた地盤現象モデルないしは水文現象モデルを介した「現象モデル的アプローチ」である。もう一つは、変量の空間分布を確率場と見なし、同変量が確定量(平均値)と不確定量(確率変動値)の和からなる確率変量として扱う地盤統計モデル(Geostatistical model)を介した「統計モデル的アプローチ」である。

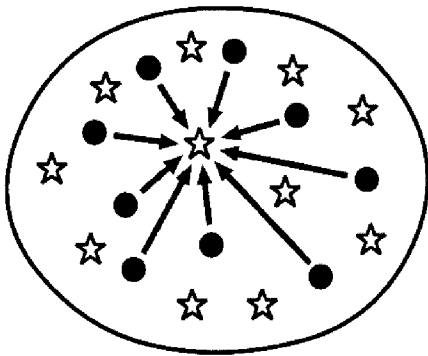
現象モデル的アプローチの場合、考える変量が一範囲でなく一点で評価される空間パラメータならば、計測値から物性値を同定した後、シミュレーションによってその変量

の空間分布を推定することになる。あるいは、その変量が一点でなく一範囲で評価される空間パラメータならば、それに当てはまる分布状態を同定することになる。加えて、こうして得られた結果では、計測値と現象モデルでの評価値が一致するとは限らない。むしろこの両者を一致させるのは稀であり、至難の業である。これは以下の要因による。現象モデルの構造は理論展開で導出された決定論的なものであり、計測値で変化するような柔軟性は持ち合わせていない。モデルの柔軟性はその物性値に備わっているものであり、従って複雑な実現象から物性値の現実とまるで同じ空間分布を同定する必要が生じる。しかし、そのような精密な分布を求めることは極めて困難である。まして数値解析に使う離散化モデルであれば、ある程度のモデル化誤差(浜口ら, 1997b)を含んでくることは覚悟せねばならない。こうしたモデル化誤差が要因となって、モデル評価値は計測値に一致しづらくなるのである。

これに対して統計モデル的アプローチでは、考える変量がどんなパラメータであろうとも、その空間分布推定の行程は唯一である。同手段は、その変量を確率場の変量として扱うとともに、その計測データを標本場の一部として扱い、これを基にした条件付き確率場として未知な状態の空間分布を推定する。故に、計測値は統計モデルの評価値と必ず一致する。これは統計モデルに十分な柔軟性のある不確定量が組み込まれていることに依る。本研究では、観測データに極力沿ったかたちで実現象を再現するには、統計モデル的アプローチの方が適切であると判断した。

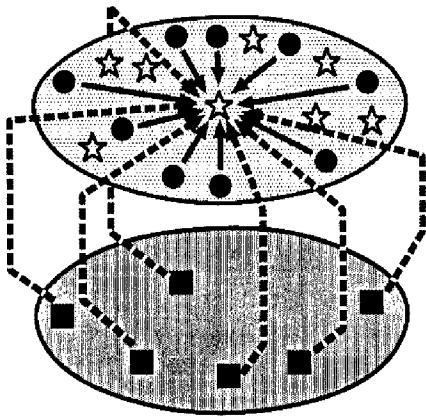
## 3. Kriging/Cokriging の概念

まず本稿で用いる Kriging/Cokriging の概略について述べる。地盤統計学に基づく推定手法として基本的かつ代表的なものが Kriging と呼ばれる手法である。これは一変量を対象として推定する理論であり、その呼称は提案者 Krige の名に因んでいる。Krige の提案を受けて Matheron(Matheron, 1963) が理論的に定式化を行い、Journel・Huijbregts(1978) がそれを鉱山工学に導入した結果、地盤統計学として認知され、発達するとともに同分野の発展に大きく寄与した。その後水文学やその他の様々な分野にも普及していった。その発展過程で、Journel・Huijbregts(1978) は Kriging の拡張として、二変量以上の多変量を対象とした Cokriging と呼ばれる推定手法について論じている。次に、Kriging/Cokriging の特徴について述べる。前節でも述べたが、一般に Kriging では或る変量の空間分布を条件付き確率場と見なして、任意地



● Sampling (or Observed)  
 ☆ Estimated

Fig.3 Schematic of kriging estimation



● Sampling (or Observed) #1  
 ■ Sampling (or Observed) #2  
 ☆ Estimated

Fig.4 Schematic of cokriging estimation

点での推定量を求めていく。そのKriging推定概念をFig.3に示す。●印は計測位置を表し、☆印は推定位置を表す。個々の推定値は矢印のように全計測値との相関関係から求められる。これに対して、一般にCokrigingでは、一変量の空間分布ばかりでなく、相互に相関性があるような他の幾つかの変量の空間分布も条件付き確率場と見なし、任意地点での推定量を求めていく。二変量のCokriging概念をFig.4に示す。●印、☆印はFig.3と同様で、■印はもう一つの計測位置を表す。個々の推定値は矢印のように自己の計測値と他方の計測値の両者の相関関係から求められる。

本稿の内容に沿ってこれらの手法を数式で記述すると以下ようになる。任意地点での基盤高の推定値 $s^*$ および水位の推定値 $\hat{h}^*$ はそれぞれ式(2)~(3)のような(多重)

