

簡略化した大気循環モデルにおける長期変動と 予測可能性の変動

山根省三・余田成男
京都大学大学院 理学研究科

要 旨

簡略化した大気循環モデルで得られた長期変動を示す解に対して、アトラクタに接する部分空間内での摂動の発達を調べることにより、予測可能性の変動の基本的な力学を明らかにした。全空間内での摂動の平均拡大率と異なり、この部分空間内での摂動の平均拡大率は、初期からアトラクタの局所的な不安定構造に依存して増大する特徴がある。また、摂動の発達にはポテンシャル渦度の南北逆勾配が重要であることが示された。

キーワード： 長期変動，予測可能性，アトラクタ，リアプノフ解析，順圧不安定

1. はじめに

ブロッキング現象やテレコネクションパターンなどの中・高緯度上対流圏の長周期変動に依存して、数値天気予報の予報誤差の大きさが変動することが報告されている (Palmer, 1988; Kimoto et al., 1992)。この予報誤差の変動は、誤差(摂動)の拡大率が流れの状態に依存して変化することが主な原因と考えられている。したがって、大気の予測可能性は大気の流れの状態に依存して変動していることになる。

解軌道に加えた摂動の拡大率が相空間内の解の位置に依存して変化することは、Lorenz(1965)の簡略化した大気モデルを用いた先駆的な研究により指摘されていた。近年、数値天気予報の目覚ましい発展により摂動拡大率の流れ場依存性の問題は現実的な問題となり、また一方で、有限の期間における摂動の拡大の様子を調べる解析方法が整備・発展されてきた(例えば、Goldhirsch et al., 1987)ことから、低次モデル(例えば、Mukougawa et al., 1991; Trevisan and Legnani, 1995)や簡略化した大気モデル(例えば、Lacarra and Talagrand, 1988; Yoden and Nomura, 1993)を用いた予測可能性の変動の研究が盛んにおこなわれるようになった。大気の準定常状態と予測可能性の変動が関係するという興味深い結果も報告されている(Mukougawa et al., 1991)。しかし、どのような大気

の流れの状態のときに摂動が発達しやすく、どのようなときにそうではないかといった問題に対しては、満足できる説明は未だなされていない。

本研究では、比較的大きな自由度(1,848次元)の簡略化した順圧大気モデルを用いて、摂動の有限時間の振る舞いを調べることにより、大気予測可能性の変動の基本的な力学過程を明らかにした。予測可能性の指標には、摂動の有限期間内の平均拡大率により定義されるロレンツ インデックス (Lorenz, 1965)を用いた。また、最も発達する摂動の空間構造を解析することにより、予測可能性の変動と流れ場との対応関係を調べた。アトラクタに近似的に接すると考えられる部分空間内の摂動に着目したところが本研究の特徴である。2節では線型摂動に関する理論を要約して、研究に用いた指標や解析法の説明をおこなう。3節では研究に用いた大気モデルの説明をおこない、4節ではそのモデルで得られる時間発展の特徴について述べる。5節に予測可能性の変動について調べた結果を示す。6節ではまとめと考察をおこなう。

2. 線型摂動に関する理論と解析法

まず、解軌道の局所的な安定性の性質を調べる誤差行列の特異値解析と、アトラクタの大域的な性質

を調べるリアプノフ安定性解析についてまとめる。そして、本研究で用いる予測可能性の指標の定義をおこない、経験的直交関数展開 (EOF) 解析の方法を記述する。

2.1 線型振動の式

n 次元力学系

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n \quad (1)$$

を考える。初期条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ を与えれば (1) 式の解 $\mathbf{x}(t)$ は一意に定まる。

解 $\mathbf{x}(t)$ の安定度に関する性質は、解に与えた微小な摂動がその後どの様に時間発展するかによって決定される。線型振動 $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^n$ は (1) 式の接線方程式 (変分方程式ともいう)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}(t))\mathbf{y}(t) \quad (2)$$

に従う。 $\mathbf{J}(\mathbf{x}(t))$ は $\mathbf{F}$ の $\mathbf{x}$ におけるヤコビアン行列 ($\mathbf{J} \equiv \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{x}$) である。(2) 式を時刻 $t = t_1$ から t_2 まで時間積分した解は、行列 $\mathbf{M}(t_2, t_1)$ を用いて次式の線型写像の形で表わされる。

$$\mathbf{y}(t_2) = \mathbf{M}(t_2, t_1)\mathbf{y}(t_1) \quad (3)$$

行列 $\mathbf{M}(t_2, t_1)$ はレゾルベント、伝播行列、基本行列といった様々な呼び名があるが、ここでは Lorenz(1965) と同様に誤差行列と呼ぶことにする。

時刻 t_1 から t_2 の間の振動の拡大率は、 $\mathbf{R}^n$ 上のノルム $\|\cdot\|$ を用いて、

$$\gamma(t_2, t_1, \mathbf{a}) \equiv \frac{\|\mathbf{M}(t_2, t_1)\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|} \quad (4)$$

と表わされる。ここで、 $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ は初期時刻 t_1 の摂動を表わす。また、ノルムは、 $\mathbf{R}^n$ 上のベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の内積を $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv {}^t\mathbf{a}\mathbf{b}$ として、 $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$ である。ただし、 ${}^t(\cdot)$ は転置を表わす。(4) 式は、振動の拡大率 $\gamma(t_2, t_1, \mathbf{a})$ が、時刻 t_1 から t_2 までの解軌道 $\mathbf{x}(t)$ だけでなく初期摂動 $\mathbf{a}$ の向きにも依存することを表わしている。

2.2 誤差行列の特異値解析

期間 $t_2 - t_1$ が有限の場合、振動拡大率 γ の特性は、解軌道 $\mathbf{x}(t)$ の時刻 t_1 から t_2 の局所的な安定性の指標と考えることができる。振動拡大率 γ の特性は誤差行列 $\mathbf{M}$ の特異値解析により調べられる。

行列 ${}^t\mathbf{M}\mathbf{M}$ の n 個の固有値の平方根 σ_i ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$) を行列 $\mathbf{M}$ の特異値という。行列 $\mathbf{M}$ は $\mathbf{U}$ と $\mathbf{V}$ の二つの直交行列 ($\mathbf{U}{}^t\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U}\mathbf{U} = \mathbf{I}$, $\mathbf{V}{}^t\mathbf{V} = {}^t\mathbf{V}\mathbf{V} = \mathbf{I}$) と特異値 σ_i をその成分とする対角行列 $\mathbf{D}$ により次式のように特異値分解される。

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{D}{}^t\mathbf{V} \quad (5)$$

行列 $\mathbf{U}$ と行列 $\mathbf{V}$ は、それぞれ、ベクトル $\mathbf{u}_i$ とベクトル $\mathbf{v}_i$ から成るとすると ($\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n]$, $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$), (5) 式は次のように書き換えられる。

$$\mathbf{M}\mathbf{v}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i, \quad {}^t\mathbf{M}\mathbf{u}_i = \sigma_i\mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

$\{\mathbf{u}_i\}$ と $\{\mathbf{v}_i\}$ はそれぞれ正規直交基底を成す。 $\mathbf{u}_i$ を後方特異ベクトル、 $\mathbf{v}_i$ を前方特異ベクトルと呼ぶ (Legras and Vautard, 1996)。(5) 式より、 ${}^t\mathbf{M}\mathbf{M}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{D}^2$, $\mathbf{M}{}^t\mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{D}^2$ である。したがって、 $\mathbf{v}_i$ は行列 ${}^t\mathbf{M}\mathbf{M}$ の固有値 σ_i^2 に対応する固有ベクトルであり、 $\mathbf{u}_i$ は行列 $\mathbf{M}{}^t\mathbf{M}$ の固有値 σ_i^2 に対応する固有ベクトルである。

初期振動が前方特異ベクトル $\mathbf{v}_i$ に平行であるとき、振動拡大率 γ は誤差行列 $\mathbf{M}$ の特異値 σ_i に等しい: $\gamma(t_2, t_1, \mathbf{v}_i) = \sigma_i$ 。初期振動が $\mathbf{v}_1$ に平行であるとき振動拡大率 γ の値は最大となる: $\max_{\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n} \gamma(t_2, t_1, \mathbf{a}) = \gamma(t_2, t_1, \mathbf{v}_1) = \sigma_1$ 。一般に、原点を中心とした半径 1 の n 次元球が行列 $\mathbf{M}$ に従って n 次元楕円体に変形されることを考えたとき、楕円体の主軸の長さが特異値 σ_i であり、その主軸方向が後方特異ベクトル $\mathbf{u}_i$ に対応する。また、楕円体の主軸方向となるべき最初の球における方向が前方特異ベクトル $\mathbf{v}_i$ である。誤差行列 $\mathbf{M}(t_2, t_1)$ を特異値分解することにより、拡大率が最大となる初期振動の方向 ($\mathbf{v}_1$) とその振動の拡大率 (σ_1)、拡大後の振動の方向 ($\mathbf{u}_1$) などの情報を得ることができる。

