京都大学防災研究所年報　第37号 B-2　平6. 4
Annuals, Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., No. 37 B-2, 1994

都市排水再利用の水質改善効果に関するゲーム論的研究

岡田　憲夫・渡辺　晴彦

GAME-THEORETIC ANALYSIS OF THE EFFECTS OF INTEGRATED ENVIRONMENTAL REGULATION WITH WASTEWATER REUSE

By *Norio* OKADA and *Haruhiko* WATANABE

Synopsis

Reuse of wastewater contributes to the decrease in both amounts of water withdrawal from a body of water and wastewater discharges back to it. If integrated environmental management with reuse of wastewater is effectively introduced, the purpose of environmental conservation is also achieved. This paper deals with a cost allocation problem such that the environmental agency concerned intends to achieve a higher standard of water quality and drives water users and sewage manager to collaborate by making wastewater reuse and/or its improving treatment level. The problem is formulated as a multi-agent management problem by use of cooperative three person game theory. Neccessary conditions to be held for the wastewater reuse system are discussed through mathematical model analyses.

1. はじめに

都市域に係る河川の水質改善を図る方法には，大別して(1)河川で直接浄化を行う，(2)都市からの汚濁流入を減らす，(3)河川流量を増加し希釈効果を向上させる，という３種類がある。下水処理水などの排水の再利用は(2)(3)に該当するものであり，河川水質の改善に寄与することができる。国土庁水資源白書[1]によれば，平成２年における雑用水としての再利用実績は，生活用水全体のわずか0.6％にすぎない。再利用のコストが水道料金，下水道料金と比較して高いことがその原因の一つと言われている。これに対し，国の推進策として，水資源の有効利用と公害防止の観点から税制面と融資面での優遇措置が講じられており，間接的ながらも費用の一部を公的セクターが負担しているといえる。

しかしながら，負担の範囲については，水資源の有効利用や公害防止に該当する他の施策と同じ基準が適用されており，循環利用による効果を定量的に評価したものとはなっていない。Watanabe and Okada[2]は，再利用の対象となる低水質の水需要が増加した場合や下水道の放流水質基準が将来的に向上した場合には，再利用システムの導入がコスト的に見合うことを明らかにしている。今後，都市の再開発などに合わせ，再利用の促進が図られることが推測される現状において，公的セクターがどの程度費用を負担すべきかを定量的に検討する方法論が求められている。

本研究は，**Fig. 1** に示すような再開発地区のみでの循環利用を検討する仮想的な都市において，環境管理者が現行の河川の水質環境基準をさらに向上させることを計画している状況を想定する。その手段として下水の循環利用と高度処理を考える場合に，どのような手段が効果を持ち，その費用はどのように負担すべきかをゲーム理論を援用して考察するのが本研究の目的である。本稿では，まず河川の水質改善ゲームを協

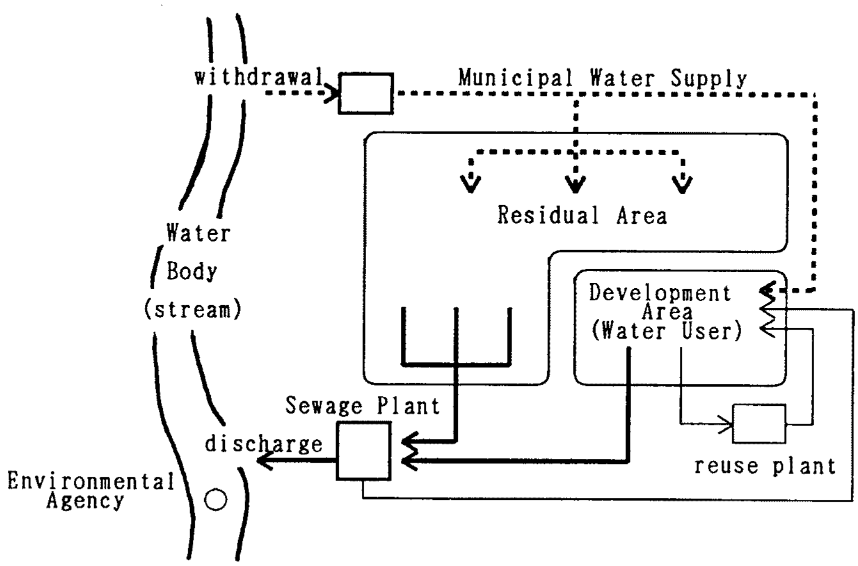

Fig. 1　Hypothetical study area

力3人ゲームとして定義し，次に費用関数をモデル化した後，提携費用の大小関係について考察する。

2.　河川水質改善ゲーム

2.1　プレイヤーと可能な提携

仮想的な都市における水利用に係わる以下の4人のプレイヤーを想定する。

●環境管理者 E

河川水質基準のランクを現行のそれより上げることを目的として行動する。ただし，その手段は単独では実施できず，他のプレイヤーと提携した手段に限定され，その費用の一部を負担する。

