京都大学防災研究所年報　第44号 B-1　平成13年4月
Annuals of Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., No.44 B-1, 2001

# 条件付確率等価線形化法を用いた不確定構造物の地震応答および損傷過程に関する研究

荒木時彦・鈴木祥之

## 要　旨

本論文では，不確定パラメータを有する履歴型非線形構造物系が地震外乱を受ける場合について，系の応答および損傷に関する確率統計量を評価する手法を述べる。本手法では，確定な構造物系に対して提案された耐震信頼度解析手法を不確定系に拡張し，確率過程による不確定パラメータの微分形式化と条件付確率等価線形化法を導入することによって，確率微分方程式に基づく定式化を行っている。

**キーワード**：不確定性，確率微分方程式，構造物損傷，条件付確率等価線形化法

## 1．はじめに

建築構造物の耐震性を考える場合，一般に構造物と地震外乱には様々な原因による不確定性が含まれている。よって，そのような不確定性を考慮して，地震外乱を受ける構造物の動的応答および動的損傷を評価する必要がある。本研究では，確率微分方程式による定式化に基づき，不確定パラメータを有する履歴構造物系の応答および損傷の尺度に関する確率統計量の時刻歴を求める手法について述べる。

本手法では，状態方程式に陽に現れる不確定パラメータを，不確定な初期条件を有する非時変確率過程としてモデル化し(Köylüğlu et al., 1996; Micaletti et al., 1998)状態変数に組み込むことにより，拡大非線形動力学系の状態方程式を構成している。また，確率等価線形化法(Atalik and Utku , 1976; Wen ,1980; Asano and Iwan, 1984)を不確定パラメータを条件として導入することによって，状態方程式に陽に現れない，履歴特性に関する不確定パラメータの影響を評価することができる。全状態変数に関する非正規確率密度関数を導入することにより，拡大非線形動力学系から導かれるモーメント方程式を解き，構造物系の応答および動的損傷を評価することが可能である。

## 2．確定系に対する解析手法

不規則外乱を受ける確定な構造物系においては，全状態変数に関する非正規同時確率密度関数の解析表現を導入することによって，系の状態方程式から導かれるモーメント方程式を解くことが可能である(Suzuki and Minai, 1985, 1989)。地震外乱生成の成形フィルター系，履歴構造物系および損傷の尺度はすべて非線形1階常微分方程式によって表され，これらを連立することにより全非線形動力学系の状態方程式が次式で構成される。

$$ {}_A\dot{Z}(t) = {}_AF'(t, {}_AZ(t)) + {}_AV(t)\,{}_AN(t) \tag{1}$$

$$ {}_AZ(t_0) = 0 \tag{2}$$

但し，${}_AZ(t)$ は地震外乱生成の成形フィルター系，履歴構造物系および損傷の尺度に関する状態変数からなる状態ベクトルである。${}_AF'(t, {}_AZ(t))$ は非線形関数から構成されるベクトル，${}_AV(t)$ と ${}_AN(t)$ は，そ

れぞれ，振幅変調マトリクスと白色雑音ベクトル過程である。上記の状態方程式は，白色雑音ベクトル過程のみを含むので伊藤型確率微分方程式の形に書くことができる。伊藤の公式を用いれば，この伊藤型確率微分方程式から状態変数に関するモーメント方程式が導かれる。一般にモーメント方程式には非線形項が含まれるためこれを直接解くことは不可能であるが，全状態変数に関する時変同時確率密度関数の解析表現を導入することにより非線形項を解析的に近似しモーメント方程式を非定常状態で解くことが可能となる。

## 3．拡大非線形動力学系

式(1)の係数を確率変数として，上記の理論解析において用いられている伊藤型確率微分方程式に基づく解析手法を用いることは困難である。ここでは，状態方程式に陽に現れる不確定パラメータを，不確定な初期条件を有する非時変確率過程としてモデル化することにより，不確定パラメータを状態変数として取り扱う。拡大非線形動力学系の状態方程式に関する状態ベクトルは，地震外乱生成の成形フィルター系，履歴構造物系，損傷の尺度および不確定パラメータによって構成される。いま，不確定パラメータからなるベクトル ${}_U X$ を，初期値に確率変数をもつ非時変確率過程ベクトルと見なし，次のように定義する。

$$ {}_U\dot{X} = 0 \qquad {}_U X(t_0) = X \tag{3} $$

但し，X は確率変数を要素とするベクトルである。不確定パラメータ ${}_U X$ を状態変数と見なし ${}_U Z(t)$ 書き直すと，式(1)と式(3)を連立させることにより，外乱生成の生成フィルター系，履歴構造物系および損傷の尺度，および不確定パラメータからなる拡大非線形動力学系の状態方程式が次式で表される。

$$ \dot{Z}(t) = F(t, Z(t)) + V(t, Z(t))N(t) \tag{4} $$

但し，

$$ Z(t) = \begin{bmatrix} {}_E Z(t) & {}_S Z(t) & {}_M Z(t) & {}_U Z(t) \end{bmatrix}^T \tag{5} $$

$$ Z(t_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & X \end{bmatrix}^T \tag{6} $$