2.3 リアプノフ解析

力学系 (1) が強制散逸系である場合、解軌道 $\mathbf{x}(t)$ は初期条件に関わらずアトラクタに漸近する。一般に、自然界で観測される系は強制散逸系と考えられる。ここでは、解軌道 $\mathbf{x}(t)$ は常にアトラクタ上に存在するものとする。

t_1 を固定して $t_2 \rightarrow \infty$ とした場合について考える。このとき線型振動 $\mathbf{y}(t)$ の漸近的な振る舞いは、アトラクタの大域的な性質を表わすリアプノフ指数によって特徴づけられる。 $\mathbf{R}^n$ のある正規直交基底 $\{\mathbf{f}_i(t_1)\}$ に対して、

$$\lambda_i = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \|\mathbf{M}(t_2, t_1)\mathbf{f}_i(t_1)\| \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \ln |\det(\mathbf{M}(t_2, t_1))| \quad (8)$$

が成り立つとき、 λ_i ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$) をリアプノフ指数、 $\mathbf{f}_i(t_1)$ を前方リアプノフベクトルあるいは単にリアプノフベクトルという (Oseledec, 1968; Legras and Vautard, 1996)。

(7) 式から分かるように、リアプノフ指数 λ_i は時刻 t_1 における $\mathbf{f}_i(t_1)$ 方向の振動の指数関数的な成長率を表わす。最大リアプノフ指数 λ_1 が正であれば、ほとんどすべての振動は指数関数的に増大する。このとき解軌道 $\mathbf{x}(t)$ は不安定であり、解はカオスである。(8) 式は、リアプノフ指数の和 $\sum_{i=1}^n \lambda_i$ が n 次元体積の指数関数的な変化率を表わすことを意味する。保存系の場合は $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ であり、散逸系の場合は $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$ である。リアプノフベクトル $\mathbf{f}_i(t_1)$ は初期時刻 t_1 とノルムの選択に依存する(ただし、 $\mathbf{f}_n$ はノルムに依存しない)。一方、リアプノフ指数 λ_i はそれらには依存しないので、アトラクタの大域的な性質を表わす指標として用いられる。

カプランとヨークは、カオス解のアトラクタの次元をリアプノフ指数 λ_i を用いて次のように表わすことができると考えた。

$$D_{KY} = j + \frac{1}{|\lambda_{j+1}|} \sum_{i=1}^j \lambda_i \quad (9)$$

ここで、 j は $\sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0$ 、 $\sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0$ を満たす整数である。 D_{KY} をリアプノフ次元(カプラン-ヨーク次元)という。リアプノフ次元 D_{KY} は、部分空間の次元を増やしていったときに伸びも縮みもなくなる(指数関数的な成長率がゼロとなる)次元を意味する。

また、解軌道 $\mathbf{x}(t)$ が常にアトラクタ上に存在すると仮定すれば、 $\mathbf{R}^n$ のある正規直交基底 $\{\mathbf{g}_i(t_2)\}$ に対して、

$$\lambda_i = \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \|\mathbf{M}(t_2, t_1) \mathbf{g}_i(t_2)\| \quad (10)$$

が成り立つ。 $\mathbf{g}_i(t_2)$ を後方リアプノフベクトルという(Legras and Vautard, 1996)。 $\mathbf{g}_i(t_2)$ は時刻 t_2 とノルムの選択に依存する(ただし、 $\mathbf{g}_1$ はノルムに依存しない)。 k 次元の部分空間 $G_k(t) \equiv \mathbf{g}_1(t) \oplus \mathbf{g}_2(t) \oplus \cdots \oplus \mathbf{g}_k(t)$ は、時刻 t のみに依存してノルムの選択には依存しない。部分空間 G_k は行列 $\mathbf{M}$ に対して不変である。もしアトラクタの次元が k 次元であったならば、部分空間 $G_k(t)$ は相空間内の位置 $\mathbf{x}(t)$ におけるアトラクタの接空間を表わしていると考えられる(Legras and Vautard, 1996)。

結局、特異値とリアプノフ指数、特異ベクトルとリアプノフベクトルには以下の関係がある。

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \sigma_i(t_2, t_1) \\ &= \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \sigma_i(t_2, t_1) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\mathbf{f}_i(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \mathbf{v}_i(t_2, t_1) \quad (12)$$

$$\mathbf{g}_i(t_2) = \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \mathbf{u}_i(t_2, t_1) \quad (13)$$

2.4 予測可能性の指標

Lorenz(1965) は、時刻 t_1 から t_2 までの解軌道 $\mathbf{x}(t)$ に沿った振動拡大率 γ の平均値 $\alpha(t_2, t_1)$ を解軌道の局所的な安定性を表わす指標として用いた。

$$\alpha(t_2, t_1) \equiv \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \gamma(t_2, t_1, \mathbf{a}_i)^2} \quad (14)$$

ここで、 $\{\mathbf{a}_i\}$ は $\mathbf{R}^n$ 上の任意の正規直交基底である。 $\alpha(t_2, t_1)$ の値は、正規直交基底 $\{\mathbf{a}_i\}$ の選び方には依存しない。(14) 式から分かるように、 $\alpha(t_2, t_1)$ は時刻 t_1 の初期振動の向きが $\mathbf{R}^n$ 上で等方的と仮定したときの振動拡大率の2乗平均平方根である。指標 $\alpha(t_2, t_1)$ はロレンツインデックスと呼ばれ、予測可能性の指標として用いられている(例えば、Mukougawa et al., 1991; Yoden and Nomura, 1993; Yamane and Yoden, 1997)。

新たな指標 $\alpha_k(t_2, t_1)$ を次式で定義する。

$$\alpha_k(t_2, t_1) \equiv \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \gamma(t_2, t_1, \mathbf{g}_i(t_1))^2} \quad (15)$$

$\mathbf{g}_i(t_1) \in \mathbf{R}^n$ は時刻 t_1 における後方リアプノフベクトルである(ただし、(13) 式の t_2 を新たに t_1 とした)。ロレンツインデックス $\alpha(t_2, t_1)$ が $\mathbf{R}^n$ 全空間内の初期振動の平均拡大率であるのに対して、 $\alpha_k(t_2, t_1)$ は上から k 個の後方リアプノフベクトルで張られる k 次元部分空間 $G_k(t_1) \equiv \mathbf{g}_1(t_1) \oplus \mathbf{g}_2(t_1) \oplus \cdots \oplus \mathbf{g}_k(t_1)$ 内の初期振動の平均拡大率である。 $k = n$ のとき $\alpha_k(t_2, t_1) = \alpha(t_2, t_1)$ である。指標 $\alpha_k(t_2, t_1)$ を部分空間ロレンツインデックスと呼ぶことにする。もしアトラクタの次元が k 次元であったならば、部分空間 G_k はアトラクタの接空間を表わすと考えられるので、そのときの部分空間ロレンツインデックス $\alpha_k(t_2, t_1)$ はアトラクタに接する方向の振動の平均拡大率を表わすと考えられる。

2.5 経験的直交関数展開 (EOF) 解析

本研究では、時間発展解 $\mathbf{x}(t)$ に対して、EOF 解析(主成分分析ともいう)をおこなう。EOF 解析は、多変量の時間変動における統計的解析手法の一つで、分散の大きな方向を知りたいときや、変動の大まかな特徴を低次元で表現したいときにしばしば用いられる。

時間発展解 $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ の時間平均を $\bar{\mathbf{x}}$ とし、それからのずれ成分 $\mathbf{x}'(t) \equiv \mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}$ を擾乱と呼ぶ。ここで擾乱は必ずしも微小であるとは限らない。擾乱の大きさは、内積 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ を用いて $\|\mathbf{x}'\| \equiv \sqrt{(\mathbf{x}', \mathbf{x}')}$ である。また、擾乱 $\mathbf{x}'(t)$ の共分散行列 $\mathbf{C}$ は $\mathbf{x}'^t \mathbf{x}'$ の時間平均である: $\mathbf{C} = \overline{\mathbf{x}'^t \mathbf{x}'}$ 。共分散行列 $\mathbf{C}$ の n 個の

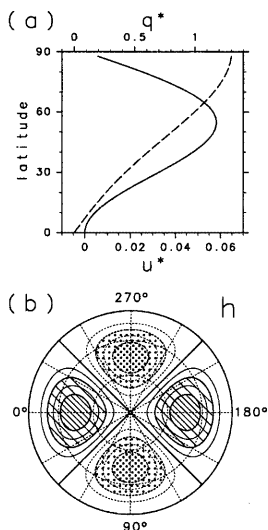


Fig. 1 (a) Latitudinal profiles of the nondimensional zonal wind u^* (solid line) and the potential vorticity q^* (dashed line) of the forcing for $\rho = 0.18$. The maximum of u^* is 54 ms^{-1} in dimension. (b) Contour map of the topography $h(\lambda, \mu)$ in the Northern Hemisphere with Lambert's azimuthal equal-area projection. The center of the map is the North Pole, the outer circle is the equator, and meridians and parallels are drawn every 30° . Solid contours are positive or zero and dashed ones are negative. Contour interval is 0.02 and shading indicates the region greater than 0.04 or less than -0.04 . The same projection is used in the following spherical maps.

