京都大学防災研究所年報　第40号 B-1　平成9年4月
Annuals of Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., No. 40 B-1, 1997

軸対称・逆対称近似固有モードを用いた球形シェルの非線形応答方程式

諸岡繁洋・國枝治郎

要 旨

本論では球形シェル構造物に上下および水平地震動外力が働いたときの、動的応答非線形方程式を導く。当該構造物の一般厳正解を用いた通常の方法で応答方程式を導くことは困難を極めるため、著者らにより開発された球形シェル自由振動時近似固有モード式を用いた定式化を行う。この最終応答方程式を用いることにより、近年問題にされている水平地震動による上下振動モードの誘起の可能性を調べることが出来る。

キーワード：球形シェル、近似固有モード、非線形、Galerkin 法、Legendre 陪多項式

1. はじめに

シェル構造の動的挙動把握が設計に当たって重要な事柄であることは明らかである。ここでは、上下地震動および水平地震動を受ける球形シェル構造の動的応答非線形最終方程式を導く。応答解析を行う場合、直接数値解析法を用いることも可能であるが、パラメトリックに一般的な性状を調査するには適していない。この方面の既往研究には解析解を用いたものは、上下地震動のみを受ける球形シェル構造の動的安定挙動（國枝、1993）を調べたもののみである。有限要素法解析等の数値解析解との比較検討のためにも、上記の動的安定非線形最終方程式の導出は必要不可欠である。また、この分野に於いて、近年問題にされている水平地震動による上下応答振動モードの誘起あるいは上下地震動による水平応答振動モードの誘起もこの式を用いた数値解析を実行することにより解決されるといえる。

本論では、初めに各方向の運動方程式、歪－変位成分関係式および応力－変位関係式より、法線方向非線形運動方程式および適合条件式を導く。著者らにより開発された軸対称および逆対称近似固有モード式(1994)を用いて法線方向応答変位（たわみモード）を仮定し、線形適合条件式より応力表示の中に含まれる応力関数を導く。その後、これらの式を先の法線方向非線形運動方程式に代入し、通常の Galerkin 法を適用することにより時間に関する非線形連立常微分応答方程式が得られる。また、このたわみモードを用いたときの各応力の定式化を最終章で述べる。

なお、本論で取り扱う球形シェルは頂点が閉じており、境界が一ヶ所だけのドーム型とする。また、u、v の慣性項 $\ddot{u}$、$\ddot{v}$ を無視した、flexural 振動を仮定する。

2. 法線方向非線形運動方程式および適合条件式

本章では、法線方向非線形運動方程式および適合条件式の誘導を行う。

2.1 運動方程式

上下、水平方向2方向に動的外力を受ける球形ドームの各方向の運動方程式は、以下のように表される。

$$(N_\phi \sin\phi)^\circ + N'_{\theta\phi} - N_\theta\cos\phi - Q_\phi\sin\phi - \frac{ma}{g}\sin\phi\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u - U\sin\phi + V\cos\phi\cos\theta + W\cos\phi\sin\theta) = 0 \tag{1.a}$$

$$(N_{\theta\phi}\sin\phi)^\circ + N'_\theta + N_{\theta\phi}\cos\phi - Q_\theta\sin\phi - \frac{ma}{g}\sin\phi\frac{\partial^2}{\partial t^2}(v - V\sin\theta + W\cos\theta) = 0 \tag{1.b}$$

$$(Q_\phi\sin\phi)^\circ + Q'_\theta + \sin\phi(N_\phi + N_\theta) + (N_\phi\sin\phi\Phi_1 + N_{\theta\phi}\sin\phi\Phi_2)^\circ + (\Phi_1 N_{\theta\phi} + \Phi_2 N_\theta)' - \frac{ma}{g}\sin\phi\frac{\partial^2}{\partial t^2}(w - U\cos\phi - V\sin\phi\cos\theta - W\sin\phi\sin\theta) = 0 \tag{1.c}$$

$$(M_\phi\sin\phi)^\circ + M'_{\theta\phi} - M_\theta\cos\phi + aQ_\phi\sin\phi = 0 \tag{1.d}$$

$$M'_\theta + (M_{\theta\phi}\sin\phi)^o + M_{\theta\phi}\cos\phi + aQ_\theta\sin\phi = 0 \qquad (1.e)$$

ここに、

$$\Phi_1 = \frac{1}{a}(u + w^o) = \frac{1}{a}w^o$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{a}(v + \frac{w'}{\sin\phi}) = \frac{w'}{a\sin\phi} \qquad (1.f)$$

であり、U, V, W はそれぞれ上下方向、θ=0 軸上の水平方向、θ=90 軸上の水平方向強制変位である。

2.2 歪ー変位成分関係式

$$e_\phi = \frac{1}{a}\{u^o - w + \frac{1}{2a}(w^o)^2\} = {}_Le_\phi + {}_Le_\phi \qquad (2.a)$$

$$e_\theta = \frac{1}{a}\{u\cot\phi + \frac{v'}{\sin\phi} - w + \frac{1}{2a}(\frac{w'}{\sin\phi})^2\}$$

$$= {}_Le_\theta + {}_Le_\theta \qquad (2.b)$$

$$e_{\theta\phi} = \frac{1}{a}\{\frac{u'}{\sin\phi} + v^o - v'\cot\phi + \frac{w^o w'}{a\sin\phi}\}$$

$$= {}_Le_{\theta\phi} + {}_Le_{\theta\phi} \qquad (2.c)$$

$$\kappa_\phi = \frac{1}{a^2}(w^{oo} + w) + \frac{1}{a}e_\phi \qquad (2.d)$$

$$\kappa_\theta = \frac{1}{a^2}(\frac{w''}{\sin^2\phi} + w^o\cot\phi + w) + \frac{1}{a}e_\theta \qquad (2.e)$$

$$\kappa_{\theta\phi} = \frac{1}{a^2\sin\phi}(-w'\cot\phi + w'^o - \frac{1}{2}w^o w') + \frac{1}{a}e_{\theta\phi} \qquad (2.f)$$

2.3 応力ー歪関係式

$$M_\phi = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_\phi + \nu\kappa_\theta) \qquad (3.a)$$

$$M_\theta = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_\theta + \nu\kappa_\phi) \qquad (3.b)$$

$$M_{\theta\phi} = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)}\kappa_{\theta\phi} \qquad (3.c)$$

$$N_\phi = \frac{Eh}{1-\nu^2}(e_\phi + \nu e_\theta) \qquad (3.d)$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\nu e_\phi + e_\theta) \qquad (3.e)$$

$$N_{\theta\phi} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}e_{\theta\phi} \qquad (3.f)$$

