京都大学防災研究所年報　第38号 B-2　平7. 4
Annuals, Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., No. 38 B-2, 1995

目的間のプライオリティの相違を考慮した多目的ダムの費用割振り法に関するゲーム論的考察

岡田　憲夫・谷本　圭志

A GAME-THEORETIC ANALYSIS OF PRIORITY-ORDERING COST ALLOCATION PROBLEMS

By *Norio* Okada and *Keishi* Tanimoto

Synopsis

A critical question in multi-purpose reservoir development is how to allocate the joint costs among multiple purposes. If each purpose has a different incentive in the timing and ordering of participation, the cost allocation method to be applied must appropriately reflect such bargaining factors. This paper approaches this type of cost allocation problem by use of game theory. Theoretical studies are carried out to examine the weighted Shapley value as a promising method. Another fair allocation scheme called the Priority-Ordering Nucleolus is also developed by modifying the definition of Nucleolus. Theoretical and numerical examinations are made to examine the applicability and limitations of the proposed methods.

1. はじめに

水資源開発事業は水需要の多様化，複雑化に対応するために，多くの流域で推進されてきた。しかし近年では，当事業を取り巻く環境が変化し，事業計画の在り方を再検討する必要が生じてきた。その背景には以下の二つの側面があろう。

その一つは，社会的要請の変化に伴い，新たな目的を含めた展開が求められるようになっているということである。その例として，従来の治水や利水事業に加えて「親水事業」を新たな目的として認め，流域の水環境の改善を図ることが考えられる。これは，今後の社会基盤整備においては環境への配慮が不可欠であるほか，国民のレクリエーション需要の増加が予想されることを受け，この種の「親水主体」あるいは「環境主体」が事業に参加する可能性が現実的に高いということである。

二つ目として，事業に適した良好なサイトが減少していることである。従って，有限な土地資源をいかに有効に利用し，開発効率を向上させるかが重要な課題となっている。

水資源開発事業を円滑に進めていく上では，このような現状を踏まえた上で，各事業者でのコンフリクトを調整する必要があろう。特に水資源開発事業はその規模の大きさから，多目的ダム事業に見られるように複数の目的（主体）によって共同で事業が実施されることが一般的である。このため，共同事業費用を目的間でどのように割り振るかという「費用割り振り問題」をいかに処理するかが重要となろう。従って，費用割り振り法には，公平性，効率性などが客観的に保証されることが求められる。我が国における費用割り振り法は，米国の TVA 事業を発端とする SCRB 法[1]に補正を加えた分離費用身替り妥当支出法

が用いられている。この方法は，過去の経験を基に提案された慣用的な方法であり，実用性が高いという長所の反面，解の理論的根拠の不備という短所を有する。従って，上述のような事業を取り巻く環境の変化に対し，このような慣用的な方法が斉合性をもって適用可能かどうかについての検討が求められることになる。岡田，谷本はこの点について，ゲーム論的なアプローチで検討を行っている[2]。しかしもし，慣用的な方法における適用可能範囲を逸脱する状況が想定し得るのであれば，現行の費用割り振り法の補正や，新たな費用割り振り法の開発が求められることになる。

本研究では目的間の優先性に差異が存在する場合に着目する。以下，目的間の「優先度」に二つの側面があることを指摘する。

・物理的優先性

物理的優先性は，目的がその事業において基幹的か付加的かという性格の違いに起因する優先性である。付加的な目的は，基幹的な目的の参加確認後でなければ事業に参加しないものと考えられるため，優先度が低いと考えられる。物理的優先度の低い目的の例として，多目的ダム事業における「レクリエーション目的」が挙げられる。治水や利水といった従来からの目的は単独での事業を想定し得るのに対し，レクリエーション目的は，単独でレクリエーション目的のダムを建設するといったことは考えにくい。むしろ，治水利水など他の基幹的目的がダム事業に参加することを前提として初めて，付加的に参加すると考えることが現実的であろう。このため，レクリエーション目的は，治水，利水などの目的を持つ目的に比べ相対的に優先度が低いと考えられる。水資源開発事業においては，レクリエーション目的のような付加的な性格を持つ目的の参加はこれまであまり例がなかった。しかし今後は，従来型の開発によって悪化した環境の回復や，すでに整備された社会基盤の活用を目的とした目的の事業参加が多くなると考えられ，このような目的もまた付加的な性格を持つことが予想される。このように，目的の性格そのものが規定する優先性を，本研究では「物理的優先性」と呼ぶ。

・時間的優先性

開発に適した良好なサイトが減少している現在においては，限られた土地をいかに有効に利用するかが課題となろう。従って，ダム整備計画においては，より長期的な展望をもつ必要がある。すなわち，現在における需要が顕在化していない目的であっても，将来需要を見越して現時点でのダム事業に含めておくことが不可欠となってこよう。このような場合には，目的間に現時点でのダム事業に対する緊急度の差が生じていることになる。緊急度の高い目的ほど，その事業に対する優先度は高いと考えられる。例えば，治水，上水道の二目的による多目的ダム整備計画において，治水目的は，流域の洪水防止の必要性から治水専用ダムの建設も辞さないのに対し，上水道目的は，現時点では需給が逼迫しておらず，将来にわたる安定供給のために事業に参加するものとする。この場合，上水道目的は治水目的に比べ事業に対する（時間的な）優先度が低いと考えられる。上水道目的は物理的優先性における親水目的とは異なり，上水道専用ダムが（物理的には）想定し得ないわけではない。しかし現時点では，上水道目的には単独でダムを建設してまで水源を確保する動機がないと考えられる。本研究ではこのように時間的な選好によって規定される優先性を「時間的優先性」と呼ぶ。

従来はこのような目的間の優先性が大きな問題とならなかった。その背景として，河川やダムの整備の遅れが大きく，多様化・高度化する経済活動を後追いする形で事業が推進されてきた事情がある。すなわち，ダム事業に参加する各目的は基幹的かつ緊急度が高いことが，暗に想定されていた。しかし，河川やダムの整備が一定の程度まで進んだ現在，これからのダム整備にあたって，従来のアプローチは必ずしも常に妥当であるとは限らなくなってきている。つまり優先性を考慮することにより，各目的の立場の差異を明示的に反映した利害調整が必要であるような場合には，その差異を反映した費用割り振り法の検討が求められることになる。本研究ではまず，このような問題に対して現行の費用割り振り制度において講じ得る措置について説明するとともに，その問題点について言及する。次いで，ゲーム理論の知見を援用することにより，目的間の優先度の差異を考慮した新たな費用割り振り法の提案を行う。

2．現行制度における優先性の考慮

現行の費用割り振り制度においては，目的間の優先度の差異が著しい場合の措置として，以下のような二つの対策が認められている。

1）先行投資事業の便益割引

2）優先支出法の適用

1）は，現行の費用割り振り法である分離費用身替り妥当支出法の運用上の措置であり，ある種の事業について共同施設完成後，一部効用が発生するまでにある期間を要することが明らかであるが，他の緊急事業との関連でやむを得ず共同事業に参加せざるを得ないような場合について行われる。この場合，先行共同施設投資が遊休する期間中の利息を控除したものを可能投資額と見て，費用割り振りに反映させようとするものである。これは，時間的優先性に配慮した措置と考えられる。しかし当然のことながら，物理的優先性については有効的な措置とはなり得ない。先行割引の適用事例はいくつかあり，例えば文献[3]が参考になる。

2）については，参加各事業の緊急度の差が特に著しいと認められる場合や，分離費用身替り妥当支出法を基準とすることが著しく不適当と認められる場合においてのみ適用が認められる。以下ではこの優先支出法について説明し，その問題点について言及する。

