

シェル・空間構造の防災研究

國枝 治郎

要 旨

建築構造に用いられるシェル・空間構造の防災研究は個々の形態、構法により、耐震、耐風、耐雪、耐火の諸方面からなされねばならず、筆者は耐火問題を除いて種々研究を遂行してきた。ここでは、特に球形シェル及び屋根型円筒シェルの地震応答に関する一連の研究を概説する。

キーワード：シェル・空間構造、上下地震動応答、動的安定、固有振動数

1. はじめに

シェル構造とは薄肉の湾曲した版をいい、連続体である。空間構造(spatial structures, space frame structure, lattice shell 等様々に呼ばれる)とは網目状あるいは格子状の構成要素によって組み立てられた曲面状あるいは平面状の構造をいう。従って、空間構造は形態としてはシェル構造に似ており、全体としてはシェルの力学的特性を持つが、部分的には離散系構造の特色を持っている。シェル・空間構造というとき、つり形式の曲面状あるいは平面状の構造や膜構造、テンセグリティ構造も含まれる。即ち、

形式	シェル構造	・・・	鉄筋コンクリート、鋼板
	立体骨組構造	・・・	鉄骨、木造
	膜構造	・・・	ガラス繊維

シェル・空間構造は連続体か離散体かで分類することもあるが、次のように形態で分類することもある。

形態	正	ドーム状回転体、球形シェル
ガウス曲率	零	円筒形、円錐形
	負	双曲面

今、世界で最大規模のものは直径300メートルを超えるミレニウムドーム(ロンドン)である。シェル・空間構造の我が国での例として福岡ドーム、名古屋ドーム、大阪ドームなどの野球場全体を覆う屋根構造物、国際見本市会場の大屋根などが屢々あげられるが、小規模なものとしては学校の体育館の屋根や公共施設体育館屋根などに非常に多く用いられている。

ところで、過日の兵庫県南部地震時には阪神地区の特殊な構造形式の小学校体育館屋根が2棟崩壊したのみで、殆どのシェル・空間構造は無被害か軽微な損傷ですみ、多くは避難場所として使用された。そのため、都市域におけるこの種構造物の重要性が再認識されることになったのであるが、同時にその安全性に対する信頼性がより厳しく求められることになってきたのである。

過去の大規模なシェル・空間構造で自然災害により崩壊にいたったもので世界的に知られているのは

- ・ 1963年の積雪による単層ラチスドームの崩壊(ブカレスト、直径90m)、
- ・ 風による双曲形クーリングタワーの崩壊数例(ヨーロッパ)、
- ・ 地震による石油タンクの損傷、崩壊多数例(米国、日本)、

- ・ 宮城県沖地震時、鉄筋コンクリート造給水用水槽の崩壊
- ・ 新潟地震のときには双曲形シェル屋根の体育館(修復され使用中)
- ・ 兵庫県南部地震時、学校体育館屋根崩壊2件

等であるが、被害後当該方面の研究は飛躍的に進むことになるとはいえ、世界的に研究者の数は少なく、また、構造形式、形態の多様さもあって防災研究は全体的には十分になされているとはいえない。現在、シェル・空間構造の防災研究を世界的にリードしているのは日本の研究者達である。

防災研究所が全国共同利用機関になったために共同研究が行われることになり、共同研究集會に予算が与えられることになったので、シェル・空間構造研究者達もその恩恵を受けて過去3年間連続して研究集會を持つことが出来た。その集會の課題は次のようなものである。

京都大学防災研究所共同研究集會

平成9年度

- ・ シェル・空間構造の自然災害時非線形挙動とその抑止対策

平成10年度

- ・ 空間構造の耐震性能・評価をどう進めるか？

平成11年度

- ・ シェル・空間構造の耐震、耐風、耐雪、耐火を考えた性能設計と解析

これらの課題により、今日のシェル・空間構造の防災研究の主たるテーマを読みとることが出来る。集會では毎回70～80名の研究者が集まり、立派な論文集を刊行している。

防災研究を行うに当たって、解析の取り扱い上、建築物に用いられる通常の骨組み架構との相違は次のように纏められる。

	骨組構造	シェル・空間構造
検討項目	耐力	耐力、機能維持
材料強度	弾塑性、塑性	弾性
地震応答解析	水平動	水平動、上下動

ただ、シェル・空間構造で材料強度を弾塑性、塑性域まで考慮することの是非を議論、検討中で、未だ結論は出ていない。

シェル・空間構造の研究として筆者が行ってきたものの中には必ずしも自然災害に対する防災研究とは呼べないものも多いが、自然災害に対する防災研究のみを取り出せば次のようになるであろう。

防災関連研究(國枝分)

静的問題 ・ 側面より風を受ける円筒空気膜構造

- ・ 球形ドームの古典座屈値
- ・ ドーム状ラチス構造の座屈耐力
- ・ R C シェルの極限耐力

動的問題 ・ 風～膜構造物連成フラッター

自励型 パラメトリック共振型 モード連成型

- ・ 球形シェルの振動特性、応答特性(線形、非線形)
- ・ 屋根型円筒形シェルの振動特性、応答特性(線形、非線形)
- ・ 扁平HPシェルの振動特性(線形)
- ・ 面内、面外に同時外力を受ける空間構造の

動的安定問題

- ・ 球形タンクの地震応答
- ・ 動的安定限界加振力強度の推定法

紙数の関係もあるのでここでは球形シェル及び屋根型円筒シェルの振動特性、地震応答特性の研究について、筆者はどの様に研究を進めてきたかを簡単に述べる。他の研究について興味を持たれる場合には発表論文を見ていただきたい。

2. 球形シェルの振動特性、応答特性(線形、非線形)

2.1 自由振動解析

1960年代初期のころには大型電子計算機は身近に使える状態ではなく（京大の当時の大型電子計算機はKDC-1で、ドラム形式のメモリーは4Kwで高速のコアメモリーは50wの程度）、地震応答解析など夢の話の状況で、自由振動解析を行い、振動特性を把握するのが精々の時代であったので先ず球形シェルの自由振動状態の解を求めることから始めた。だが、自由振動解析は応答解析遂行のために必要なものである。

Loveの第一近似式を基礎に、D'Alembertの原理を適用して球形シェルの自由振動時の運動方程式を導くと次のようになる。

$$(N_{\theta\phi} \sin \phi)^{\circ} + N'_{\theta} + N_{\theta\phi} \cos \phi - Q_{\theta} \sin \phi - \frac{ma}{g} \ddot{v} \sin \phi = 0 \quad (1. a)$$

$$(N_{\phi} \sin \phi)^{\circ} + N'_{\theta\phi} - N_{\theta} \cos \phi - Q_{\phi} \sin \phi - \frac{ma}{g} \ddot{u} \sin \phi = 0 \quad (1. b)$$

$$(Q_{\phi} \sin \phi)^{\circ} + Q'_{\theta} + (N_{\phi} + N_{\theta}) \sin \phi - \frac{ma}{g} \ddot{w} \sin \phi = 0 \quad (1. c)$$

$$(M_{\phi} \sin \phi)^{\circ} + M'_{\theta\phi} - M_{\theta} \cos \phi + aQ_{\phi} \sin \phi = 0 \quad (2. a)$$

$$M'_{\theta} + (M_{\theta\phi} \sin \phi)^{\circ} + M_{\theta\phi} \cos \phi + aQ_{\theta} \sin \phi = 0 \quad (2. b)$$

球形シェルの場合 $N_{\theta\phi} = N_{\phi\theta}$, $M_{\theta\phi} = M_{\phi\theta}$ が成立するので、法線まわりのモーメントの釣合式は恒等的に満たされている。式(1), (2)に構成関係式、適合関係式を用い、諸検討の結果、次のような自由振動解が得られている（横尾他、1963）。

$$\begin{aligned} u &= \left[-\frac{1+\nu}{Eha} \sum_{i=1}^3 \left(A_i P_{\mu_i}^n + B_i Q_{\mu_i, \phi}^n \right) + \frac{n}{\sin \phi} \left(GP_{\mu_4}^n + HQ_{\mu_4}^n \right) \right] \cos n\theta \cos \omega t \\ v &= \left[\frac{1+\nu}{Eha} \sum_{i=1}^3 \left(A_i P_{\mu_i}^n + B_i Q_{\mu_i}^n \right) \frac{n}{\sin \phi} + \left(GP_{\mu_4, \phi}^n + HQ_{\mu_4, \phi}^n \right) \right] \sin n\theta \cos \omega t \\ w &= \sum_{i=1}^3 C_i \left(A_i P_{\mu_i}^n + B_i Q_{\mu_i}^n \right) \cos n\theta \cos \omega t \end{aligned} \quad (3)$$

ここに

$$P_{\mu_i}^n = P_{\mu_i}^n(\cos \phi), \quad Q_{\mu_i}^n = Q_{\mu_i}^n(\cos \phi)$$

は Legendre 陪関数であり、その order は次式で与えられる。

$$\mu_i = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_i} \quad (i = 1 \sim 3) \quad (4)$$

λ_i は次式の根として与えられる。

$$\begin{aligned} &\lambda^3 + \{4 + \alpha(1 - \nu^2)\Omega^2\}\lambda^2 + [4 + 2\alpha(1 - \nu^2)\Omega^2 + \kappa\{1 - \Omega^2(1 + \alpha(1 - \nu^2)(1 + \nu)/\kappa)\}]\lambda \\ &+ \kappa[2 + 2\Omega^2\alpha(1 + \nu)\{1 - (1 - \nu^2)/\kappa\} - (1 - \nu)] - \alpha(1 - \nu^2)\kappa\Omega^4 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

なお、 $\alpha = 0$ のとき flexural 振動、 $\alpha = 1$ のとき一般振動を与える。また、

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= -\{2 + 2(1 + \nu)\Omega^2\}, \quad \mu_4 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_4} \\ C_i &= \frac{1}{Eha} \frac{\lambda_i + (1 - \nu) + (1 - \nu^2)\Omega^2}{(1 - \nu)(\lambda_i + 2)/\kappa - 1} \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (6)$$