固有値を Λ_i ($\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots \geq \Lambda_n$) とし、対応する正規化された固有ベクトルを $\mathbf{e}_i$ とする: $\mathbf{C}\mathbf{e}_i = \Lambda_i \mathbf{e}_i$. このとき、 $\{\mathbf{e}_i\}$ は $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底を成す。 $\mathbf{e}_1$ は $\mathbf{R}^n$ の中で最大の分散 (固有値 Λ_1 に等しい) の方向を意味し、一般に、 $\mathbf{e}_k$ は $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{k-1}$ に直交する部分空間 $\mathbf{R}^{n-k+1}$ の中で最大の分散 (固有値 Λ_k に等しい) の方向を意味する。擾乱 $\mathbf{x}'(t)$ は、正規直交基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ により $\mathbf{x}'(t) = \sum_{i=1}^n p_i(t) \mathbf{e}_i$ と分解される。ベクトル $\mathbf{e}_k$ を k 番目の経験的直交関数 (Empirical Orthogonal Function) と呼び、時系列 $p_k(t)$ を k 番目の主成分と呼ぶ。

3. モデル

本研究では、Legras and Ghil(1985) と同様の簡略

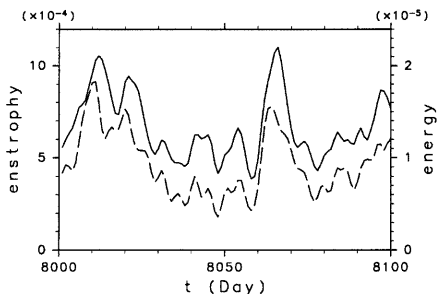


Fig. 2 Temporal variations of the global mean enstrophy (solid line) and the global mean energy (dashed line) of the disturbance for the period of Day 8,001~8,100.

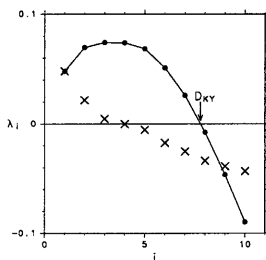


Fig. 3 Lyapunov exponents λ_i (x) and accumulated Lyapunov exponents $\sum_{k=1}^i \lambda_k$ (bullet) for $1 \leq i \leq 10$. The Lyapunov dimension D_{KY} is about 7.8. The unit of the ordinate is day^{-1} .

化した大気循環スペクトルモデルを用いる。モデルの支配方程式は、地表面地形の効果と強制と散逸の項を含むポテンシャル渦度方程式である。無次元化した式は以下ようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + J[\psi, \rho \Delta \psi + \mu(1+h)] = \kappa \Delta(\psi^* - \psi) - \nu \Delta^3 \psi \quad (16)$$

ここで、 $\psi(\lambda, \mu, t)$ は流線関数、 λ は経度、 μ はサイン緯度: $\mu = \sin \phi$, ϕ は緯度、 t は時刻、 $\psi^*(\mu)$ は帯状流強制の流線関数、 $h(\lambda, \mu)$ は地表面地形、 Δ は球面ラプラシアン演算子、 J は球面ヤコビアン演算子、 κ^{-1} はニュートン強制の緩和時間、 ν は数値粘性係数、 ρ は強制の強さを表す無次元数である。右辺の強制および散逸項がなければ、(16) 式はポテンシャル渦度 $q(\lambda, \mu, t) \equiv \rho \Delta \psi + \mu(1+h)$ のラグランジュ保存の式となる。

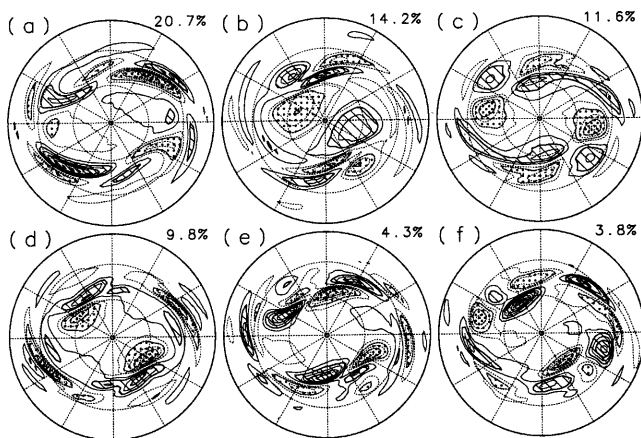


Fig. 4 Spatial distributions of the empirical orthogonal functions (EOFs) e_i from the first to the sixth ($i=1\sim6$) components (a-f). The number at the upper right of each figure represents the percentage variance associated with that EOF, $\Lambda_i / \sum_{k=1}^n \Lambda_k$. Contour interval is 1 and shading indicates the region greater than 2 or less than -2. Zero-contours are omitted.

流線関数 $\psi(\lambda, \mu, t)$ を球面調和関数で展開して、全波数 42 で三角波数切断 (T42) をおこなうことにより、1,848 変数の球面スペクトルモデルが得られる。強制流線関数は、Legras and Ghil(1985) と同じ $\psi^*(\lambda, \mu) = -75\sqrt{3}(\Omega a)^{-1}\mu^3$ を用いた。ここで Ω は地球自転角速度、 a は地球半径である。Fig.1(a) に、 $\rho = 0.18$ のときの強制帯状流 $u^* = -\rho\partial\psi^*/\partial\phi$ (実線) と帯状平均した強制ポテンシャル渦度 q^* (破線) の緯度プロファイルを示す。強制帯状流 u^* は緯度 50° 付近で最大 (54 ms^{-1}) となる。また、強制的ポテンシャル渦度は緯度とともに単調に増加することから、強制帯状流自体は順圧安定な構造であることが分かる。地表面地形は、北半球では Legras and Ghil(1985) と同じ $h(\lambda, \mu) = 0.4\mu^2(1-\mu^2)\cos 2\lambda$ を用いて、南半球では $h(\lambda, \mu) = 0$ とした。Fig.1(b) に北半球の地形の分布を示す。緩和時間 κ^{-1} は 10 日とし、数値粘性係数 ν は最大波数 42 で減衰時間が 0.5 日となるように設定した。強制パラメータは、 $\rho = 0.18$ に固定した。モデルは実 1,848 次元の強制散逸系である。

4. 解の時間変動

4.1 不規則変動

モデルの時間発展解を 4 次のルンゲ・クッタの数値積分法を用いて計算した。ほぼ静止した状態 ($\psi \approx 0$) を初期値とし、最初の 1,000 日間は解がアトラクタに吸引される期間と見なした。その後の 15,000 日間

の解に対して改めて時刻を 1~15,000 日と定義し、この期間の解の振る舞いについて解析をおこなった。

Fig.2 は、期間 8,001~8,100 日の擾乱 x' の全球平均したエントロピー (実線) と全球平均したエネルギー (破線) の変動を示す。二つ線はともに不規則な変動を示しており、両者の変動の間には高い正相関が見られる。例えば、8,060 日以降に見られるように、擾乱は間欠的に急激に発達する。その力学的詳細は Yamane and Yoden(1998) により調べられている。

不規則な時間発展解 $x(t)$ の性質は、リアプノフ指数 λ_i により定量的に特徴づけられる。期間 1~15,000 日の解軌道 $x(t)$ に Shimada and Nagashima(1979) の方法を適用して $i = 1, \dots, 10$ のリアプノフ指数 λ_i を求めた (期間 5,001~15,000 日の平均から λ_i を求めた)。結果を Fig.3 に示す。最大リアプノフ指数が正であること ($\lambda_1 > 0$) から、解軌道 $x(t)$ が不安定でありカオス的であることがわかる。最大リアプノフ指数の逆数 $\lambda_1^{-1} = 20.8$ 日は、解軌道 $x(t)$ 上の微小な摂動の大きさが e 倍になる時間スケールを意味する (ただし、評価時間は非常に長い)。 $\lambda_4 = 0$ であり、4 番目のリアプノフ指数が解軌道方向の摂動に対応する。残りのリアプノフ指数は負である。

リアプノフ指数 λ_i からカプランとヨークが提案したリアプノフ次元 D_{KY} が求まる。Fig.3 の $\bullet$ は累積リアプノフ指数 $\sum_{k=1}^i \lambda_k$ の値を表わす。(9) 式よりリアプノフ次元 D_{KY} が約 7.8 次元であることが分

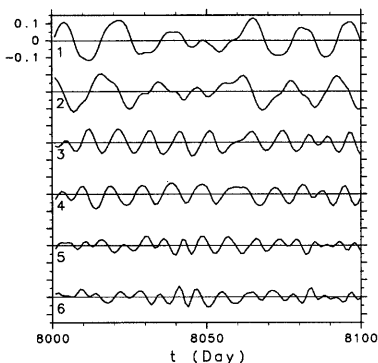


Fig. 5 Temporal variations of the principal components $p_i(t)$ from the first to the sixth ($i=1\sim 6$) for the period of Day 8,001~8,100.

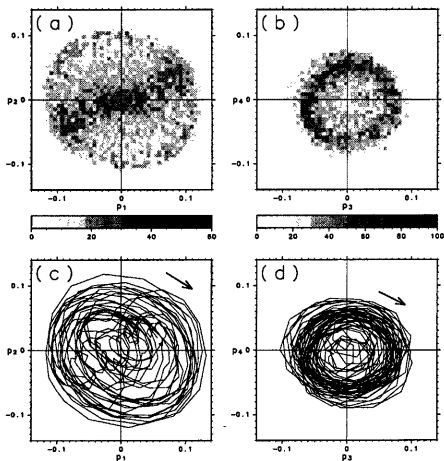


Fig. 6 Probability density functions (PDFs) of the solution $\mathbf{x}(t)$ for the period of Day 5,001~15,000 (a,b) and the trajectories of $\mathbf{x}(t)$ for the period of Day 8,001~8,500 (c,d) projected on the p_1 - p_2 plane (a,c) and the p_3 - p_4 plane (b,d). Arrows in (c,d) show the direction of the trajectory.