2.4 面外せん断力 Q_ϕ, Q_θ

モーメントー曲率関係式(3.a – 3.c)及び曲率ー変位関係式(2.d - 2.f)をϕ軸まわり回転釣合式(1.d)に代入し、垂直応力ー歪関係式(3.d – 3.f)及びϕ, θ方向釣合式(1.a , 1.b)を用いると、

$$Q_\phi = -\left(1 + \frac{D}{a^2K}\right)^{-1}\frac{D}{a^3}H_2^o(w) = -\frac{D}{a^3}H_2^o(w) \qquad (4)$$

が得られ、同様にθ軸まわり回転釣合式 (1.e)を用いると

$$Q_\theta = -\left(1 + \frac{D}{a^2K}\right)^{-1}\frac{D}{a^3\sin\phi}H'_2(w) = -\frac{D}{a^3\sin\phi}H'_2(w)$$

が得られる。ここに、 (5)

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}、K = \frac{Eh}{1-\nu^2}$$

である。

2.5 面内せん断力 N_ϕ, N_θ, $N_{\theta\phi}$

本論文では flexural 振動を仮定しており、u、vの慣性項$\ddot{u}$、$\ddot{v}$を無視した、(1.a), (1.b)式を満たすように、応力関数ψを導入し、N_ϕ, N_θ, $N_{\theta\phi}$を以下のようにおく。

$$N_\phi = {}_LN_\phi + {}_NN_\phi \qquad (6)$$

$$N_\theta = {}_LN_\theta + {}_NN_\theta \qquad (7)$$

$$N_{\theta\phi} = {}_LN_{\theta\phi} + {}_NN_{\theta\phi} \qquad (8)$$

ここに右辺に於ける左下付きのLは線形項、Nは非線形項を表し、以下のように求めることが出来る。

(1) 線形項分

$${}_LN_\phi = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{\psi''}{\sin^2\phi} + \psi^o\cot\phi + \psi - \frac{D}{a}H_2(w)\right\}$$

$$+\frac{ma}{g}\{\ddot{U}\cos\phi + \ddot{V}\sin\phi\cos\theta + \ddot{W}\sin\phi\sin\theta\} \qquad (6.L)$$

$${}_LN_\theta = \frac{1}{a^2}\left\{\psi^{oo} + \psi - \frac{D}{a}H_2(w)\right\}$$

$$+\frac{ma}{g}\{\ddot{U}\cos\phi + \ddot{V}\sin\phi\cos\theta + \ddot{W}\sin\phi\sin\theta\} \qquad (7.L)$$

$${}_LN_{\theta\phi} = -\frac{1}{a^2}\left\{\frac{\psi'^o}{\sin\phi} + \frac{\cos\phi}{\sin^2\phi}\psi'\right\} \qquad (8.L)$$

(2) 非線形項分

$${}_NN_\phi = \frac{Eh}{1-\nu^2}({}_Ne_\phi + \nu\,{}_Ne_\theta)$$

$$= \frac{1}{2a^2}\frac{Eh}{1-\nu^2}\left\{(w^o)^2 + \nu\left(\frac{w'}{\sin\phi}\right)^2\right\} \qquad (6.N)$$

$${}_NN_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2}({}_Ne_\theta + \nu\,{}_Ne_\phi)$$

$$= \frac{1}{2a^2}\frac{Eh}{1-\nu^2}\left\{\nu(w^o)^2 + \left(\frac{w'}{\sin\phi}\right)^2\right\} \qquad (7.N)$$

$${}_NN_{\theta\phi} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}{}_Ne_{\theta\phi} = \frac{Eh}{2a^2(1+\nu)}\frac{w^o w'}{\sin\phi} \qquad (8.N)$$

2.6 支配方程式

(1) 法線方向運動方程式

法線方向釣合式(1.c)に、(4)~(8)式を代入すると、以下の法線方向運動方程式が得られる。

$$[H_2H_2(w) - \frac{a}{D}H_2(\psi) + \frac{ma^4}{gD}\ddot{w}]$$

$$-\frac{a^3}{D}\frac{1}{\sin\phi}(\sin\phi\Phi_1\,{}_L\overline{N}_\phi + \sin\phi\Phi_2\,{}_L\overline{N}_{\theta\phi})^o$$

$$-\frac{a^3}{D}\frac{1}{\sin\phi}(\Phi_1\,{}_L\overline{N}_{\theta\phi}+\Phi_2\,{}_L\overline{N}_\theta)'$$

$$-\frac{a^3}{D}\frac{1}{\sin\phi}\{\sin\phi({}_NN_\phi+{}_NN_\theta)\}$$

$$-\frac{a^3}{D}\frac{1}{\sin\phi}(\sin\phi\Phi_1\,{}_NN_\phi+\sin\phi\Phi_2\,{}_NN_{\theta\phi})^o$$

$$-\frac{a^3}{D}\frac{1}{\sin\phi}(\Phi_1\,{}_NN_{\theta\phi}+\Phi_2\,{}_NN_\theta)'$$

$$=3\frac{ma^4}{gD}\{\ddot{U}\cos\phi+\ddot{V}\sin\phi\cos\theta+\ddot{W}\sin\phi\sin\theta\}$$

$$+\frac{ma^3}{gD}\ddot{U}\{\cos\phi H_0(w)-w^o\sin\phi\}$$

$$+\frac{ma^3}{gD}\ddot{V}\{\sin\phi H_0(w)+w^o\cos\phi-w'\frac{\tan\theta}{\sin\phi}\}$$

$$+\frac{ma^3}{gD}\ddot{W}\{\sin\phi H_0(w)+w^o\cos\phi+w'\frac{\cot\theta}{\sin\phi}\} \qquad (9)$$