●再開発地区の水利用者 U

地区内の需要を充足する費用を最小とするよう行動する。手段としては，需要の一部（低水質でさしつかえないもの）を排水の循環利用でまかなうか，全量水道水を使用するかである。循環化形態としては，地区単独のオンサイト型の再生施設を持つか，下水道からオフサイト型の広域循環を利用するかの2通りがある。

●下水道管理者 S

河川の水質基準を満たすように都市内の排水を処理することを目的とする。手段としては，2次処理を踏襲するか，高度処理の導入し，場合によっては再開発地区への循環利用を行う。

●水道管理者 W

循環利用が行われた場合に水道供給水量の減少が生じ，施設費や料金収入の減少として，他のプレイヤーの提携の影響を受ける。しかし，ゲームの展開に直接的な主導権はなく，現状からの費用の変化は水利用者あるいは下水道管理者に費用負担してもらう。

この他に再開発地区以外の水利用者が存在し得るが，本研究では主体的な行動はとらないものと仮定する。水道管理者Wが，他の3人のプレイヤーの行動に追随し，ゲームの直接的なプレイヤーではないと仮定すれば，「プレイヤーの組み合わせ」として可能な「提携」は7通りある。提携 (S), (U), (US) は現行水

質基準下での選択肢であり，新しい水質基準の元では提携（E），（SE），（UE），（USE）が選択肢となる。

それぞれの提携が，水質改善ゲームにおいて主体的な行動をとる場合の解釈は以下のようになる。

●単独提携（S）が主体となる場合

下水道管理者 S は，現在の放流基準を満たすように処理する（下水道管理者 S は環境管理者 E が求めるさらに高いランクの基準に拘束されない)。これは，循環利用等を考慮しない現在の水利用形態を踏襲することを意味する。

●単独提携（U）が主体となる場合

水利用者 U は，再開発地区内でのオンサイト型循環利用を行う。水道管理者，下水道管理者に対しては需要減となり，取水量が減少するために，河川水質は多少改善される。

●部分提携（US）が主体となる場合

水利用者と下水道管理者によるオフサイト型の循環利用を行う。水道管理者には需要減となる。河川水質が改善される。

●単独提携（E）が主体となる場合

新たな河川水質基準を達成するため環境管理者は単独で行動する。直接河川浄化するなどの行動が考えられるが，本研究では他に比べ多大な費用がかかるものとする。

●部分提携（UE）が主体となる場合

新たな河川水質基準を満たすように，オンサイト型の循環利用を行う。水道管理者には需要減となる。下水道の放流水質は現行のままである。

●部分提携（SE）が主体となる場合

新たな河川水質基準を満たすように，高度処理の導入を行い，放流水質を改善する。水道管理者，水利用者は，現行のままである。

●全体提携（USE）が主体となる場合

新たな河川水質基準を満たすよう，オフサイト型の循環利用と高度処理の導入を行う。水道管理者は需要減となる。

しかしながら，それぞれの提携は完全に独立して行動できるわけではない。たとえば，提携（SE）が主体となっている場合でも，（U）が補集合として受け身の行動を余儀なくされる。場合によっては，その方が提携（U）として積極的に行動するよりもコストが低くなることも想定しうる。すなわち，上述したケースは「主体的に行動する提携の組み合わせ」とそのときの水利用の形態を表している。一方，各提携の選好においては，主体的にも受け身的にも行動しうるものとし，提携に関わるみかけ上の形式的な費用（施設ごとに生ずる関連費用）が最小になるような水利用形態に対応するものが選ばれると考える。

本研究では，同一の提携の組み合わせに対して，提携に関わる（形式的な）費用が最小になるような水利用システムの形態を選択する問題を，提携内容の選択問題という。一方，そのような提携内容のすべての可能性が特定された上で，各プレイヤー（水利用主体）が実質的に費用をどのように負担すべきかという問題をとりあげ，これを費用配分問題という。

それぞれの提携に対して，どのような水利用システムの形態をとるかで，W，U，S は直接的な影響を受け施設費などが変わる。いま，プレイヤー集合 I に対応する形式的にかかる費用は，提携 T を主体とした提携構造のとき $C_I(T)$ になるとしよう。

提携内容の選択問題は，２つの視点から検討される。すなわち，主体的に行動する場合の水利用システムの規模決定と，主体的あるいは受け身的のいずれの行動をとるかという選択である。水利用者 U を例にとると，彼が主体的に行動し単独提携（U）としてオンサイト循環システムを形成する場合は，その循環量の規模を決定する必要がある。これを $C_U(U)$ とすると，それは，循環量 x に関する費用最小化問題を解くことになる。一方，受け身で行動する場合については，単独提携（S）の補集合として関連費用 $C_U(S)$ を受け持つことになり，最終的に $C_U(U)$ か $C_U(S)$ のいずれか経済的な方を選択することになる。