かる。これは、モデルの次元 $n=1,848$ に比べて非常に小さい値である。

4.2 EOF 解析

期間 5,001~15,000 日の擾乱 $\mathbf{x}'(t)$ に対して EOF 解

析をおこなった。内積は全球の渦度場に関するものを用いた。すなわち、擾乱 $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ と $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ に対応する渦度の空間分布を $q_a(\lambda, \mu)$ と $q_b(\lambda, \mu)$ としたとき、内積は次式で定義される。

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \equiv \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 q_a(\lambda, \mu) q_b(\lambda, \mu) d\mu d\lambda \quad (17)$$

擾乱の大きさは $\|\mathbf{a}\| \equiv \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$ である。これは一般にエンストロフィノルムと呼ばれている。

Fig.4(a-f) は 1~6 番目の EOF $\mathbf{e}_k$ の渦度空間分布を示す。1 番目 (a) と 2 番目 (b) の EOF は、北極に対してほぼ反対称な構造をしている (帯状波数の奇数成分が支配的)。3 番目 (c) と 4 番目 (d) の EOF は、逆に、北極に対してほぼ対称な構造をしている (帯状波数の偶数成分が支配的)。5 番目 (e) と 6 番目 (f) は再び反対称な構造である。これらの EOF (a-f) は中緯度帯で振幅が大きい。Fig.4(a-f) の右肩の数字は、全分散に対する $\mathbf{e}_k$ 方向の分散の割合 $\Lambda_k / \sum_{i=1}^n \Lambda_i$ を表わす。上位 4 つの EOF $\mathbf{e}_1 \sim \mathbf{e}_4$ で張られる部分空間が占める分散は約 56% である。

Fig.5 は 1~6 番目の主成分 $p_k(t)$ の時間変動を表わす。主成分 $p_1(t)$ と $p_2(t)$ はおよそ 15~20 日の時間スケールで変動する。主成分 $p_3(t)$ と $p_4(t)$ は約 10 日、主成分 $p_5(t)$ と $p_6(t)$ は約 7 日の時間スケールで変動する。

擾乱の解軌道 $\mathbf{x}'(t)$ を平面上に射影してその構造を調べた。平面には EOF $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_2$ を基底とする p_1 - p_2 平面と EOF $\mathbf{e}_3$ と $\mathbf{e}_4$ を基底とする p_3 - p_4 平面を用いた。Fig.6(a,b) はそれぞれの平面上での期間 5,001~15,000 日の解軌道 $\mathbf{x}(t)$ の存在確率 (確率密度関数) を示す。1 日 1 点の 1 万点データをもとに計算をおこなった。ただし、Fig.6(a) では、モデルの対称性 ($\mathbf{x}(t)$ が解ならば、帯状波数の奇数成分すべての符号を反対にした $\hat{\mathbf{x}}(t)$ も解である。解 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ は、解 $\mathbf{x}(t)$ を北極を中心に 180° 回転したものである。) を利用して、データ数を 2 倍にしている。したがって、Fig.6(a) は原点に対して点対称である。 p_1 - p_2 平面 (a) で存在確率の高い領域は、原点 $(p_1, p_2) = (0, 0)$ と $(\pm 0.08, \pm 0.04)$ (複号同順) の付近である。半径 0.1 程度の円状の領域にも、やや高い存在確率が見られる。 p_3 - p_4 平面 (b) では、半径 0.06 程度の円状の領域に存在確率の高い領域が見られる。Fig.6(c,d) は期間 8,001~8,500 日の擾乱 $\mathbf{x}'(t)$ の軌道を Fig.6(a,b) と同じ平面上に射影して示す。 p_1 - p_2 平面 (c) では、解軌道は右回りに大きく回転するときと、原点付近で小刻みに変動するときがある。この小刻みな変動は、Fig.5 ではおよそ期間 8,030~8,060 日に対応し、大きな回転は、期間 8,001~8,030 日等に対応している。 p_3 - p_4 平面 (d) では、解軌道は専ら原点の回りを右回りに回転する。

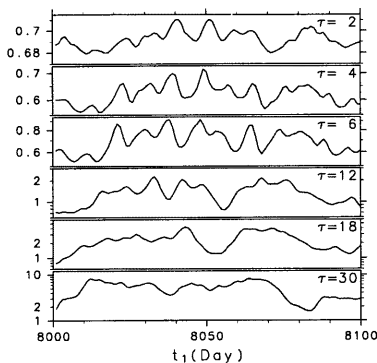


Fig. 7 Temporal variations of the Lorenz index $\alpha(t_1 + \tau, t_1)$ for six values of the time interval τ , from 2 days(a) to 30 days(f). The abscissa is the initial time t_1 .

5. 予測可能性の変動

解軌道 $x(t)$ に対して予測可能性の指標であるロレンツインデックス $\alpha(t_2, t_1)$ と部分空間ロレンツインデックス $\alpha_k(t_2, t_1)$ の値を計算して、それらの指標の特徴について調べた。そして、予測可能性の変動と解 $x(t)$ の振る舞いとの対応関係について調べた。

5.1 ロレンツインデックスの変動

初期時刻 t_1 を 8,001~8,100 日の期間で 1 日毎に変化させて、ロレンツインデックス $\alpha(t_1 + \tau, t_1)$ の値を数値的に求めた。ここで、評価時間を $\tau \equiv t_2 - t_1$ で表記している。摂動の大きさはエンストロフィノルムで定義した。Fig.7 は、初期時刻 t_1 に対する $\alpha(t_1 + \tau, t_1)$ の変動の様子を評価時間 $\tau = 2$ 日, 4 日, 6 日, 12 日, 18 日, 30 日について示す。縦軸を見ればわかるように、評価時間 τ が小さいとき ($\tau \leq 6$ 日) ロレンツインデックスは 1 より小さく、摂動が減少している。いずれの評価時間においても $\alpha(t_1 + \tau, t_1)$ は初期時刻 t_1 に依存して変動している。評価時間 τ が小さいとき ($\tau \leq 6$ 日) は、1 週間から 10 日の時間スケールの変動が卓越し、 τ が大きいとき ($\tau \geq 18$ 日) は、より長い時間スケール (数十日) の変動が卓越する。

Fig.8 は、ロレンツインデックス $\alpha(t_1 + \tau, t_1)$ の評価時間 τ に対する依存性を示す。個々の点 - は、初期時刻 t_1 を 8,001~8,100 日の期間で 1 日毎に変化させて得た $\alpha(t_1 + \tau, t_1)$ の値 (各 τ に対して 100 個のサンプル) を、実線はアンサンプル幾何平均を、破線は $\pm 1 \times$ 標準偏差の値を表わす。評価時間 τ が小さい ($\tau < 4$ 日) とき α は減少する。これ

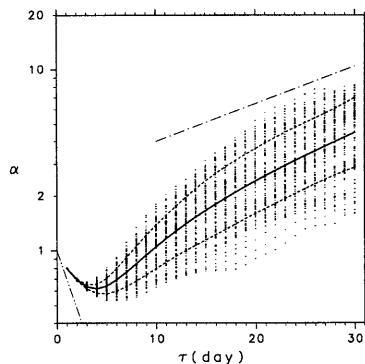


Fig. 8 Dependence of the Lorenz index $\alpha(t_1 + \tau, t_1)$ on the time interval τ . A hundred values of α , which are obtained by changing the initial time t_1 every one day for the period of Day 8,001~8,100, are plotted for each τ . A solid line represents the geometric average of α and dashed lines represent $\pm 1 \times$ standard deviation. A dot-dashed line indicates the slope corresponding to the first Lyapunov exponent, $e^{\lambda_1 \tau}$. A dot-dot-dashed line indicates the slope of α in the limit $\tau \rightarrow 0$: $\alpha = \exp[\tau n^{-1} \times \text{trace}(J)]$.

は、 $\alpha(t_1 + \tau, t_1)$ が $\tau \rightarrow 0$ の極限で $\alpha(t_1 + \tau, t_1) = \sqrt{1 + 2\tau n^{-1} \times \text{trace}(J(x(t_1)))}$ と近似される (Mukougawa et al., 1991) ことに対応している。ここで、 $J(x(t_1))$ は時刻 t_1 におけるヤコビアン行列である。この近似式は、 $\partial \ln \alpha / \partial \tau|_{\tau=0} = \text{trace}(J(x(t_1))) / n$ を意味し、系が散逸系 ($\text{trace}(J) < 0$) ならば α は初期に必ず減少することを示している。用いたモデルでは、ニュートン緩和と数値粘性の 2 つの散逸項の効果から $\text{trace}(J(x(t))) / n = (-2.73 \text{ 日})^{-1}$ (一定) である。ちなみに、もし数値粘性がなかった ($\nu = 0$) ならば、 $\text{trace}(J) / n = -\kappa = (-10 \text{ 日})^{-1}$ である。Fig.8 の二点鎖線は、 $\tau = 0$ での α の変化傾向 $\exp(-\tau/2.73 \text{ 日})$ を示す。系の散逸構造が α の初期の減少と対応していることが分かる。

$\tau \geq 4$ 日では α は τ とともに増加する (Fig.8 の実線)。これは系が不安定でカオス的であることに対応する。 $\tau \rightarrow \infty$ の極限では α の指数関数的な成長率は最大リアプノフ指数 λ_1 と一致する: $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^{-1} \ln \alpha(t_1 + \tau, t_1) = \lambda_1$ 。 $\tau > 20$ 日における α の平均的な成長 (実線) は、 λ_1 の傾き (一点鎖線) とほぼ平行になっている。また、 α のばらつき度 (分散) は τ が大きくなるにつれて増加する。 α の指数関数的な成長率 $\tau^{-1} \ln \alpha$

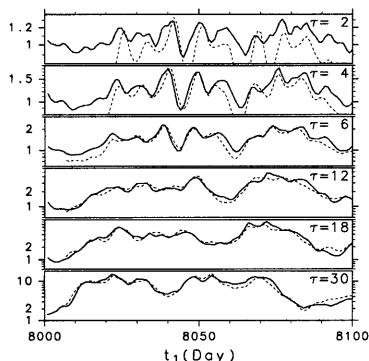


Fig. 9 As in Fig.7 but for the subspace Lorenz index $\alpha_8(t_1 + \tau, t_1)$. Dashed lines indicate the variations of the Lorenz index $\alpha(t_1 - 6 \text{ days} + \tau + 6 \text{ days}, t_1 - 6 \text{ days})$.