(2) 適合条件式

歪－変位成分関係式(2)より以下の適合条件式を得る。

$$H_2H_1(\psi)-(1-\nu)\frac{D}{a}H_2H_2(w)+EhaH_2(w)$$

$$+Eh\{w^{oo}H_0(w)-(w^{oo})^2-(w^o)^2$$

$$-(\frac{w'}{\sin^2\phi})^2-w'^o(\frac{w'}{\sin^2\phi})^o\}=0 \qquad (10)$$

3. たわみモードの仮定

球形ドームの半開角をϕ_0とする。(9)および(10)の解 w を、著者らにより開発された(1994)球形シェル軸対称及び逆対称近似固有モード式(W_i, W_i^1)を用いて以下のように仮定する。

$$w=w_0+w_s\sin\theta+w_c\cos\theta \qquad (11)$$

$$w_0=\sum_{i=1}^{M_0}W_i(\phi)T_i(t)\text{、}W_i(\phi)=\sum_{j=1}^{N_0}G_{ji}P_j(\cos\phi)$$

$$w_s=\sum_{i=1}^{M_1}W_i^1(\phi)T_i^s(t)\text{、}w_c=\sum_{i=1}^{M_1}W_i^1(\phi)T_i^c(t)$$

$$W_i^1=\sum_{j=1}^{N_1}G_{ji}^1P_j^1(\cos\phi)$$

ここに、M_0, M_1は使用する軸対称及び逆対称モードの数、P_j、P_j^1、N_0、N_1は Legendre(陪)多項式及びそれらを使用する数を示す。G_{ji}^0、G_{ji}^1は球殻の半開角及び板厚比より計算される定数であり、Legendre(陪)多項式の和により近似固有モードを表現している。構造物の境界条件は近似固有モードを求める時点で満たされる。

また、適合条件式(10)は線形であることを仮定し、上式(11)を用いることで、応力関数ψは以下のように計算される。

$$\psi=\frac{D}{a}\{\psi_0+\psi_s\sin\theta+\psi_c\cos\theta\} \qquad (12)$$

$$\psi_0=\sum_{i=1}^{M_0}\Psi_i(\phi)T_i(t)\text{、}\Psi_i(\phi)=\sum_{j=1}^{N_0}G_{ji}\lambda_jP_j(\cos\phi)$$

$$\psi_s=\sum_{i=1}^{M_1}\Psi_i^1(\phi)T_i^s(t)\text{、}\psi_c=\sum_{i=1}^{M_1}\Psi_i^1(\phi)T_i^c(t)$$

$$\Psi_i^1=\sum_{j=1}^{N_1}G_{ji}^1\lambda_jP_j^1(\cos\phi)$$

4. 非線形連立2階常微分方程式(最終方程式)

非線形運動方程式をGalerkin法を用いて解く。書き換えられた法線方向運動方程式(9)に、(1.f), (6), (7)式を考慮しながら、仮定した法線方向変位式(11)及び応力関数式(12)を代入する。得られた運動方程式の両辺に、(a) : $W_k\sin\phi$, (b) : $W_k^1\sin\phi\cos\theta$, (c) : $W_k^1\sin\phi\sin\theta$を乗じ、θを$(0, 2\pi)$の範囲でϕを$(0, \phi_0)$ の範囲で積分することにより、l番目のモードに関するT_l, T_l^c, T_l^sのみを含んだ以下の非線形連立2階常微分方程式が得られる。

$$A_l^1\ddot{T}_l+A_l^2T_l+\sum_{s=1}^{M_0}\sum_{t=1}^{M_0}A_l^3(s,t)T_sT_t$$

$$+\sum_{s=1}^{M_1}\sum_{t=1}^{M_1}A_l^4(s,t)\{T_s^cT_t^c+T_s^sT_t^s\}$$

$$+\sum_{s=1}^{M_0}\sum_{t=1}^{M_0}\sum_{u=1}^{M_0}A_l^5(s,t,u)T_sT_tT_u$$

$$+\sum_{s=1}^{M_0}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{u=1}^{M_1}A_l^6(s,t,u)\{T_sT_t^cT_u^c+T_sT_t^sT_u^s\}$$

$$=A_l^7\ddot{U}+\ddot{U}\sum_{s=1}^{M_0}A_l^8(s)T_s+(\ddot{V}+\ddot{W})\sum_{s=1}^{M_0}A_l^9(s)T_s \qquad (13.a)$$

$$B_l^1\ddot{T}_l^c+B_l^2T_l^c+\sum_{s=1}^{M_0}\sum_{t=1}^{M_1}B_l^3(s,t)T_sT_t^c$$

$$+\sum_{s=1}^{M_1}\sum_{t=1}^{M_0}\sum_{u=1}^{M_0}B_l^4(s,t,u)T_s^cT_tT_u$$

$$+\sum_{s=1}^{M_1}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{u=1}^{M_1}B_l^5(s,t,u)T_s^cT_t^sT_u^s$$

$$+\sum_{s=1}^{M_1}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{u=1}^{M_1}B_l^6(s,t,u)T_s^cT_t^cT_u^c$$

$$=B_l^7\ddot{V}+\ddot{U}\sum_{s=1}^{M_1}B_l^8(s)T_s^c$$

$$+\ddot{V}\sum_{s=1}^{M_1}B_l^9(s)T_s^c+\ddot{W}\sum_{s=1}^{M_1}B_l^{10}(s)T_s^c \qquad (13.b)$$

$$B_l^1\ddot{T}_l^s+B_l^2T_l^s+\sum_{s=1}^{M_0}\sum_{t=1}^{M_1}B_l^3(s,t)T_sT_t^s$$

$$+\sum_{s=1}^{M_1}\sum_{t=1}^{M_0}\sum_{u=1}^{M_0}B_l^4(s,t,u)T_s^sT_tT_u$$

$$+\sum_{s=1}^{M_1}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{u=1}^{M_1}B_l^5(s,t,u)T_s^sT_t^cT_u^c$$

$$+\sum_{s=1}^{M_1}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{u=1}^{M_1}B_l^6(s,t,u)T_s^sT_t^sT_u^s$$

$$=B_l^7\ddot{W}+\ddot{U}\sum_{s=1}^{M_1}B_l^8(s)T_s^s$$

$$+\ddot{V}\sum_{s=1}^{M_1}B_l^{10}(s)T_s^s+\ddot{W}\sum_{s=1}^{M_1}B_l^9(s)T_s^s \qquad (13.c)$$

ここに$T_l = T_l/h$、$T_l^s = T_l^s/h$、$T_l^c = T_l^c/h$、$\ddot{U} = \ddot{U}/h$、$\ddot{V} = \ddot{V}/h$、$\ddot{W} = \ddot{W}/h$と正規化したものを用いている。以下に得られた係数の内容を示す。