線形結合式で求める。

・基盤高推定:

$$s^* = \sum_{j=1}^m \omega_j s_j \quad (2)$$

・水位推定:

$$\hat{h}^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{h}_i + \sum_{j=1}^m \nu_j s_j \quad (3)$$

$$\text{ただし, } \sum_{j=1}^m \omega_j = 1, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \sum_{j=1}^m \nu_j = 0, \text{ etc } (4)$$

ここに $s_j$ はボーリングによる基盤高の計測データ、 $\hat{h}_i$ は水位の計測データ、 $\omega_j$ 、 $\lambda_i$ 、 $\nu_j$ はそれぞれの計測データに対する重み係数、 $m$ はボーリング数、 $n$ は水位観測数を表す。このように各計測データ毎に重みをつけて総和したものを推定値としている。

#### 4. 統計モデル構造

KrigingやCokrigingは、確定量を表すモデル構造の違いから、幾通りかに分類される。中でも、モデル構造の汎用性が最も高いものはUniversal Kriging(UK)やUniversal Cokriging(UC)と呼ばれるものである。これは確定量を空間座標変数の多項式で表す方法である。さらにその確定量に最尤確定量を想定してやると、確定量はトレンド成分となり同多項式は重回帰式として帰着する。すなわち、UK/UC推定における空間分布のトレンド成分モデルは空間的な重回帰モデルに匹敵することがわかる。UK/UCはそのトレンド成分を基礎として、モデル誤差(残差)を定常確率過程に沿う不確定量(ランダム成分)として処理し、それをトレンド成分に加算して推定量を算出する手法である。それ故、UK/UCによる空間分布推定では、計測点においてUK/UC推定値と計測値が一致する。よって、UK/UCは重回帰分析に推定の柔軟性を補完した手法であると言える。なお、UK/UC推定に関する詳細な式展開や解説については付録1および2、またはJournal・Huijbregts(1978)や浜口ら(1998)を参照されたい。

本研究では、そのトレンド成分 $m(x)$ を空間変数 $x, y$ の1次元多項式(5)に言及した。

$$m(x) = b_1 + b_2 x + b_3 y \quad (5)$$

式(5)は、基礎方程式の厳密解を $x$ や $y$ でTaylor展開した整級数の高々1次の近似式とも解釈できる。またランダム成分は同展開の剰余量とモデル誤差との和に匹敵する。この成分がもつ自己/相互相関構造の関数 $R(d)$ として、一次元が等方性、二次元が異方性を示すような式(6)~(10)

の5通りを想定した。

・一次元指数型 :

$$R(d) = \exp\left\{-\frac{d_1}{a_1}\right\} \quad (6)$$

・一次元ガウス型 :

$$R(d) = \exp\left\{-\left(\frac{d_1}{a_1}\right)^2\right\} \quad (7)$$

・一次元球状型 :

$$R(d) = 1 - 1.5\left(\frac{d_1}{a_1}\right) + 0.5\left(\frac{d_1}{a_1}\right)^3 \quad (8)$$

$(0 \leq d_1 \leq a_1)$

・二次元指数型 :

$$R(d) = \exp\left\{-\sqrt{\left(\frac{d_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{a_2}\right)^2}\right\} \quad (9)$$

・二次元ガウス型 :

$$R(d) = \exp\left[-\left\{\left(\frac{d_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{a_2}\right)^2\right\}\right] \quad (10)$$

ここに、 $d_1, d_2$  : 各方向の二点間距離,  $a_1, a_2$  : 各方向の  
 相関距離を表す。これを基にして式(11)~(13)に掲げた  
 自己/相互共分散関数を考える。

$$C_{hh}(d) = \sigma_h^2 R(d) \quad (\sigma_h^2 : \text{水位分散値}) \quad (11)$$

$$C_{ss}(d) = \sigma_s^2 R(d) \quad (\sigma_s^2 : \text{基盤高分散値}) \quad (12)$$

$$C_{hs}(d) = \rho \sigma_h \sigma_s R(d) \quad (\rho : \text{相互相関係数}) \quad (13)$$

### 5. 情報量規準によるモデルの適合評価

Fig.5は、”実物”ないしは”実現象”であるプロトタイプ  
 に対して、解析モデルが様々当てはめられた状況を抽象  
 的に示したものである。本来、プロトタイプ(網掛け部)  
 の構造は未知なものであることが多い。これを解析する  
 場合、連続性、保存性、法則性といった理論的考察から派  
 生したような何らかの型にはまった解析モデル(太実線内  
 部)で表現しなければならない。すると図のように、モデ  
 ル構造上のズレが多かれ少なかれ必ず生じることになる。  
 一般論で言えば、このズレを直接計ることで個々のモデ  
 ルの適合度を調べればよいのだが、上述にもあるように  
 プロトタイプは未知なため、両者のズレを直接的かつ絶  
 対的に評価することは不可能と言える。しかし、プロト  
 タイプが唯一無二であって不変であることに留意すると、  
 ズレを表すモデル誤差評価式において、プロトタイプの  
 構造を示す項は定数と見なせることに気が付く。よって解  
 析モデル間の適合性の優劣だけでよいのであれば、モデル  
 誤差評価式の解析モデル構造を示す項だけを抽出し、比較  
 することでズレ(モデル適合度)の相対的評価が実現可能  
 となる。その指標が情報量規準(Information Criterion)