の分散は理論的には $\tau \rightarrow \infty$ の極限でゼロに収束するが、このモデル解の場合には、 $\tau^{-1} \ln \alpha$ の分散は $\tau = 9$ 日で極大となっている。

5.2 部分空間ロレンツ インデックスの変動

解軌道 $x(t)$ のリアプノフ次元 D_{KY} は約 7.8 であった (Fig.3)。そこで、本研究では D_{KY} の値に近い整数 $k = 8$ の部分空間ロレンツ インデックス α_8 の変動について詳しく調べた。ここでは、8 次元部分空間 $G_8(t)$ をこのカオス解のアトラクタの接空間の近似と考えている。部分空間 $G_8(t)$ は Shimada and Nagashima(1979) の方法により数値的に求めた。

Fig.9 は、初期時刻 t_1 に対する部分空間ロレンツ インデックス $\alpha_8(t_1 + \tau, t_1)$ の変動を示す。Fig.7 のロレンツ インデックス $\alpha(t_1 + \tau, t_1)$ の同じ τ における変動と比較すると (縦軸は異なることに注意)、 α と α_8 との変動の間にはある程度の正の相関が見られる。しかし、両者の変動には対応の悪い箇所も存在する。例えば、 $\tau = 6$ 日の α (Fig.7) は $t_1 = 8,065$ 日付近で極大、 $t_1 = 8,068$ 日付近で極小となる変動をはっきりと示すが、 $\tau = 6$ 日の α_8 (Fig.9) には対応する変動はほとんど見られない。これに対して、Fig.9 の破線は、初期時刻を 6 日早くして評価時間を $\tau + 6$ 日としたロレンツ インデックス $\alpha(t_1 - 6 \text{ 日} + \tau + 6 \text{ 日}, t_1 - 6 \text{ 日})$ の変動を示している。例えば、 $\tau = 6$ 日の欄の破線は Fig.7 の $\tau = 12$ 日の α の変動を右に 6 日ずらしたものである。破線 α と実線 α_8 の変動を比較すると、特に $\tau \geq 6$ 日で大きな正の相関がある (相関係数は 0.9 を越える)。

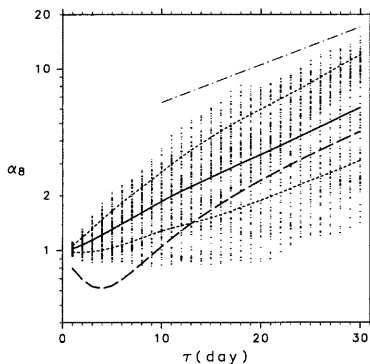


Fig. 10 As in Fig.8 but for the subspace Lorenz index $\alpha_8(t_1 + \tau, t_1)$. A long dashed line indicates the geometric average of α_8 , which is identical to the solid line in Fig.8.

この α_8 と α の高い相関は以下のように解釈される。 n 次元空間に等方的に分布する摂動の多くは、系の散逸構造にしたがい初期にその大きさを急激に減少させる (Fig.8 の二点鎖線)。このモデルの散逸構造は相空間内の場所 $x(t_1)$ に依存しないため、摂動の減少の様子は初期時刻 t_1 に依らず良く似たものとなる。これは、Fig.8 の $\tau \leq 3$ 日の α の分散が非常に小さいことに対応している。時間の経過とともに、摂動はアトラクタに接する方向に向き、摂動の大きさの減少よりも拡大の効果が卓越するようになる。摂動の拡大は系がカオスであることに関係するが、摂動の拡大の様子は一様ではなく、アトラクタの局所的な不安定構造に依存する。この局所的な不安定構造は、アトラクタの接空間における摂動拡大率 α_8 で特徴づけられる。したがって、 $\tau \geq 6$ 日の α の変動は、初期の単調な減少の後のアトラクタの局所的な不安定構造に大きく依存しており、初期の 6 日間を除けば α_8 の変動と良い相関となると解釈される。

Fig.10 は部分空間ロレンツ インデックス $\alpha_8(t_1 + \tau, t_1)$ の評価時間 τ に対する依存性を示す。 α_8 は上で述べたように初期の減少がほとんど見られない。 α_8 の幾何平均値 (実線) は単調に増大しており、 $\tau > 20$ 日における成長は、 α と同様に、最大リアプノフ指数 λ_1 の傾き (一点鎖線) にほぼ平行である。 α_8 の分散は、同じ τ における α の分散よりも大きい。特に $\tau \leq 3$ 日の両者の違いは顕著である。

ロレンツ インデックス $\alpha(t_1 + \tau, t_1)$ と部分空

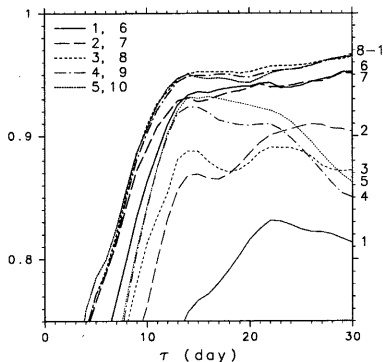


Fig. 11 Maximum value of the coefficient of lag correlation, $\max_{1 \leq \tau \leq 30, 0 \leq t_{lag} \leq 30} \text{lagcor}(t_{lag}, \alpha, \alpha_k)$, between the Lorenz index $\alpha(t_1 + \tau, t_1)$ and the subspace Lorenz index $\alpha_k(t_1 + \tau, t_1)$. The coefficient is calculated for α of Day 8,001 $\leq t_1 \leq$ Day 8,100. The abscissa is the time interval τ of α . The number of each line represents the dimension k .

間ロレンツ インデックス $\alpha_8(t_1 + \tau, t_1)$ とのラグ相関係数の最大値 $\max_{1 \leq \tau \leq 30, 0 \leq t_{lag} \leq 30} \text{lagcor}(t_{lag}, \alpha, \alpha_8)$ を期間 8,001~8,100 日について調べた。ここで、 $\text{lagcor}(t_{lag}, a, b)$ はラグを t_{lag} として $a(t - t_{lag})$ と $b(t)$ の相関係数を意味する。Fig.9では、評価時間が6日の α_8 (実線) と評価時間が12日の α (破線) との変動が、ラグ6日でよく一致することを示した。実際、 $\tau = 12$ 日の α とのラグ相関係数が最大となるのは、 $t_{lag} = 6$ 日、 $\hat{\tau} = 6$ 日の α_8 であり、このときのラグ相関係数は約0.94である。Fig.11の番号8の線(太い短破線)は、期間1~30日の τ について同様に調べた結果を τ に対するラグ相関係数の最大値という形で示している。 $\tau \leq 6$ 日では最大ラグ相関係数は0.80よりも小さく、 τ が小さくなるにつれて係数の値も小さくなる。これは、 τ が小さいときの α の変動が α_8 の変動では十分に表現できないことを意味している。一方、 $\tau \geq 12$ 日では最大ラグ相関係数は0.93を超える大きな値となり、 α の変動は α_8 の変動でよく近似されることが分かる。ラグ相関係数が最大となる状況は、 $\tau \geq 12$ 日では $\tau - \hat{\tau} = 5 \sim 7$ 日、 $t_{lag} = 5 \sim 7$ 日である。そして、多くの場合で $\tau - \hat{\tau} = t_{lag}$ が成り立つ。

今までは、部分空間 G_8 における摂動の拡大率 α_8 について考えてきた。Fig.11では、 $G_1, \dots, G_{10}$ のそれぞれの部分空間における $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$ について同様

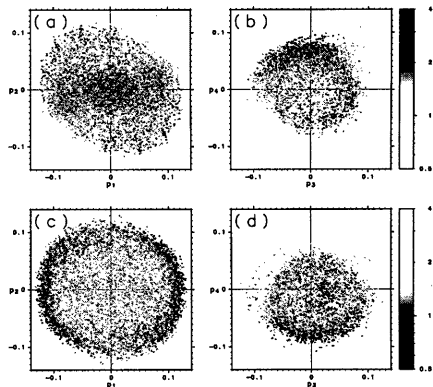


Fig. 12 Distribution of the subspace Lorenz index $\alpha_8(t_1 + \tau, t_1)$ for $\tau = 6$ days on the trajectory $\mathbf{x}(t)$ of Day 5,001~15,000; 10,000 points of $\mathbf{x}(t_1)$ are indicated by gray dots corresponding to the value of $\alpha_8(t_1 + \tau, t_1)$ on the p_1 - p_2 plane(a,c) and the p_3 - p_4 plane(b,d). The points are divided into two groups by the value of α_8 ; large(a,b) and small(c,d).