である。なお、頂点が閉じたドームの場合には式(3)で $B_i, H = 0$ とすればよい。

頂点が閉じたドームの固有振動数、固有モード算定法を示す。未知積分常数を A_i ($i=1\sim 4$, $A_4 \equiv G$) と置き、
齊次境界条件式を次のように表すと、

$$[a_{ij}(\omega)]\{A_j\} = \{0\} \quad (7)$$

これより有意な A_i が一意的に決まるための条件として次の振動数方程式が求まる。

$$|a_{ij}(\omega)| = 0 \quad (8)$$

a_{ij} は Legendre 陪関数およびその導関数であり、 ω はその中に陰に含まれているので、式(8)を満たす ω (固有円振動数) は試行錯誤法によって求めねばならない。文献(横尾他、1963)を発表した当時はこの計算を遂行できるような大型で、高速な電子計算機は我が国には存在せず、従って、固有振動数および固有モードを算定し得なかった。大型電子計算機使用の条件も整っていた 1980 年代初頭に、地震応答解析の必要性和固有振動数および固有モードの参照基準の作成の必要性のため、4 個の境界条件について、多くの半開角に対して数値計算をおこなった (Kunieda, 1983)。その極一部を Table 1-1, 1-2, Fig. 1-a, 1-b に示す。

Table 1-1 $\Omega(\equiv \sqrt{ma^3/Ehg}\omega)$ of normal vibration (inertia of u, v, w are included):
fixed support, axisymmetric case ($n=0$), $a/h=100$

ϕ_0	Ω														
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th	11th	12th	13th	14th	15th
30.0	1.046	1.321	1.611	2.042	2.906										
32.5	1.025	1.247	1.558	1.845	2.535										
35.0	1.009	1.189	1.497	1.719	2.249										
37.5	0.996	1.144	1.423	1.648	2.029	2.703									
40.0	0.985	1.109	1.349	1.603	1.862	2.425									
42.5	0.975	1.082	1.285	1.556	1.745	2.201	2.838								
45.0	0.965	1.061	1.232	1.496	1.675	2.021	2.573								
47.5	0.956	1.044	1.188	1.427	1.632	1.877	2.352	2.950							
50.0	0.947	1.031	1.153	1.363	1.596	1.768	2.168	2.697							
52.5	0.938	1.020	1.125	1.307	1.548	1.696	2.015	2.483							
55.0	0.929	1.010	1.101	1.260	1.488	1.654	1.888	2.300	2.802						
57.5	0.920	1.003	1.082	1.220	1.427	1.623	1.787	2.144	2.596						
60.0	0.910	0.996	1.066	1.186	1.371	1.586	1.715	2.011	2.417	2.893					
62.5	0.900	0.990	1.053	1.158	1.322	1.535	1.671	1.898	2.261	2.694					
65.0	0.889	0.984	1.042	1.134	1.279	1.479	1.643	1.804	2.126	2.519	2.970				
67.5	0.878	0.979	1.032	1.114	1.243	1.425	1.613	1.732	2.008	2.366	2.779				
70.0	0.867	0.974	1.024	1.097	1.211	1.375	1.572	1.686	1.906	2.231	2.610				
72.5	0.855	0.970	1.017	1.082	1.184	1.332	1.521	1.658	1.819	2.111	2.460	2.854			
75.0	0.843	0.965	1.010	1.069	1.160	1.294	1.470	1.634	1.748	2.006	2.326	2.691			
77.5	0.830	0.960	1.005	1.058	1.140	1.260	1.422	1.601	1.699	1.913	2.207	2.544	2.919		
80.0	0.817	0.956	1.000	1.049	1.122	1.231	1.379	1.557	1.670	1.832	2.100	2.412	2.762		
82.5	0.804	0.952	0.995	1.040	1.107	1.205	1.340	1.509	1.649	1.764	2.004	2.294	2.620	2.961	
85.0	0.790	0.947	0.991	1.033	1.093	1.182	1.305	1.462	1.624	1.712	1.919	2.187	2.490	2.820	2.971
87.5	0.776	0.943	0.987	1.026	1.081	1.162	1.274	1.420	1.586	1.681	1.843	2.090	2.373	2.685	2.894
90.0	0.760	0.938	0.984	1.020	1.071	1.144	1.247	1.381	1.542	1.660	1.777	2.002	2.266		

Table 1-2 Ω of normal vibration: fixed support, antisymmetric case ($n=1$), $a/h=100$

ϕ_0	Ω															
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th	11th	12th	13th	14th	15th	16th
30.0	1.052	1.220	1.657	2.403												
35.0	1.021	1.127	1.393	1.889												
40.0	0.995	1.072	1.242	1.579	2.087											
45.0	0.971	1.034	1.151	1.386	1.755	2.252										
50.0	0.944	1.007	1.094	1.261	1.534	1.914	2.381									
55.0	0.909	0.988	1.056	1.179	1.383	1.676	2.052	2.399								
60.0	0.867	0.973	1.031	1.123	1.278	1.506	1.807	2.158	2.321							
65.0	0.820	0.960	1.013	1.085	1.204	1.382	1.624	1.923	2.165	2.337						
70.0	0.771	0.947	1.000	1.058	1.151	1.292	1.487	1.734	2.006	2.128	2.420					
75.0	0.720	0.934	0.990	1.038	1.111	1.224	1.382	1.588	1.832	2.001	2.172	2.485				
80.0	0.669	0.921	0.981	1.023	1.083	1.174	1.303	1.473	1.683	1.888	1.988	2.250	2.378			
85.0	0.618	0.908	0.973	1.011	1.061	1.135	1.241	1.383	1.561	1.762	1.864	2.049	2.254	2.350		
90.0	0.568	0.893	0.966	1.002	1.044	1.105	1.193	1.311	1.462	1.642	1.766	1.885	2.113	2.193	2.418	
95.0	0.519	0.879	0.958	0.994	1.030	1.082	1.155	1.255	1.383	1.539	1.675	1.753	1.955	2.108	2.222	2.488
100.0	0.472	0.863	0.951	0.987	1.020	1.063	1.125	1.209	1.319	1.453	1.586	1.645	1.817	2.012	2.089	2.288
105.0	0.426	0.847	0.944	0.981	1.011	1.048	1.101	1.172	1.266	1.382	1.504	1.554	1.701	1.886	2.021	2.125
110.0	0.382	0.830	0.937	0.975	1.003	1.036	1.081	1.142	1.223	1.323	1.430	1.474	1.603	1.769	1.943	2.018
115.0	0.340	0.813	0.929	0.970	0.997	1.026	1.065	1.118	1.187	1.274	1.364	1.405	1.520	1.668	1.834	1.964
120.0	0.299	0.795	0.921	0.965	0.991	1.018	1.052	1.097	1.157	1.233	1.304	1.344	1.450	1.582	1.732	1.890
125.0	0.260	0.776	0.913	0.959	0.986	1.010	1.040	1.080	1.132	1.197	1.250	1.294	1.390	1.508	1.642	1.792
130.0	0.223	0.756	0.904	0.954	0.981	1.004	1.031	1.066	1.111	1.165	1.201	1.253	1.339	1.444	1.565	1.702
135.0	0.187	0.735	0.894	0.948	0.976	0.998	1.023	1.053	1.092	1.133	1.163	1.218	1.296	1.389	1.498	1.622

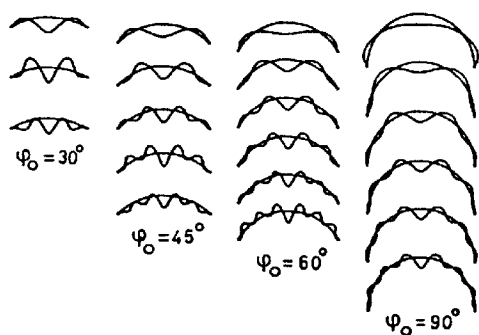


Fig. 1-1 deflection modes of normal vibration :
fixed support, $n=0$, $a/h=100$

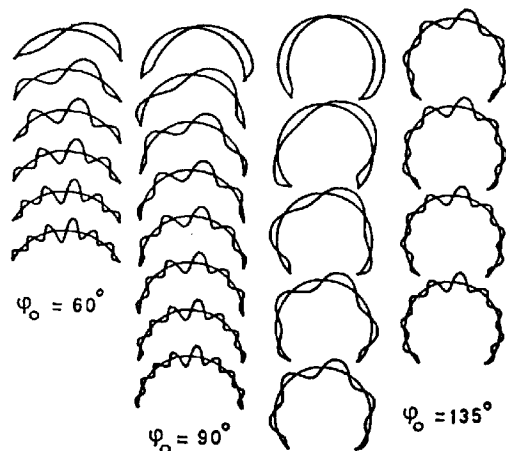


Fig. 1-2 deflection modes of normal vibration :
fixed support, $n=1$, $a/h=100$

2.2 固有モードの近似解

ところで、(3)に与えられた表現の固有モードを用いて、応答解析を遂行することは現時点では不可能と言えるほど困難である。なぜならば応答解析にはモード重畳法を用いねばならないが、それには通常 Galerkin 法を用いる。Galerkin 法では非整数次あるいは複素数次の Legendre 関数の積の領域積分が必要であるが、現在ではその積分を求めることは関数形のままで不可能である。

厳正解に基づく固有振動数および固有モードの参照基準が作成されているので、応答解析に容易に用いられ得る近似解の作成を試みた (Kunieda, 1984) (國枝, 1990)。最終的には文献 (國枝, 1990) の方法を応答解析に用いている。この方法を概説する。近似固有モードの表現作成にあたっては自由振動として flexural vibration を仮定する。厳正解固有振動数の低周波数域において normal vibration (全変位成分の慣性項を考慮) と flexural vibration (法線方向変位成分の慣性項のみ考慮) の間には有意とするほどの差異は見られない (Kunieda, 1983) ので、この仮定は妥当としても良いと考えている。

軸対称の場合の近似固有モードを次の形に置く。

$$w = \sum_{i=1}^N B_i \tilde{W}_i(\phi) \cos \omega_i t, \quad \tilde{W}_i(\phi) = \sum_{j=J_i}^{K_i} F_{ji} P_j(\cos \phi) \quad (9)$$