優先支出法は，優先度の高い目的から順次当該目的の（単独提携による）身替り費用を割り振っていき，いったん当該事業費用より費用の未配分額（残額）が小さくなれば，その残額をすべて当該目的に割り振るものである。従ってそれより優先度の低い主体への割り振り額は0となる。

優先支出法による任意の目的 i の配分値 x_i をゲーム理論の記号体系を用いれば，次式のように表わされる。ただし，目的の集合を $N=\{1, 2, \ldots, n\}$ とし，また費用関数を $C(\cdot)$ とする。よって，任意の目的 i の身替り費用は $C(\{i\})$，（全提携の）共同事業費は $C(N)$ である。A_i は目的 i よりも優先度の高い目的の集合である。また，最も優先度の高い目的を i^* とする。

$$\begin{aligned} &x_i=\min\left\{C(\{i\}),\ C(N)-\sum_{j\in A_i} x_j\right\} \quad (\forall i\neq i^*) \\ &x_{i^*}=C(\{i^*\}),\ A_{i*}=\phi \qquad\qquad (\exists i=i^*) \end{aligned} \quad \cdots\cdots (1)$$

優先支出法を適用した具体的数値例を3目的 $N=\{1, 2, 3\}$ を例にとって **Table 1** に示す。

Table 1 は，所与の費用関数の下で，想定し得るすべての目的間の優先順位6ケースについて各目的に割り振られる費用を表している。ただし，$i>j$ は目的 i の優先度が目的 j よりも高いことを表している。この場合の優先度には，時間的な緊急度の他に，目的自身の性格に起因する優先度の違いも含めることができるであろう。従って，優先支出法の定式化では物理的優先性を考慮することが可能である。

Table 1. Examples of allocations by priority cost allocation method

優先順位	配分解
1 > 2 > 3	(80, 30, 0)
1 > 3 > 2	(80, 0, 30)
2 > 1 > 3	(50, 60, 0)
2 > 3 > 1	(20, 60, 30)
3 > 1 > 2	(80, 0, 30)
3 > 2 > 1	(20, 60, 30)

$C(1)=80$ $C(2)=60$
$C(3)=30$ $C(1,2)=100$
$C(1,3)=95$ $C(2,3)=80$
$C(N)=110$

Table 1 によると，費用関数によっては事業に参加しているにもかかわらず，優先度の低さから当該目的への割り振り費用が0になるケースが生じ得ることがわかる。このような状況が生じる必要条件が劣加法性であることは容易に導くことができる。しかし，共同事業実施の基本的な動機が劣加法性があるため，共同事業を実施する上ではこのようにある目的の分担費用が0となる状況の生起の可能性は大きいと言える。優先度が低いとはいえ，分担費用が0となる目的が生じることは，公平性

の観点からみて不適切であろう。また優先度の高い主体から順次その目的（単独提携）に関する身替り費用を割り振ることが必ずしも各目的間の優先性の違いを明確に反映し得ないといった問題点もある。すなわち，当該目的の身替り費用を分担費用とする目的の間での優先度は全て等しいと評価されていることになる。これらの点から，優先支出法の配分構造自体は目的間の物理的優先性，時間的優先性のいずれも考慮し得るにもかかわらず，実際面においてその直接的な適用は必ずしも有効ではない。またその改善を図るにしても，優先性についての理論的な検討が求められる。計画の段階で優先支出法の適用を検討したケースもあろうが，実際に適用した事例は現在のところほとんどない。そこで以下ではゲーム理論の観点から優先支出法を理論的に検討するとともに，それに代り得る他の費用割り振り法の提案を行う。

3．優先支出法のゲーム論的検討

3.1 既往の知見における優先支出法への拡張 ——加重シャープレイ値——

ゲーム理論において目的間の優先度を明示的に考慮した公正配分解は存在しないが，優先性を考慮した方法として拡張可能と考えられるシャープレイ値（Shapley value）[4] に着目する。シャープレイ値は全提携 N を形成する過程として，参加者が誰もいない状況から出発して，各目的が順次提携を結んでいき，提携規模を拡大して最終的に全提携 N に至る状況を想定する。目的が順次提携に参加し，その際に生じた当該目的の限界費用を N の成立過程における全パターン（3人ゲームの場合は6通り）について単純平均することによって得られる。すなわちシャープレイ値による任意の目的 i の配分解は次式で与えられる。ただし，$s=|S|$ であり，提携 S の規模（提携の人数）を表わす。

$$x_i=\sum_{i\in S,\, S\subset N}\frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}MC(S,\, S-\{i\}) \quad \cdots\cdots (2)$$

ただし，MC は限界費用（marginal cost）であり，次式で定義される。

$$MC(S\cup T,\, T)=C(S\cup T)-C(S),\ (S\cap T=\phi) \quad \cdots\cdots (3)$$

シャープレイ値では参加の順序を考慮しているものの，事業に参加する目的の数が n のとき，$n!$ 通りの過程の生起確率が全て等しいとしているため，参加の順序の差異は平滑化されることになる。従って，シャープレイ値の配分概念自体は参加順序によって優先度の差異を反映し得るが，得られた解には目的間の優先度の差異はなく均等と見なされる。しかし，実際には任意の参加の過程の生起確率が等しいという仮定が成立しない場合も多く存在する。このような実情に合うようにシャープレイ値におかれている仮定，すなわち任意の参加の過程に関する生起確率が等しいという仮定を緩和し，参加の過程に任意の生起確率を許容した方法として，加重シャープレイ値[5]が提案されている。加重シャープレイ値による任意の目的 i の分担費用 x_i は次式で表わされる。ただし，任意の提携 $S,\, T(S\cap T=\phi)$ に対して $p(S\cup T,\, T)$ は提携 T の参加（直）後に提携 S が参加する確率であり，$p(T)$ は提携 T の生起確率，$p(S\cup T|T)$ は提携 T の参加（直）後に提携 S が参加する条件付確率である。

$$x_i=\sum_{i\in S,\, S\subset N}p(S,\, S-\{i\})MC(S,\, S-\{i\}) \quad \cdots\cdots (4)$$

$$p(S,\, S-\{i\})=p(S|S-\{i\})p(S-\{i\}) \quad \cdots\cdots (5)$$

$$p(S)=\sum_{i\in S}p(S,\, S-\{i\}) \quad \cdots\cdots (6)$$

先述したように，優先度の差異は全提携 N の形成過程における参加の順序であると解釈可能であることから，加重シャープレイ値は目的間の優先度の差異を明示的に取り込んだ費用割り振り法に拡張可能で

あると考えられる。すなわちプレイヤーの集合を$N=\{1, 2, 3\}$とする3人ゲームを例にとれば，優先度が高い順に1, 2, 3であれば，それに相応した（最も単純な）参加の順序は1, 2, 3の順となる。これを踏まえ，本研究では優先性に関する状況を次に示す実行可能提携群（空集合を含む）によって表現できることに着目する。

$$F=\{\phi, \{1\}, \{1,2\}, N\} \quad \cdots (7)$$

上の実行可能提携群Fは以下の状況を想定していることになる。まず参加者が誰もいない，すなわちϕの状況から出発し，最初の参加者であるプレイヤー1が参加する。このときに形成されている提携は$\{1\}$である。次いで，二番目の参加者として，プレイヤー2が単独（提携）で参加する場合と，プレイヤー2と3がひとまとまりとして（結託して）参加することが考えられる。もし，プレイヤー2が単独で参加した場合に形成される提携は$\{1\}+\{2\}$で$\{1, 2\}$である。またもし，プレイヤー2, 3がひとまとまりとして参加する場合に形成される提携は，$N=\{\{1\}, \{2, 3\}\}$である。プレイヤー2が単独で参加した場合は，最後にプレイヤー3は参加し，全提携Nに至ることになる。このように，全提携に至る過程の中で形成される任意の提携の集合をここでは「実行可能提携構造」と呼ぶ。従って，参加の過程で登場する提携$\{2\}$や$\{2, 3\}$は事業に参加する提携の一単位にすぎず，これらの提携はここで定義している実行可能提携には含まれない。すなわち，全提携の形成過程においてこれらの提携自体が形成されることはあり得ない。全提携形成過程において形成される提携は，その提携単独での事業も想定可能であると考えられる。このような参加順序を優先性と解釈すると，プレイヤー1, 2, 3の順に優先度が高いことになる。従って，実行可能提携群は目的間の優先度の差異に関する定性的情報となり得る。以下では，実行可能提携群に含まれる空集合ϕについては，これを省略することにする。