に調べた結果 (α の変動との最大ラグ相関係数) を示す。基本的に、部分空間 G_k の次元 k が大きいほど α との相関は高くなっている。これは、 $k = n (= 1,848)$ のとき $\alpha_k = \alpha$ となり最大ラグ相関係数が1となる ($\hat{\tau} = \tau, t_{lag} = 0$) ことから予想される結果ではある。つまり、ランダムに選んだ部分空間で同様の解析をおこなえば、部分空間の次元が大きくなるほど α との相関は高くなるという結果が得られると予想される。しかし、 $G_1 \sim G_{10}$ の α_k では、 $\tau \geq 12$ 日の最大ラグ相関係数はいずれも $\tau - \hat{\tau} = 4 \sim 9$ 日、 $t_{lag} = 4 \sim 9$ 日で得られ、 $\tau - \hat{\tau} \approx t_{lag}$ となっている。これらの範囲では、相関係数が最大となるのが $\hat{\tau} \approx \tau$ 、 $t_{lag} \approx 0$ という状況ではない。また、Fig.11で $1 \leq k \leq 8$ の部分空間 G_k では次元の数を一つ増すごとに最大ラグ相関係数の τ 依存性が比較的大きく変化している。一方、 $8 \leq k \leq 10$ の部分空間 G_k では、結果の違いがほとんど見られず、部分空間 G_8 が有意な部分空間であることを示唆している。以下では、 G_8 の部分空間ロレンツ インデックス α_8 の変動と解軌道 $\mathbf{x}(t)$ の変動との関係について調べた結果を示す。

5.3 流れ場との対応関係

解 $\mathbf{x}(t)$ のアトラクタ上で、摂動拡大率が局所的に大きな場所と小さな場所について調べた。Fig.12は、位相空間における解の位置 $\mathbf{x}(t_1)$ と評価時間 $\tau =$

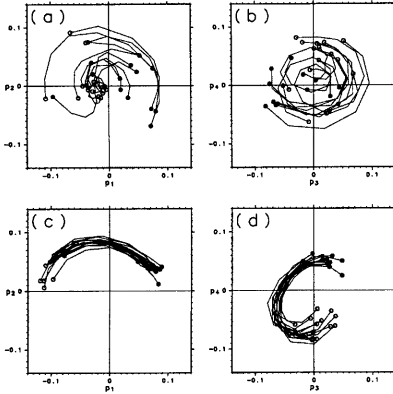


Fig. 13 Fifteen trajectories of $\mathbf{x}(t)$ from $t_1(\circ)$ to $t_1 + 6$ days($\bullet$) when the values of the subspace Lorenz index $\alpha_8(t_1 + 6 \text{ days}, t_1)$ are the largest(a,b) or the smallest(c,d) projected on the p_1 - p_2 plane(a,c) and the p_3 - p_4 plane(b,d).

6日の部分空間ロレンツインデックス $\alpha_8(t_1 + \tau, t_1)$ の値との関係を示す。データ数は初期時刻 t_1 を5,001~15,000日の期間で1日ごとに変化させた10,000点である。ただし、 p_1 - p_2 平面(a,c)では、Fig.6(a)と同様に、モデルの対称性を利用して点の数を2倍にした。Fig.12より α_8 の値が大きな領域(a,b)と小さな領域(c,d)とは異なることが分かる。初期時刻の状態 $\mathbf{x}(t_1)$ が、 p_1 , p_2 成分がともに小さく p_4 成分が正のとき α_8 は大きく、一方、 p_1 成分の絶対値が大きく p_4 成分が負のとき α_8 は小さい。

α_8 が最大となるときの最小となるときのそれぞれ15例について、その解軌道 $\mathbf{x}(t); t_1 \leq t \leq t_1 + 6$ 日をFig.13に示す。ただし、図(a,c)では初期の位置 $\mathbf{x}(t_1)$ の p_1 成分が負となるように($\circ$ が左半分に来るように)、必要に応じて変換操作(原点に対して180°回転)をおこなった。 p_1 - p_2 平面(a)では、 α_8 が大きいときの解軌道に大きく二つの種類がある。一つは中心付近から外へと向かう軌道であり、もう一つは大きく外をまわる軌道である。これらは p_3 - p_4 平面(b)で、それぞれ、 $\mathbf{x}(t_1)$ の p_4 成分が正の値から始まる軌道と、 $\mathbf{x}(t_1)$ の p_4 成分が負の値から始まる軌道に対応する。一方、 α_8 が小さいときの15例は皆良く似た解軌道を示す。 p_1 - p_2 平面(c)では大きく外を回り、 p_3 - p_4 平面(d)では回りながら p_4 成分が負から正へと変化する。 α_8 が大きい2番目のタイプの解軌道と α_8 が小さい解軌道との違いを、これらの平面上

だけで区別することは難しいようである。

α_8 が最大となるときの($t_1 = 13,427$ 日, $\alpha_8 = 3.49$)と α_8 が最小となるときの($t_1 = 14,689$ 日, $\alpha_8 = 0.69$)の解 $\mathbf{x}(t); t_1 \leq t \leq t_1 + 6$ 日の状態と、その期間に最も発達する摂動について調べ、両者の比較をおこなった。Fig.14(a-d)は α_8 が最大のとき、Fig.15(a-d)は α_8 が最小のときのポテンシャル過度 $q(\lambda, \mu, t)$ の時間変動を示す。図の下段(e-h)には、その期間で最も拡大する摂動の線型発達を示す。ただし、この摂動は $\mathbf{R}^n$ ではなく部分空間 $G_8(t)$ の中で最も拡大する摂動である。部分空間 $G_8(t)$ における時刻 t_1 から $t_1 + \tau$ までの誤差行列 $M(t_1 + \tau, t_1)$ は、形式的に 8×8 の行列で表わすことができる。ただし、基底は時々刻々変化する $\mathbf{g}_i(t)$ ($i = 1, \dots, 8$) にとり直している。最大拡大率の摂動は行列 $M(t_1 + \tau, t_1)$ を特異値分解することにより得られる。時刻 t_1 の摂動(e)は行列 $M(t_1 + \tau, t_1)$ の前方特異ベクトル $\mathbf{v}_1$ に対応し、時刻 $t_1 + \tau$ の摂動(h)は行列 $M(t_1 + \tau, t_1)$ の後方特異ベクトル $\mathbf{u}_1$ に対応する。時刻 t_1 から $t_1 + \tau$ までの摂動の拡大率は行列 $M(t_1 + \tau, t_1)$ の特異値 σ_1 である。

α_8 が最大のときの最大拡大率の初期摂動(Fig.14e)は、東半球のジェット(経度 $\lambda = 90^\circ$)付近で大きな振幅を持つ。その後ジェットに流されながら摂動の振幅は増大する(f-h)。一方、 α_8 が最小のときの最大拡大率の初期摂動(Fig.15e)も、西半球のジェットの南側($\lambda = 270^\circ$)付近で大きな振幅を持つ。しかし、この摂動はそれから発達しない(f-h)。

ここで見たような摂動の発達の違いを理解するために、そのメカニズムについて考える。モデルの支配方程式は、強制と散逸の項がなければポテンシャル過度 $q(\lambda, \mu, t)$ のラグランジュ保存式である。

$$\frac{Dq}{Dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) q = 0$$

これより線型摂動の式は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) q^\dagger + \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla q = 0 \quad (18)$$

となる。ここで、 $(\)^\dagger$ は摂動の変数を意味する。両辺に $q^\dagger$ を掛けることにより、摂動のエントロフィ $q^{\dagger 2}/2$ の式が求まる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \frac{q^{\dagger 2}}{2} + q^\dagger \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla q = 0 \quad (19)$$

すなわち、摂動のエントロフィ $q^{\dagger 2}/2$ のラグランジュ的な時間変化は $q^\dagger \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla q$ の値で決まっている。本研究では、エントロフィノルムで摂動の大きさを定義しているので、(19)式を全球で積分したものが摂動の大きさの時間変化を表わす式となっている。 $q^\dagger \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla q$ の全球積分が負ならば摂動は大きくなる傾向であり、正ならば摂動は小さくなる傾向である。

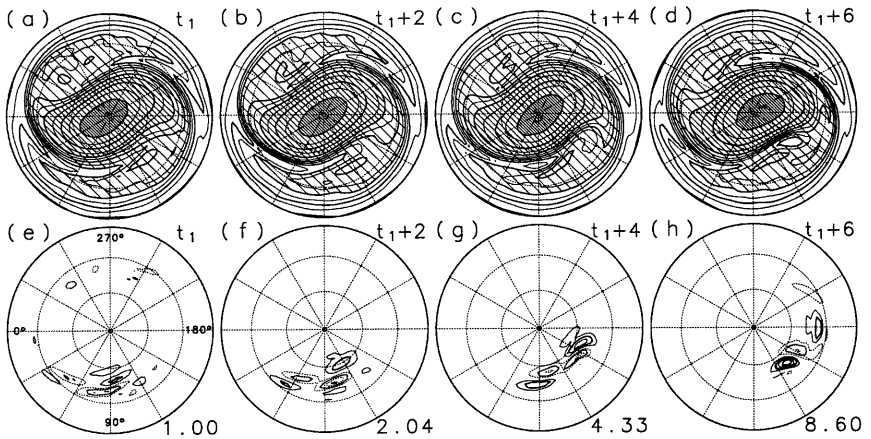


Fig. 14 Temporal variation of the potential vorticity q (a-d) for the period from t_1 to $t_1 + 6$ days when the subspace Lorenz index $\alpha_s(t_1 + 6 \text{ days}, t_1)$ is the largest ($t_1 = \text{Day } 13, 427, \alpha_s = 3.49$), and linear evolution of the vorticity perturbation q^1 (e-h) which grows most rapidly for that period. The perturbations are normalized and their magnitude is indicated at the lower right corner in each figure of (e-h). Contour interval of (a-d) is 0.1 and shading indicates the region greater than 0.4. Contour interval of (e-h) is 3 and zero-contours are omitted.