(1) **係数** A_l, B_l

係数A_l, B_lは以下のように計算される。

$$A_l^1/h = 2\kappa A \sum_{j=1}^{N_0}\sum_{i=1}^{N_0} G_{jl}G_{il}S(j,i)$$

$$A_l^2/h = 2\sum_{j=1}^{N_0}\sum_{i=1}^{N_0} G_{jl}G_{il}\{2-j(j+1)\}$$
$$\{2-j(j+1)-\lambda_j\}S(j,i)$$

$$A_l^3(s,t)/h = \left(\frac{h}{a}\right)\sum_{j=1}^{N_0}\sum_{k=0}^{N_2}[2\lambda_j C_{ksl}G_{jt}S_2(k,j)$$
$$+\{2\{\lambda_j - 2 + j(j+1)\}C_{ksl}G_{jt}$$
$$-\kappa C_{kst}G_{jl}/(1-\nu)\}S(k,j)]$$

$$A_l^4(s,t)/h = \left(\frac{h}{a}\right)\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_1}\sum_{k=0}^{N_2} G_{is}^1 G_{jt}^1 G_{kl}[$$
$$\lambda_j\{-Q_1(k,i,j)-Q_1(k,i,j)+Q_2(k,j,i)+Q_3(k,j,i)\}$$
$$+\{\lambda_j - 2 + j(j+1)\}Q_4(k,j,i)$$
$$-\kappa\{Q_5(k,j,i)+Q_6(k,j,i)\}/2(1-\nu)\}]$$

$$A_l^5(s,t,u)/h = 6\sum_{k=0}^{N_2}\sum_{j=0}^{N_2} 2C_{ksl}C_{jul}S(k,j)$$

$$A_l^6(s,t,u)/h = 6\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_1}\sum_{k=0}^{N_2} C_{ksl}G_{it}^1 G_{ju}^1[$$
$$3Q_5(k,j,i)+Q_6(k,j,i)]$$

$$A_l^7/h = 6\kappa A\sum_{j=1}^{N_0} G_{jl}S(1,j)$$

$$A_l^8(s)/h = -2\kappa A\left(\frac{h}{a}\right)\sum_{i=1}^{N_0}\sum_{j=1}^{N_0} G_{is}G_{jl}\frac{i(i+1)}{2i+1}[$$
$$(i+2)S(i+1,j)+(i-1)S(i-1,j)]$$

$$A_l^9(s)/h = 2\kappa A\left(\frac{h}{a}\right)\sum_{i=1}^{N_0}\sum_{j=1}^{N_0} G_{is}G_{jl}\frac{1}{2i+1}[$$
$$-i(i+2)S_3(j,i+1)+(i^2-1)S_3(j,i-1)]$$

$$B_l^1/h = \kappa A\sum_{j=1}^{N_1}\sum_{i=1}^{N_1} G_{jl}^1 G_{il}^1 S^1(j,i)$$

$$B_l^2/h = \sum_{j=1}^{N_1}\sum_{i=1}^{N_1} G_{jl}^1 G_{il}^1\{2-j(j+1)\}$$
$$\{2-j(j+1)-\lambda_j\}S^1(j,i)$$

$$B_l^3(s,t)/h = \left(\frac{h}{a}\right)\sum_{i=1}^{N_0}\sum_{j=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{N_1} G_{is}G_{jt}^1 G_{kl}^1[$$
$$-\lambda_j\{Q_1(i,j,k)+Q_1(i,k,j)\}$$
$$+(\lambda_i+\lambda_j)Q_2(i,j,k)+(-\lambda_i+\lambda_j)Q_3(i,j,k)$$
$$+\{\lambda_j-2+j(j+1)\}Q_4(i,j,k)$$
$$-\kappa Q_4(i,k,j)/(1-\nu)+\{\lambda_i-2+i(i+1)\}Q_5(i,j,k)$$
$$+\{-i(i+1)\lambda_i+\lambda_i-2+i(i+1)\}Q_6(i,j,k)]$$

$$B_l^4(s,t,u)/h = 6\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_1}\sum_{k=0}^{N_2} C_{ktu}G_{is}^1 G_{jl}^1[$$
$$3Q_5(k,j,i)+Q_6(k,j,i)]$$

$$B_l^5(s,t,u)/h = \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_1} G_{is}^1 G_{jt}^1 G_{ku}^1 G_{ml}^1 \sum_{p=0}^{i+j}\sum_{q=0}^{k+m}[$$
$$3D_{ij,p}^{bb}D_{km,q}^{bb}+3D_{ij,p}^{ba}D_{km,q}^{ab}$$
$$-2D_{ij,p}^{ab}D_{km,q}^{ab}+3D_{ij,p}^{ab}D_{km,q}^{ba}$$
$$-2D_{ij,p}^{bb}D_{km,q}^{aa}+3D_{ij,p}^{aa}D_{km,q}^{aa}]S(p,q)$$

$$B_l^6(s,t,u)/h = \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_1} G_{is}^1 G_{jt}^1 G_{ku}^1 G_{ml}^1 \sum_{p=0}^{i+j}\sum_{q=0}^{k+m}[$$
$$3D_{ij,p}^{bb}D_{km,q}^{bb}+D_{ij,p}^{ba}D_{km,q}^{ab}+D_{ij,p}^{bb}D_{km,q}^{aa}$$
$$+3D_{ij,p}^{aa}D_{km,q}^{aa}]S(p,q)$$

$$B_l^7/h = 3\kappa A\sum_{j=1}^{N_1} G_{jl}^1 S^1(1,j)$$

$$B_l^8(s)/h = -\kappa A\left(\frac{h}{a}\right)\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_1} G_{is}^1 G_{jl}^1$$
$$\frac{1}{2i+1}[i^2(i+2)S^1(i+1,j)+(i+1)^2(i-1)S^1(i-1,j)]$$

$$B_l^9(s)/h = \kappa A\left(\frac{h}{a}\right)\sum_{i=1}^{N_0}\sum_{j=1}^{N_1} G_{is}G_{jl}^1[$$
$$\frac{i^2(i+1)^2}{2i+1}\{S_3(i+1,j)+S_3(i-1,j)\}$$
$$+\sum_{k=1}^{i} b_k^i\frac{1}{2k+1}\{(k+1)S_3(k+1,j)$$
$$+kS_3(k-1,j)\}+\sum_{k=1}^{i} a_k^i S_3(k,j)]$$

$$B_l^{10}(s)/h = \kappa A\left(\frac{h}{a}\right)\sum_{i=1}^{N_0}\sum_{j=1}^{N_1} G_{is}G_{jl}^1[$$
$$\frac{i^2(i+1)^2}{2i+1}\{S_3(i+1,j)+S_3(i-1,j)\}$$
$$+\sum_{k=1}^{i} b_k^i\frac{1}{2k+1}\{(k+1)S_3(k+1,j)+kS_3(k-1,j)\}$$
$$-\sum_{k=1}^{i} a_k^i S_3(k,j)]$$