ここで，$Z(t)$ は拡大非線形動力学系の状態ベクトル，$F(t, Z(t))$ は非線形関数から構成されるベクトル，$V(t, Z(t))$ と $N(t)$ は，それぞれ，振幅変調マトリクスと白色雑音ベクトル過程である。${}_E Z(t)$，${}_S Z(t)$，${}_M Z(t)$，${}_U Z(t)$ は，それぞれ，地震外乱生成の成形フィルター系，履歴構造物系，損傷の尺度および不確定パラメータに関する状態ベクトルである。$X$ は，不確定パラメータの初期条件を表す確率変数ベクトルである。

## 4．条件付確率等価線形化法

本手法では，状態方程式に陽に現れる不確定パラメータを，不確定な初期条件を有する非時変確率過程としてモデル化し状態変数に組み込むことにより，拡大非線形動力学系の状態方程式を構成している。しかし，履歴特性に関する非線形項に含まれる不確定パラメータは状態方程式に陽に現れないため，そのような不確定パラメータを条件とする条件付確率等価線形化法を導入する必要がある。いま，履歴に関する不確定パラメータからなる状態ベクトルを ${}_{UI} Z(t)$ とすると，不確定パラメータを条件とする条件付確率等価線形化法によって，履歴に関する非線形関数 $g_z$ は次のように線形化される。

$$ g_z({}_S Z(t), {}_{UI} Z(t)) \cong c \cdot {}_S Z(t) \tag{7} $$

但し，

$$ c = E[g_z({}_S Z(t), {}_{UI} Z(t))\, {}_S Z^T(t)] \cdot E[{}_S Z(t)\, {}_S Z^T(t)]^{-1} \tag{8} $$

$$ {}_S Z(t) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T \tag{9} $$

$$ {}_{UI} Z(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_{NR} \end{bmatrix}^T \tag{10} $$

この時，非線形項に関する平均値演算子 $E[\cdot]$ は不確定パラメータを含んだ状態変数の同時確率密度関数に

よって定義されるが，履歴特性に関する非線形項においては不確定パラメータはしばしば超関数に含まれる。よって平均値演算子 $E[\cdot]$ を既知の関数へ展開することは極めて困難である。本手法では，不確定パラメータを条件とする条件付平均値演算子 $\langle\cdot\rangle$ を導入し，非線形項に関する平均値演算を次式で表す。

$$
\begin{aligned}
&E[g_z({}_S Z(t), {}_{UI} Z(t))] = \\
&\qquad \int_{\Omega_{UIZ}} \langle g_z({}_S Z(t), {}_{UI} Z(t)) \rangle \\
&\qquad \cdot p_{UIZ}({}_{UI} Z(t)) \cdot d_{UI} Z
\end{aligned} \tag{11}
$$

但し，$p_{UZ}({}_U Z(t))$ は不確定パラメータに関する同時確率密度関数である。不確定パラメータを互いに独立と仮定すると，前式は重み付積分法により次のように近似できる。

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{UIZ}} \langle g_z({}_S Z(t), {}_{UI} Z(t)) \rangle p_{UIZ}({}_{UI} Z(t)) d_{UI} Z = \\
&\sum_{i_{NR}=1}^{m_{NR}} w_{i_1 \cdots i_{NR}} \langle g_z({}_S Z(t), {}_{UI} Z(t)) \rangle \Big|_{\lambda_1 = \lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{NR} = \lambda_{i_{NR}}}
\end{aligned} \tag{12}
$$

ただし，$m_1 \cdots m_{NR}$ はそれぞれの不確定パラメータに関する重み付積分の分割点の個数，$w_{i_1 \cdots i_{NR}}$ はそれぞれの分割点に対応する重み，$\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{NR}}$ はそれぞれの分割点に対応する不確定パラメータの確定値である。ここで，条件付平均値演算子 $\langle\bullet\rangle$ は，履歴要素の領域を考慮した条件付非正規確率密度関数を用いて解析的に表される。