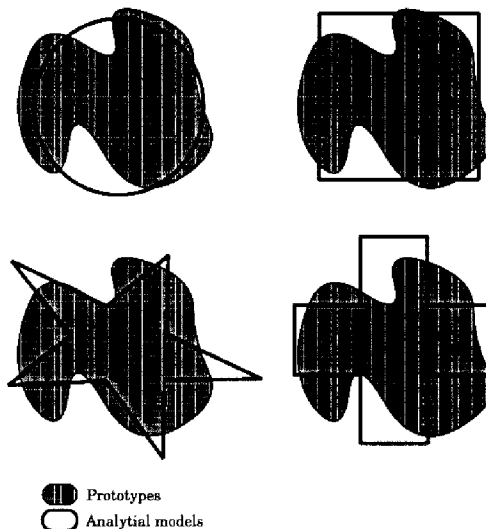


Fig.5 Given analytical models in good/bad agreement  
 with the unknown prototype

と呼ばれており、本稿でもモデルの適合度を判断する指  
 標として採用している。

本研究での統計モデルは、前節に挙げたとおり、1  
 通りのトレンドモデル(多項式表記)と5通りのランダ  
 ムモデル(相関関数表記)の組み合わせで、計5通りと  
 なる。いまUK/UC推定に先立ち、以下の様な一連の  
 統計モデル構造同定作業を行い、複数のモデルから最  
 適な統計モデルを選定する。まず各統計モデルに対し  
 てパラメータを最尤推定すると同時に、各モデル毎に  
 情報量規準値を算出する。本稿では以下に記すAIC:  
 赤池情報量規準(Akaike, 1974), BIC: ベイズ情報量  
 規準(Akaike, 1974; Schwarz, 1978; Rissanen, 1978),  
 $\phi$ (Hannan, 1980),  $d_M$ (Kashyap, 1982)の4規準を採用  
 (Carrera and Neuman, 1986)して、それぞれ算出する。

$$AIC = -2MLL + 2K \quad (14)$$

$$BIC = -2MLL + K \ln(N) \quad (15)$$

$$\phi = -2MLL + cK \ln(\ln(N)) \quad (16)$$

$$d_M = -2MLL + K \ln(N/2\pi) + \ln|F_M| \quad (17)$$

ただし、MLL: 最大対数尤度,  $K$ : パラメータ数,  $N$ :  
 全観測数,  $F_M$ : Fisher の情報行列を表す。また定数  $c$   
 には通常の設定値2を与える。

次に、同一規準内で、所与のモデル毎に規準値を大小  
 比較する。小さな値ほど適合度は高いと判断してモデル  
 間の相対的優劣をつける。この作業を各規準毎に行い、そ  
 れぞれに最小となるモデルをもって、各々の規準が判断  
 した最適統計モデルとする。その結果を用いてUK/UC  
 推定を行う。

Table 1 Ranked goodness of a fit with geostatistical models for a bedrock surface

共分散関数	AIC		BIC		$\phi$		$d_M$	
	値	順位	値	順位	値	順位	値	順位
一次元指数	451.74	2	463.52	2	456.46	2	456.78	2
一次元ガウス	535.93	4	547.71	4	540.65	4	540.85	4
一次元球状	448.15	1	459.93	1	452.87	1	452.88	1
二次元指数	452.43	3	466.57	3	458.09	3	458.70	3
二次元ガウス	537.03	5	551.17	5	542.69	5	542.99	5

## 6. 砂川地下水流況推定

### 6.1 基盤高分布推定

本稿では沖縄県宮古島砂川地下水盆を対象とした。まず、ボーリングデータ (Fig.6の丸印; 78箇所) に基づいて基盤高分布のモデル構造を同定した。その結果を Table 1に示す。同表から、どの規準からも最適な統計モデルの共分散関数は一次元球状型であるとわかる。このときの分布モデルの構造はトレンド関数  $m_s(x)$  および共分散関数  $C_{ss}(d)$  が式(18),(20)で表される。

$$m_s(x) = 19.513 - 0.011254x + 0.019620y \quad (18)$$

$$R(d) = 1 - 1.5 \left( \frac{d_1}{1949.9} \right) + 0.5 \left( \frac{d_1}{1949.9} \right)^3 \quad (0 \leq d_1 \leq 1949.9) \quad (19)$$

$$C_{ss}(d) = 77.863 \cdot R(d) \quad (20)$$

以上より求めた推定結果を Fig.6に示す。この結果を以降の地下水貯留域推定に活用する。

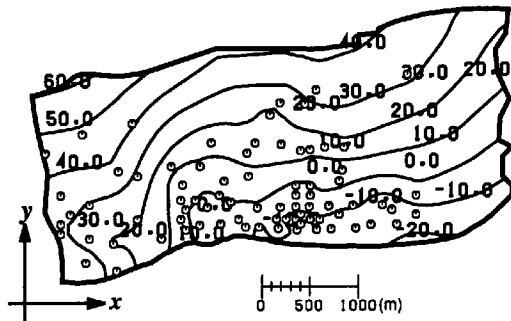


Fig.6 Contour map of kriged bed elevations

### 6.2 地下水流況 UC 推定

続いて貯留域を考慮した UC による  $\bar{h}$  の分布推定を試みた。1993年10月22日における貯留状況を対象として、水位観測データを当初88個から10個ずつ段階的に間引きしていったときの UC 推定の妥当性の推移について検討した。その際、計測誤差の含まれる可能性のある点、近傍に類似した観測結果の出る点の順で観測点群から除外していった。またこれらの該当点がなくなった後は、動水勾配の小さい周辺域から観測点を全体にまばらになるように除いていった。Table 2に、情報量規準毎・観測数毎の