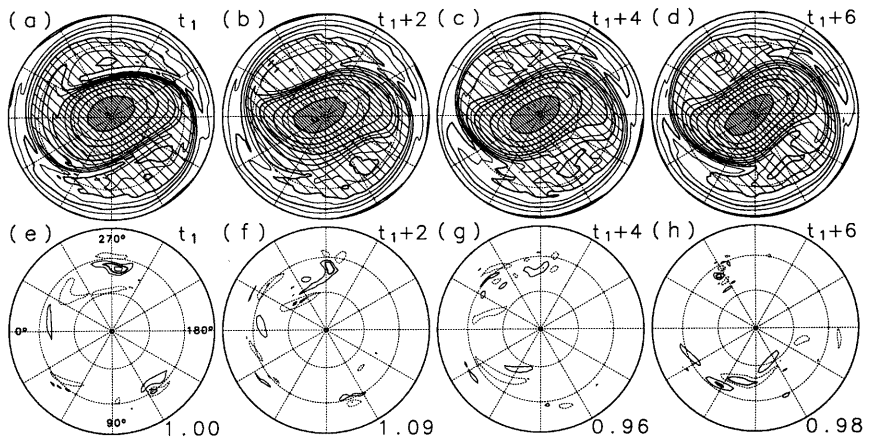


Fig. 15 As in Fig.14 but for the period when the subspace Lorenz index $\alpha_s(t_1 + 6 \text{ days}, t_1)$ is the smallest ($t_1 = \text{Day } 14, 689, \alpha_s = 0.69$).

Fig.16の右列は、 α_s が最大のときの最大拡大率の摂動 (Fig.14e-h) について、 $q^1 \mathbf{u}^1 \cdot \nabla q$ の空間分布を示す。負の領域 (破線コンター) をみると、摂動のエントロフィがラグランジュ的に増加傾向にあることを示している。時刻 t_1 では $\lambda = 90^\circ$ に大きな負の領

域 ($\phi = 40^\circ \text{N}$ 付近) と小さな負の領域 ($\phi = 50^\circ \text{N}$ 付近) のペアが見られる。この負の領域のペアは、時刻 $t_1 + 2$ 日では $\lambda = 110^\circ$ の 45°N と 60°N 付近で大きな振幅を持ち、時刻 $t_1 + 4$ 日では $\lambda = 140^\circ$ 付近に移動する。もう一つの負の領域のペアが時刻 t_1 の

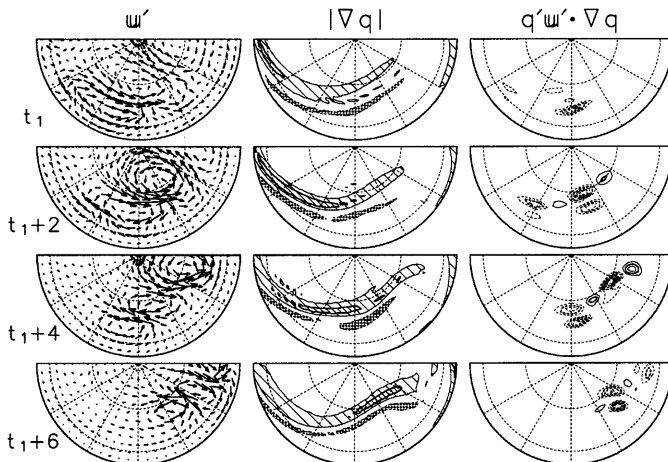


Fig. 16 Temporal variations of the perturbation wind $\mathbf{u}'$ (left column), the gradient of the potential vorticity $|\nabla q| \times (\partial q / \partial \phi) / |\partial q / \partial \phi|$ (center column), and $q' \mathbf{u}' \cdot \nabla q$ (right column) for the period from t_1 to $t_1 + 6$ days when the subspace Lorenz index $\alpha_8(t_1 + 6 \text{ days}, t_1)$ is the largest ($t_1 = \text{Day } 13, 427$) in the area of $\lambda = 0 \sim 180^\circ$ and $\phi = 20 \sim 90^\circ \text{N}$. Contour interval of the center column is 2 (zero-contours are omitted) and shading indicates the region greater than 2 (lines) or less than -2 (dots). Contour interval of the right column is 2 and zero-contours are omitted.

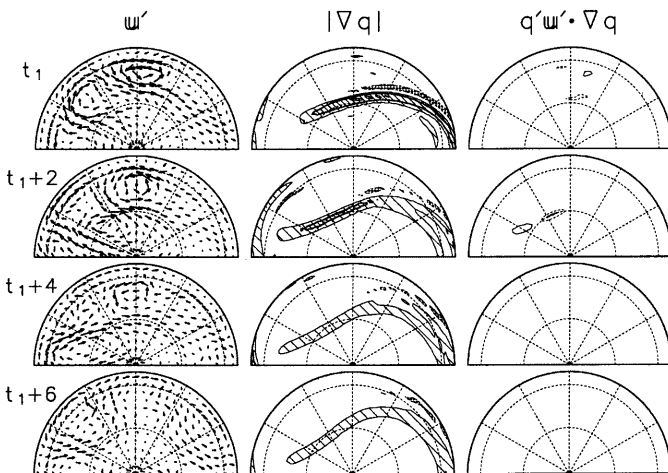


Fig. 17 As in Fig.16 but for the period when the subspace Lorenz index $\alpha_8(t_1 + 6 \text{ days}, t_1)$ is the smallest ($t_1 = \text{Day } 14, 689$) in the area of $\lambda = 180 \sim 360^\circ$ and $\phi = 20 \sim 90^\circ \text{N}$.

$\lambda = 40^\circ$ 付近に見られる。時刻 $t_1 + 2$ 日に $\lambda = 60^\circ$ 、時刻 $t_1 + 4$ 日に $\lambda = 90^\circ$ 、時刻 $t_1 + 6$ 日に $\lambda = 140^\circ$ とベアの形を保ったまま移動する。これらの負の領域のベアは Fig.14(e-h) の摂動渦度 q' の正負のベアに

対応する。Fig.16 の左列は摂動の速度場 $\mathbf{u}'$ を示し、その中列は、ポテンシャル渦度の勾配の絶対値に南北微分の符号を付けたもの $|\nabla q| \times (\partial q / \partial \phi) / |\partial q / \partial \phi|$ を示す。-2 以下の強い渦度逆勾配の領域には点によ

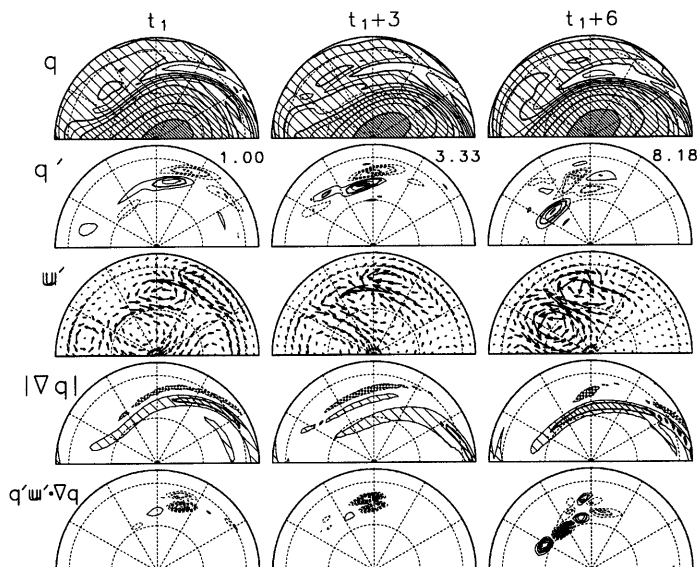


Fig. 18 Temporal variation of the potential vorticity q (top row), the vorticity perturbation q' (second row), the perturbation wind u' (third row), the gradient of the potential vorticity $|\nabla q| \times (\partial q / \partial \phi) / |\partial q / \partial \phi|$ (fourth row), and $q' u' \cdot \nabla q$ (bottom row) in the case of the second largest α_8 ($t_1 =$ Day 8, 318, $\alpha_8 = 3.38$). Contour interval and shading are the same as those in Fig. 14 and Fig. 16.