## 5．モーメント方程式

状態方程式に陽に現れる不確定パラメータを非時変確率過程として状態変数に組み込み，条件付確率等価線形化法によって線形化された履歴構造物系を用いて構成される拡大非線形動力学系は見かけ上白色雑音ベクトル外乱のみを含むため，伊藤の公式によりモーメント方程式が導かれる。ここで，状態変数 $Z(t)$ の要素を $Z_i (i = 1, \cdots, n)$ として，モーメント関数を次式で定義すれば，

$$
M(l_1, l_2, \cdots, l_n; t) = E\left[ \prod_{i=1}^{n} Z_i^{l_i} \right] \tag{13}
$$

伊藤の公式を用いて，モーメント方程式は次のように表される。

$$
\begin{aligned}
\dot{M}(l_1, l_2, \cdots, l_n; t) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} l_i l_j \Gamma_{ij} \\
&\quad M(l_1, \cdots, l_i - 1, \cdots, l_j - 1, \cdots, l_n; t) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} l_i (l_i - 1) \Gamma_{ii} M(l_1, \cdots, l_i - 2, , \cdots, l_n; t) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} l_i E\left[ F_i Z_i^{-1} \prod_{j=1}^{n} Z_j^{l_j} \right]
\end{aligned} \tag{14}
$$

式(5)の状態ベクトルは不確定パラメータを含んでおり状態方程式が非線形であるため，上記のモーメント方程式は無限の階層構造を有する。よって逐次発生する高次の確率モーメントを近似する必要がある。また損傷の尺度に関する非線形項は線形化が不可能なため，全状態変数に関する非正規確率密度関数により既知の関数形で近似する。全状態変数を変域が $(-\infty, \infty)$ の状態変数 $\xi_i$ と，変域が $[0, \infty)$ の状態変数 $\eta_j$ に分割し，それらの変域を考慮すると，状態変数の非正規同時確率密度関数は次式で表される。

$$
\begin{aligned}
p(\xi_1, \cdots, \xi_{n_1}, \eta_1, \cdots, \eta_{n_2}; t) &= \prod_{i=1}^{n_1} w_N(\xi_i) \prod_{j=1}^{n_2} w_G(\eta_j) \\
&\quad \sum_{\sum p_i = 0}^{L} \sum_{\sum q_j = 0}^{M} C_{p_1 \cdots p_{n_1} q_1 \cdots q_{n_2}} \\
&\quad \prod_{i=1}^{n_1} H_{p_i}(\bar{\xi}_i) \prod_{j=1}^{n_2} L_{q_j}^{(\beta_j - 1)}(\nu_j \eta_j)
\end{aligned} \tag{15}
$$

但し，$w_N$ と $w_G$ は正規確率密度関数とガンマ密度関数，$H_{p_i}$ と $L_{q_j}^{(\beta_j-1)}$ は，それぞれ，エルミート多項式とラゲール多項式である。また，L と M はそれぞれ，$\xi_i$ と $\eta_j$ に関する近似の次数である。式(15)の係数は条件付確率モーメントによって次式で表される。

$$C_{p_1\cdots p_{n_1}q_1\cdots q_{n_2}} =$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{n_2} q_j!}{\prod_{i=1}^{n_1}\sigma_{\xi_i}^{p_i}}\sum_{r_1=0}^{[p_1/2]}\cdots\sum_{r_{n_1}=0}^{[p_{n_1}/2]}\ \sum_{s_1=0}^{q_1}\cdots\sum_{s_{n_2}=0}^{q_{n_2}}(-1)^{\sum_{i=1}^{n_1}r_i+\sum_{j=1}^{n_2}s_j}\,2^{-\sum_{i=1}^{n_1}r_i}$$

$$\cdot\frac{1}{\prod_{i=1}^{n_1}r_i!(p_i-2r_i)!\prod_{j=1}^{n_2}s_j!(q_j-s_j)!\Gamma(\beta_j+s_j)}$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{n_1}\sigma_{\xi_i}^{2r_i}\prod_{j=1}^{n_2}\nu_j^{s_j}\Gamma(\beta_j)$$

$$M(p_1-2r_1,\cdots,p_{n_1}-2r_{n_1},s_1,\cdots,s_{n_2}) \tag{16}$$

但し，

$$\bar{\xi}_i=\tilde{\xi}_i/\sigma_{\xi_i}\quad,\qquad \sigma_{\xi_i}=E^{1/2}\left[\tilde{\xi}_i^2\right] \tag{17}$$