N : モードの数、

ここに $\tilde{W}_j$ は仮モードであり、軸対称の場合の一般厳正解表示が (3) 式のように Legendre 関数の和で表されるところを、直交関数である Legendre 多項式の部分和で表現している。この仮モードに含まれる J_i , K_i の選定がここでの近似解の精度を決定する。ところで Legendre 多項式は

$$P_m(\cos \phi) = D_m \cos m\phi + \text{Func.}(\cos k\phi; k=0 \cdots (m-1))$$

のように級数表現される。即ち P_m の曲線を描くと、 $0 < \phi \leq 90^\circ$ の領域でこの曲線には $m/2$ 個の節点が存在する。ここでこの節点が 0 から 90° の間に均等に分布していると仮定する (但し十分に大きな m についてである)。従って、 $0 < \phi \leq \phi_0$ の領域に i 個の節点がある状態を考えると上記の m の替わりに $2i(90^\circ/\phi_0)$ を用いればよい。(9) 式の $\tilde{W}_i$ が第 i 次のモードに仮に対応するとすると、次のように設定できる。

$$K_i = \text{int} \left[\frac{180 i}{\phi_0} \right] \quad (n=0) \quad (10)$$

ここに、記号 int は [] 内の 1 より小さい値を切り落とす操作(Integer)を示している。他方、軸対称時には、境界条件は 3 個であり、後述のように条件数は $(i+2)$ 個であるのと全ての Legendre 多項式が含まれるようにするた

めには

$$J_i = \min[K_i - (i+2), K_{i-1} + 1] \quad (11)$$

である必要がある。

仮モードは互いに次の直交条件を満たしているように定める。

$$\begin{aligned} \int_0^{\phi_0} [H_2 H_2(\tilde{W}_p^n) - \frac{a}{D} H_2(\Psi_p^n)] \tilde{W}_i^n \sin \phi \, d\phi \\ = \int_0^{\phi_0} [H_2 H_2(\tilde{W}_i^n) - \frac{a}{D} H_2(\Psi_i^n)] \tilde{W}_p^n \sin \phi \, d\phi \end{aligned} \quad (12)$$

式(9)に含まれる未知係数 F_{ji} を次の手順で定める。

第一段階 (仮モード $\tilde{W}_j$ の決定)

(a) 第1番目のモードについて $F_{j1}|_{j=J_1} = 1$ とおき3個の境界条件を用いて F_{j1} ($j \neq J_1$) を求める。

(b) 第 i 番目のモードに付いて $(i-1)$ 個の直交条件と3個の境界条件を満たすように F_{ji} を求める

第2段階 (固有モード W_i の決定)

第1段階で定まった F_{ji} を用いて仮モード(1.9)式を法線方向運動方程式に代入し、Galerkin法を適用すると式(9)の未知係数 B_i^n に関する次の式が得られる。

$$\begin{aligned} -\Omega^2 [m_{ij}] \{B_j\} + [k_{ij}] \{B_j\} &= 0 \quad (13) \\ m_{ij} = m_{ji} &= \sum_{r=J_i}^{K_i} \sum_{s=J_j}^{K_j} F_{ri} F_{sj} S(r, s), \quad \Omega^2 = \frac{ma^2}{Ehg} \omega^2 \\ k_{ij} = k_{ji} &= \frac{1}{\kappa} \sum_{r=J_i}^{K_i} \sum_{s=J_j}^{K_j} F_{ri} F_{sj} \{2-r(r+1)\} \{2-r(r+1)-\lambda_r\} S(r, s) \\ S(r, s) &= S^0(r, s) = \int_0^{\phi_0} P_s(\cos \phi) P_r(\cos \phi) \sin \phi \, d\phi \\ &= \begin{cases} \frac{1}{r(r+1)-s(s+1)} [(s-r) \cos \phi P_s P_r - s P_{s-1} P_r + r P_s P_{r-1}]_{\phi=\phi_0}, & (r \neq s) \\ \frac{1}{2r+1} [1 - P_r P_r \cos \phi]_{\phi=\phi_0} - 2 \sum_{p=1}^{[r/2]} (2r+1-4p) S(r, r-2p), & (r = s) \end{cases} \quad (14) \end{aligned}$$

式(13)より固有振動数 Ω_i と一般化座標ベクトル $\{B_i\}_i$ が通常の手法で計算できるので $\{B_i\}_i$ を式(9)に代入すると最終的に次のように固有モードが計算される。

$$\begin{aligned} w = \sum_{i=1}^N W_i(\phi) T_i(t), \quad W_i(\phi) = \{B_s\}_i^T \{\tilde{W}_s\} = \sum_{j=1}^{K_N} G_{ji} P_j(\cos \phi) \quad (15) \\ G_{ji} = \sum_{s=1}^N \{B_s\}_i^T F_{js} \end{aligned}$$

式(13)より求まる Ω^2 値 (但し $N-2$ 番目から N 番目のモードに対応するものを除く) と厳正解に基づく参照標準表の値は極めて良く一致し、固有モードも良く一致した。式(13)に基づく固有振動数の計算は試行錯誤法を必要とせず、極めて容易に求まる。

また、式(14)式に見られるように、Legendre多項式の積の領域積分は閉関数で与えることが出来る。同様に応答解析に必要な Legendre多項式の導関数を含んだ積の領域積分を閉関数で与えている。

2.3 上下地震応答線形解析

この近似モードを用いて上下地震動に対する応答解析を遂行して、幾つかの貴重な知見を得た。応答解析に当たってはモード重畳法を適用すると最終的な支配式は次式で与えられる。

$$\ddot{T}_s + \Theta_{1s} \dot{T}_s = \Theta_{2s} \ddot{U} \quad (16)$$

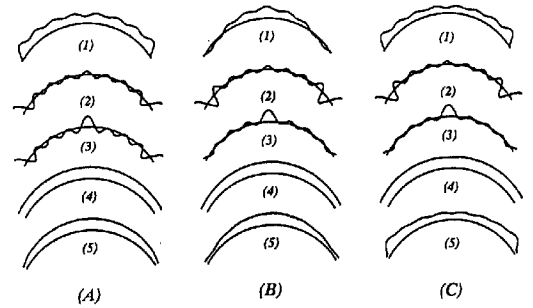
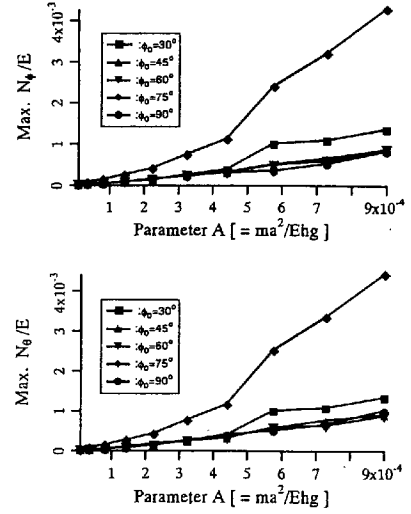
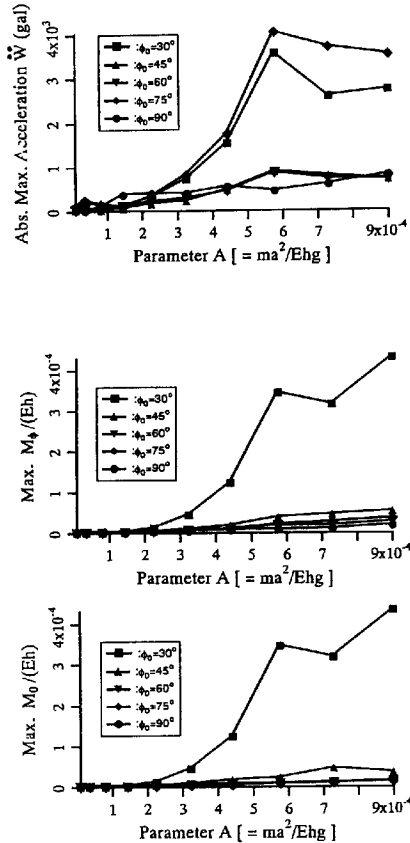
$$\Theta_{1s} = \bar{\Theta}_{1s} / (A \Theta_{0s}), \Theta_{2s} = \frac{1}{h} \bar{\Theta}_{2s} / \Theta_{0s}, \quad A = \frac{ma^2}{Ehg}$$

$$\Theta_{0s} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N G_{sj} G_{si} S(j, i)$$

$$\bar{\Theta}_{1s} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N G_{sj} G_{si} \{ 2 - j(j+1) \} \{ 2 - j(j+1) - \lambda_j \} S(j, i)$$

$$\bar{\Theta}_{2s} = 3 \sum_{j=1}^N G_{sj} S(j, 1)$$

$\ddot{U}$ は上下地震動の加速度であり、式(16)の諸係数は閉形関数で与えられる。応答解析では固有振動数 90Hz 以下の固有モードを用い、地震波は Kobe-JMA を用いた。最大加速度を 100gal として、Nigham-Jennings 法で計算した結果(Kunieda, 1986) (Kunieda, 1997) (Kunieda, 1998)の一部をここにしめす。



An example of distribution of the UD response quantities of a dome on the surface, $\phi_0 = 60^\circ, a/h = 500$,

(1): $\ddot{w}$, (2): M_ϕ , (3): M_θ , (4): N_ϕ , (5): N_θ ,

and (A): $A = 3.6 \times 10^{-5}$, (B): $A = 2.25 \times 10^{-4}$, (C): $A = 5.76 \times 10^{-4}$