このようにして，提携Tが負担すべき費用$v(T)$が次のように定義される。ここで，＊のついたものは，規模決定に関する最適化問題となっている。

$$v(S)=\min\{C_S(S),\ C_S(U),\ C_S(\mathrm{UE})\} \quad \cdots\cdots (1)$$

$$v(U)=\min\{C_U^*(U),\ C_U(S)\} \quad \cdots\cdots (2)$$

$$v(E)=\infty \quad \cdots\cdots (3)$$

$$v(US)=C_{US}^*(US) \quad \cdots\cdots (4)$$

$$v(SE)=C_S^*(SE) \quad \cdots\cdots (5)$$

$$v(UE)=C_U^*(UE) \quad \cdots\cdots (6)$$

$$v(USE)=C_{US}^*(USE) \quad \cdots\cdots (7)$$

次に，費用配分問題は各提携Tが負担すべき費用$v(T)$が求められた後，全体提携(USE)の費用をどのように配分すべきかを検討するものである。これは，プレイヤー集合$N=\{U, S, E\}$と特性関数vによる協力3人ゲーム$[N, v]$を定義することにより，ゲーム理論を用いて，任意の提携構造における費用配分を考察することかできる。

2.2 特性関数の定義

まず，変数と関数を**Table 1**のように定義する。このとき，各提携Tによるプレイヤー集合Iの直接費用$C_I(T)$は**Table 2**のように定義される。すなわち，それぞれの提携構造のうち主たる提携ではその関連する範囲の費用最小化を図るものとする。これをもとに式(1)～式(7)を整理すると次のようになる。式中のx, yは最適化された値を示す。

$$v(S)=\min\left\{\begin{array}{c} f_s(d+d_r,\hat{q}^S,q_1)-p_s(d) \\ f_s(d-x_*^U+d_r,\hat{q}^U,q_1)-p_s(d-x_*^U) \\ f_s(d-x_*^{UE}+d_r,\hat{q}^{UE},q_1)-p_s(d-x_*^{UE}) \end{array}\right\}-p_s(d_r) \quad \cdots\cdots (8)$$

$$v(U)=\min\left\{\begin{array}{c} p_w(d)+p_s(d) \\ p_w(d-x_*^U)+p_s(d-x_*^U)+f_s(x_*^U,\hat{q}^S,q_L)+q_1(x_*^U) \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (9)$$

$$v(E)=\infty \quad \cdots\cdots (10)$$

$$\begin{aligned} v(US)=&\,p_w(d-x_*^{US})+g_1(x_*^{US})+g_2(x_*^{US})+f_s(d-x_*^{US}+d_r,\hat{q}^{US},q_1) \\ &+f_s(x_*^{US},\hat{q}^{US},q_L)-p_s(d_r) \quad \cdots\cdots (11) \end{aligned}$$

$$v(SE)=f_s(d+d_r,\hat{q}^{SE},y_*^{SE})-p_s(d)-p_s(d_r) \quad \cdots\cdots (12)$$

$$v(UE)=p_w(d-x_*^{UE})+p_s(d-x_*^{UE})+f_s(x_*^{UE},\hat{q}^{UE},q_L)+q_1(x_*^{UE}) \quad \cdots\cdots (13)$$

$$\begin{aligned} v(USE)=&\,p_w(d-x_*^{USE})+g_1(x_*^{USE})+g_2(x_*^{USE})+f_s(d-x_*^{USE}+d_r,\hat{q}^{USE},y_*^{USE}) \\ &+f_s(x_*^{USE},\hat{q}^{USE},q_L)-p_s(d_r) \quad \cdots\cdots (14) \end{aligned}$$

Table 1. Notations and symbols

item	symbol	contents
parameters	d	water demand of water user(in development area) ($d = d_H + d_L$)
	d_H	water demand of "class H" of water user
	d_L	water demand of "class L" of water user
	d_r	water demand of residual area
	q_0	water quality of withdrawal
	q_1	present water quality of discharges from sewage system
	q_*	future standard of water quality at downstream
	q_H	water quality before used by "class H"
	q_L	water quality before used by "class L"
	w_H	water quality added after used by "class H"
	w_L	water quality added after used by "class L"
	$\hat{q}^T$	quality of total wastewater into sewage system when coalition T held
	$\tilde{q}^T$	quality of wastewater to be discharged from water user to sewage system when coalition T held
	q_r	water quality of wastewater from residual area
	Q	amount of river flow before withdrawal
	x^T	amount of reused water where coalition T held(optimum is x_*^T)
	y^T	future water quality of discharges from sewage system when coalition T held
functions	f_w	cost of waterworks(function of water demand)
	p_w	fee of waterworks(function of water demand)
	p_s	fee of sewage system(function of water demand)
	g_1	cost of internal transporting water to "class L" in water user's area(function of x^T)
	g_2	cost of transporting water from sewage to "class L"(function of x^T)
	f_s	cost of treating wastewater at sewage or on-site reuse plant(function of amount of wastewater treated, quality of wastewater before treatment, and that of wastewater after treatment)

NB:water quality means density, costs are unified into annual or lumped-sum costs.