ここに、A は材料学的パラメタ(ma^2/Ehg)、a は半径、$N_2=2N_0$を示す。

(2) **Legendre(陪)多項式の3重積**:$Q_1(i,j,k)$〜$Q_6(i,j,k)$

$$Q_1(i,j,k) = -\int_0^{\phi_0} P_i^1 P_j^1 P_k^{1o}\frac{1}{\sin\phi}d\phi$$
$$= -\sum_{n=0}^{j+k}\sum_{l=0}^{i} D_{jk,n}^{ab}a_l^i S(l,n)$$

$$Q_2(i,j,k) = -\int_0^{\phi_0} P_i^1 P_j^1 P_k^{1o}\cos\phi d\phi = \sum_{n=0}^{j+k} D_{jk,n}^{bb}S_2(n,i)$$

$$Q_3(i,j,k) = -\int_0^{\phi_0} P_i^1 P_j^1 P_k^1\frac{\cos\phi}{\sin^2\phi}d\phi = \sum_{n=0}^{j+k} D_{jk,n}^{aa}S_2(n,i)$$

$$Q_4(i,j,k) = -\int_0^{\phi_0} P_i^1 P_j^1 P_k^{1o}\sin\phi d\phi = -\sum_{l=0}^{i+j}\sum_{m=0}^{k} E_{ijl}b_m^k S(l,m)$$

$$Q_5(i,j,k) = \int_0^{\phi_0} P_i P_j^{1o} P_k^{1o}\sin\phi d\phi = \sum_{n=0}^{j+k} D_{jk,n}^{bb}S(i,n)$$

$$Q_6(i,j,k) = \int_0^{\phi_0} P_i P_j^1 P_k^1\frac{1}{\sin\phi}d\phi = \sum_{n=0}^{j+k} D_{jk,n}^{aa}S(i,n)$$

ここに、

$$D^{aa}_{jk,n}=\sum_{l=1}^{j}\sum_{m=1}^{k}a_l^j a_m^k F^0(l,m,n)\times(2n+1)/2$$

$$D^{ab}_{jk,n}=\sum_{l=1}^{j}\sum_{m=1}^{k}a_l^j b_m^k F^0(l,m,n)\times(2n+1)/2$$

$$D^{ba}_{jk,n}=\sum_{l=1}^{j}\sum_{m=1}^{k}b_l^j a_m^k F^0(l,m,n)\times(2n+1)/2$$

$$D^{bb}_{jk,n}=\sum_{l=1}^{j}\sum_{m=1}^{k}b_l^j b_m^k F^0(l,m,n)\times(2n+1)/2$$

$$E_{ijk}=F^1(i,j,k)\times(2k+1)/2$$

$$a_l^j=\begin{cases}2l+1, & l<j\&|j-l|=odd\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

$$b_l^j=\begin{cases}(j+1)^2-a_j^{j+1}, & (l=j)\\ -a_l^{j+1}, & (l\neq j)\end{cases}$$

ここで用いている Legendre(陪)多項式3重積の一部の解は Gaunt により求められており、以下のように表される。

$$F^u(l,m,n)=\int_0^{\pi}P_l^u(\cos\phi)P_m^u(\cos\phi)P_n(\cos\phi)\sin\phi d\phi$$

$$=(-1)^{s-m}2\frac{(l-u)!(m+u)!n!n!(2s-2n)!s!}{(s-l)!(s-m)!(s-n)!(2s+1)!}$$

$$\sum_t(-1)^t\frac{(l+u+t)!(m+n-u-t)!}{(l-u-t)!(m-n+u+t)!(n-t)!t!}$$

総和 t の範囲は、Max.(0, n-m-u)から Min.(n, l-u, m+n-u)であり、また $m+n\geqq l\geqq m-n$, $l\geqq u$, $l\geqq n-m$ を満たすものである。この三角条件式を満たさぬものは 0 となる。

(3) Legendre(陪)**多項式の2重積**: $S^n(r,s)$, $S(r,s)$, $S^2(r,s)$, $S^3(r,s)$

$$S^n(r,s)=\int_0^{\phi_0}P_s^n(\cos\phi)P_r^n(\cos\phi)\sin\phi d\phi$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{r(r+1)-s(s+1)}[(s-r)\cos\phi P_s^nP_r^n & (r\neq s)\\ \quad -(s+n)P_{s-1}^nP_r^n+(r+n)P_s^nP_{r-1}^n]_{\phi=\phi_0}, & \\ -[P_r^nP_r^{n-1}\sin\phi]_{\phi=\phi_0} & (r=s)\\ \quad +(r+n)(r-n+1)S^{n-1}(r,r), & \end{cases}$$

$$S(r,s)=S^0(r,s)=\int_0^{\phi_0}P_s(\cos\phi)P_r(\cos\phi)\sin\phi d\phi$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{r(r+1)-s(s+1)}[(s-r)\cos\phi P_sP_r & (r\neq s)\\ \quad -sP_{s-1}P_r+rP_sP_{r-1}]_{\phi=\phi_0}, & \\ \dfrac{1}{2r+1}[1-P_rP_r\cos\phi]_{\phi=\phi_0} & (r=s)\\ \quad -2\sum_{p=1}^{[r/2]}(2r+1-4p)S^0(r,r-2p), & \end{cases}$$

$$S_2(r,s)=-\int_0^{\phi_0}P_r(\cos\phi)P_s^1(\cos\phi)\cos\phi d\phi$$

$$=-sS(r,s)-\sum_{p=1}^{[s/2]}(2s+1-4p)S(s-2p,r)$$

$$S_3(r,s)=\int_0^{\phi_0}P_r(\cos\phi)P_s^1(\cos\phi)\sin\phi d\phi$$

$$=s\sum_{l=0}^{r+s}\frac{2l+1}{2}[c_lF^0(l,r,s)-k_lF^0(l,r,s-1)]$$

$$k_i=\frac{2i-1}{i^2}\sin\phi P_{i-1}|_{\phi=\phi_0}+\frac{(i-1)^2}{i^2}k_{i-2}$$