局所的だが非常に大きな応答加速度の発生が見られる。このことは動的不安定発生の可能性に対する懸念があることを示している。その検討を次に行う。

2.4 動的安定限界地震強度

幾何学的非線形性を考慮した運動方程式に上記の近似固有モードを用いてモード重畳法を行うと、最終支配方程式は次の形で与えられる。

$$\begin{aligned} & \ddot{T}_s + \Theta_{1s} T_s + \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \Theta_{2s}(p, q) T_p T_q + \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \sum_{r=1}^M \Theta_{3s}(p, q, r) T_p T_q T_r \\ & = \ddot{U} \left\{ \Theta_{4s} + \sum_{p=1}^M \Theta_{5s}(p) T_p \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{1s} &= \bar{\Theta}_{1s} / (A \Theta_{0s}), \quad \Theta_{2s} = \left(\frac{h}{a} \right) \bar{\Theta}_{2s} / (A \Theta_{0s}), \quad \Theta_{3s} = \left(\frac{h}{a} \right)^2 \bar{\Theta}_{3s} / (A \Theta_{0s}), \quad \Theta_{4s} = \frac{1}{h} \bar{\Theta}_{4s} / \Theta_{0s}, \\ \Theta_{5s} &= \frac{1}{a} \bar{\Theta}_{5s} / \Theta_{0s}, \quad A = \frac{ma^2}{Ehg}, \quad \Theta_{0s} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N G_{sj} G_{si} S(j, i) \\ \bar{\Theta}_{1s} &= \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N G_{sj} G_{si} \{ 2 - j(j+1) \} \{ 2 - j(j+1) - \lambda_j \} S(j, i) \\ \bar{\Theta}_{2s}(p, q) &= -\frac{a^3}{\kappa D} \left\{ \sin \phi \ W_p^\circ \ L \bar{N}_\phi \ W_q \ W_s \right\} \bigg|_{\phi_0} + \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{\bar{N}} G_{qj} C_{kps} [\lambda_j S_2(k, j) + \{ \lambda_j - 2 + j(j+1) \} S(k, j)] \\ &\quad - \frac{1}{2(1-\nu)} \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{\bar{N}} G_{sj} C_{kps} S(k, j), \quad \bar{N} = 2N (= 2K_L) \\ \bar{\Theta}_{3s}(p, q, r) &= -\frac{1}{2(1-\nu^2)} \left\{ \sin \phi \ W_p^\circ \ W_q^\circ \ W_r^\circ \ W_s \right\} \bigg|_{\phi_0} + \frac{1}{2(1-\nu^2)} \sum_{k=0}^{\bar{N}} \sum_{i=0}^{\bar{N}} C_{kpq} C_{irs} S(k, i) \\ \bar{\Theta}_{4s} &= 3 \sum_{j=1}^N G_{sj} S(j, 1) \quad \bar{\Theta}_{5s}(p) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N G_{pj} G_{si} [(j+2)S(j+1, i) + (j-1)S(j-1, i)] \left\{ -\frac{j(j+1)}{2j+1} \right\} \end{aligned}$$

式(17)の諸係数は全て閉形関数で与えられる。上記2地震波についてオリジナルの最大加速度の何倍で動的不安定が発生するかを調べたので(Kunieda, 1993)(國枝, 1999)、その一部を示す。

Table 2 Critical Intensity Λ_0 in Single Modal State, Kobe JMA UD, $a=4000\text{cm}$, $\eta = 0.01$, Fixed End

$\phi_0 = 30^\circ$				$\phi_0 = 45^\circ$				$\phi_0 = 60^\circ$			
A	a/h=1000		a/h=500	A	a/h=1000		a/h=500	A	a/h=1000		a/h=500
	0.0008	0.0016	0.0008		0.0016	0.0008			0.0016	A	0.0008
1	---	---	---	1	---	---		1	---	1	---
2	---	---	---	2	---	---		2	---	3	---
3	---	---	---	3	---	---		3	---	6	---
4	---	11.1250	---	4	---	---		4	---	8	---
5	14.1250	9.9750	---	5	---	---		5	---	9	---
6	14.9750	3.9750	8.3750	6	10.6750	---		6	19.3000	10	19.0500
7	9.7250	6.4500	9.1750	7	10.4250	17.0000		7	18.9500		
8	9.7750	4.9125	8.4250	8	6.6750	18.9750		8	12.0250		
9	5.9750	4.2063	11.9250	9	8.6250	10.9750		9	12.0250		
10	2.3875	1.1438	---	10	5.0250	---		10	7.3750		
11	4.0063	2.2438	---	11	---	7.3750		11	---		

Table 3 Critical Intensity Λ_0 in Multi-Modal State $a/h=500$, $a=4000\text{cm}$, $\eta=0.01$, $A=0.00065$

モード組 合わせ	$\Phi_0 = 30^\circ$		$\Phi_0 = 45^\circ$	
	El' CentroUD	Kobe-UD	El' CentroUD	Kobe-UD
1, 2	---	---	12.800	6.100
1, 3	---	---	12.800	6.100
1, 4	16.200	12.800	12.800	6.100
1, 5	8.300	8.700	12.800	6.100
2, 3	---	---	---	---
1, 2, 3	---	---	12.800	6.100
1, 2, 5	8.300	8.600	12.800	6.100
1, 2, 6	2.600	2.900	12.900	6.500
1, 3, 5	8.200	8.200	12.800	6.100
1, 3, 6	2.600	2.900	12.900	6.500
2, 3, 5	8.200	8.100	---	15.500
2, 3, 6	2.600	2.900	15.000	9.400
2, 4, 6	2.600	2.900	14.600	9.500
2, 4, 8	2.000	1.375	8.100	8.500
1, 2, 3, 4	16.200	13.100	11.800	6.100
1, 2, 3, 4, 5, 6	2.700	2.900	11.800	6.400

Table 4 Critical Intensity Λ_0 in a Special Set of Combined Modes as 1, 2, 4, 6, 8, and 10th Modes $\Phi_0 = 30^\circ$, $a = 4000\text{cm}$, Fixed End

A/h	A	El' CentroUD		Kobe UD	
		$\eta=0.00$	$\eta=0.01$	$\eta=0.00$	$\eta=0.01$
1000	0.0001	0.5150	1.0750	15.1000	---
	0.0008	0.1750	0.3687	0.1437	0.3625
	0.0016	0.2250	0.5750	0.1563	0.3125
500	0.00005	2.9000	8.4000	3.1990	0.9600
	0.0004	1.0500	3.1000	1.0250	3.7000
	0.0008	0.4938	0.9750	0.9000	1.6750

単一モードの場合よりもモード連成を考慮する場合の方が安定限界地震強度は低くなるが、連続体として無限個ある固有モードの中からどの様にモードを選ぶかは困難である。これらの表より通常地震で動的不安定現象の発生はなさそうである。だが、このような手法で動的安定限界地震強度を算定するのは計算時間も要するし、煩雑である。地震のような動的外力を受けるシェルや空間構造の設計規範はそれらの材料学的終局強度によるよりもしばしば応答挙動がそれらの機能上に有害であるか否かにかかっていることが多い。これらの最も重要な応答挙動は構造物全体としての動的不安定に関係している。

そこで、動的安定限界外力強度を容易に行いうる手法を開発した(Kunieda, 1993 SEIKEN-IASS)。非線形復元力特性を持つ系の動的不安定現象は近年世界的にカオス問題として研究が進められてきている。そして、カオス挙動は極めて多くの数値計算結果を通じて明らかになるものであり、また、長時間にわたる応答計算の未明らかなるものである。しかしながら、カオス問題において、初期不安定現象発現に対応する限界外力強度を推定する有効な解析的手法は未だ提案されていない。

2.5 動的安定限界外乱強度の予測法

一般に構造物の動的不安定現象は有限時間内において、それも極めて短時間の外力作用中において重要なのである。保存系外力であるステップ荷重や衝撃荷重の場合の安定限界強度は極めて容易に算出できるが、地震や風のように時刻依存型の外力の場合は系が非保存系になるので安定限界強度を決める事は現時点では非常に困難である。

筆者は単純周期外力の初期安定限界強度の予測法の開発にここ数年たずさわってきた。これらの研究を通じて、筆者は次の仮定が成立するのではないかと強い確信を抱くようになった。

仮説：エネルギー曲面について考察するならば、非自律系の安定領域は自律系の安定限界によって限られる。次式の表現の式を取り扱いの対象としている。

$$\eta^2 \ddot{X} + \zeta \eta \dot{X} + X + \alpha X^2 + \beta X^3 = F(t) \quad (18)$$

ところで、

$$X_0 = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2\beta} \quad (19)$$

を鞍点とする。この点が鞍点であるための条件は文献(Kunieda, 1993 SEIKEN-IASS)を参照されたい。鞍点とはエネルギー曲面に現れる盆地の境界を意味する。もし自律系の軌跡がこの境界を越えると、軌跡は他のアトラクターに漸近するかあるいは無限遠に発散していく。従って本論で取り扱っている動的安定問題の意味に於いて鞍点は自律系の軌跡の安定限界と見なせる。

式(19)で表される条件を満たす X_0 を用いた $(X_0, 0)$ を初期条件とした或る自律系の軌跡は次式で与えられるエネルギーレベル C_0 に対応するものとする。

$$C_0 = C|_{X=X_0} = (X^2/2 + \alpha X^3/3 + \beta X^4/4)|_{X=X_0} \quad (20)$$

もし外力が存在し、この外力によって為される仕事 Λ を初期条件より定まるエネルギー C に加えるならば、 C_0 と $(C + \Lambda)$ 間のエネルギーレベルの差異は自律系と非自律系軌跡の間の距離を推定する一種の尺度と見なすことができる。従って、この考察から次のような仮説を導き出すことが出来るであろう。

仮説：非自律系の動的安定限界の規範は軌跡が最初に自律系の軌跡に接する点である。

この規範は次式で表される。

$$C_0 - (C + \Lambda) = 0 \quad (21)$$

ここに

$$\Lambda = \int_0^{t_1} F(t) \dot{X}(t) dt, \quad (\text{at } t = 0, X = X_A, \dot{X} = 0) \quad (22)$$

ところで非自律系の軌跡は動的安定限界状態の近傍では自律系の軌跡から摂動されたものと見なすことができるであろう。従って、求めることが不可能に近い非自律系の解 $\dot{X}$ に代わって自律系の解を用いて式(22)の Λ を計算しても十分に良い近似値を与えるであろう。自律系の解は閉形の解析関数として得ることができる。従って、外力の形式によっては(22)式の積分は解析的に行うことができる。

自律系の解を求める。 初期条件 $(\bar{X}_0, 0)$ のもとでは $\beta < 0$ の場合には

$$\dot{X} = -\bar{X}_0 \frac{2R(\alpha_1 - 1)cn dn}{\eta B[R + 1 + (R - 1)sn]^2} \quad cn, dn, sn: \text{Jacobiの楕円関数}$$

R, B, α_1 等の記号については文献(Kunieda, 1993 SEIKEN-IASS)を参照されたい。

Table 5-1 Comparison of Predicted Intensity Factor with Exact Result for Step Loading

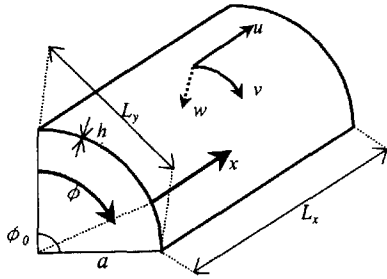
β	α		
	1.0	0.5	0.1
-0.5	0.9988	0.9908	0.9821
-0.3	1.0020	0.9936	0.9825
-0.1	1.0070	1.0000	0.9850