2. 3 最適化問題としてみた水利用システムの特定化

Table 2 においては，$C_U(U)$, $C_{US}(US)$, $C_S(SE)$, $C_U(UE)$, $C_{US}(USE)$ は再利用量 x あるいは下水処理放流水質 y を変数とし関連コストを最小とする最適化問題として定義した。ここでは，それぞれにおける x, y の最適値について考察する。

まず，環境管理者 E を含む提携については，河川水質基準 q_* を達成するために，次式を満たさなければならない。

$$\frac{(Q - d + x^T - d_r)q_0 + (d - x^T + d_r)y^T}{Q} = q_* \quad \cdots\cdots (15)$$

すなわち，水質条件が活性化していることを前提とし，y_*^{SE}, x_*^{UE}, y_*^{USE}, x_*^{USE} は，将来の河川水質基準 y_* に対し，次のように決まる。

$$y_*^{SE} = \frac{Q}{d + d_r}(q_* - q_0) + q_0 \quad \cdots\cdots (16)$$

Table 2. Costs accruing to player I from coalition T, $C_I(T)$

Main Coalition	player W (water supply manager)	player U (user in developped area)	player S (sewage manager)
(S)	$C_W(S) \equiv f_w(d+d_r) -p_w(d)-p_w(d_r)$	$C_U(S) \equiv p_w(d)+p_s(d)$	$C_S(S) \equiv f_s(d+d_r,\hat{q}^S,q_1) -p_s(d)-p_s(d_r)$
(U)	$C_W(U) \equiv f_w(d-x_*^U+d_r) -p_w(d-x_*^U)-p_w(d_r)$	$C_U(U) \equiv \min_{x^U}\{p_w(d-x^U)+p_s(d-x^U) +f_s(x^U,\tilde{q}^U,q_L)+g_1(x^U)\}$ s.t. $x^U \leq d_L$	$C_S(U) \equiv f_s(d-x_*^U+d_r,\hat{q}^U,q_1) -p_s(d-x_*^U)-p_s(d_r)$
(US)	$C_W(US) \equiv f_w(d-x_*^{US}+d_r) -p_w(d-x_*^{US})-p_w(d_r)$	$C_{US}(US) \equiv \min_{x^{US}}\{p_w(d-x^{US})+g_1(x^{US})+g_2(x^{US})+f_s(d-x^{US}+d_r,\hat{q}^{US},q_1)+f_s(x^{US},\hat{q}^{US},q_L)-p_s(d_r)\}$ s.t. $x^{US} \leq d_L$	
(SE)	$C_W(SE) \equiv f_w(d+d_r) -p_w(d)-p_w(d_r)$	$C_U(SE) \equiv p_w(d)+p_s(d)$	$C_S(SE) \equiv \min_{y^{SE}}\{f_s(d+d_r,\hat{q}^{SE},y^{SE}) -p_s(d)-p_s(d_r)\}$ s.t. $\frac{(Q-d-d_r)q_0+(d+d_r)y^{SE}}{Q} \leq q_*$
(UE)	$C_W(UE) \equiv f_w(d-x_*^{UE}+d_r) -p_w(d-x_*^{UE})-p_w(d_r)$	$C_U(UE) \equiv \min_{x^{UE}}\{p_w(d-x^{UE})+p_s(d-x^{UE}) +f_s(x^{UE},\tilde{q}^{UE},q_L)+g_1(x^{UE})\}$ s.t. $x^{UE} \leq d_L$ $\frac{(Q-d+x^{UE}-d_r)q_0+(d-x^{UE}+d_r)q_1}{Q} \leq q_*$	$C_S(UE) \equiv f_s(d-x_*^{UE}+d_r,\hat{q}^{UE},q_1) -p_s(d-x_*^{UE})-p_s(d_r)$
(USE)	$C_W(USE) \equiv f_w(d-x_*^{USE}+d_r) -p_w(d-x_*^{USE}) -p_w(d_r)$	$C_{US}(USE) \equiv \min_{x^{USE},y^{USE}}\{p_w(d-x^{USE})+g_1(x^{USE})+g_2(x^{USE}) +f_s(d-x^{USE}+d_r,\hat{q}^{USE},y^{USE})+f_s(x^{USE},\hat{q}^{USE},q_L)-p_s(d_r)\}$ s.t. $x^{USE} \leq d_L$, $\frac{(Q-d+x^{USE}-d_r)q_0+(d-x^{USE}+d_r)y^{USE}}{Q} \leq q_*$	

$$x_*^{SE} = Q\frac{q_* - q_0}{q_0 - q_1} + d + d_r \quad \cdots\cdots (17)$$

$$y_*^{USE} = \frac{Q}{d + d_r - x_*^{USE}}(q_* - q_0) + q_0 \quad \cdots\cdots (18)$$