$$\tilde{\xi}_i=\xi_i-E[\xi_i] \tag{18}$$

$$\beta_j=E^2[\eta_j]/E[\tilde{\eta}_j^2],\quad \nu_j=E[\eta_j]/E[\tilde{\eta}_j^2] \tag{19}$$

$$\tilde{\eta}_j=\eta_j-E[\eta_j] \tag{20}$$

ここで，$\Gamma$ はガンマ関数，[・]はガウス記号である。条件付確率等価線形化法によって線形化された履歴構造物系の微分表現を用いて拡大非線形動力学系を構成することにより，状態方程式に陽に現れる不確定パラメータと履歴特性を表す非線形関数に含まれる不確定パラメータの両者の影響を考慮しながら，応答および損傷に関する確率統計量を非定常状態で評価することが可能である。

## ６．数値解析例

バイリニア型1自由度履歴構造物系を対象とした数値解析では，応答および損傷の尺度に関する確率統計量を求め，モンテカルロ法によるシミュレーション結果と比較した。不確定パラメータは，無次元円固有振動数 $\omega$，臨界減衰定数 $h$ および無次元弾性限変位 $\Delta$ であり，平均値はそれぞれ，1.0，0.01 および 1.0 である。バイリニア型履歴特性の分岐勾配 r の値は確定とし 0.5 と 0.1 の場合に対して解析を行う。また，不確定パラメータの変動係数 COV=0.10 の系について示す。外乱は，スペクトル密度 0.6 の定常正規白色雑音過程を用いる。

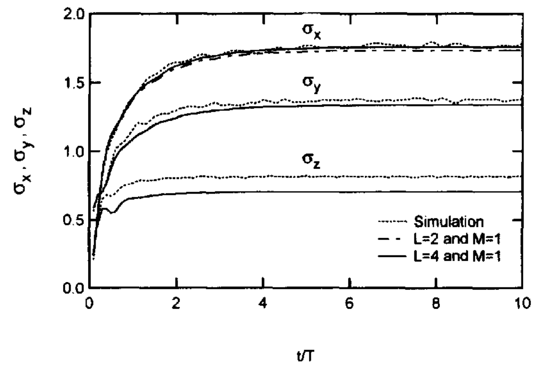


図１　変位，速度および履歴要素の標準偏差 (r=0.5)

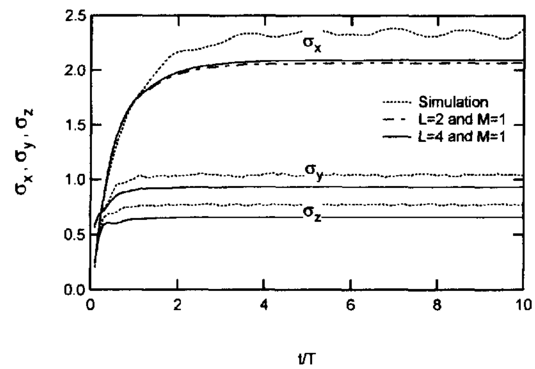


図２　変位，速度および履歴要素の標準偏差 (r=0.1)

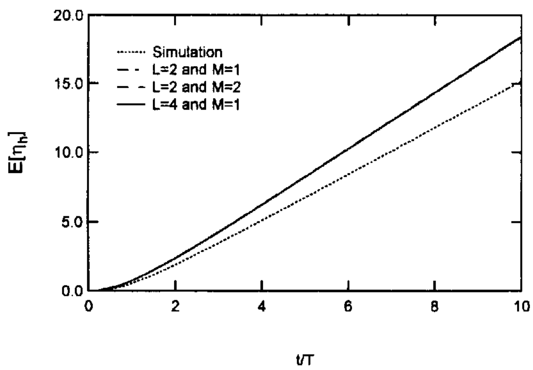


図3　　履歴消費エネルギーの平均値　(r=0.5)

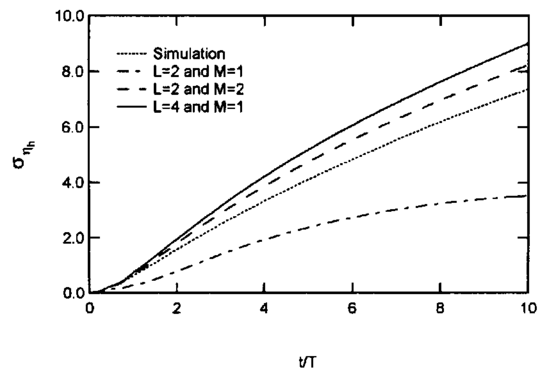


図4　　履歴消費エネルギーの標準偏差　(r=0.5)