加重シャープレイ値は，目的間の優先度の差異を実行可能提携群Fによって定性的に判断し，さらに過程の生起確率を優先度の差異に関する定量的情報として与えることにより，解を算定し得る。しかし，優先性に関する確率情報が得られない場合や，情報の精度が質的・量的に不十分である場合であっても，何らかの方法によって確率を決定する必要に迫られる。このような場合には，確率決定に際して分析者の恣意性が入り込み，得られた解の妥当性，客観性が失われることも考えられる。すなわち，生起確率の決定のために，目的の優先順位の他に「優先度にどれだけ差があるか」を定量的に評価することは，実際上の困難を伴うと予想される。また，加重シャープレイ値では，参加の単位として単独（提携）しか認めていないため，前述の例ではプレイヤー2, 3が提携$\{2, 3\}$として参加する可能性はないものとしている。しかし実際には任意の複数プレイヤーがひとまとまりとして事業に参加することも想定できよう。そこで本研究では，定量的情報に依存しない，すなわち確率を用いずに，実行可能提携群による定性的情報のみによって目的間の優先度の差異を考慮し，かつ提携の参加を許容した費用割り振り法の提案を行う。

3.2 仁の概念の拡張による優先支出法の提案 ——順序仁——

協力ゲームにおける代表的な公正配分解がコア[6]である。コアは全提携を結託する基本的動機を保証する配分（imputation）の集合であるが，この中からの唯一解として仁[7),8)]がある。仁は次式で定義される割り振り額ベクトル$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$に対する任意の提携の「不満」$e(X:S)$の最大値を最小化することによって得られる。

$$e(X:S)=\sum_{i\in S} x_i - C(S) \quad \cdots (8)$$

$$\max_{S\subset N} e(X:S) \rightarrow min \quad \cdots (9)$$

ここでは，不満の定義を補正，拡張することにより，優先性を考慮し得る費用割り振り法として順序仁（Priority-Ordering Nucleolus）を提案する[9]。以下では優先性を考慮するための仁の発展とその根拠につ

いて説明を行うとともに，順序仁を定式化する。

仁では任意のプレイヤーの事業参加における交渉力として，当該プレイヤーが参加し得る任意の提携を認めている。このことは暗にそのような提携が全て実行可能であることを前提としている。この前提は優先性が問題となる場合は必ずしも妥当ではない。従って，各提携の交渉力を提携に求めている仁において，例えば，実行可能提携群が $F=\{\{1\},\{1,2\},N\}$ である場合，実行可能提携ではない単独提携 $\{2\}$ の単独事業費用 $C(\{2\})$ をプレイヤー2にとっての有効な交渉力として認めることは合理的ではないと考えられる。(単独) 提携 $\{2\}$ は提携が順番に参加して全提携を形成する際に提携 $\{1\}$ の後にのみ参加可能であることを考えると，プレイヤー2の交渉力としてはむしろ，プレイヤー1の後に参加したことによって生じる付加的費用，すなわち限界費用 $MC(\{1,2\},\{1\})$ がふさわしいであろう。このような考えに立脚すると，提携 S の「不満」を求める際の基準になる費用は $C(S)$ ではなく，$MC(S\cup T,T)$，$(S\cap T=\phi)$ とすべきであろう。またこのとき，$T=\phi$ とすれば，$MC(S\cup T,T)=C(S)$ となり，仁の定義そのものになる。

一方で，仁の制約式から実行不可能な提携を外すことも考えられる。しかし，制約条件の減少に伴い，解が一意に定まらないことや，著しく不合理な解が生じる恐れさえ存在する。しかし順序仁では，極端に参加の順序が制限される場合を除いては，そのような問題は生じ得ない。その反面，解の算定の準拠値が $C(S)$ ではないため，想定する優先性の状況によっては，コアが必ずしも満たされないという問題が生じ得ることを断っておこう。

このような根拠に基づいて仁を拡張した順序仁は，以下のように定式化できる。

$$e'(X:S,T)=\sum_{i\in S}x_i-\{C(S\cup T)-C(T)\}=\sum_{i\in S}x_i-MC(S\cup T,T) \quad \cdots\cdots (10)$$

$$(S\cap T=\phi,\ T\subset F)\max_{S,T\subset N}e'(X:S,T)\rightarrow min \quad \cdots\cdots (11)$$

仁において任意の提携 S に関する制約条件式は一つのみであるが，順序仁においては提携 S よりも優先度が高い任意の実行可能提携 T の（直）後に参加するすべての過程を想定するため，複数の制約条件式が必要である。しかし，提携 S に関する最大の不満は提携 S の最小の限界費用に対して生じることから，上に示した制約条件を有効な制約条件のみで表すと下式のようである。上式は次式と等価である。

$$e'(X:S)=\sum_{i\in S}x_i-\min_{S,T\subset N}MC(S\cup T,T),\ (S\cap T=\phi)$$

$$\max_{S,T\subset N}e'(X:S)\rightarrow min \quad \cdots\cdots (12)$$

順序仁による解の算定の準拠値が限界費用であることから，費用割り振りの基本的概念は（加重）シャープレイ値と同じである。すなわち，順序仁，（加重）シャープレイ値はともに，当該プレイヤーに関する限界費用は本人が最低限負担すべきであるとの立場をとる。しかしこのことは，配分の準拠値である限界費用に目的間の優先性の差異が明確に反映されていることを必要条件とする。もしこの条件が満たされなければ，順序仁は目的間の優先度の差異を判断し得なくなり，適切な費用割り振り法として機能しなくなることを暗示している。すなわち，各提携の最小の限界費用に優先度の差異が反映されていることが前提となる。目的間の優先度の差異が小さくなると，優先度の比較的高い目的であっても，参加順序が後になる場合も考えられる。もしこのときの最小の限界費用が小さければ，比較的優先度が高く，参加の過程によっては大きな限界費用をとり得るプレイヤーであっても，配分の準拠値である最小の限界費用によってその優先度が過小評価（この例では，優先度が低く評価）されることになろう。よって，順序仁は目的間の優先度の差異が，（定性的情報から十分判断し得るような）比較的明瞭な場合に対して適用することが望ましいと考えられる。よって，本研究が想定しているような優先度の差異が著しい場合については，順序仁の適用は妥当であると考えられる。さらに，提携がひとまとまりとして参加する可能性が認められ

る場合には，このような参加形態を考慮していない加重シャープレイ値に比べ，適用の可能性は広いと言えよう。

順序仁は提携形成過程の生起確率の情報を用いない（必要としない）費用割り振り法である。このため，提携 T の後に任意の提携 S が参加する可能性はあるかないかのみが評価され，可能性の生起確率（重み）については評価し得ない。すなわち，任意の参加の過程に関する生起の程度（確率）を等価に評価していることになる。しかし，信頼性のある確率情報が得られている場合，その情報を積極的に取り込んだ費用割り振り法は，より多様な優先性を考慮し得る有効な方法となろう。従って本研究では次に，「定量的情報を用いた加重シャープレイ値」と，「提携の参加を認めた順序仁」の特徴を組み合わせた，ハイブリッド型の費用割り振り法として期待順序仁を提案する。