Table 5-2 An Example of Comparison of Predicted Intensity Factor with Direct Numerical Result

	modal number									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
数値結果	3.623	---	---	7.329	2.615	1.008	0.172	0.032	0.029	0.033
予測値	3.624	---	---	7.180	2.627	0.983	0.173	0.032	0.029	0.034

3. 屋根型円筒シェルの振動特性、地震応答特性

空間構造として最も多用される屋根型円筒シェルの耐震安全性を保证するために地震応答解析を遂行して応答応力や変形状態を把握しているが、応答解析のために先ず自由振動時振動特性を把握した。自由振動時厳正解を用いての応答解析は実用的ではないので、応答解析に使いやすい自由振動時の解表現（近似解）をも誘導している。



完全型の円筒シェルの自由振動は Donnell 式に基づいて厳正解が求められ一部固有振動数もあたえられている (Kraus, 1967)。だが、部分円筒シェルの自由振動厳正解は Dischinger 式に基づいて日置 (1959) により与えられているが、固有振動数、固有モード等は計算されていないので振動特性は明確にされていない。今日では FEM により応答解析を遂行することが一般的であるため、固有振動数、固有モード

等が広く一般的知識として与えられることがなかった。

ここで取り扱っているのは線形理論に基づく微小変形範囲のもので、変形による幾何学的剛性の変化は考慮していない。

既述の如く日置により厳正解は与えられているが、計算プログラム作成に適した表現にするため、改めてここに厳正解を求める。使用する記号は上図に与えている。Dischinger 式に基づく自由振動時運動方程式は D'Alembert の原理を用いて次のように与えられる。

$$\begin{aligned} wu' + v'' - w + k \left\{ \frac{1-\nu}{2} u'''' - u'' - \frac{3-\nu}{2} v'''' - w'''' - 2w'''' - w'''' - 2w'' - w \right\} \frac{a^2}{B} Z = 0 \\ \frac{1+\nu}{2} u'' + v'' + \frac{1-\nu}{2} v'' - w'' + k \left\{ \frac{3(1-\nu)}{2} v'' + \frac{3-\nu}{2} w'' \right\} + \frac{a^2}{B} Y = 0 \\ u'' + \frac{1-\nu}{2} u'' + \frac{1+\nu}{2} v'' - w'' + k \left\{ \frac{1-\nu}{2} u'' + w'' - \frac{1-\nu}{2} w'' \right\} + \frac{a^2}{B} X = 0 \end{aligned} \quad (23-a, b, c)$$

$$a; \text{半径}, ()' \equiv a \frac{\partial}{\partial x}, ()'' \equiv \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad N_{\phi x} = N_{x\phi}, \quad M_{\phi x} = M_{x\phi}$$

$$B = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad k = \frac{D}{Ba^2} = \frac{h^2}{12a^2}$$

外力項は地震作用時には次式で与えられる。但し、 ρ = 中立面単位面積当たり質量。

$$\begin{aligned} X = -\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u + \bar{U}), \quad Y = -\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v + \bar{V}), \quad Z = -\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (w + \bar{W}) \\ \bar{W} = W \cos\left(\frac{\phi_0}{2} - \phi\right) + V \sin\left(\frac{\phi_0}{2} - \phi\right), \quad \bar{V} = -W \sin\left(\frac{\phi_0}{2} - \phi\right) + V \cos\left(\frac{\phi_0}{2} - \phi\right) \end{aligned}$$

(24)

3.1 自由振動時の解

ここでは境界条件として円弧妻端で単純支持、直線縁端で固定の場合を考えるので、それに適した解表現を求める。変位成分を次のように置く。

$$u = \sum_n u_n(\phi) \cos \lambda_n \xi e^{i\omega t}, v = \sum_n v_n(\phi) \sin \lambda_n \xi e^{i\omega t}, w = \sum_n w_n(\phi) \sin \lambda_n \xi e^{i\omega t} \quad (25)$$

$$u_n = E e^{m\phi}, v_n = F e^{m\phi}, w_n = G e^{m\phi}$$

ここに m は下式で表される 8 次代数方程式の 8 個の根である。

$$D_0 m^8 + D_1 m^6 + D_2 m^4 + D_3 m^2 + D_4 = 0 \quad (26)$$

この式の係数 $D_0 \sim D_4$ は ω^2 の関数であり次式となる。

$$D_0 = kA_1, D_1 = C_1^2 - A_1 C_3 + k(A_1 A_3 + A_2 + B_1^2)$$

$$D_2 = A_3 C_1^2 + 2B_2 C_1 - A_1 B_3 - C_3(A_1 A_3 + A_2) - 2B_1 C_1 C_2 - B_1^2 C_3 - A_1 C_2^2 + kA_2 A_3$$

$$D_3 = 2B_2 A_3 C_1 + B_2^2 - A_2 A_3 C_3 - B_3(A_1 A_3 + A_2) - 2B_1 B_2 C_2 - B_1^2 B_3 - A_2 C_2^2$$

$$D_4 = A_3(B_2^2 - A_2 B_3)$$

$$A_1 = (1-\nu)(1+k)/2, A_2 = \Omega^2 - \lambda^2, A_3 = \Omega^2 - \lambda^2(1-\nu)(1+3k)/2$$

$$B_1 = \lambda(1+\nu)/2, B_2 = -\lambda(\nu + k\lambda^2), B_3 = -(1-\Omega^2) - k(1+\lambda^4)$$

$$C_1 = -k\lambda(1-\nu)/2, C_2 = -1 - k\lambda^2(3-\nu)/2, C_3 = -2k(1-\lambda^2)$$

$$\Omega^2 = \frac{\rho a^2}{B} \omega^2 = \frac{(1-\nu^2)\rho a^2}{Eh} \omega^2$$

特性値 m の値に応じて解の表現は 3 つのタイプに分けられる。

(1) m^2 が正の実数値の場合 $|m| = \alpha$ と置いて

$$(w_n, u_n, v_n) = (P_1, Q_1, R_1) e^{-\alpha\phi} + (P_2, Q_2, R_2) e^{-\alpha\phi} \quad (27)$$

$$Q_1 = \delta P_1, Q_2 = \delta P_2, R_1 = \mu_1 P_1, R_2 = -\mu_2 P_2$$

(δ と μ は後述)

(2) $m^2 \equiv$ 実負値 の場合、 $|\sqrt{-m^2}| = \beta$ と置いて

$$(w_n, u_n, v_n) = (P_1, Q_1, R_1) \cos \beta\phi + (P_2, Q_2, R_2) \sin \beta\phi \quad (28)$$

$$Q_1 = \delta P_1, Q_2 = \delta P_2, R_1 = \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2, R_2 = -\mu_2 P_1 + \mu_1 P_2$$

(3) $m^2 \equiv$ 複素数値 の場合、 $m = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta > 0$) と置いて

$$(w_n, u_n, v_n) = e^{-\alpha\phi} \left\{ (P_1, Q_1, R_1) \cos \beta\phi + (P_2, Q_2, R_2) \sin \beta\phi \right\}$$

$$+ e^{-\alpha\phi} \left\{ (P_5, Q_5, R_5) \cos \beta\phi + (P_6, Q_6, R_6) \sin \beta\phi \right\}$$

$$Q_{1,5} = \delta_1 P_{1,5} - \delta_2 P_{2,6}, Q_{2,6} = \delta_2 P_{1,5} - \delta_1 P_{2,6}$$

$$R_1 = \mu_1 P_1 - \mu_2 P_2, R_2 = \mu_2 P_1 + \mu_1 P_2, R_5 = -(\mu_1 P_5 - \mu_2 P_6), R_6 = -(\mu_2 P_5 + \mu_1 P_6) \quad (29)$$

ここで ϕ, δ と μ は次の様に与えられる。

$$\bar{\phi} = \phi_0 - \phi, \quad \delta = \frac{c_2 b_1 - c_1 b_2}{a_1 b_2 + b_1^2}, \quad \mu = \frac{-c_1 b_1 - c_2 a_1}{a_1 b_2 + b_1^2} \quad (30)$$

$$\delta = \delta_1 + i \delta_2 \quad (\delta_2 > 0) \quad (m^2 \text{ ■ 複素数値のとき, } \beta > 0)$$

$$\mu = \mu_1 + i \mu_2 \quad (\mu_2 > 0) \quad (m^2 \text{ ■ 実正値でないとき, } \beta > 0)$$

$$a_1 = -(\lambda^2 - \Omega^2) + \frac{1-\nu}{2}(1+k)m^2$$

$$b_1 = \frac{1+\nu}{2}\lambda m, \quad b_2 = m^2 - \left\{ \frac{1-\nu}{2}(1+3k)\lambda^2 - \Omega^2 \right\}$$

$$c_1 = -\nu\lambda - k\lambda^3 - \frac{1-\nu}{2}k\lambda m^2, \quad c_2 = -(1 + \frac{3-\nu}{2}k\lambda^2)m \quad (31)$$

すなわち δ は $m^2, m^4, \dots$ の関数、 μ は $m, m^3, \dots$ の関数
 なお、 m^2 は重根でないとして上式を与えている。重根の場合は下記の固有値検討で行列式の値が零か否かのチェックに用いられるのみであるからその必要はないとして敢えてここに与えない。
 境界条件は下式で与えられる。

$$[(a_{ij})] \{P_1 \ P_3 \ P_5 \ P_7\}^T = 0 \quad (32)$$

零ではない P_i が求まるための条件として係数行列の行列式が零であるという振動数方程式が得られる。ただ、行列式の各要素が固有振動数の陰関数となっているので、振動数方程式の根である固有振動数を求めるためには試行錯誤法を用いねばならない。試行錯誤法で固有値を求める場合には幾つかの注意すべき点がある。まず、行列式が厳正に零になる固有値を求めることが不可能に近いので、固有値に誤差が含まれることである。また、最も懸念される事柄は固有値の欠落である。式(32)の係数行列式より固有値が求まると、 P_i は互いの比として式(32)より決定され、固有値に対応する固有モードが計算されることになる。 P_i を求めるに当たって、式(32)の全てを用いる必要はなく、いずれか1個の式(1行)は不要となる。この1個の式を何れに選んでも当然 P_i の計算結果は同じでなければならない。このことは求まる固有値の正当性の確認となる。だが、求まった固有値には誤差が含まれるので、上述計算結果の P_i は同じ結果を与えない。固有値の欠落を招かないために固有値のスキャン間隔を小さくすれば計算時間は飛躍的に増すので実用的でない。従って、固有値を求めるために以下のような配慮をした。