る濃い影を着けている。Fig. 16 の右列の負の領域のペアは、いずれも、渦度の正勾配と逆勾配の大きい領域で、等ポテンシャル渦度線を横切る流れが強い場所に位置することがわかる。

Fig. 17 は、 α_8 が最小のときの場とその期間の最大拡大率の摂動 (Fig. 15) について示す。右列の $q' u' \cdot \nabla q$ の空間分布では、時刻 t_1 に $(260^\circ, 55^\circ \text{N})$ 、時刻 t_1+2 日に $(290^\circ, 60^\circ \text{N})$ 付近などに負の領域を示すコンターが見られるが、Fig. 16 のような値の大きなものは存在せず、また期間を通して続く現象とはなっていない。Fig. 17 (中列) のポテンシャル渦度勾配の時間変動は、 α_8 が最大となる場合 (Fig. 16) と大きく異なる。点による濃い影を着けた渦度逆勾配の大きな領域が、初期時刻 t_1 には $\lambda=180^\circ \sim 270^\circ$ の低緯度から中緯度にかけて見られるものの、その後減少する。 $\lambda=270^\circ \sim 360^\circ$ の中緯度帯においては、逆勾配の大きな領域は期間を通じてほとんど存在しない。このため、Fig. 16 (右列) で期間を通して見られた負の領域のペアは、Fig. 17 では形成・維持が困難となっている。ペアの摂動は、お互いの振幅を強め合うことで効果的な成長を遂げていると考えられる。渦度の逆

勾配は帯状様な定常な流れ場における順圧不安定の必要条件であるが、ここで得られた結果は、帯状非一様で時間的に変動する場においても、局所的な渦度の逆勾配は摂動の発達にとって重要であることを示唆している。

Fig. 13(a) で、 α_8 の値が大きいときの解軌道には、中心付近から外へと向かう軌道と大きく外をまわる軌道の2つのタイプが存在することを述べた。今まで詳しく調べてきた α_8 が最大のときは、前者のタイプの解軌道に対応する。2番目に大きな α_8 は後者のタイプの解軌道に対応する。Fig. 18 に2番目に大きな α_8 ($t_1 = 8, 318$ 日, $\alpha_8 = 3.38$) の結果を示す。最大拡大率の摂動の渦度 $q'(\lambda, \mu, t)$ は、時刻 t_1 にジェットの南側の領域で大きな振幅を持ち、その後後に流されながら振幅を増大させる (2段目の図)。 $q' u' \cdot \nabla q$ の負の領域は、 t_1 に $\lambda=250^\circ$ 、時刻 t_1+3 日に $\lambda=270^\circ$ 、時刻 t_1+6 日に $\lambda=300^\circ$ でペアの形で見られる (最下段の図)。ポテンシャル渦度の逆勾配の大きな領域は期間を通して中緯度帯に存在する (4段目の図)。このように、 α_8 が2番目に大きなときの摂動の発達メカニズムは、 α_8 最大のときと定

性的に同じ構造をしている。

6. まとめと考察

簡略化した順圧大気モデルを使った数値実験により、中・高緯度の長期変動と予測可能性の基本的な力学について研究をおこなった。モデルの時間発展解は、中・高緯度上部対流圏がそうであるように、10~20日の長周期の不規則な変動を示す (Fig.2)。この時間発展解の軌道の最大リアプノフ指数 λ_1 は約 $(20.8 \text{ 日})^{-1}$ であり、リアプノフ次元 D_{KY} は約 7.8 である (Fig.3)。このモデル解のリアプノフ次元 D_{KY} はモデルの全次元 $n=1,848$ に比べて非常に小さい。

予測可能性の指標として、近似的なアトラクタ接空間におけるロレンツ インデックス α_8 を導入した。全空間におけるロレンツ インデックス α が、系の散逸構造に従って初期に急激に減少し、その後、アトラクタの局所的な不安定構造に依存して増大する (Fig.8) のに対して、 α_8 は、初めからアトラクタの局所的な不安定構造に依存して増大する (Fig.10)。評価時間を6日とした α_8 の変動は、評価時間を12日とした α の変動と時間ラグ6日で高い正相関となる (Fig.9)。この新指標は、基準となる解 $\mathbf{x}(t)$ とそれに微小な摂動を加えた8つの解を時間積分するだけで求めることができるので、オリジナルのロレンツ インデックス (次元の数 $n=1,848$ だけ接線方程式を時間積分しないと求められない) に比べて、はるかに少ない計算機資源で計算可能である。

部分空間ロレンツ インデックス α_8 を、10,000日の長期間データに対して求め、その時間変動と流れ場との対応を調べた。とくに、 α_8 が極大となるときの極小になるときについて、流れ場の状態と最大拡大率の摂動の空間構造の関連を調べた。 α_8 が大きいときは、ポテンシャル渦度の南北勾配が負となる領域 (逆勾配) が期間を通じて中緯度帯に見られる。そのときの最大拡大率の摂動は、初期にジェットの南側の領域に振幅を持ち、その後東に流されながら発達する。特に、渦度の正勾配と逆勾配の領域に位置する摂動のペアが摂動発達に重要な役割を果たしている。 α_8 が小さいときは、大きな逆勾配は中緯度帯に見られず、組織的な摂動の発達も見られない。渦度の逆勾配は帯状一様な定常な流れ場における順圧不安定の必要条件であるが、帯状非一様で時間変化する場においても局所的な渦度の逆勾配は摂動発達の良い指標となっている。

Mukougawa et al.(1991) では、3次元のロレンツ モデル (Lorenz, 1963) の間欠性カオスにおいて、比較的周期的な期間 (ラミナーの期間) となる前にロレンツ インデックスが小さくなることを報告している。

Fig.5 や Fig.6(c,d) の解軌道の振る舞いから、ここで用いたモデルのカオス解においても比較的周期的な期間の存在が認められる。特に、Fig.6(d) において、解軌道が原点を中心としたやや横長の円上を回転しているときに比較的周期的な期間に対応すると考えられる。一方、Fig.13(d) は α_8 が小さいときの15本の解軌道を示している。 α_8 が小さいときの解軌道は、比較的周期的な期間に向かって見ることができ。したがって、Mukougawa et al.(1991) で示された関係と同様の関係が、このモデルのカオス解において存在している可能性がある。

謝辞

ここで用いたスペクトルモデルは、東京大学大学院数理科学研究科 石岡 圭一 助教授のコードをもとに作成したものである。また、作図には地球流体電脳ライブラリを用いた。ここに記して謝意を表す。数値実験およびそのデータ処理は、京都大学大型計算機センターの計算機 (VPP500/15) と京都大学電波科学計算機実験装置 (KDK) を用いておこなった。なお、本研究は、文部省科学研究費および東京大学気候システム研究センター共同研究費の補助を受けた。

参考文献

- Goldhirsch, I., Sulem, P.-L. and Orszag, S.A. (1987): Stability and Lyapunov stability of dynamical systems: A differential approach and a numerical method, *Physica*, Vol.27D, pp.311-337.
- Kimoto, M., Mukougawa, H. and Yoden, S. (1992): Medium-range forecast skill variation and blocking transition: A case study, *Mon.Wea.Rev.*, Vol.120, pp.1616-1627.
- Lacarra, J. and Talagrand, O. (1988): Short-range evolution of small perturbations in a barotropic model, *Tellus*, Vol.40A, pp.81-95.
- Legras, B. and Ghil, M. (1985): Persistent anomalies, blocking and variations in atmospheric predictability, *J.Atmos.Sci.*, Vol.42, pp.433-471.
- Legras, B. and Vautard, R. (1996): A guide to Lyapunov vectors, *Predictability*, Vol.I, pp.141-156, Seminar Proceedings, ECMWF, Reading, UK.
- Lorenz, E.N. (1963): Deterministic nonperiodic flow, *J.Atmos.Sci.*, Vol.20, pp.130-141.
- Lorenz, E.N. (1965): A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model, *Tellus*, Vol.17, pp.321-333.
- Mukougawa, H., Kimoto, M. and Yoden, S. (1991): A relationship between local error growth and quasi-

- stationary states: Case study in the Lorenz system, *J.Atmos.Sci.*, Vol.48, pp.1231-1237.
- Oseledec, V.I., (1968): A multiplicative ergodic theorem. Ljapunov characteristic numbers for dynamical systems, *Trans.Moscow Math.Soc.*, Vol.19, pp.197-231.
- Palmer, T.N. (1988): Medium and extended range predictability and stability of the Pacific/North American mode, *Quart.J.Roy.Met.Soc.*, Vol.114, pp.691-713.
- Shimada, I. and Nagashima, T. (1979): A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems, *Prog.Theor.Phys.*, Vol.61, pp.1605-1616.
- Trevisan, A. and Legnani, R. (1995): Transient error growth and local predictability: A study in the Lorenz system, *Tellus*, Vol.47A, pp.103-177.
- Yamane, S. and Yoden, S. (1997): Predictability variation and quasi-stationary states in simple non-linear systems, *J.Met.Soc.Japan*, Vol.75, pp.557-568.
- Yamane, S. and Yoden, S. (1998): Low-frequency variations and optimal excitation in a simple barotropic model with zonal asymmetry, *J.Met.Soc.Japan*, Vol.76, accepted.
- Yoden, S. and Nomura, M. (1993): Finite-time Lyapunov stability analysis and its application to atmospheric predictability, *J.Atmos.Sci.*, Vol.50, pp.1531-1543.

Low-Frequency Variations and Predictability Fluctuations in a Simplified Atmospheric Circulation Model

Shozo YAMANE and Shigeo YODEN
Department of Geophysics, Kyoto University

Synopsis

Fundamental dynamics on predictability fluctuations are studied by investigating finite-time evolution of small perturbations superposed on a solution of a simplified atmospheric circulation model, which shows irregular fluctuations with a dominant period of 10~20 days. We concentrate our attention on the perturbations in the subspace which is considered to be approximately tangent to the attractor. The average amplification rate of perturbations in the subspace has a property to increase from the beginning according to the locally unstable structure of the attractor of the model, which is contrary to that in the full space. The existence of the negative meridional gradient of the potential vorticity is important to the rapid growth of the perturbation in this model solution.

Keywords: low-frequency variations, predictability, attractor, Lyapunov analysis, barotropic instability