Table 2 Ranked goodness of a fit with the cokriged water tables subject to some prescribed numbers of samples

n=88								
共分散関数	AIC		BIC		$\phi$		$d_M$	
	値	順位	値	順位	値	順位	値	順位
一次元指数	840.07	3	871.19	2	852.70	3	855.98	3
一次元ガウス	995.45	5	1028.57	5	1008.08	5	1009.13	5
一次元球状	825.35	1	856.47	1	837.98	1	840.85	1
二次元指数	837.93	2	872.16	3	851.82	2	854.55	2
二次元ガウス	985.08	4	1019.31	4	998.98	4	1001.20	4

n=68								
共分散関数	AIC		BIC		$\phi$		$d_M$	
	値	順位	値	順位	値	順位	値	順位
一次元指数	786.89	3	816.72	2	799.01	3	801.46	3
一次元ガウス	905.70	5	935.54	5	917.82	5	918.15	5
一次元球状	775.09	1	804.93	1	787.21	1	789.40	1
二次元指数	785.30	2	818.11	3	798.83	2	800.44	2
二次元ガウス	898.06	4	930.88	4	911.39	4	911.93	4

n=48								
共分散関数	AIC		BIC		$\phi$		$d_M$	
	値	順位	値	順位	値	順位	値	順位
一次元指数	691.37	3	719.73	3	702.89	3	704.45	3
一次元ガウス	794.43	4	822.79	4	805.95	4	805.26	4
一次元球状	681.26	1	709.62	1	692.78	1	694.09	1
二次元指数	687.35	2	718.55	2	700.03	2	700.89	2
二次元ガウス	795.69	5	826.89	5	808.37	5	808.05	5

n=28								
共分散関数	AIC		BIC		$\phi$		$d_M$	
	値	順位	値	順位	値	順位	値	順位
一次元指数	607.67	3	634.30	2	618.47	3	619.06	3
一次元ガウス	606.43	4	723.07	4	707.23	4	705.43	4
一次元球状	600.21	1	626.85	1	611.01	1	611.41	1
二次元指数	605.88	2	635.18	3	617.76	2	618.52	2
二次元ガウス	697.28	5	726.58	5	709.16	5	707.83	5

n=8								
共分散関数	AIC		BIC		$\phi$		$d_M$	
	値	順位	値	順位	値	順位	値	順位
一次元指数	501.31	3	525.86	2	511.19	2	510.49	3
一次元ガウス	581.39	4	605.94	4	591.27	4	588.35	4
一次元球状	497.85	1	522.39	1	507.72	1	507.05	1
二次元指数	501.30	2	528.30	3	512.16	3	510.35	2
二次元ガウス	575.91	5	602.91	5	586.78	5	583.80	5

モデル適合度の評価結果を示す。ただし、どの  $n$  の場合も同様の傾向を示したため、同表を含め以降は20個おきのデータ数の場合に言及し、論じていった。Table 2より、全規準にわたり、どの場合においても最適統計モデルの相関関数は一次元球状型であるという結論を得た。この際、同定された各最適モデル構造は以下の式群となった。

[UC 推定;  $n=88$  の場合]

$$m_h(x) = 35.347 - 0.0096701x + 0.0064130y \quad (21)$$

$$R(d) = 1 - 1.5 \left( \frac{d_1}{1804.4} \right) + 0.5 \left( \frac{d_1}{1804.4} \right)^3 \quad (0 \leq d_1 \leq 1804.4) \quad (22)$$

$$\sigma_h^2 = 21.104, \quad \rho = 0.4840 \quad (23)$$

[UC 推定;  $n=68$  の場合]

$$m_h(x) = 32.806 - 0.0091794x + 0.0083987y \quad (24)$$

$$R(d) = 1 - 1.5 \left( \frac{d_1}{1761.6} \right) + 0.5 \left( \frac{d_1}{1761.6} \right)^3 \quad (0 \leq d_1 \leq 1761.6) \quad (25)$$

$$\sigma_h^2 = 27.714, \quad \rho = 0.4579 \quad (26)$$

[UC 推定;  $n=48$  の場合]

$$m_h(x) = 31.505 - 0.0091739x + 0.0095018y \quad (27)$$

$$R(d) = 1 - 1.5 \left( \frac{d_1}{1753.0} \right) + 0.5 \left( \frac{d_1}{1753.0} \right)^3 \quad (0 \leq d_1 \leq 1753.0) \quad (28)$$

$$\sigma_h^2 = 25.597, \quad \rho = 0.5815 \quad (29)$$

[UC推定; n=28の場合]

$$m_h(x) = 30.851 - 0.0086734x + 0.0089743y \quad (30)$$

$$R(d) = 1 - 1.5 \left( \frac{d_1}{1797.1} \right) + 0.5 \left( \frac{d_1}{1797.1} \right)^3 \quad (31)$$