3.3 加重シャープレイ値と順序仁の特徴を組み合わせた優先支出法の提案 ――期待順序仁――

順序仁では，提携 T の後に任意の提携 S が参加する可能性については，それが「あるかないか」の情報に依存したが，期待順序仁では「可能性の程度」を定量的に組み込むことができる。この下での「不満」は次式に示すような不満の期待値として定義できる。

$$E[e'(X:S)]=\sum_{T\subset F} p(S\cup T,\ T)e'(X:S,\ T) \quad\cdots\cdots (13)$$

任意の提携 S の不満の期待値 $E[e'(X:S)]$ は，任意の提携 T の後に参加した場合の（限界費用を準拠値とした）不満に確率 $p(S\cup T,T)$ を乗じたものの和である。$e'(X:S,T)$ は，順序仁における不満の定義に等しい。この式で注意すべきことは，考慮する確率が条件付き確率 $p(S\cup T|T)$ ではなく，$p(S\cup T,T)$ であることである。よって，$\Sigma_{T\subset F}p(S\cup T,T)=1$ とはならない。$\Sigma_{T\subset F}p(S\cup T,T)$ は，参加の全過程に対して，提携 S がひとまとまりとして参加する確率を示している。期待順序仁では，任意の提携に対する最大不満の期待値を最小化することにより解を得ることから，その定式化は以下のようになる。

$$\max_{S\subset N} E[e'(X:S)]\rightarrow min \quad\cdots\cdots (14)$$

期待順序仁ではこのように，加重シャープレイ値と順序仁のそれぞれの欠点を補完し，利点を生かすことができる配分概念となっている。すなわち，加重シャープレイ値では考慮されていない提携のひとまとまりの参加を許容し，また確実な定量的情報が得られるならば，より詳細で多様な優先性に関する状況を反映することができよう。しかしこのことはあくまでも，加重シャープレイ値より，量的にも質的にも信頼性の高い情報が得られることを大前提としていることに注意が必要である。つまり，確率の与え方については加重シャープレイ値の適用以上に注意を要することになる。特に，複数の目的が提携として参加する過程の生起確率の決定には，それらの目的がひとまとまりとなる動機，可能性の検討が必要になる。この点については，期待順序仁の適用妥当性の検討として後述しよう。

3.4 優先性を考慮した費用割り振り法の比較検討

3. 1及び**3. 2**では優先性を考慮した費用割り振り法として加重シャープレイ値，順序仁，期待順序仁を説明した。三つの割り振り法は，優先性に関する状況を異なった形でモデル化しており，解もそれを反映している。順序仁においては，実行可能な提携群のみによって優先性を規定しているのに対し，加重シャープレイ値及び期待順序仁においては，実行可能な提携群に加え，全提携形成に至る過程の確率情報によっても優先性を規定している。以下では，三人ゲーム（$N=\{1,2,3\}$）を対象として，目的間で事業に対する優先度が異なる二つの場合について，これら三つの方法による解を示し，その特徴について考察する。その際比較のため，優先性を考慮しない一般的な方法として仁を取り上げる。

本研究が優先性に関して想定する状況を，実行可能な提携構造（集合族）によって表わす。想定する場

面として，以下のCase1, 2を設定する。

- Case 1 $F=\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, N\}$
- Case 2 $F=\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, N\}$

実行可能な提携構造によって，全提携形成までに取り得る全形成過程が規定される。**Fig. 1**，**Fig. 2**はCase1, 2において取り得る全提携の形成過程（以後これを単に「過程」と呼ぶ）を示している。$O_1, O_2, \ldots$は参加順序の各過程の識別番号である。Case1, 2に共通することは，プレイヤー3の優先度が最も低いことである。よって，優先性を考慮した割り振り法では，プレイヤー3への分担額が，仁よりも小さくなることが要請される。**Table 2**，**Table 3**において，確率の項は，この過程の生起確率を示しており，左から順に，過程$O_1, O_2, \ldots$の生起確率を表わす。仁と順序仁は確率に依存せずに解が算定できるので，確率の項を「－」で表わしている。また加重シャープレイ値は提携を参加の単位として認めていないことから，過程O_3, O_4, O_5のような過程は想定し得ないことを「－」で表わす。各過程の生起確率から，加重シャープレイ値及び期待順序仁の算定に必要な確率$p(\cup T, T)$を求めることができる。各提携の費用関数のデータは両Caseに共通とし，次のように与える。

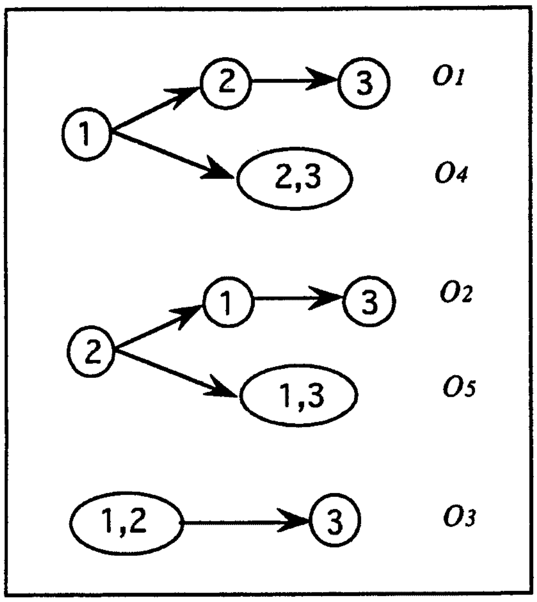

Fig. 1. Feasible ordering of formations of the grand coalition for Case 1

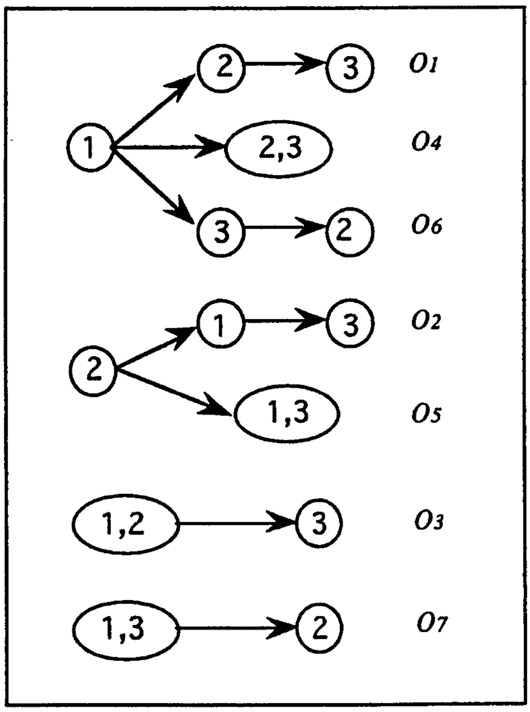

Fig. 2. Feasible ordering of formations of the grand coalition for Case 2

Table 2. Numerical examples of the weighted Shapley value, Priority-Ordering Nucleolus, and Expected Priority-Ordering Nucleolus (Case 1)

	x_1	x_2	x_3	probability
Nucleolus	52.5	37.5	20.0	—
W. Shapley	60.0	40.0	10.0	(0.5, 0.5, −, −, −)
P. O. Nucleolus	60.0	40.0	10.0	—
E. P. O. Nucleolus	60.0	40.0	10.0	(0.33, 0.33, 0.33, 0, 0)

Table 3. Numerical examples of the weighted Shapley value, PriorityOrdering Nucleolus, and Expected Priority-Ordering Nucleolus (Case 2)

	x_1	x_2	x_3	probability
Nucleolus	52.5	37.5	20.0	—
W. Shapley	66.7	31.7	11.7	(0.33, 0.33, −, −, −, 0.33)
P. O. Nucleolus	60.0	37.5	12.5	—
E. P. O. Nucleolus	69.1	30.1	10.5	(0.083, 0.125, 0.25, 0.083, 0.125, 0.083, 0.25)