これらの関係は**Fig. 2**のようになる。すなわち，(15)式で定義される双曲線上で，y_*^{SE}は点A，x_*^{UE}は点Bとなり，(x_*^{USE}, y_*^{USE})は区間ACの範囲を取り得る。しかし，$x_*^{USE} \geq x_*^{UE}$とすると，$y_*^{USE} \geq q_1$となり，局所的ながら現況より水質が悪化することになるため，本研究では$y \leq q_1$とし，(x_*^{USE}, y_*^{USE})は次の条件を前提として区間AB上にあるものとする。

$$x_*^{USE} \leq x_*^{UE} \quad \text{and} \quad y_*^{SE} \leq y_*^{USE} \leq y_*^{UE} \quad \cdots\cdots (19)$$

次に，x_*^U, x_*^{US}の取り得る範囲を考える。まず，下水道の放流水質がq_1のままとすると，線分DE上がその範囲である（点Dが現況であり，提携(S)に該当する)。一方，放流水質を悪化させても良いとすると，これまでの検討では明示的に現れていなかった現在の河川水質基準y_nに対する双曲線DFが存在し，その上に位置することが可能となる。x_*^U or $x_*^{US} \geq x_*^{UE}$となる場合は，水質制約ではなくコスト最小の基準が該当する場合である。この場合は，区間BEに位置する（x^U, $x^{US} \leq d_L$より）ことから，河川の水質は基準q_*よりも改善されるため，提携(SE)，(UE)，(USE)のどれよりも選好される。環境管理者は提携を主張する必要がなくなり，水質改善ゲームが成立しない。従って，水質改善ゲームが成立するためには，領域BDに限って考える必要が生ずる。ゆえに，本研究では，

$$0 \leq x_*^U \leq x_*^{UE} \quad \text{and} \quad 0 \leq x_*^{US} \leq x_*^{UE} \quad \cdots\cdots (20)$$

を前提とする。

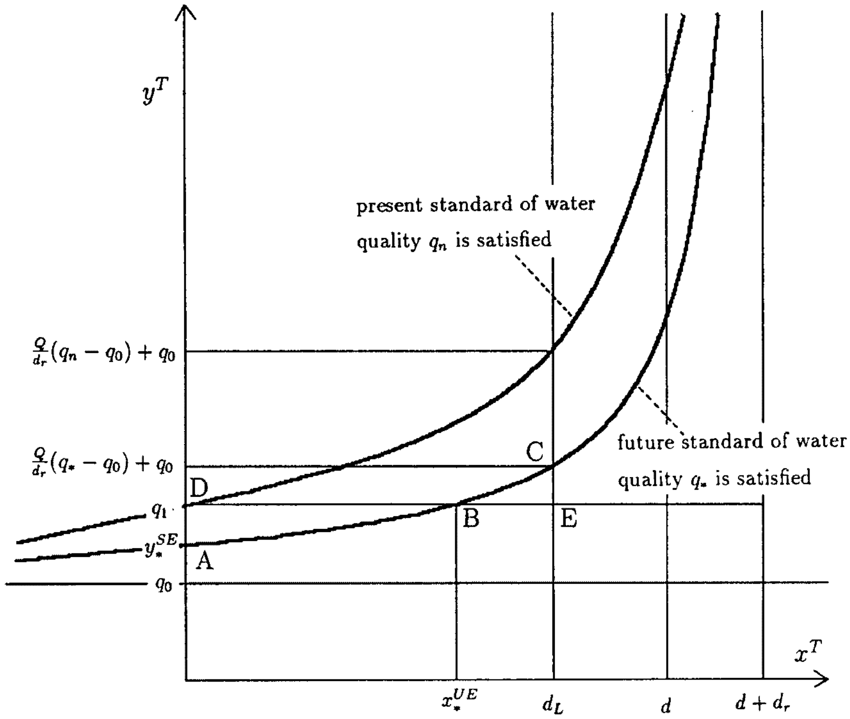

Fig. 2　Feasible area of (x_*^T, y_*^T)

3.　提携費用の検討

3.1　費用関数の設定

本研究では解析的な考察を行うため，費用関数を線形関数として定義する。これは，本研究の目的が任意の提携における最適な規模決定ではなく，提携が選好される条件を分析するためである。

(1)　水道料金 p_w，下水道料金 p_s

水道料金と下水道料金は，水量 z に対して線形とし，それぞれの単価 c_w，c_s とする。

$$p_w(z)=c_w z \quad \cdots\cdots (21)$$

$$p_s(z)=c_s z \quad \cdots\cdots (22)$$

(2)　下水処理施設費 f_s

循環利用のための処理施設及び下水処理場の施設費用は，処理水量 z と流入水質 q_{in} 及び放流水質 q_{out} の関数とする。処理水量と流入水質に関しては線形，放流水質に関しては反比例するものとする。

$$f_s(z, q_{in}, q_{out})=\alpha\cdot z\cdot q_{in}\cdot\frac{1}{q_{out}} \quad \cdots\cdots (23)$$