$(0 \leq d_1 \leq 1797.1)$

$$\sigma_h^2 = 33.928, \quad \rho = 0.6549 \quad (32)$$

[UC推定; n=8の場合]

$$m_h(x) = 29.773 - 0.0081057x + 0.0073762y \quad (33)$$

$$R(d) = 1 - 1.5 \left( \frac{d_1}{1873.4} \right) + 0.5 \left( \frac{d_1}{1873.4} \right)^3 \quad (34)$$

$(0 \leq d_1 \leq 1873.4)$

$$\sigma_h^2 = 29.862, \quad \rho = 0.7805 \quad (35)$$

これを基に最適モデル構造の水位分布をUC推定した。それぞれの場合の推定分布Fig.7~11に示す。ここに図中の丸印は水位観測井を表す。

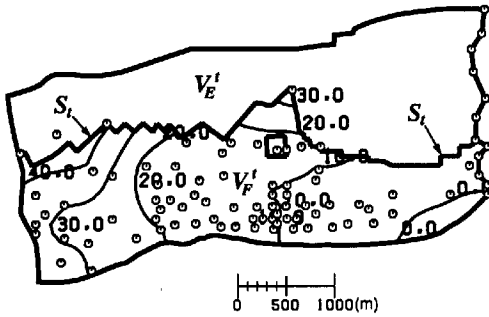


Fig.7 Contour map of cokriged water levels as n=88

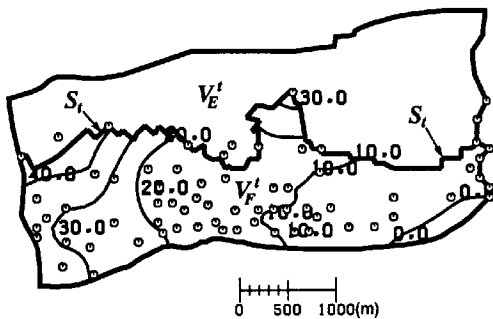


Fig.8 Contour map of cokriged water levels as n=68

また現象モデルとの比較のため、筆者が過去に提唱した移動境界を伴う非定常平面不圧地下水モデル(浜口ら, 1997)を用いて有限要素法(FEM)で解析した結果の一例もFig.12に示す。Fig.7~11で最も推定精度が高いと思われるFig.7とFEM解析結果のFig.12を比較してみると、両者の貯留域の形状や等水位線の形状が類似していることが伺える。よって、UC推定はFEMと同程度の再現性を有していると言える。ただし、Fig.12は上

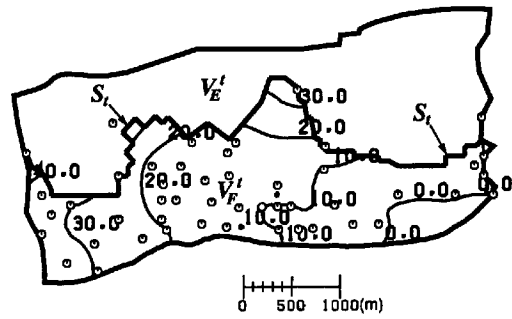


Fig.9 Contour map of cokriged water levels as n=48

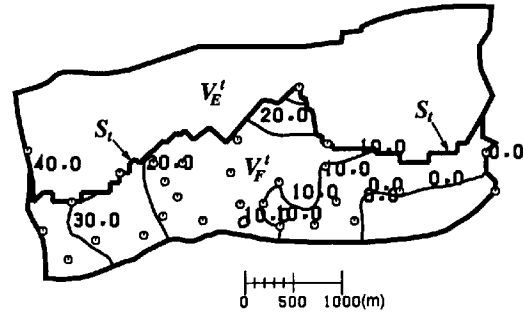


Fig.10 Contour map of cokriged water levels as n=28

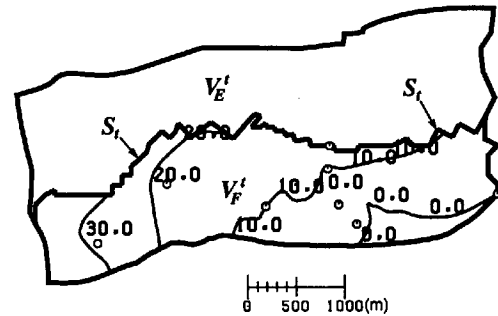


Fig.11 Contour map of cokriged water levels as n=8

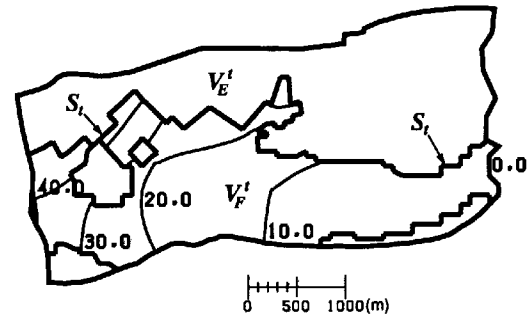


Fig.12 Result of the FEM analysis

流(図の左方や上方)側で滑らかでない渚線と一部不連続な貯留域を形成しているが、これは採用した現象モデルが移動境界を伴う非定常平面地下水モデルであることに起因する。このモデルは、通常の平面モデルに加え、降雨