$C(\{1\})=80$　$C(\{1, 2\})=100$　$C(N)=110$
$C(\{2\})=60$　$C(\{1, 3\})=95$
$C(\{3\})=30$　$C(\{2, 3\})=80$

Case 1　$F=\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, N\}$

実行可能な提携群Fから，プレイヤー３はプレイヤー1, 2の参加確認後でなければ事業に参加しないことが規定される。**Fig. 1**はプレイヤー３が，単独で参加するにせよ，提携単位で参加するにせよ，一番最後に参加することを示している。プレイヤー１と２については，どちらも一番最初に参加する可能性があることから，Fのみからは，優先度の差異を規定する情報は得られない。各過程の生起確率を知ることができれば，優先性についてより詳細な情報を得ることができる。以下に各割り振り法で解を算定するに当たって設定した優先性の状況について述べるとともに，**Table 2**に示した解の特性について比較検討する。

・加重シャープレイ値

Case 1において目的がすべて単独で参加するのは，プレイヤー1, 2, 3及びプレイヤー2, 1, 3の二つである。つまり，過程O_1またはO_2のどちらかが生起する。ここでは，これらの過程の生起確率を等確率（=0.5）とした。このため，プレイヤー1, 2の優先度に差異が認められず，この意味でプレイヤー1, 2は対称的なプレイヤーである。このときプレイヤー３は優先度が最も低く，常に一番最後に参加するために，分担費用は提携｛1, 2｝にプレイヤー３が加わったときの増分費用，すなわち

$$MC(N, \{1, 2\})=C(N)-C(\{1, 2\}) \qquad (15)$$

に等しく，仁による分担費用より小さくなっていることが表よりわかる。

・順序仁

順序仁では，Fのみによって目的間の優先性を規定しているので，**Fig. 1**の各過程については，生起する可能性をすべて等価に評価している。その結果，過程O_1, O_2及び過程O_4, O_5及の生起する確率をそれぞれ等しいものとみなし，加重シャープレイ値の例と同様，プレイヤー1, 2の優先度に差はないと判断し得る。このような状況の下で，順序仁は加重シャープレイ値に一致している。Case 1において，この二つの費用割り振り法の解は常に一致する。この点については，次節においても検討する。

・期待順序仁

期待順序仁は提携を単位として参加する場合も含めた過程を考慮するので，生起し得る過程は過程O_1, O_2, ... O_5の五つである。ただしここでは，過程O_4, O_5は生起しないものとした。プレイヤー1, 2の優先度を等しいものと想定しているため，加重シャープレイ値と同様，過程O_1, O_2の生起確率は等確率とする。このとき，期待順序仁は他の二つの割り振り法の解に一致している。その一つの要因は，優先性に関するプレイヤーの相対的関係が各方法における解の算定に際して同一であるからと考えられる。期待順序仁ではより多くの参加の過程を考慮し，「不満」の期待値を評価していることから，順序仁や加重シャープレイ値よりも詳細な優先性に関する状況を反映させることができると考えられる。しかしこの場合，プレイヤー1, 2が提携｛1, 2｝を結託して最初に参加したとしても，プレイヤー1, 2の優先度は等しいので，優先性に関する両プレイヤーの相対的な関係は変化しない。よって提携｛1, 2｝が最初に参加する過程O_3が生起する可能性が生じても，優先性に関する状況は加重シャープレイ値及び順序仁と同じであると思われる。

Case 2　$F=\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, N\}$

Case 1における実行可能な提携群に加え，提携｛1, 3｝もFに含まれる。従ってこのケースでは，プレイヤー３はプレイヤー１の参加確認後に参加することも想定している。つまりCase 1に比べプレイヤー３の優先度は相対的に上昇している。また提携｛1, 3｝が含まれたことで，プレイヤー1, 2の間の優先度にも

変化が起きることが予想される。以下では，Case 1と同様の考察を行う。

・加重シャープレイ値

実行可能な提携群によって規定されるのは，プレイヤー1, 2, 3，プレイヤー2, 1, 3，プレイヤー1, 3, 2という参加順序である。すなわち加重シャープレイ値においては過程 O_1, O_2, O_6 の三つの過程が生起する可能性がある。**Table 3** の例では過程 O_1, O_2, O_6 の生起確率を等確率としているが，これはプレイヤー1の優先度がプレイヤー2よりも高いことを意味する。なぜなら，プレイヤー1は過程 O_1, O_6 の二つの過程で一番最初に参加するのに対し，プレイヤー2が最初に参加するのは過程 O_2 に限られるためである。つまりCase 2においてこのような生起確率を与えることは，プレイヤー1の優先度が最も高い状況を示している。一方プレイヤー3の優先度が上昇したことは，F からも明らかである。**Table 2** と **Table 3** を比較すると，プレイヤー1, 3の分担費用は大きくなり，プレイヤー2のそれは小さくなっている。仁と比較すると，加重シャープレイ値によるプレイヤー2, 3の分担費用が仁のそれよりも小さくなっていることがわかる。これは，加重シャープレイ値がここに述べたような優先度の変化を的確に反映しているためと考えられる。

・順序仁

前述のように順序仁においては，生起し得るすべての過程について，可能性をすべて等価に評価する。Case 2においてプレイヤー1は，O_3, O_7 のように提携 {1, 2}, {1, 3} を結託して最初に参加し得るのに対し，プレイヤー2はプレイヤー3と提携 {2, 3} を結託して最初に参加し得ないために，プレイヤー1が最初に参加する過程の数は五つあり，プレイヤー2の三つよりも多い。このため，プレイヤー1の優先度は，プレイヤー2よりも高くなり，最も高い優先度を持つに至ると考えられる。一方プレイヤー3の優先度はCase 1に比べ上昇しているので，事業に対する優先度の順位は，加重シャープレイ値と同じでプレイヤー1, 2, 3の順であると考えられる。**Table 2** と **Table 3** を比べると，**Table 3** においてプレイヤー3の分担額が増加した分，プレイヤー2の分担額が減少し，プレイヤー1は変わっていない。この分担額の増減の傾向は，Case1, 2の間の優先度の順位の変化と対応していると思われる。順序仁を仁と比較すると，前者の方がプレイヤー3の配分値が小さく，またプレイヤー1の配分値は大となっているが，プレイヤー2のそれは等しいことが分かる。

・期待順序仁

期待順序仁は，過程 O_4, O_5, O_7 が生起する可能性も考慮している点で，加重シャープレイ値とは優先性を規定する状況が異なる。**Table 3** の例は最初に参加する可能性のある四つの実行可能提携 {1}, {2}, {1, 2}, {1, 3} が等確率（= 0.25）で参加するという想定であり，プレイヤー1が最初に参加する可能性はプレイヤー2よりも高い。これは，加重シャープレイ値の例においてプレイヤー1とプレイヤー2の間の優先度の差を規定したのと同様の確率値の設定条件を考えていることになる。期待順序仁のCase1, 2の間の変化が，他の割り振り法と同じ傾向を示しているのは，その現われと考えられる。しかし，提携を参加の単位として認めたことで，優先性に関するより詳細な状況を費用割り振りに反映させることができる。**Table 3** の例では最初に実行可能提携 {1}, {2}, {1, 2}, {1, 3} が参加した後も，生起し得るすべての参加パターンが等確率で生起すると仮定している。過程 O_4, O_5, O_7 の生起確率を変化させた場合，後述のように，解の変動が見られる。このことから期待順序仁は，プレイヤー間の協調の可能性を，これらのプレイヤーが提携を結託し参加する可能性の大きさに置き換えることにより，プレイヤー間の協調関係の有無を費用割り振りに反映させることができることを示している。