(3)　循環送水施設費 g_1，g_2

再開発地区で循環利用を行うために，オンサイト，オフサイトとも地区内配管費が必要となる。さらに，

オフサイト循環の場合には下水処理場から利用地区までの導水施設が必要となる。これらは，処理水量x^Tの線形関数とする。

$$g_1(x^T)=\beta_1 x^T \qquad (24)$$

$$g_2(x^T)=\beta_2 x^T \qquad (25)$$

3.2 提携費用の分析

(1) $v(U)$の検討

$C_U(U)$に費用関数を代入すると次のように整理され，下に凸な2次関数となる（$\hat{q}^U$については付録を参照のこと。なお，以下の式中で$K=q_H d+w_H d_H+w_L d_L$としている)。

$$\begin{aligned}C_U(U)&=c_w(d-x^U)+c_s(d-x^U)+\alpha x^U\hat{q}^U q_L+\beta_1 x^U\\&=(c_w+c_s)d+\left(\beta_1+\frac{\alpha}{q_L}\frac{K}{d}-c_w-c_s\right)x^U+\frac{\alpha}{q_L}\frac{q_L-q_H}{d}(x^U)^2\end{aligned} \qquad (26)$$

切片は$C_U(S)$に等しいことから，$C_U(U)<C_U(S)$となるためには，$x^U_*>0$となる必要があり，この条件は，

$$c_w+c_s>\beta_1+\frac{\alpha}{q_L}\frac{K}{d} \qquad (27)$$

である。このとき最適値は，

$$x^U_*=\frac{c_w+c_s-\beta_1-\dfrac{\alpha}{q_L}\dfrac{K}{d}}{2\dfrac{\alpha}{q_L}\dfrac{q_L-q_H}{d}} \qquad (28)$$

である。ゆえに，$v(U)$は次のように定義される。

$$v(U)=\begin{cases}(c_w+c_s)d & \text{ただし}\quad c_w+c_s\leq\beta_1+\dfrac{\alpha}{q_L}\dfrac{K}{d}\\[2ex](c_w+c_s)d-\dfrac{\left(\beta_1+\dfrac{\alpha}{q_L}\dfrac{K}{d}-c_w-c_s\right)^2}{4\dfrac{\alpha}{q_L}\dfrac{q_L-q_H}{d}} & \text{ただし}\quad c_w+c_s>\beta_1+\dfrac{\alpha}{q_L}\dfrac{K}{d}\end{cases} \qquad (29)$$

(2) $v(US)$の検討

$C_{US}(US)$に費用関数を代入すると次のように整理される（$\hat{q}^{US}$については付録を参照のこと)。

$$\begin{aligned}C_{US}(US)&=c_w(d-x^{US})+\beta_1 x^{US}+\beta_2 x^{US}+\frac{\alpha}{q_1}(d+d_r-x^{US})\hat{q}^{US}+\frac{\alpha}{q_L}x^{US}\hat{q}^{US}-c_s d_r\\&=\left\{c_w d-c_s d_r+\frac{\alpha}{q_1}(K+q_r d_r)\right\}\\&\quad+\left\{-c_w+\beta_1+\beta_2+\frac{\alpha}{q_1}(q_L-q_H)\right.\end{aligned}$$

$$+\alpha\frac{K+q_r d_r}{d+d_r}\left(\frac{1}{q_L}-\frac{1}{q_1}\right)\Big\}x^{US}$$

$$+\alpha\frac{q_L-q_H}{d+d_r}\left(\frac{1}{q_L}-\frac{1}{q_1}\right)(x^{US})^2 \quad\cdots\cdots(30)$$

2次関数となるが下に凸となるには，まず，

$$q_L < q_1 \quad\cdots\cdots(31)$$

の条件（再利用水質が放流基準水質より良い）が必要である。さらに，$x_*^{US}>0$ となるためには，

$$c_w > \beta_1+\beta_2+\frac{\alpha}{q_1}(q_L-q_H)+\alpha\frac{K+q_r d_r}{d+d_r}\left(\frac{1}{q_L}-\frac{1}{q_1}\right) \quad\cdots\cdots(32)$$

のとき，

$$x_*^{US}=\frac{c_w-\beta_1-\beta_2-\dfrac{\alpha}{q_1}(q_L-q_H)-\alpha\dfrac{K+q_r d_r}{d+d_r}\left(\dfrac{1}{q_L}-\dfrac{1}{q_1}\right)}{2\alpha\dfrac{q_L-q_H}{d+d_r}\left(\dfrac{1}{q_L}-\dfrac{1}{q_1}\right)} \quad\cdots\cdots(33)$$

となる。$v(US)$ は次のように定義される。

$$v(US)=\left\{c_w d-c_s d_r+\frac{\alpha}{q_1}(K+q_r d_r)\right\}$$

$$-\frac{\left\{-c_w+\beta_1+\beta_2+\dfrac{\alpha}{q_1}(q_L-q_H)+\alpha\dfrac{K+q_r d_r}{d+d_r}\left(\dfrac{1}{q_L}-\dfrac{1}{q_1}\right)\right\}^2}{4\alpha\dfrac{q_L-q_H}{d+d_r}\left(\dfrac{1}{q_L}-\dfrac{1}{q_1}\right)} \quad\cdots\cdots(34)$$