等により発生した地下水涵養が時間効果も含めて上流域から貯留域に流入してくる流況も表現しているため、不連続な貯留域が地下水涵養量の加減で発生してしまうのである。

続いて、UC推定の結果どうしを比較検討する。例えば、Fig.7に比べてFig.9は上流側で渚線が凹形状になって貯留域が縮んだものの、他の部分はさほど推定精度は落ちていないことが伺える。これは上流域での観測データが不足してトレンド成分の空間勾配が緩やかになったために、その周辺の渚線は $n=88$ の場合より下流側に後退したと推察される。また $n$ が40も減少しているにも関わらず推定精度の低下が最小限にすんでいる点はUCで推定した効果といえる。すなわち、UC推定では不足する観測情報として、水位の代わりにそれと相関関係のある基盤高を重用した証しである。数字の上でも、UCの効果というもののがはっきりと現れている。最適統計モデルの相互相関係数が $n=88$ で0.4840であったのに対し、 $n=48$ では0.5815、さらには $n=8$ で0.7805となり、相互相関性への依存度が上がっていることが伺える。

## 7. 結論

本研究では、計測点配置が偏っているために一部で計測点間隔が大きくなる領域がある場合、または、計測点が全体的に不足している場合を想定して、UCによる空間分布推定について比較検討してみた。本稿の数値実験を通じて、UCでは、相互相関性のある他の変量の計測データが間接的な計測データに匹敵した働きをすることで、分布推定時に補助的な役割を果たすことを示せた。従って、観測情報が不足していてもUC推定を行えば、妥当性を損なわない程度に推定精度の低下を抑え、良好な所望の推定分布が得られると言える。

また、ここで示した成果は第1章でも述べたとおり、帯水層パラメータ同定などの逆問題や、地下水に及ばず水文一般現象の非正常シミュレーション初期値問題にも直接的に貢献できるのは明らかである。

今後は物理モデルへの適用拡充を行い、基本的には物理モデルで表されるが、物理モデルでは表現しづらい部分を統計モデルが補えるような統合モデルへの発展が期待できる。

## 謝辞

最後に本研究を進めるにあたり、緑資源公団宮古地下水ダム事業所の方々には貴重なデータを提供していただいた。記して感謝の意を表します。

## UKの定式化

UKでは、空間分布する物理量が統計モデルで表せると仮定し、その量はトレンド成分とランダム成分からなると想定する。いま、 $\mathbf{x}$ を空間座標ベクトルであるとする。位置 $\mathbf{x}$ における空間分布関数を $\phi(\mathbf{x})$ 、そのトレンド関数およびランダム関数をそれぞれ $m(\mathbf{x})$ 、 $w(\mathbf{x})$ で表すとき、

$$\phi(\mathbf{x}) = m(\mathbf{x}) + w(\mathbf{x}) \quad (\text{A1-1})$$

と書ける。UKでも後述のUCでも、ランダム関数のエルゴード性が確保されるようにトレンド関数を与えねばならない。次に、 $\phi(\mathbf{x})$ の推定値 $\phi^*(\mathbf{x})$ は重みを付けた計測値の総和で求まるものと仮定する。いま $p$ 個の計測値からなる計測値ベクトルを $\phi$ 、その重み係数ベクトルを $\lambda$ で表したとき、

$$\phi^*(\mathbf{x}) = \lambda^T \phi \quad (\text{A1-2})$$

となる。ここではトレンド関数に項数が $\ell$ 個の多項式を考える。その基底関数ベクトルを $f(\mathbf{x})$ 、その係数ベクトルを $b$ で与えると、

$$m(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})^T b \quad (\text{A1-3})$$

となる。ここで $\phi^*(\mathbf{x})$ が不偏推定量であると仮定すると、

$$E[\phi(\mathbf{x}) - \phi^*(\mathbf{x})] = 0 \quad (\text{A1-4})$$

が成立する。よって、

$$m(\mathbf{x}) = \lambda^T E[\phi] = \lambda^T F b \quad (\text{A1-5})$$

が成り立つ。ただし、 $F$ は計測点座標を代入した $f(\mathbf{x}_i)^T$ を縦に $p$ 個並べて出来る $(p \times \ell)$ 行列である。式(A1-3),(A1-5)から、

$$F^T \lambda - f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (\text{A1-6})$$

が恒等的に成り立つ。特にOrdinary Krigingの場合、 $f(\mathbf{x})$ はスカラーの1であることから、

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \quad (\text{A1-7})$$

が成立する。この場合の $\lambda$ に関する拘束条件は重み係数の総和を1とすることを意味しており、したがってUKの $\lambda$ に関する拘束条件式(A1-6)は条件式(A1-7)を含めつつ多項式型に拡張されたものと言える。

ところで、推定誤差分散値 $\sigma^2(\mathbf{x})$ は

$$\begin{aligned} \sigma^2(\mathbf{x}) &= E \left[ \{\phi(\mathbf{x}) - \phi^*(\mathbf{x})\}^2 \right] \\ &= \text{Var}[w(\mathbf{x})] - 2\lambda^T k(\mathbf{x}) + \lambda^T K \lambda \quad (\text{A1-8}) \end{aligned}$$