- ① 固有値の最初のスキャン間隔は 0.0001 とする。行列式の符号が変化する近辺では間隔を小さくする
- ② 2組の式組み合わせより求まった P_i の各々の差が5%以下のときを可とする
- ③ 近接して固有値が求まったときはその近辺で固有値スキャン間隔を 0.000001 としてやり直し、それら固有値に対して行列式が零に近づく場合のみを固有値とする

屋根型円筒シェルの固有値と固有モードの例を Table 6, 7 に、固有モードの例を Fig. 4 に与える。

Table 6 Normalized circular frequencies Ω (symmetric mode) by exact solution

(a) $R/h=500, \phi_0=60^\circ, Ly/Lx=0.5$

n	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th
1	0.082	0.158	0.289	0.464	0.679	0.909	0.995	1.254	1.594
2	0.141	0.210	0.306	0.472	0.685	0.909	0.991	1.258	1.598
3	0.183	0.275	0.361	0.490	0.696	0.912	0.993	1.266	1.605
4	0.233	0.312	0.433	0.526	0.711	0.916	0.999	1.276	1.616
5	0.286	0.350	0.479	0.581	0.732	0.922	1.009	1.289	1.629
6	0.338	0.396	0.513	0.636	0.758	0.928	1.022	1.305	1.644
7	0.388	0.447	0.548	0.681	0.787	0.934	1.040	1.324	1.663
8	0.438	0.499	0.586	0.719	0.818	0.941	1.060	1.346	1.685

(b) $R/h=500, \phi_0=90^\circ, Ly/Lx=0.5$

n	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th
1	0.055	0.086	0.132	0.208	0.304	0.419	0.552	0.703	0.868
2	0.086	0.127	0.190	0.240	0.313	0.423	0.555	0.706	0.870
3	0.125	0.156	0.213	0.298	0.369	0.439	0.563	0.711	0.874
4	0.159	0.199	0.242	0.316	0.418	0.497	0.578	0.719	0.880
5	0.195	0.231	0.287	0.340	0.435	0.548	0.615	0.731	0.887
6	0.233	0.263	0.323	0.381	0.454	0.570	0.665	0.747	0.896
7	0.269	0.299	0.350	0.424	0.482	0.588	0.701	0.769	0.906
8	0.305	0.338	0.380	0.457	0.519	0.607	0.727	0.794	0.916

Table 7 Normalized circular frequencies(Anti-symmetric mode) by exact solution

(a) $R/h=500$, $\phi_0=60^\circ$, $L_y/L_x=0.5$

n	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th
1	0.093	0.187	0.257	0.383	0.575	0.813	1.093	1.415	1.778
2	0.131	0.218	0.357	0.466	0.594	0.821	1.099	1.420	1.783
3	0.187	0.251	0.381	0.551	0.655	0.836	1.109	1.428	1.791
4	0.238	0.306	0.406	0.579	0.725	0.858	1.121	1.439	1.802
5	0.285	0.364	0.445	0.602	0.769	0.882	1.136	1.453	1.815
6	0.334	0.412	0.495	0.629	0.799	0.905	1.153	1.469	1.831
7	0.385	0.454	0.548	0.659	0.824	0.927	1.173	1.488	1.849
8	0.437	0.498	0.596	0.694	0.847	0.948	1.195	1.510	1.870

(b) $R/h=500$, $\phi_0=90^\circ$, $L_y/L_x=0.5$

n	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th
1	0.050	0.093	0.158	0.227	0.273	0.364	0.486	0.629	0.790
2	0.089	0.123	0.172	0.253	0.354	0.455	0.514	0.636	0.794
3	0.122	0.164	0.216	0.270	0.366	0.485	0.609	0.676	0.804
4	0.160	0.192	0.255	0.320	0.383	0.496	0.630	0.743	0.821
5	0.196	0.229	0.279	0.362	0.427	0.511	0.642	0.777	0.846
6	0.231	0.269	0.311	0.386	0.476	0.538	0.655	0.795	0.869
7	0.268	0.302	0.351	0.410	0.507	0.579	0.671	0.810	0.886
8	0.305	0.334	0.390	0.440	0.529	0.619	0.692	0.824	0.900

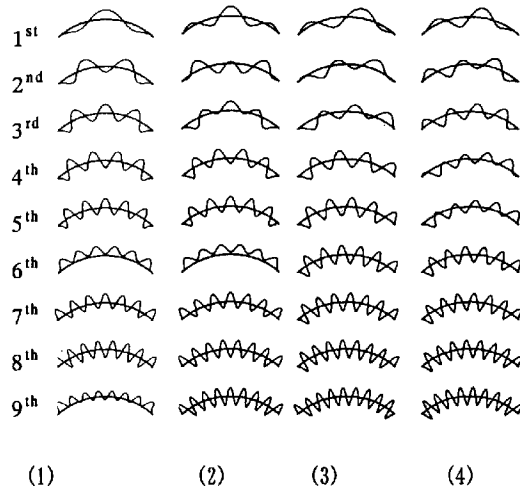


Fig.4 Examples of eigen mode $L_y/L_x=0.5$, $a/h=500$, $\phi_0=90^\circ$
 (1) symmetric $n=1$ (2) symmetric $n=3$ (3) Anti-sym. $n=1$ (4) Anti-sym. $n=3$

ここに、対称、逆対称モードとは円弧方向に関してのものである。 m^2 が等根をとる場合は直接には検討していないが、固有値のスキャン間隔が非常に小さく、等根前後で係数行列式の値をチェックしているので充分であると考えている。なお、後述の近似解法でも等根に対応する Ω に対しては固有値となっていない。

3.2 地震応答解析

ここに示される応答解析には神戸海洋気象台で収録の地震波 (KOBE-JMA) を用いる。最大加速度は上下動 3.3 gal、水平動 (NS成分) 8.17 gal である。表 1, 2 に示されるごとく、対称振動の固有振動数は逆対称の場合のそれらと極めて近く、また、低次域では地震波の卓越周期域とはほぼ重なる。従って、上下地震動に対する応答解析が必要不可欠である事が見て取れる。また、固有振動数がお互いに極めて接近しており、通常の建築骨組構造の場合とは異なる解析上の注意が必要である事も明らかである。すなわち、応答スペクトルを用いての SRS 法による最大応答加速度の推定は不可であると云える。

ここでの応答解析には 24 個の固有モードを採用している：直線母線方向に 4 個の対称形モードと円弧方向に 6 個の対称形 (上下動の場合) あるいは逆対称形 (水平動の場合) モード。すなわち、モード解析の後

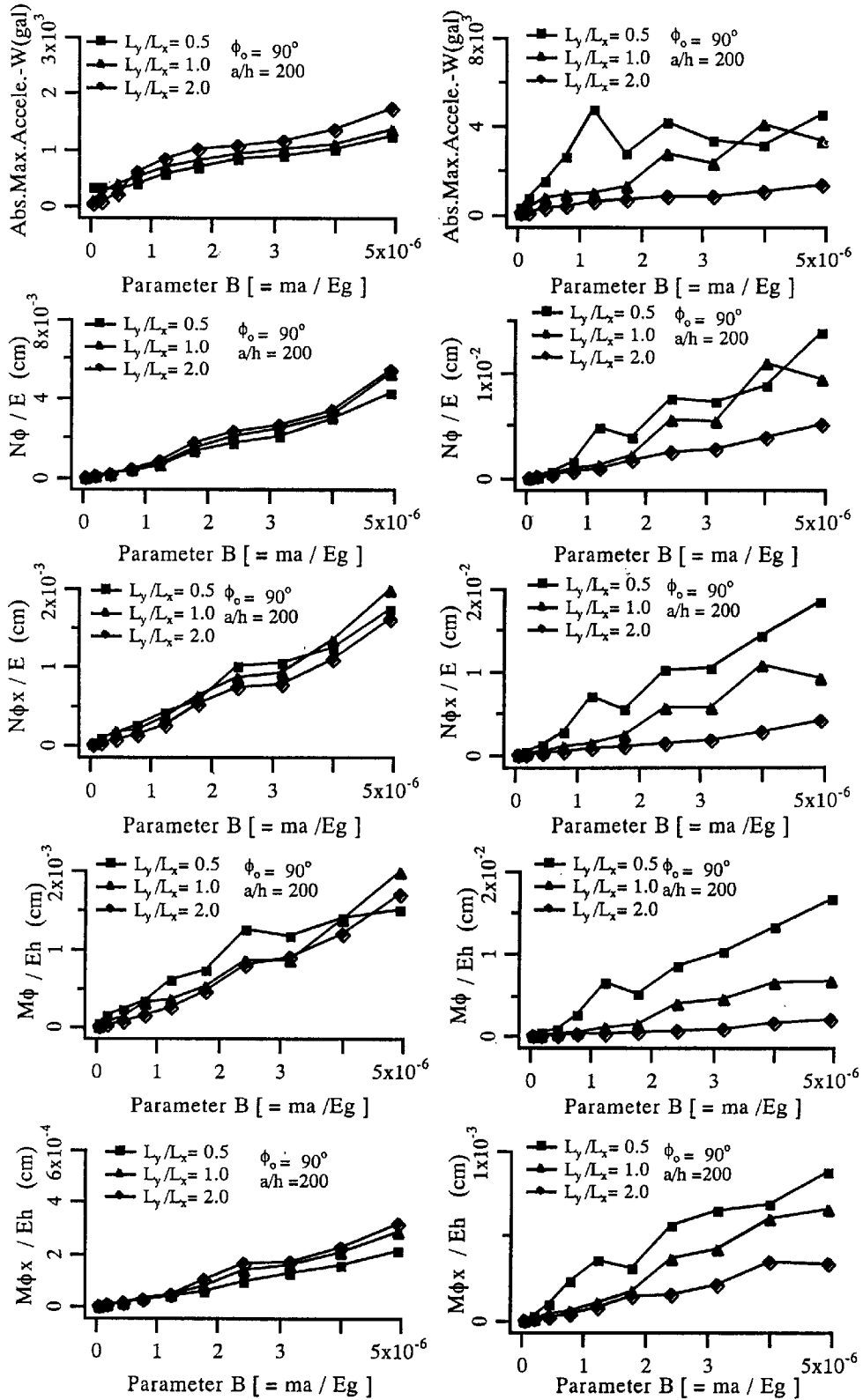
$$\ddot{T}_{ij} + 2\zeta\omega_{ij}\dot{T}_{ij} + \omega_{ij}^2 T_{ij} = F_{ij}(t) \quad (33)$$

$$i = 1, 3, 5, 7 \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

が得られる。

式 (33) 中の時刻関数 $T_{ij}(t)$ は Nigam-Jennings 法により直接数値的に計算された。入手の地震動原記録は 0.02 秒の時間刻みであるため、さらに 20 分割を行い (0.001 秒間隔) 応答計算に用いた。新データは原データから内挿した。なお、Runge-Kutta-Gill 法では安定解を得るためには 40 分割が望ましいが、Nigam-Jennings 法では 10 分割でも可であることを確認している。