3.5 優先性を考慮した費用割り振り法の相互関連性に関する考察

加重シャープレイ値，順序仁，期待順序仁は，優先性を異なった基準で評価したうえで費用を割り振っている。しかし，これらの方法はいずれもプレイヤーまたは提携が順番に参加して全提携を形成することを想定し，その参加順序によって優先性を反映させる点では共通している。また費用割り振りに当たって

も，各プレイヤー及び提携は各々の参加の際に生じる限界費用を配分の準拠値としている。よってある特殊な状況のもとでは，これらの異なる費用割り振り法による解の間に一致性が生じ得ると考えられる。このことは，前節における数値例によって確認することができる。以下では，加重シャープレイ値と順序仁，期待順序仁が一致する状況について説明し，その理由について考察する

• 加重シャープレイ値と順序仁の一致性

実行可能提携構造 $F=\{\{1\},\{2\},\{1,2\},N\}$ の下で，順序仁は過程 O_1, O_2 が等確率で生起する場合の加重シャープレイ値と常に一致することが解析的に証明できる。その証明は付録に譲る。従って **Table 2** の一致性の例は偶然によるものではない。この一致性が生じる背景として，優先性に関する以下の状況が根拠になると考えられる。この F の下で加重シャープレイ値が想定している二つの過程 O_1, O_2 が等確率（=0.5）で生起するという状況は，プレイヤー1, 2はともに，最初または二番目に等確率で参加するということを意味している。すなわち，この意味でプレイヤー1とプレイヤー2は対称的プレイヤーであり，それらの間の優先度は等しい。またプレイヤー3は常に一番最後に参加することになり，プレイヤー3の優先度は最も低い。順序仁においても，過程 O_1, O_2 及び過程 O_4, O_5 の生起可能性は等しいと見なすので，優先性に関する状況は加重シャープレイ値の想定しているそれと変わらない。換言すれば，F による定性的情報が，定量的情報を与えたのと同じ状況を再現していることになる。このような加重シャープレイ値と順序仁による解の算定に際して，同一の優先性に関する状況の下では，それらの解が一致すると考えられる。

• 加重シャープレイ値と期待順序仁の一致性

期待順序仁は加重シャープレイ値が想定している，各プレイヤーの単独による事業参加の過程に加え，複数のプレイヤーが提携としてまとまって事業参加することを認め得る。しかし，期待順序仁に関して複数のプレイヤーが提携として参加する過程が存在せず，またそれ以外の過程について加重シャープレイ値と期待順序仁に与えられる確率が等しい場合，これらの間で解の一致性が生じる。例えば Case 1 において O_3, O_4, O_5 の過程の生起確率が0であり，かつ加重シャープレイ値と期待順序仁に与えられる O_1, O_2 の生起確率が等しいと，加重シャープレイ値と期待順序仁は常に一致する。この解析的証明についても付録に譲る。

各プレイヤーが単独で順次参加する過程のみが生起し得る場合，加重シャープレイ値においても期待順序仁においても想定する参加順序のパターンは同一である。このとき，期待順序仁に与えられる情報は，加重シャープレイ値と全く同一のものとなる。このように費用割り振りの考え方が共通し，また想定するプレイヤー間の優先度が全く等しいという二つの条件が重なり，一致性が生じると考えられる。これより，結果的に期待順序仁は加重シャープレイ値の拡張であると言える。すなわち，複数のプレイヤーがひとまとまりとなる可能性が認められない場合には，必ずしも期待順序仁を用いる必要はなく，加重シャープレイ値の適用で十分であると考えられる。

3.6 期待順序仁の適用妥当性

期待順序仁は割り振り方法の定式化のアプローチそのものは異なるものの，結果的に加重シャープレイ値の拡張であると考えられる。提携を参加の単位として認めたことにより，期待順序仁ではより細かな目的間の優先度の差異を考慮した割り振りが可能であろう。**4.2** で言及したように，このことはより多くの信頼性の高い確率情報を必要とすることを意味する。よって期待順序仁の適用に関しては，確率値の設定には注意を要する。

Table 4 は，実行可能提携が $F=\{\{1\},\{2\},\{1,2\},N\}$ の場合，F から想定し得る五つの過程全てに生

Table 4. Irrational allocation for the case where $F=\{\{1\},\{2\},\{1,2\},N\}$

	x_1	x_2	x_3	probability
E. P. O. Nucleolus	64.00	44.00	2.00	(0.17, 0.17, 0.33, 0.17, 0.17)

起する可能性がある場合の期待順序仁の値を示したものである。各目的の分担費用を比較すると，プレイヤー3の分担費用が著しく小さく，またプレイヤー1，2のそれは逆に著しく大きいことがわかる。この結果は，プレイヤー1，2の配分値の和が108であり，提携{1,2}がプレイヤー3を排除して事業を行った場合の費用100を超えているため，このような解は不合理であると考えられる。もしこのような費用割り振りが行われたならば，プレイヤー1，2はプレイヤー3を参加させずに二目的のみで事業を行ったほうが得であると考えるであろう。このような解が得られた理由は，プレイヤー3の優先度が目的1，2に比べて非常に小さく評価されているためと考えられる。**Table 2** と **Table 4** を比較すると，それらの違いは，過程 O_4，O_5 の生起を認めるか否かである。過程 O_4，O_5 はそれぞれプレイヤー1，2が最も優先度の低いプレイヤー3との提携を結んで参加する過程である。これらの過程の生起が認められるため，プレイヤー3の優先度がプレイヤー1，2に比べて非常に小さいと評価されていると考えられる。しかし，このような解を各プレイヤーが容認するであろうか。このことは，各プレイヤーの判断に依存するであろう。しかし，プレイヤーが少なくても合理的であれば，他の確率に関する代替案を示すことにより，この解を算定する際に特定した確率情報を採用することは受け入れられないと判断するであろう。

従って以下では，事業においてイニシアチブをとる優先度の高いプレイヤーが合理的であるとの仮定の下で，各プレイヤーが容認し得る確率の与え方について述べる。これは，各（合理的な）プレイヤーが納得し得る解を導出するために，適切な確率を決定する上での一つの基準を検討することにもなる。よって，各プレイヤーにとって容認し得る解か否かの判定は，プレイヤー1，2に関する集団合理性（$x_1+x_2 \leq C(\{1,2\})$）をもって行う。

まずCase 1と同様の実行可能提携群を想定して考察しよう。プレイヤー1，2の期待順序仁の配分値の和が提携{1,2}の費用を超えないためには，過程 O_4, O_5 が生起しないことが必要十分である。一方，過程 O_3 すなわち目的1，2が提携を組んで最初に参加する過程の生起確率は，プレイヤー間の優先度の違いを反映せず，割り振りへの影響はない。以上より，優先度の差異が著しく認められる場合，優先度の高い任意のプレイヤーと低いプレイヤーが共に（参加順序が）後で参加するような提携を認めることは優先度の高いプレイヤーにとって必ずしも合理的ではないと考えられる。一方，優先度の高いプレイヤーが提携を組んで最初に参加する過程は，プレイヤー3との間の相対的優先度の差異を小さくする効果はなく，またプレイヤー間の優先度の違いを変化させる要因にはなり得ない。従って，優先度の高いプレイヤー同士の提携による参加を認めることが，必ずしも彼らにとって（分担費用を小さくするという意味では）合理的であるとは言えない。