$k_0=\phi_0$、$k_1=\sin\phi_0$

$c_i=\dfrac{1}{i+1}\sin\phi P_i|_{\phi=\phi_0}+\dfrac{i}{i+1}k_{i-1}$、$c_0=\sin\phi_0$

$$C_{kst}=\sum_{p=1}^{N_0}\sum_{q=1}^{N_0}G_{ps}G_{qt}\ {}_{p,q}D_k$$

$${}_{p,q}D_k=\begin{cases}0, & |p-q|=even\\ & \&k=evenor|p-q|=odd\&k=odd\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{2k+1}{p+q+k+1}\{p(p+1)+q(q+1)-k(k+1)\} & \\ \times\dfrac{R\left(\frac{p-q+k}{2}\right)R\left(\frac{q-p+k}{2}\right)R\left(\frac{p+q-k}{2}\right)}{R\left(\frac{p+q+k}{2}\right)}, & otherwise\end{cases}$$

$$R(s)=\frac{(2s-1)!!}{s!}$$

5. 応力表現

仮定したたわみモード式(11)より各応力は線形項、非線形項および外力項の和として以下のように表現できる。

$$N_\theta={}_L\overline{N}_\theta+{}_NN_\theta+{}_fN_\theta \qquad (14)$$

$$N_\phi={}_L\overline{N}_\phi+{}_NN_\phi+{}_fN_\phi \qquad (15)$$

$$N_{\phi\theta}={}_LN_{\phi\theta}+{}_NN_{\phi\theta} \qquad (16)$$

$$M_\theta={}_LM_\theta+{}_NM_\theta \qquad (17)$$

$$M_\phi={}_LM_\phi+{}_NM_\phi \qquad (18)$$

$$M_{\phi\theta}={}_LM_{\phi\theta}+{}_NM_{\phi\theta} \qquad (19)$$

5.1 応力の線形項分(左下付き文字が L のもの)

$${}_L\overline{N}_\theta=\frac{Eh}{a\kappa}\sum_{t=1}^{M_0}\sum_{j=1}^{N_0}G_{jt}[-\lambda_j\cot\phi P_j^o$$
$$+\{\lambda_j-2+j(j+1)-j(j+1)\lambda_j\}P_j]T_t$$
$$+\frac{Eh}{a\kappa}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{N_1}G_{jt}^1[-\lambda_j\cot\phi P_j^{1^o}$$
$$+\{\lambda_j-2+j(j+1)-j(j+1)\lambda_j+\frac{1}{\sin^2\phi}\lambda_j\}P_j^1]$$
$$\times\{T_t^s\sin\theta+T_t^c\cos\theta\} \qquad (14.L)$$

$${}_L\overline{N}_\phi=\frac{Eh}{a\kappa}\sum_{t=1}^{M_0}\sum_{j=1}^{N_0}G_{jt}[\lambda_j\cot\phi P_j^o$$
$$+\{\lambda_j-2+j(j+1)\}P_j]T_t$$
$$+\frac{Eh}{a\kappa}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{N_1}G_{jt}^1[\lambda_j\cot\phi P_j^{1^o}$$
$$+\{\lambda_j-2+j(j+1)-\frac{1}{\sin^2\phi}\lambda_j\}P_j^1]$$
$$\times\{T_t^s\sin\theta+T_t^c\cos\theta\} \qquad (15.L)$$

$${}_LN_{\phi\theta}=\frac{Eh}{a\kappa}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{N_1}G_{jt}^1\lambda_j\left\{\frac{1}{\sin\phi}P_j^{1^o}-\frac{\cot\phi}{\sin\phi}P_j^1\right\}$$
$$\times\{T_t^c\sin\theta-T_t^s\cos\theta\} \qquad (16.L)$$

$$ {}_L M_\theta = \frac{Eh}{\kappa}\sum_{t=1}^{M_0}\sum_{j=1}^{N_0} G_{jt}\{\{1-(1+\nu)\lambda_j/\kappa\} $$

$$ \{(1-\nu)\cot\phi P_j^o - \nu j(j+1)P_j\}T_t $$

$$ +\frac{Eh}{\kappa}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{N_1} G_{jt}^1[\{1-(1+\nu)\lambda_j/\kappa\}[(1-\nu)\cot\phi P_j^{1^o} $$

$$ -\{\frac{1-\nu}{\sin^2\phi}+\nu j(j+1)\}P_j^1] \times\{T_t^s\sin\theta+T_t^c\cos\theta\} \qquad (17.L) $$

$$ {}_L M_\phi = \frac{Eh}{\kappa}\sum_{t=1}^{M_0}\sum_{j=1}^{N_0} G_{jt}\{1-(1+\nu)\lambda_j/\kappa\} $$

$$ \{-(1-\nu)\cot\phi P_j^o - j(j+1)P_j\}T_t $$

$$ +\frac{Eh}{\kappa}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{N_1} G_{jt}^1[\{1-(1+\nu)\lambda_j/\kappa\}[-(1-\nu)\cot\phi P_j^{1^o} $$

$$ +\{\frac{1-\nu}{\sin^2\phi}-j(j+1)\}P_j^1] \times\{T_t^s\sin\theta+T_t^c\cos\theta\} \qquad (18.L) $$

$$ {}_L M_{\phi\theta} = \frac{Eh}{\kappa}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{N_1} G_{jt}^1(1-\nu)\{1-(1+\nu)\lambda_j/\kappa\} $$

$$ \left\{\frac{1}{\sin\phi}P_j^{1^o}-\frac{\cot\phi}{\sin\phi}P_j^1\right\}\times\{T_t^s\cos\theta-T_t^c\sin\theta\} \qquad (19.L) $$

$$ Q_\theta = -\frac{Eh}{a\kappa}\frac{1}{\sin\phi}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{N_1} G_{jt}^1\{2-j(j+1)\}P_j^1 $$