となる。ここに $\text{Var}[w(\mathbf{x})]$ は $w(\mathbf{x})$ の分散値、 $k(\mathbf{x})$ は $w(\mathbf{x})$ と計測値でのランダム成分 $w(\mathbf{x}_i)$ との共分散を縦に並べて出来たベクトル、 $K$ はその $w(\mathbf{x}_i)$ の分散共分散行列である。式(A1-8)を式(A1-6)に掲げた拘束条件

の下で最小化することを考える。本研究ではラグランジュの未定係数法を用いることにする。ラグランジュ乗数を  $2\mu$  として、

$$\sigma_{\mu}^2(\mathbf{x}) = \text{Var}[w(\mathbf{x})] - 2\lambda^T k(\mathbf{x}) + \lambda^T K \lambda + 2\mu^T \{F^T \lambda - f(\mathbf{x})\} \quad (\text{A1-9})$$

を最小化するような  $\lambda$  および  $\mu$  を求める。上式をラグランジュの未定係数法に則って計算すると、

$$\begin{bmatrix} K & F \\ F^T & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k(\mathbf{x}) \\ f(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (\text{A1-10})$$

という行列方程式が得られる。これを解いて、

$$\lambda = K^{-1} k(\mathbf{x}) - K^{-1} F (F^T K^{-1} F)^{-1} \times \{F^T K^{-1} k(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\} \quad (\text{A1-11})$$

$$\mu = (F^T K^{-1} F)^{-1} \{F^T K^{-1} k(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\} \quad (\text{A1-12})$$

を得る。

また統計モデルのパラメータは全て最尤法で推定して求める。いま、係数  $b$  の最尤推定値  $\hat{b}$  に注目し、この推定値のみを求めてみる。最尤法の目的関数である負の対数尤度関数を扱うことと等価な目的関数  $J$  は、

$$J = (\phi - Fb)^T K^{-1} (\phi - Fb) \quad (\text{A1-13})$$

となる。これは重み付き最小自乗法の目的関数にはかならない。よって  $\hat{b}$  は重み付き最小自乗法の解に等しく、

$$\hat{b} = (F^T K^{-1} F)^{-1} F^T K^{-1} \phi \quad (\text{A1-14})$$

である。またその残差  $\hat{w}$  は

$$\hat{w} = \left\{ I_p - F (F^T K^{-1} F)^{-1} F^T K^{-1} \right\} \phi \quad (\text{A1-15})$$

( $I_p$ :  $p$  次の単位行列) となる。式 (A1-11) を式 (A1-2) に代入した後、さらに式 (A1-14), (A1-15) を代入することで、 $\phi^*(\mathbf{x})$  は、

$$\phi^*(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})^T \hat{b} + k(\mathbf{x})^T K^{-1} \hat{w} \quad (\text{A1-16})$$

と書ける。上式の第一項はトレンド成分、第二項はランダム成分を表している。式 (A1-16) より、第4章で述べたとおりトレンド成分は重回帰分析法で求まる解、ランダム成分はクリッキングで使う共分散量のみから構成された解であることが示された。

## 付録2

### UCの定式化

UCでは、UKと同様に重み付きの計測値を総和して推定するが、推定すべき変量に対して自己の計測値だけでなく、相互相関性を有する別の変量の計測値にも重みを付けて推定評価に加えている。

本来UCで用いる二変量は、両者ともに未知である場合と、一方が既知でもう一方が未知である場合の2通り

に大別される。前者は両変量を同時に推定し、後者は未知変量だけを推定する。本研究は後者の場合に当てはまり、本節での式展開もこの場合に沿うかたちで行う。基本的な考え方はUKと同じであるので、UC理論解はUK理論界を拡張した式展開となる。以下、付録1でUK定式化に用いた文字式に付けた添字  $\alpha$  はUC推定する変量に関連したもの、添字  $\beta$  はもう一方の変量に関連したもの、添字  $c$  はそれら二変量をまとめたものをそれぞれ意味している。ここで推定する空間分布関数を  $\phi_{\alpha}^*(\mathbf{x})$  は、式 (A1-2) の拡張された式は、

$$\phi_{\alpha}^*(\mathbf{x}) = \lambda_{\alpha}^T \phi_{\alpha} + \nu_{\beta}^T \phi_{\beta} = \lambda_c^T \phi_c \quad (\text{A2-1})$$

で表される。ここに、

$$\lambda_c = \begin{bmatrix} \lambda_{\alpha} \\ \nu_{\beta} \end{bmatrix}, \quad \phi_c = \begin{bmatrix} \phi_{\alpha} \\ \phi_{\beta} \end{bmatrix} \quad (\text{A2-2})$$