従って，過程 O_4, O_5 のように集団合理性の観点から生起し得る根拠が不十分とされる過程については，その与え方により注意を要することになろう。

次に，Case 2で想定した実行可能な提携群について考察する。このときは，過程 O_4, O_5 の生起が必ずしもプレイヤー1，2の期待順序仁の分担費用の和が提携{1,2}の費用を上回る決定的な要因にはならない。これは，O_6 の生起が認められるため相対的にプレイヤー3の優先度が高まったためであると考えられる。しかし過程 O_4, O_5 の生起確率が大きい場合には，プレイヤー3の優先度の低さがクローズアップされ，プレイヤー3の分担費用は小さくなると考えられる。このことについて以下のような補足的検討を行った。**Fig. 3** は生起確率に関する変数 p_4，p_5 の変化に対するプレイヤー3の分担額 x_3 の変化を示している。p_4，p_5 はそれぞれ過程 O_4，O_5 の生起確率である。各過程 O_1～O_7 に対し，以下の確率を与える。

O_1 .. $0.125(1-p_4)$
O_2 .. $0.25(1-p_5)$
O_3 .. 0.25
O_4 .. $0.25\,p_4$
O_5 .. $0.25\,p_5$

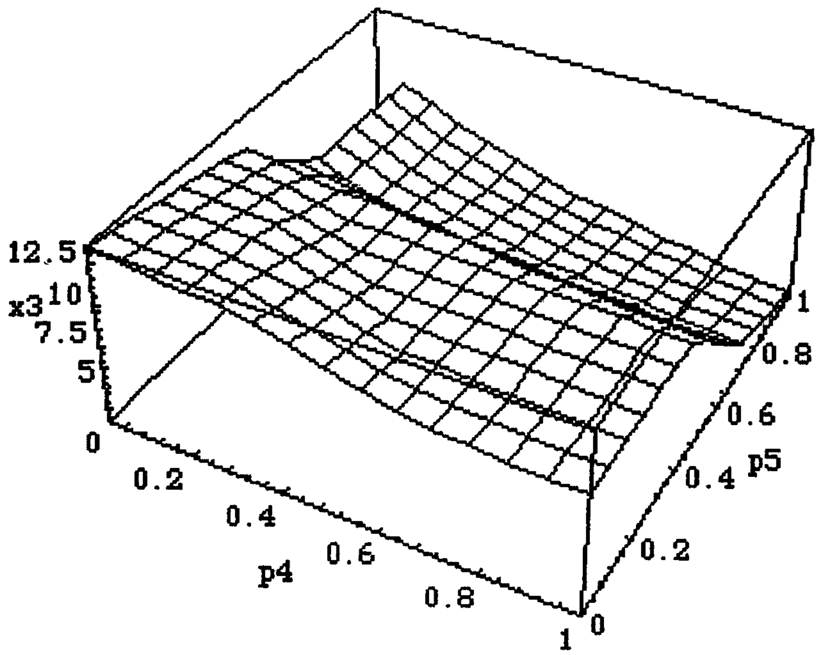

Fig. 3. Graph showing the variation of Expected Priority-Ordering Nucleolus X_3 as a function of probability variables p_4 and p_5

O_6 .. $0.125(1-p_4)$

O_7 .. 0.25 ……………………………………………………………………… (16)

また費用関数は，4. 4 の例と同一で，次のように与える。

$C(\{1\})=80$　$C(\{1, 2\})=100$　$C(N)=110$

$C(\{2\})=60$　$C(\{1, 3\})=95$

$C(\{3\})=30$　$C(\{2, 3\})=80$

費用関数より，x_3 が 10 を下回ると，x_1+x_2 が $C(1, 2)$ を超過し，不合理な解となる。**Fig. 3** より，過程 O_4, O_5 の生起確率が高いほどプレイヤー 3 の配分値が小さくなる傾向にあることが窺える。従って，Case 2 で想定している状況においても，過程 O_4, O_5 のような，優先度の高いプレイヤーと低いプレイヤーの提携による参加を認めることは，合理性を損なう要因となり得ることがわかる。

一方，過程 O_3 及び O_7 の生起確率に関してはどうであろうか。これらについても上と同様の検討を行う。**Fig. 4** は生起確率に関する変数 p_3, p_7 の変化に対するプレイヤー 3 の分担額 x_3 の変化を示している。p_3, p_7 はそれぞれ過程 O_3, O_7 の生起確率である。各過程 O_1〜O_7 に対し，以下の確率を与える。

O_1 .. $0.25-0.25(p_3+p_7)/2$

O_2 .. 0.125

O_3 .. $0.375\,p_3$

O_4 .. $0.25-0.25(p_3+p_7)/2$

O_5 .. 0.125

O_6 .. $0.25-0.25(p_3+p_7)/2$

O_7 .. $0.375\,p_7$ ……………………………………………………………… (17)

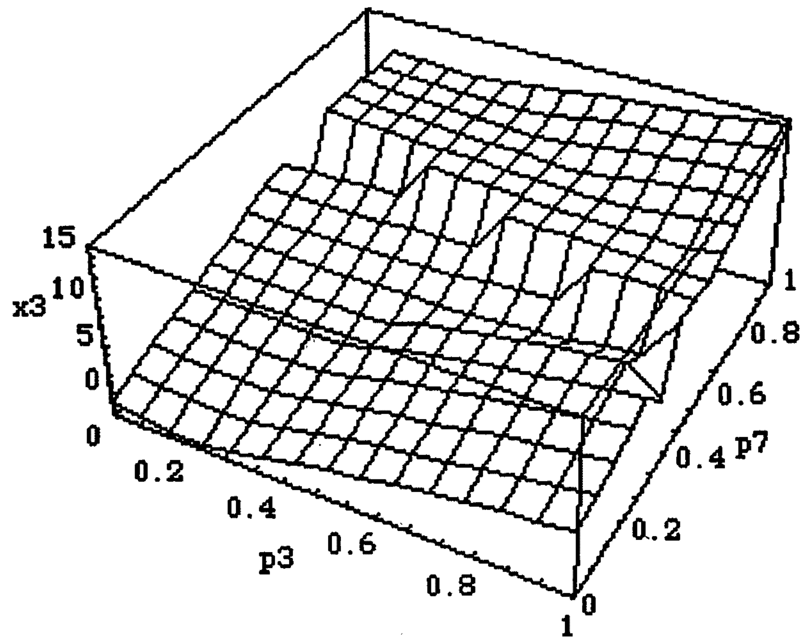

Fig. 4.　Graph showing the variation of Expected Priority-Ordering Nucleolus X_3 as a function of probability variables p_3 and p_7

この場合ではCase 1と異なり，比較的優先度の高いプレイヤーである過程O_3の生起確率の費用割り振りに対する影響が認められる。しかし，その影響力は小さい。むしろ，過程O_7に関する確率が割り振りにおいて決定的に大きな影響力を持つ。この過程では，優先度の高いプレイヤーが優先度の低いプレイヤーと共に提携を結託して早い段階で参加している。従って，このような提携の生起を高い確率で認めることは，優先度の高いプレイヤーにとって合理的であると考えられるが，逆に低い場合は，合理性を損なう可能性が高い。

複数のプレイヤーが提携を結託する可能性は，これらのプレイヤーが交渉において何らかの形で協調する可能性を意味しているといえる。従って以上に述べたような結果の現実的妥当性は，プレイヤー間の協調が交渉において意味を持つか否かに依存していると言える。

4. お わ り に

以上，本論文では，目的間の優先性の差異に着目した費用割り振り法について検討を行った。その際，既に開発されている加重シャープレイ値が優先性を考慮した簡便な配分解となり得ることを指摘した。さらに，仁の拡張型としての順序仁及び，期待順序仁を提案し，三者の配分解の得失について比較考察した。また，理論的には，期待順序仁は加重シャープレイ値の拡張型とみなせることも明らかにした。

今後は，実用面で，特に提携形成の確率値をどのように特定するのかについて実証的な検討が必要であろう。

参考文献

1） Federal Inter-Agency River-Basin Committee：Proposed Practices for Economic Analysis of River Basin Projects, Technical Report, Washington D. C., 1950.