$$ \times\{T_t^s\cos\theta-T_t^c\sin\theta\} \qquad (20) $$

$$ Q_\phi = -\frac{Eh}{a\kappa}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{N_1} G_{jt}^1\{2-j(j+1)\}P_j^{1^o} $$

$$ \times\{T_t^s\sin\theta+T_t^c\cos\theta\} \qquad (21) $$

5.2 応力の外力項分(f)と非線形項分(N)

$$ {}_f N_\theta = \frac{ma}{g}\{\ddot U\cos\phi+\ddot V\sin\phi\cos\theta+\ddot W\sin\phi\sin\theta\} \qquad (14.F) $$

$$ {}_f N_\phi = \frac{ma}{g}\{\ddot U\cos\phi+\ddot V\sin\phi\cos\theta+\ddot W\sin\phi\sin\theta\} \qquad (15.F) $$

$$ {}_N N_\theta = \nu\frac{6E}{\kappa h}\sum_{s=1}^{M_0}\sum_{t=1}^{M_0}\sum_{i=1}^{N_0}\sum_{j=1}^{N_0} G_{is}G_{jt}P_i^oP_j^oT_sT_t $$

$$ +\frac{6E}{\kappa h}\sum_{s=1}^{M_0}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{i=1}^{N_0}\sum_{j=1}^{N_1} 2G_{is}G_{jt}^1P_i^oP_j^{1^o}T_s\{T_t^s\sin\theta+T_t^c\cos\theta\} $$

$$ +\frac{6E}{\kappa h}\sum_{s=1}^{M_1}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_1} G_{is}^1G_{jt}^1[(\frac{1}{\sin^2\phi}P_i^1P_j^1\cos^2\theta $$

$$ +\nu P_i^{1^o}P_j^{1^o}\sin^2\theta)T_s^sT_t^s $$

$$ -2(\frac{1}{\sin^2\phi}P_i^1P_j^1+\nu P_i^{1^o}P_j^{1^o})\sin\theta\cos\theta T_s^sT_t^c $$

$$ +(\frac{1}{\sin^2\phi}P_i^1P_j^1\sin^2\theta+\nu P_i^{1^o}P_j^{1^o}\cos^2\theta)T_s^cT_t^c] \qquad (14.N) $$

$$ {}_N N_\phi = \frac{6E}{\kappa h}\sum_{s=1}^{M_0}\sum_{t=1}^{M_0}\sum_{i=1}^{N_0}\sum_{j=1}^{N_0} G_{is}G_{jt}P_i^oP_j^oT_sT_t $$

$$ +\frac{6E}{\kappa h}\sum_{s=1}^{M_0}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{i=1}^{N_0}\sum_{j=1}^{N_1} 2G_{is}G_{jt}^1P_i^oP_j^{1^o}T_s\{T_t^s\sin\theta+T_t^c\cos\theta\} $$

$$ +\frac{6E}{\kappa h}\sum_{s=1}^{M_1}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_1} G_{is}^1G_{jt}^1[(\frac{\nu}{\sin^2\phi}P_i^1P_j^1\cos^2\theta $$

$$ +P_i^{1^o}P_j^{1^o}\sin^2\theta)T_s^sT_t^s $$

$$ -2(\frac{\nu}{\sin^2\phi}P_i^1P_j^1+P_i^{1^o}P_j^{1^o})\sin\theta\cos\theta T_s^sT_t^c $$

$$ +(\frac{\nu}{\sin^2\phi}P_i^1P_j^1\sin^2\theta+P_i^{1^o}P_j^{1^o}\cos^2\theta)T_s^cT_t^c] \qquad (15.N) $$

$$ {}_N N_{\phi\theta} = \frac{6E}{\kappa h}\sum_{s=1}^{M_0}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{i=1}^{N_0}\sum_{j=1}^{N_1}(1-\nu)G_{is}G_{jt}^1 $$

$$ \frac{1}{\sin\phi}P_i^oP_j^1T_s\{T_t^s\cos\theta-T_t^c\sin\theta\} $$

$$ +\frac{6E}{\kappa h}\sum_{s=1}^{M_1}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_1}(1-\nu)G_{is}^1G_{jt}^1\frac{1}{\sin\phi}P_i^{1^o}P_j^1 $$

$$ \times\{T_s^cT_t^s\cos^2\theta+(T_s^sT_t^s-T_s^cT_t^c)\sin\theta\cos\theta $$

$$ -T_s^sT_t^c\sin^2\theta\} \qquad (16.N) $$

$$ {}_N M_\theta = \nu\frac{Eh}{2a\kappa}\sum_{s=1}^{M_0}\sum_{t=1}^{M_0}\sum_{i=1}^{N_0}\sum_{j=1}^{N_0} G_{is}G_{jt}P_i^oP_j^oT_sT_t $$

$$ +\nu\frac{Eh}{2a\kappa}\sum_{s=1}^{M_0}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{i=1}^{N_0}\sum_{j=1}^{N_1} 2G_{is}G_{jt}^1P_i^oP_j^{1^o}T_s\{T_t^s\sin\theta+T_t^c\cos\theta\} $$

$$ +\frac{Eh}{2a\kappa}\sum_{s=1}^{M_1}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_1} G_{is}^1G_{jt}^1[(\frac{1}{\sin^2\phi}P_i^1P_j^1\cos^2\theta $$

$$ +\nu P_i^{1^o}P_j^{1^o}\sin^2\theta)T_s^sT_t^s $$

$$ -2(\frac{1}{\sin^2\phi}P_i^1P_j^1+\nu P_i^{1^o}P_j^{1^o})\sin\theta\cos\theta T_s^sT_t^c $$

$$ +(\frac{1}{\sin^2\phi}P_i^1P_j^1\sin^2\theta+\nu P_i^{1^o}P_j^{1^o}\cos^2\theta)T_s^cT_t^c] \qquad (17.N) $$

$$ {}_N M_\phi = \frac{Eh}{2a\kappa}\sum_{s=1}^{M_0}\sum_{t=1}^{M_0}\sum_{i=1}^{N_0}\sum_{j=1}^{N_0} G_{is}G_{jt}P_i^oP_j^oT_sT_t $$

$$ +\frac{Eh}{2a\kappa}\sum_{s=1}^{M_0}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{i=1}^{N_0}\sum_{j=1}^{N_1} 2G_{is}G_{jt}^1P_i^oP_j^{1^o}T_s\{T_t^s\sin\theta+T_t^c\cos\theta\} $$