ここでは減衰定数は以下のように定めている。



(A) for UD - Component

(B) for NS - Component

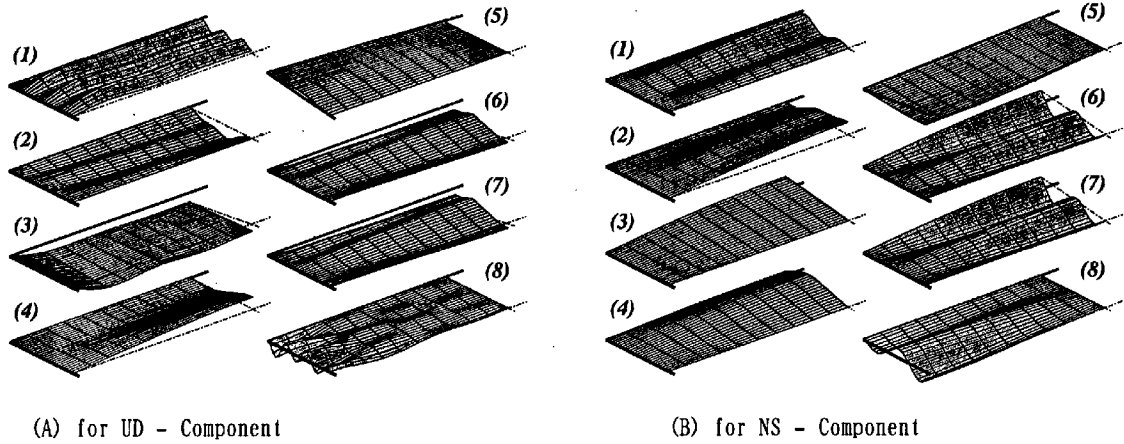
Figs. 5 Cylindrical roof maximum response quantities for Kobe-JMA

$$a_1 = 2\omega_1\omega_2(\zeta_1\omega_2 - \zeta_2\omega_1)/(\omega_2^2 - \omega_1^2), \quad a_2 = 2(\zeta_2\omega_2 - \zeta_1\omega_1)/(\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

$$\zeta_n = (a_1/\omega_n - a_2\omega_n) \quad (34)$$

ここに ζ_n と ω_n は n 番目モードの減衰常数と固有円振動数であり、 ζ_1 と ζ_2 は本報告ではそれぞれ0.02としている。

応答解析結果(國枝, 1998)の一部をFigs.5に与える。これらの図はその発生位置、時刻に関係なく、面上での法線方向変位成分 w および円弧方向変位成分 v の加速度応答の最大値(絶対値)、各断面力および断面モーメントの応答最大値(絶対値)を形状・材料パラメータ $B (= ma/Eg, m = \text{単位面積当たり重量で } \rho g \text{ と同じ})$ に対してプロットしたものである。また、プロットした最大応答値の発生時点での加速度、断面力等のシェル面上の分布状態の例をFigs.6に示す。



Figs. 6 An example of distribution of the response quantities of a cylindrical roof

$$\phi_0 = 90^\circ, a/h = 200, B = 2.25 \times 10^{-4} \quad (1)\ddot{w}, (2)\ddot{v}, (3)N_\phi, (4)N_x, (5)N_{\phi x}, (6)M_\phi, (7)M_x, (8)M_{\phi x}$$

Figs.6は $x=(0, Lx/2), \phi=(0, \phi_0)$ の範囲の表示、即ちシェル面上4分の1の部分のみを与えている

これらの図より面内剪断力の最大値が非常に大きくなることが分かる。他の断面力、断面モーメントに対しては十分に断面設計で対応できるが、面内剪断力に対しては断面設計が困難になる場合も予想される。設計に当たって注意すべきことである。なを、ここに与えた応答解析結果の一部は、次節のFEM解析結果とほぼ一致していることを確認している。

しかし、これらの図より今回の阪神大震災に置いて社会・教育施設体育館等の円筒形屋根のほとんどが大きな損傷を受けなかった理由が見て取れる。

3.3 近似解法と結果

近似解法の手順は以下の通りである。

- ①指数関数と三角関数の有限級数として仮モードを設定する
- ②仮モード中に含まれる未知係数を境界条件、直交条件より定める
- ③仮モードを運動方程式に代入して固有ベクトルを求める
- ④仮モードに固有ベクトルを乗じて固有モードを得る

厳正解に対応して境界条件は妻端単純支持、裾端固定支持とする。変位 u, v, w を次のようにおく。

$$u = \sum_n U_n(\phi) \cos \lambda_n \xi e^{i\omega t}, \quad v = \sum_n V_n(\phi) \sin \lambda_n \xi e^{i\omega t}, \quad w = \sum_n W_n(\phi) \sin \lambda_n \xi e^{i\omega t}$$

$$U_n = \sum_{i=1}^M E_i \tilde{U}_i, \quad V_n = \sum_{i=1}^M F_i \tilde{V}_i, \quad W_n = \sum_{i=1}^M G_i \tilde{W}_i \quad (34)$$

$\tilde{U}_i, \tilde{V}_i, \tilde{W}_i$ は i 次の仮モードである。 E_j, F_j, G_j は係数で母線方向展開次数 n に依存するものだが、簡単のため n の表示は省略する。厳正解における特性値 m の 2 乗の値は常に実数値であることを参考にして対称形の i 番目の仮モードを次のように表現する。

$$\begin{aligned}\tilde{U}_i &= \sum_{k=J_i}^{K_i} \{ {}_u A_{ik} (e^{-\alpha_k \phi} + e^{-\alpha_k \bar{\phi}}) + {}_u B_{ik} \cos \beta_k \phi + {}_u C_{ik} \sin \gamma_k \phi \} \\ \tilde{V}_i &= \sum_{k=J_i}^{K_i} \{ {}_v A_{ik} (e^{-\alpha_k \phi} - e^{-\alpha_k \bar{\phi}}) + {}_v B_{ik} \cos \gamma_k \phi + {}_v C_{ik} \sin \beta_k \phi \} \\ \tilde{W}_i &= \sum_{k=J_i}^{K_i} \{ {}_w A_{ik} (e^{-\alpha_k \phi} + e^{-\alpha_k \bar{\phi}}) + {}_w B_{ik} \cos \beta_k \phi + {}_w C_{ik} \sin \gamma_k \phi \} \\ \alpha_k &= \frac{k\pi}{\phi_0}, \quad \beta_k = \frac{2k\pi}{\phi_0}, \quad \gamma_k = \frac{(2k-1)\pi}{\phi_0}, \quad \bar{\phi} = \phi_0 - \phi\end{aligned}\tag{35}$$

また、逆対称形の i 番目の仮モードは次のように表現する。

$$\begin{aligned}\tilde{U}_i &= \sum_{k=J_i}^{K_i} \{ {}_u A_{ik} (e^{-\alpha_k \phi} - e^{-\alpha_k \bar{\phi}}) + {}_u B_{ik} \cos \gamma_k \phi + {}_u C_{ik} \sin \beta_k \phi \} \\ \tilde{V}_i &= \sum_{k=J_i}^{K_i} \{ {}_v A_{ik} (e^{-\alpha_k \phi} + e^{-\alpha_k \bar{\phi}}) + {}_v B_{ik} \cos \beta_k \phi + {}_v C_{ik} \sin \gamma_k \phi \} \\ \tilde{W}_i &= \sum_{k=J_i}^{K_i} \{ {}_w A_{ik} (e^{-\alpha_k \phi} - e^{-\alpha_k \bar{\phi}}) + {}_w B_{ik} \cos \gamma_k \phi + {}_w C_{ik} \sin \beta_k \phi \}\end{aligned}\tag{36}$$

仮モードの決定を行う。(35)、(36)式の係数 A_{ik}, B_{ik}, C_{ik} を求める。

[1] 最初の仮モードについて ${}_u B_{11} = {}_v B_{11} = {}_w B_{11} = 1$ とし裾端の境界条件

$$\phi = 0, \phi_0 \text{ で } \tilde{U}_j = \tilde{V}_j = \tilde{W}_j = \tilde{W}^\circ_j = 0\tag{37}$$

を用いて ${}_u A_{1k}$ 等の各係数を定める。

[2] 2 番目からの仮モードは裾端の境界条件と仮モード同士の直交条件

$$\phi = 0, \phi_0 \text{ で } \tilde{U}_i = \tilde{V}_i = \tilde{W}_i = \tilde{W}^\circ_i = 0\tag{38}$$

$$\int_0^{\phi_0} \tilde{U}_i \tilde{U}_j d\phi = 0, \int_0^{\phi_0} \tilde{V}_i \tilde{V}_j d\phi = 0, \int_0^{\phi_0} \tilde{W}_i \tilde{W}_j d\phi = 0 \quad (i \neq j)\tag{39}$$

を満たすように各係数 ${}_u A_{ik}$ を定める。

ただし境界条件と直交条件による条件式の数と J_i, K_i の選択の関係により、各未知係数を定める連立方程式の係数行列は一般には正則にならない。この段階では 1 組の解だけ得られていけばよいので、最小二乗最小ノルム法を用いて定まる解を用いる。

前節で決定された仮モードを自由振動時の運動方程式に代入し、ガラーキン法を適用すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_j \\ F_j \\ G_j \end{Bmatrix} - \Omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_j \\ F_j \\ G_j \end{Bmatrix} = \{ 0 \}\tag{40}$$