2） 岡田憲夫・谷本圭志：多目的ダム事業の費用配分法に関するゲーム論的考察，応用地域科学会発表論文，1993.

3） 日本の多目的ダム事業　付表編，建設省河川局監修，ダム技術センター発行.

4） L. S. Shapley：Cores of Convex Games, Int. J. Game Theory, Vol. I, pp. 11－26, 1971.

5） Loehman, E., Orlnado, J., Tschirhart, J. and Whinston, A.：Cost Allocation for a Regional Wastewater Treatment System. Water Resour. Res., Vol. 15, pp. 193－202, 1979.

6） R. J. Aumann,（丸山　徹・立石　寛 訳）：ゲーム理論の基礎，勁草書房，p. 43, 1991.

7） D Schmeidler：The Nucleolus of a Characteristic Function Game, SIAM, Journal of Applied Mathematics 17, pp. 1163－1170, 1969.

8） B. Peleg Maschler, M. and L. S. Shapley：Geometric Properties of the Kernel, Nucleolus and Related Solution Concepts, Mathematics of Operations Research.4, pp. 303－338, 1979.

9） 岡田憲夫・谷本圭志：水資源開発事業における優先支出法のゲーム論的考察，応用地域科学会発表論文，1994.

付録 A　加重シャープレイ値と順序仁の一致性

実行可能な提携構造 $F=\{\{1\},\{2\},\{1,2\},N\}$ のもとで順序仁を定式化すると以下のようである。ただし ε は最大不満を表す。

$$x_1-\{C(1,2)-C(2)\}\leq\varepsilon \quad \cdots (18)$$
$$x_2-\{C(1,2)-C(1)\}\leq\varepsilon \quad \cdots (19)$$
$$x_3-\{C(N)-C(1,2)\}\leq\varepsilon \quad \cdots (20)$$
$$x_1+x_2-C(1,2)\leq\varepsilon \quad \cdots (21)$$
$$x_2+x_3-\{C(N)-C(1)\}\leq\varepsilon \quad \cdots (22)$$
$$x_1+x_3-\{C(N)-C(2)\}\leq\varepsilon \quad \cdots (23)$$
$$x_1+x_2+x_3=C(N) \quad \cdots (24)$$
$$\varepsilon \to min$$

これらを x_1, x_2, x_3 だけの制約条件式に書き直すと，

$$C(1)-\varepsilon\leq x_1\leq\{C(1,2)-C(2)\}+\varepsilon \quad \cdots (25)$$
$$C(2)-\varepsilon\leq x_2\leq\}C(1,2)-C(1)\}+\varepsilon \quad \cdots (26)$$
$$\{C(N)-C(1,2)\}-\varepsilon\leq x_3\leq\{C(N)-C(1,2)\}+\varepsilon \quad \cdots (27)$$
$$x_1+x_2+x_3=C(N) \quad \cdots (28)$$
$$\varepsilon \to min$$

である。

ε を無限大から最小化していくと，(25), (26), (27)式における x_1, x_2, x_3 のいずれかが，ある ε において収束すると考えられる。よって，ε の最小値の候補としては，x_1 と x_2 が収束する場合の ε_1, x_3 が収束する場合の ε_2 が考えられる。

$$\varepsilon_1=\frac{C(1)+C(2)-C(1,2)}{2} \quad (29)$$

$$\varepsilon_2=0 \quad (30)$$

また，ε の最小化において，(25),(26),(27)式における x_1, x_2, x_3 のいずれかが収束する以前に x_1, x_2, x_3 が (28)式を満たさず，実行不可能になる場合がある。このときは，

$$x_1=\{C(1,2)-C(2)\}+\varepsilon \quad (31)$$

$$x_2=\{C(1,2)-C(1)\}+\varepsilon \quad (32)$$

$$x_3=\{C(N)-C(1,2)\}+\varepsilon \quad (33)$$

が成立する場合と

$$x_1=C(1)-\varepsilon \quad (34)$$

$$x_2=C(2)-\varepsilon \quad (35)$$

$$x_3=\{C(N)-C(1,2)\}-\varepsilon \quad (36)$$

が成立する場合があるが，いずれも（最小化された）最大不満は

$$\varepsilon_3=\frac{C(1)+C(2)-C(1,2)}{3} \quad (37)$$

となる。

制約条件式をすべて満たす必要があることから，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ で最大となっている ε が最小化された最大不満である。費用関数にかかわらず常に，

$$\max_i \varepsilon_i=\varepsilon_1=\frac{C(1)+C(2)-C(1,2)}{2} \quad (38)$$

または

$$\max_i \varepsilon_i=\varepsilon_2=0 \quad (39)$$

である。ε_1 と ε_2 が成立するいずれの場合についても，解は次のように決まる。

$$x_1=\frac{C(1,2)+C(1)-C(2)}{2} \quad (40)$$

$$x_2=\frac{C(1,2)-C(1)+C(2)}{2} \quad (41)$$

$$x_3=C(N)-C(1,2) \quad (42)$$

この値は，主体1と主体2の優先度が等しい場合，すなわち主体1，2が最初に参加する過程が等確率で生起する場合の加重シャープレイ値に一致する。

付録B　加重シャープレイ値と期待順序仁の一致性

すべての主体が提携を結託せずに単独で参加する場合を考える。この場合，配分 X に対する「不満」は任意の単独提携 $\{i\}$ に関するもののみとなり，「不満」は次のように変形できる。

$$E[e'(X:\{i\})]=\sum_{T\subset F} p(\{i\}\cup T,\ T)e'(X:\{i\},\ T)$$

$$=\sum_{T\subset F} p(\{i\}\cup T,\ T)(x_i-MC(\{i\}\cup T,\ T))$$

$$=\sum_{T\subset F} p(\{i\}\cup T,\ T)MC(\{i\}\cup T,\ T)\ (43)$$

式中の$\sum_{T\subset F}p(\{i\}\cup T,\ T)MC(\{i\}\cup T,\ T)$ は主体 i の加重シャープレイ値である。よって，このときの期待順序仁は，任意の主体 i に関する次のような線形計画問題の解となる。ただし ε は最大不満である。

$$x_i-\sum_{T\subset F} p(\{i\}\cup T,\ T) \qquad MC(\{i\}\cup T,\ T)\leq\varepsilon \quad \cdots\cdots (44)$$

$$\varepsilon\rightarrow min$$

制約式を書き換えると

$$x_i\leq\sum_{T\subset F} p(\{i\}\cup T,\ T)MC(\{i\}\cup T,\ T)+\varepsilon \quad \cdots\cdots (45)$$

ε を無限大から小さくしていき，任意の i についての (45)式の右辺の和が $C(N)$ になったとき，ε はそれ以上小さくできない。なぜなら，ε をそれ以上小さくしたならば，任意の i についての x_i の和が $C(N)$ を下回るからである。このとき

$$\sum_i\sum_{T\subset F} p(\{i\}\cup T,\ T)MC(\{i\}\cup T,\ T)+n\varepsilon=C(N) \quad \cdots\cdots (46)$$

上式の左辺第一項は，任意の主体についての加重シャープレイ値による配分値の和である。すなわち，

$$\sum_i\sum_{T\subset F} p(\{i\}\cup T,\ T)MC(\{i\}\cup T,\ T)=C(N) \quad \cdots\cdots (47)$$

である。よって $\varepsilon=0$ となり，配分解は下式で与えられる。

$$x_i=\sum_{T\subset F} p(\{i\}\cup T,\ T)MC(\{i\}\cup T,\ T) \cdots\cdots (48)$$

従って加重シャープレイ値に一致する。