(3) $v(SE)$ の検討

$C_S(SE)$ に費用関数を代入して整理すると次式を得る。

$$C_S(SE)=\frac{\alpha(K+q_r d_r)}{y^{SE}}-c_s(d+d_r) \quad\cdots\cdots(35)$$

これは，y^{SE} に関する減少関数となっているが，前述したように y_*^{SE} は水質条件から決定される。

$$v(SE)=\frac{\alpha(K+q_r d_r)(d+d_r)}{Q(q_*-q_0)+(d+d_r)q_0}-c_s(d+d_r)$$

$$=\frac{\alpha}{q_0}\frac{K+q_r d_r}{\dfrac{Q}{d+d_r}\left(\dfrac{q_*}{q_0}-1\right)+1}-c_s(d+d_r) \quad\cdots\cdots(36)$$

(4) $v(SE)$ の検討

$C_U(UE)$ と $C_U(U)$ は同じ関数形状（式(26)参照）であるが，x_*^{UE} は水質条件から決定される（式(17)参照）。

$$v(UE)=(c_w+c_s)d+\left(\beta_1-c_w-c_s+\frac{\alpha}{q_L}\frac{K}{d}\right)\left\{\frac{q_0}{q_0-q_1}Q\left(\frac{q*}{q_0}-1\right)+d+d_r\right\}$$

$$+\frac{\alpha}{q_L}\left(\frac{q_L-q_H}{d}\right)\left\{\frac{q_0}{q_0-q_1}Q\left(\frac{q*}{q_0}-1\right)+d+d_r\right\}^2 \quad\cdots\cdots(37)$$

(5)　$v(USE)$の検討

$C_{US}(USE)$に費用関数を代入して展開すると，次のようになる。

$$C_{US}(USE)=\left\{(c_wd-c_sd_r)+\left(-c_w+\beta_1+\beta_2+\frac{\alpha}{q_L}\frac{K+q_rd_r}{d+d_r}\right)x^{USE}+\frac{\alpha}{q_L}\frac{q_L-q_H}{d+d_r}(x^{USE})^2\right\}$$

$$+\frac{\alpha}{y^{USE}}\left\{(K+q_rd_r)+\left(q_L-q_H-\frac{K+q_rd_r}{d+d_r}\right)x^{USE}-\frac{q_L-q_H}{d+d_r}(x^{USE})^2\right\} \quad\cdots(38)$$

ここで，y^{USE}は式(18)により与えられるx^{USE}の分数関数である。上式右辺の第2項を整理すると，次の式となる。

{第2項}

$$=-\frac{\alpha}{q_0}\left(\frac{q_L-q_H}{d+d_r}\right)(x^{USE})^2$$

$$+\frac{\alpha}{q_0}\left\{(q_L-q_H)-\frac{K+q_rd_r}{d+d_r}-\frac{q_L-q_H}{d+d_r}Q\left(\frac{q*}{q_0}-1\right)\right\}x^{USE}$$

$$+\frac{\alpha}{q_0}\left\{(K+q_rd_r)-\frac{K+q_rd_r}{d+d_r}Q\left(\frac{q*}{q_0}-1\right)-\frac{q_L-q_H}{d+d_r}Q^2\left(\frac{q*}{q_0}-1\right)^2\right\}$$

$$+\frac{-\frac{\alpha}{q_0}Q^2\left(\frac{q*}{q_0}-1\right)^2\left(q_L-q_H+\frac{K+q_rd_r}{d+d_r}+\frac{q_L-q_H}{d+d_r}Q\left(\frac{q*}{q_0}-1\right)\right)}{x^{USE}-\left(d+d_r+Q\left(\frac{q*}{q_0}-1\right)\right)} \quad\cdots\cdots(39)$$

よって，関数(38)は，次のように整理される。

$$C_{US}(USE)=\mathrm{A}(x^{USE})^2+\mathrm{B}x^{USE}+\mathrm{C}+\frac{\mathrm{E}}{x^{USE}-\mathrm{D}} \quad\cdots\cdots(40)$$