ここで Ω は基準化された固有円振動数。上式は一般の固有値問題であり、これを解くことにより Ω と $\{E_j, F_j, G_j\}$ が求まり、固有値、固有モードが決定する。

$$\begin{aligned}
U_{ni}(\phi) &= \sum_{p=1}^{K_M} \{ {}_1A_{nip}(e^{-\alpha_p\phi} \pm e^{-\alpha_p\bar{\phi}}) + {}_1B_{nip} \cos \frac{\beta_p}{\gamma_p} \phi + {}_1C_{nip} \sin \frac{\gamma_p}{\beta_p} \phi \} \\
V_{ni}(\phi) &= \sum_{p=1}^{K_M} \{ {}_2A_{nip}(e^{-\alpha_p\phi} \mp e^{-\alpha_p\bar{\phi}}) + {}_2B_{nip} \cos \frac{\gamma_p}{\beta_p} \phi + {}_2C_{nip} \sin \frac{\beta_p}{\gamma_p} \phi \} \\
W_{ni}(\phi) &= \sum_{p=1}^{K_M} \{ {}_3A_{nip}(e^{-\alpha_p\phi} \pm e^{-\alpha_p\bar{\phi}}) + {}_3B_{nip} \cos \frac{\beta_p}{\gamma_p} \phi + {}_3C_{nip} \sin \frac{\gamma_p}{\beta_p} \phi \}
\end{aligned} \tag{41}$$

ここで

$$\begin{aligned}
{}_1A_{nip} &= \sum_{q=1}^M iE_q uA_{qp}, {}_1B_{nip} = \sum_{q=1}^M iE_q uB_{qp}, {}_1C_{nip} = \sum_{q=1}^M iE_q uC_{qp} \\
{}_2A_{nip} &= \sum_{q=1}^M iF_q vA_{qp}, {}_2B_{nip} = \sum_{q=1}^M iF_q vB_{qp}, {}_2C_{nip} = \sum_{q=1}^M iF_q vC_{qp}, \\
{}_3A_{nip} &= \sum_{q=1}^M iG_q wA_{qp}, {}_3B_{nip} = \sum_{q=1}^M iG_q wB_{qp}, {}_3C_{nip} = \sum_{q=1}^M iG_q wC_{qp},
\end{aligned}$$

$U_{ni}(\phi)$, $V_{ni}(\phi)$, $W_{ni}(\phi)$ は母線方向展開次数 n 次の i 番目固有モードの円弧方向成分(複合は同順で上が対称形、下が逆対称形に対応)。

仮モードの中の J_i , K_i の選定が近似解の精度に関係するが、検討の結果、下式より最適な近似解が得られた。

$$J_i = 1, K_i = \begin{cases} i & (i=1\sim 3, \text{ただし } K_1=2) \\ i-1 & (i=4\sim M) \end{cases} \quad (\text{対称形})$$

$$J_i = 1, K_i = \begin{cases} i & (i=1\sim 3, \text{ただし } K_1=2) \\ i-1 & (i=4) \\ i-2 & (i=5\sim M) \end{cases} \quad (\text{逆対称形})$$

近似解による結果の例を Table 8 に示す。中段は円弧方向に 9 次まで求めた場合で M 番目 (いま $M=9$) 近辺の精度が悪いことがわかる。これは本来、無限個の仮モードによって表現されるべき固有モードを円弧方向に M 個までとしたことに起因するものである。円弧方向に更に数個加えたモードまで求め後ろの数個を捨てることにより精度良い結果を得る(下段参照)。ここでは他の場合の結果は割愛するが、近似解による固有値固有モードと厳正解によるそれらとの差は極めて小さく、十分な精度で一致することを確認している。

Table 8 Comparison of approximate circular frequencies with exact ones

(upper: exact lower: approximate) $a/h=500$ $\phi_0=60$ $L_y/L_x=0.5$

(a) ζ sym										(b) ζ anti-sym									
n	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	n	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th
1	0.082	0.158	0.289	0.464	0.679	0.909	0.995	1.254	1.594	1	0.093	0.187	0.257	0.383	0.575	0.813	1.093	1.415	1.778
M=9	0.082	0.158	0.289	0.464	0.679	0.909	0.995	1.255	1.958	M=9	0.093	0.187	0.257	0.383	0.575	0.813	1.094	1.624	2.970
M=11	0.082	0.158	0.289	0.464	0.679	0.909	0.995	1.254	1.594	M=11	0.093	0.187	0.257	0.383	0.575	0.813	1.093	1.415	1.779
2	0.141	0.210	0.306	0.472	0.685	0.909	0.991	1.258	1.598	2	0.131	0.218	0.357	0.466	0.594	0.821	1.099	1.420	1.783
M=9	0.141	0.210	0.306	0.472	0.685	0.909	0.991	1.259	1.963	M=9	0.131	0.218	0.357	0.466	0.594	0.821	1.101	1.630	3.012
M=11	0.141	0.210	0.306	0.472	0.685	0.909	0.991	1.258	1.598	M=11	0.131	0.218	0.357	0.466	0.594	0.821	1.099	1.420	1.785
3	0.183	0.275	0.361	0.490	0.696	0.912	0.993	1.266	1.605	3	0.187	0.251	0.381	0.551	0.655	0.836	1.109	1.428	1.791
M=9	0.183	0.275	0.361	0.490	0.696	0.912	0.993	1.266	1.971	M=9	0.187	0.251	0.381	0.551	0.656	0.836	1.111	1.639	3.031
M=11	0.183	0.275	0.361	0.490	0.696	0.912	0.993	1.266	1.605	M=11	0.187	0.251	0.381	0.551	0.655	0.836	1.109	1.429	1.793

一解法のみで固有振動数、固有モードを求めるのみでは信頼性は必ずしも高くはない。ここで示す厳正解によるそれらは手法の異なる近似解法での結果とほぼ一致しているので十分の信頼性を持ってプログラム検定等のた

めの資料に使用されうるのであろう。諸形状パラメータに対して近似解と厳正解の固有値を比較したところ、初期の計算プログラムでは厳正解では幾つかの固有値の欠落が存することを見出した。プログラム改正の結果、近似解で存する固有値は必ず厳正解でも存すること、厳正解で存する固有値は近似解でも必ず計算されることを確認している。近似解法による固有値、固有モードの算出の時間は試行錯誤法による厳正解法の算出時間に比して極度に短い。この点も近似解法の大きな利点である。

4. おわりに

筆者が在職中行ってきたシェル・空間構造の防災研究の中から、球形シェルおよび屋根型円筒形シェルの地震応答に関する研究に関して如何なるプロセスでそれらを推進してきたかの一端を把握していただければ幸甚として本論をまとめてきた。ここに示したのは上記目的のためのもので得られている研究成果のほんの一部であり、個々の研究成果に興味をいだかれる場合には参考文献を見ていただきたい。また、膜構造～風連成問題は今日的にはきわめて重要な課題となっているが、筆者が研究に着手したのは当問題がさほど重要視されていない極めて早い段階であったのと、筆者が地震災害関連の部門に所属していたこともあり、いくつかの成果を得た段階で研究の継続を断念したことは残念であった。

謝 辞

本論に記載の個々の研究の推進には研究室で卒業論文、修士論文をまとめた多くの学生諸君の助力を得ている。また、数値解析の遂行には京都大学大型計算機センターコンピュータ、京都大学化学研究所スーパーコンピュータを用いることができた。ここに記し謝意を表したい。

参考文献

- 日置興一郎(1959)：円筒曲面構造に関する研究，学位論文
- 横尾、松岡、國枝(1963)：球殻振動時の一般解（その1・理論式誘導と厳正解）、日本建築学会論文報告集 第83号 pp.7-14
- 國枝 治郎(1990)：上下地震動を受ける球形シェル Part1 固有モード設定と次の論文（Part2）の問題点、日本建築学会近畿支部構造力学講究録 第7号 pp.131-134
- 國枝 治郎(1998)：屋根型円筒シェル・ラチス構造の地震応答特性に関する研究、平成8～9年度科研費補助金研究成果報告書
- 國枝、北村、小山(1998)：部分円筒シェルの厳正解による振動特性と近似解、日本建築学会構造系論文集 第513号 pp.121-125
- 國枝 治郎(1999)：上下地震動を受ける球形ドームの動的安定 ―既発表数値結果の訂正を含めて―、京都大学防災研究所共同研究集会論文集「シェル・空間構造の耐震、耐風、耐雪、耐火を考えた性能設計と解析」
- Kraus(1967)：Thin Elastic Theory, John Wiley & Sons
- Kunieda,H.(1983)：Solutions of Free Vibrations of Spherical Shells Part3 Natural Frequencies and Modes in Axi- and Anti-symmetric State, 日本建築学会論文報告集 第325号 pp.57-66
- Kunieda,H.(1984)：Flexural Axisymmetric Free Vibrations of a Spherical Dome: Exact Results and Approximate Solutions, J.Sound and Vibration 92(1) 1-10
- Kunieda,H.(1986)：Response of Spherical Domes Subjected to Vertical Earthquakes, SHELL, MEMBRANES AND SPACE FRAMES, Elsevier pp.33-40
- Kunieda,H.(1993)：Dynamic Stability of Spherical Domes Subject to Earthquakes, Proc. 4th Int.Conf. on Space Struc., Vol.1, pp.507-516
- Kunieda,H.(1993)：Prediction of the Critical Intensity of Excitations for Incipient Dynamic Instability of Space Structures, Proc. SEIKEN-IASS Symp. on Nonlinear Analysis and Design for Shells and Spatial

Struc., pp.545-552.

Kunieda,H.(1997): Earthquake Response of Roof Shells, Int. J. Space Structures, Vol.12, Nos.3/4, pp.149-159

Kunieda,H.(1998): Stress Characteristics of Shells Subjected to Kobe Earthquake, Structural Engineering World Wide 1998, ed.Srivastava N.K.,(Elsevier), Paper T102-6, SEWC

Disaster Prevention Research on Shells and Spatial Structures

Haruo KUNIEDA

Synopsis

Safety of shells and spatial structures is especially necessary, because the scale of these structures is usually large and large number of people are contained. The author has been engaged in the research of shells and spatial structures for several ten years from the viewpoint of safety security for the natural disaster. At the factor of the natural disaster, there are earthquakes, wind, snows, etc.. One of these disaster factor should be taken into consideration according to the shape and structural characteristics of these structures in disaster prevention research. Here, a part of the author's research concerning earthquake response of spherical domes and roof type cylindrical shells is summarized. And how these researches are promoted is shown.

Keywords: shell and spatial structure, U-D earthquake response, dynamic stability, natural frequency