であり、新たに用いた  $\nu_{\beta}$  は他方変量の計測値にかけられた重みベクトルである。このように、式 (A1-2) の  $\lambda$  および  $\phi$  は他方の変量に関わる成分も含めるように拡張したかたちとなる。 $f(\mathbf{x})$ ,  $b$ ,  $F$ ,  $K$ ,  $k(\mathbf{x})$ ,  $\mu$  についても同様のアプローチによってベクトルや行列に拡張を施し、以下の式を得る。

$$\begin{aligned} f_c(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} f_{\alpha}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{o} \end{bmatrix}, & b_c &= \begin{bmatrix} b_{\alpha} \\ b_{\beta} \end{bmatrix}, \\ F_c &= \begin{bmatrix} F_{\alpha} & O \\ O & F_{\beta} \end{bmatrix}, & w_c &= \begin{bmatrix} w_{\alpha} \\ w_{\beta} \end{bmatrix}, \\ K_c &= \begin{bmatrix} K_{\alpha} & D_{\alpha} \\ D_{\beta} & K_{\beta} \end{bmatrix}, & k_c(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} k_{\alpha}(\mathbf{x}) \\ \ell_{\beta}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \\ \mu_c &= \begin{bmatrix} \mu_{\alpha} \\ \eta_{\beta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A2-3})$$

最終的には、UKと同様の式展開から推定値  $\phi_{\alpha}^*(\mathbf{x})$  として式 (A2-4) に示す解を得る。

$$\phi_{\alpha}^*(\mathbf{x}) = f_c(\mathbf{x})^T \hat{b}_c + k_c(\mathbf{x})^T K_c^{-1} \hat{w}_c \quad (\text{A2-4})$$

さらに

$$f_c(\mathbf{x})^T \hat{b}_c = f_{\alpha}(\mathbf{x})^T \hat{b}_{\alpha} \quad (\text{A2-5})$$

であることに注意すると、式 (A2-4) は

$$\phi_{\alpha}^*(\mathbf{x}) = f_{\alpha}(\mathbf{x})^T \hat{b}_{\alpha} + k_c(\mathbf{x})^T K_c^{-1} \hat{w}_c \quad (\text{A2-6})$$

と書き改められる。同式の第一項はトレンド成分、第二項はランダム成分を表しており、当然のことながら、第一項はトレンド関数のみから、第二項は共分散関数またはセミバリオグラム関数のみから算出されていることが明らかに確認できる。特に、第一項は推定すべき変量のトレンド関数のみの構成となっており、第二項は二変量のランダム成分が同時に反映された残差を用いている。



よって、トレンド成分は自身の計測値のみから定まる一方、ランダム成分は両計測値ともに活かして定まることが分かる。

#### 参考文献

浜口俊雄・長谷川高士・青山成康 (1999) : 地下水貯留域の最適推定において多変量統計モデルから生じる相互相関的補間効果, 第44回地盤工学シンポジウム発表論文集, pp.19-24.

浜口俊雄・村上 章・長谷川高士 (1997a) : 平面解析で移動境界を考慮した地下水モデルと逆解析への応用, 土木学会論文集, No.568/III-39, pp.133-145.

浜口俊雄・村上 章・長谷川高士 (1997b) : 平面地下水モデルにおいて既定境界の不確定性を統計的に評価した逆解析手法, 地盤工学における逆解析の適用と施工管理に関するシンポジウム発表論文集, pp.111-114.

Akaike, H. (1974) : A new look at the statistical model identification, *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-19, pp.716-723.

Carrera, J., and S. P. Neuman (1986) : Estimation of aquifer parameters under transient and steady state conditions, 1. Maximum likelihood method incorporating prior information, *Water Resour. Res.*, 22(2), pp.199-210.

Chilés, J, and P. Delfiner (1999) : *Geostatistics Modeling Spatial Uncertainty*, John Wiley & Sons, Inc..

Cressie, N. (1991) : *Statistics for spatial data*, A Wiley-Interscience Publication, New York, pp.105-209.

Gooovaerts, P. (1997) : *Geostatistics, for Natural Resources Evaluation*, Oxford University Press, Inc..

Hannan, E. S. (1980) : The estimation of the order of an ARMA process, *Ann. Stat.*, 8(5), pp.1071-1081.

Journel, A. G. and Ch. J. Huijbregts (1978) : *Mining geostatistics*, Academic Press, Inc., pp.324-343.

Kashyap, R. L. (1982) : Optimal choice of AR and MA parts in autoregressive moving average models, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intel.*, PAMI-4(2), pp.99-104.

Matheron, G. (1963) : Principles of geostatistics, *Econ. Geol.*, 58, pp.1246-1266.

Rissanen, J. (1978) : Modelling by shortest data description, *Automatica*, 14, pp.465-471.

Schwarz, G. (1978) : Estimating the dimension of a model, *Ann. Stat.*, 6(2), pp.461-464.

Wackennagel, H. (1995) : *Multivariate Geostatistics*, Springer.

## Effects of geostatistical approach in estimation of spatial groundwater levels

Toshio HAMAGUCHI

### Synopsis

Several numerical tests in this work are presented to demonstrate the cokriging effects subject to the insufficient data in cokriging estimation of the groundwater levels in space. A groundwater level to be cokriged is evaluated as a linear combination of the available sampling data on groundwater levels and on bed elevations, which are spatially correlated with each other. Cokriging yields reasonable and valid results because it can interpolate less sampling data due to its ability to adequately pick up the available cross-correlative data. The high applicability and reliability of the cokriging method can be reinforced with the above results.

**Keywords** : groundwater level, bed elevation, geostatistics, cokriging, cross-correlation