図1および図2は，r=0.5 と r=0.1 のそれぞれの系の変位，速度および履歴要素の標準偏差の時刻歴を示している。横軸は無次元固有周期 T によって無次元化された無次元時間である。図中の L および M は式(15)の近似精度を示している。L=2,M=1 の場合は応答および損傷の尺度の2次確率モーメントまでを用いて解析を行っている。L=2,M=2 の場合は応答の2次確率モーメントおよび損傷の尺度の4次確率モーメントまでを用いている。L=4,M=1 の場合は応答の4次確率モーメントおよび損傷の尺度の2次確率モーメントまでを用いている。線形化の影響により履歴要素の近似精度が若干おちるものの，変位と速度は解析解がシミュレーション解を良好に近似している。但し，r=0.1 の場合には近似精度が劣化している。

図3および図4は，r=0.5 の系の履歴消費エネルギーに関する平均値と標準偏差の時刻歴を示している。標準偏差においては，近似次数によって解析精度に差がみられる。2次確率モーメントによる近似では，標準偏差に関する解析解がシミュレーション解と大きく異なっており，より高次の確率モーメントを用いることで近似精度が改善されている。

## 7. おわりに

本論文では，不規則外乱を受ける不確定・構造物系の応答および損傷を評価する手法について述べた。条件付確率等価線形化法によって線形化された履歴構造物系の微分表現を用いて拡大非線形動力学系を構成することにより，状態方程式に陽に現れる不確定パラメータと履歴特性を表す非線形関数に含まれる不確定パラメータの両者の影響を考慮しながら，応答および損傷に関する確率統計量を非定常状態で評価することが可能である。但し，線形化を行っているため，精度の良い解を得るためには高次のモーメントまで用いなければならない。その場合，対象となる構造物系の自由度や含まれる不確定パラメータの数が増加するほど解くべき微分方程式の数も増大するため，解析手法の簡素化と効率化を図る必要があると考えられる。

## 参考文献

Asano, K. and Iwan, W. D.: An alternative approach to the random response of bi-linear hysteretic systems, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 12, No.2, pp. 229-236, 1984.

Atalik, T. S. and Utku, S.: Stochastic linialization of multi-degree-of freedom non-linear systems, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 4, No.4, pp. 411-420, 1976.

Köylüğlu, H. U., Nielsen, S. R. K. and Çakmak, A. Ş.: Stochastic dynamics of geometrically non-linear structures with random properties subject to stationary random excitation, Journal of Sound and Vibration, Vol.190, pp.821-841, 1996.

Micaletti, R. C., Çakmak, A. Ş., Nielsen, S. R. K. and Köylüğlu, H. U.: A solution method for linear and geometrically nonlinear MDOF systems with random properties subject to random excitation, Probabilistic Engineering Mechanics, Vol.13, No.2, pp.85-95, 1998.

Suzuki, Y. and Minai, R: Seismic reliability analysis of hysteretic structures based on stochastic differential equations. Proceedings of the Forth International Conference on Structural Safety and Reliability, Vol.2, pp.177-186, 1985.

Suzuki, Y. and Minai, R: Seismic reliability analysis of hysteretic structural systems. In W.K. Liu & T. Belytschko (eds.), Computational Mechanics of Probabilistic and Reliability Analysis, Lausanne: Elmepress International, pp.509-541, 1989.

Wen, Y. K.: Equivalent linearization for hysteretic systems under random excitation, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol. 47, No.1, pp.150-154, 1980.

## Seismic Response and Damage process of Uncertain Structures using Conditional Stochastic Linearization Technique

Tokihiko ARAKI, Yoshiyuki SUZUKI

### Synopsis

This paper presents an analytical method for evaluating the time-variant statistics of responses and damage measures of hysteretic structures with uncertain parameters under seismic excitations. By applying the differential formation of uncertain parameters modeled as time-invariant random processes with random initial conditions and the conditional stochastic linearization technique, the moment equations derived from the Ito stochastic differential equations are solved, and the time-variant statistics of the structural responses and damage are determined.

**Keywords:** uncertainty; structural damage; stochastic differential equation; conditional stochastic linearization technique