$$ +\frac{Eh}{2a\kappa}\sum_{s=1}^{M_1}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_1} G_{is}^1G_{jt}^1[(\frac{\nu}{\sin^2\phi}P_i^1P_j^1\cos^2\theta $$

$$ +P_i^{1^o}P_j^{1^o}\sin^2\theta)T_s^sT_t^s $$

$$ -2(\frac{\nu}{\sin^2\phi}P_i^1P_j^1+P_i^{1^o}P_j^{1^o})\sin\theta\cos\theta T_s^sT_t^c $$

$$ +(\frac{\nu}{\sin^2\phi}P_i^1P_j^1\sin^2\theta+P_i^{1^o}P_j^{1^o}\cos^2\theta)T_s^cT_t^c] \qquad (18.N) $$

$$ {}_N M_{\phi\theta} = \frac{Eh}{2a\kappa}\sum_{s=1}^{M_0}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{i=1}^{N_0}\sum_{j=1}^{N_1}(1-\nu)G_{is}G_{jt}^1 $$

$$ \frac{1}{\sin\phi}P_i^oP_j^1T_s\{T_t^s\cos\theta-T_t^c\sin\theta\} $$

$$ +\frac{Eh}{2a\kappa}\sum_{s=1}^{M_1}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_1}(1-\nu)G_{is}^1G_{jt}^1\frac{1}{\sin\phi}P_i^{1^o}P_j^1 $$

$$ \times\{T_s^cT_t^s\cos^2\theta+(T_s^sT_t^s-T_s^cT_t^c)\sin\theta\cos\theta $$

$$ -T_s^sT_t^c\sin^2\theta\} \qquad (19.N) $$

5.3 層せん断力 Q_l

当該構造物に対して層せん断力係数という概念は、通常の層状構造物に比べわかりにくいものではあるが、将来的に当該構造物の設計式の基礎となりえる可能性があ

るので層せん断力Q_iの式を以下に示す。式を見ていただいてもわかるように、この式は開角ϕ上のせん断力を周方向に積分した値である。

置換面外せん断力 V_ϕ、置換面内せん断力 T_ϕは以下のように表される。

$$T_\phi = N_{\phi\theta} + \frac{1}{a}M_{\phi\theta}\text{、}V_\phi = Q_\phi - \frac{1}{a\sin\phi}M'_{\phi\theta}$$

これらを用いると層せん断力 Q_i は以下のように計算できる。

$$Q_i = \int_0^{2\pi}[(N_\phi\cos\phi - V_\phi\sin\phi)\cos\theta - T_\phi\sin\theta]d\theta$$

V_ϕ, T_ϕを代入し積分を実行すると、

$$Q_i = \pi[N_\phi^c\cos\phi - Q_\phi^c\sin\phi - N_{\phi\theta}^c] \qquad (22)$$

となる。ここに上付の c は、それぞれの応力項の内、$\cos\theta$にかかる部分を示す。つまり、

$$N_\phi^c = \frac{Eh}{a\kappa}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{N_1}G_{jt}^1[\lambda_j\cot\phi P_j^{1^o}$$

$$+\{\lambda_j - 2 + j(j+1) - \frac{1}{\sin^2\phi}\lambda_j\}P_j^1]T_t^c$$

$$Q_\phi^c = -\frac{Eh}{a\kappa}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{N_1}G_{jt}^1\{2 - j(j+1)\}P_j^{1^o}T_t^c$$

$$N_{\phi\theta}^c = -\frac{Eh}{a\kappa}\sum_{t=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{N_1}G_{jt}^1\lambda_j\left\{\frac{1}{\sin\phi}P_j^{1^o} - \frac{\cot\phi}{\sin\phi}P_j^1\right\}T_t^s$$

である。

6. 結語

本論では球形シェル構造物の動的応答非線形方程式の定式化を行った。この式を用いた数値解析を実行することで、当該構造物の非線形時に於ける動的挙動把握が可能となり、設計時に必要な知見が得られる。

参考文献

國枝治郎(1983)：上下地震動を受ける球形ドームの応答解析、京都大学防災研究所年報、第 26 号 B-1

國枝治郎(1993)：上下地震動を受ける球形ドームの動的安定、シェル・単層ラチス構造の振動解析－地震、風応答と動的安定－、日本建築学会、pp.371-381

諸岡繁洋・國枝治郎・韓 相乙(1994)：球形シェルの逆対称近似固有モード作成及び応答解析への適用、日本建築学会構造系論文集、第 466 号、pp.79-85

Kunieda, H., Morooka, S., Onodera, K.(1994): Spherical Domes Subjected to Horizontal Earthquakes, Proc. IASS-ASCE Sympo., pp.229-238.

付録(記号)

ϕ：経線に沿う方向の頂点からの開角

θ：円周方向角, t：時間

a：半径, h：板厚

E：ヤング係数, ν：ポワソン比

g：重力加速度, Ω：一般化固有振動数

m：シェル中立面単位面積当たり質量

M_0：使用する軸対称モードの数

M_1：使用する逆対称モードの数

N_0, N_1：M_0, M_1により定まる使用する Legendre 多項式の数（近似固有モード作成法参照）

$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$, $B^o=dB/d\phi$, $B'=dB/d\theta$

$H_0(B)=B^{oo}+\cot\phi B^o+\mathrm{cosec}^2\phi B''$

$H_1(B)=H_0(B)+(1-\nu)B$, $H_2(B)=H_0(B)+2B$

$\lambda_j=[(1-\nu)\{2-j(j+1)\}-\kappa]/\{1-\nu-j(j+1)\}$

$\kappa=12(1-\nu^2)a^2/h^2$

$A=ma^2/Ehg$

Non-linear Governing Equations for Spherical Domes Subjected to Vertical and Horizontal Earthquakes

Shigehiro MOROOKA, Haruo KUNIEDA

Synopsis

When we design large span structures like domes, it is substantial to take into consideration of influence of eternal forces such as earthquakes and wind. The purpose of this paper is to obtain the non-linear governing equations for Spherical domes. Using the approximate eigen modes of a spherical dome in axi-symmetric and anti-symmetric states presented by authors, we derive the coefficients of non-linear governing equations in mathematically analytic form.

keywords: spherical dome, approximate eigen mode, non-linear, Galerkin procedure, Legendre bi-polynomials