ただし，係数A，B，C，D，Eは次のとおり。

$$\mathrm{A}=\alpha\left(\frac{q_L-q_H}{d+d_r}\right)\left(\frac{1}{q_L}-\frac{1}{q_0}\right) \quad\cdots\cdots(41)$$

$$\mathrm{B}=-c_w+\beta_1+\beta_2+\alpha\frac{K+q_rd_r}{d+d_r}\left(\frac{1}{q_L}-\frac{1}{q_0}\right)$$

$$+\frac{\alpha}{q_0}(q_L-q_H)-\frac{\alpha}{q_0}\frac{q_L-q_H}{d+d_r}Q\left(\frac{q*}{q_0}-1\right) \quad\cdots\cdots(42)$$

$$\mathrm{C}=c_wd-c_sd_r+\frac{\alpha}{q_0}(K+q_rd_r)-\frac{\alpha}{q_0}\frac{K+q_rd_r}{d+d_r}Q\left(\frac{q*}{q_0}-1\right)$$

$$-\frac{\alpha}{q_0}\frac{q_L-q_H}{d+d_r}Q^2\left(\frac{q*}{q_0}-1\right)^2 \quad\cdots\cdots(43)$$

$$\mathrm{D}=(d+d_r)+Q\left(\frac{q*}{q_0}-1\right) \quad\cdots\cdots(44)$$

$$E = -\frac{\alpha}{q_0} Q^2 \left(\frac{q_*}{q_0} - 1\right)^2 \left\{(q_L - q_H) + \frac{K + q_r d_r}{d + d_r} + \frac{q_L - q_H}{d + d_r} Q \left(\frac{q_*}{q_0} - 1\right)\right\} \quad \cdots\cdots (45)$$

この関数は，$x = \mathrm{D}$ と $C = \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C}$ に漸近する形状をとる。ここで，$q_* \geq q_0$（河川下流水質は上流のそれを上回らない）を前提とすると，$\mathrm{E} \leq 0$ かつ $\mathrm{D} > \mathrm{d}_L > 0$ が成り立ち，$x_*^{USE} > 0$ となるための条件は，

$$\mathrm{A} \geq 0 \quad \text{and} \quad \mathrm{B} < 0 \quad \cdots\cdots (46)$$

である。これ以外の場合には $x_*^{USE} = 0$ で費用最小となり，実質的に提携 (SE) と同じくなるため，提携 (USE) は成立しない。特に，$\mathrm{A} \geq 0$ は $q_L \leq q_0$ を意味し，再利用水質以上に河川の取水水質が悪い場合に提携 (USE) が有効となることを示すものである。A が正のときの関数形状を，**Fig. 3** に示す。

x_*^{USE} は，式(40)を微分して 0 とおけば，次の 3 次方程式の解である。

$$(2\mathrm{A}x + \mathrm{B})(x - \mathrm{D})^2 - \mathrm{E} = 0 \quad \cdots\cdots (47)$$

この一般解は Cardano の方法などにより求めることができるが，複雑な形式となるため解の挙動に関する条件整理は実質的に困難である。このため，本研究では，$q_L = q_0$ の場合に限定して考察する。この場合には式(47)は $\mathrm{A} = 0$ で 2 次式となり，$x_*^{USE} = \mathrm{D} \pm \sqrt{\mathrm{E}/\mathrm{B}}$ で与えられるが，$\mathrm{D} > d_L$ より，

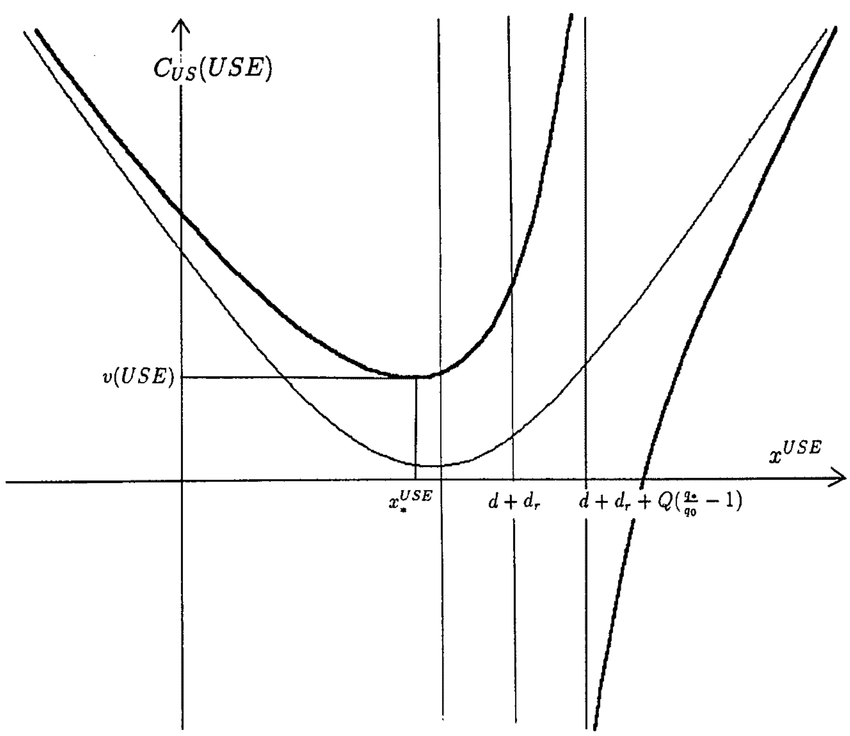

Fig. 3 Feasible area of $(x_*^{USE}, C_{US}(USE))$

$$x_*^{USE} = \mathrm{D} - \sqrt{\mathrm{E/B}}$$

$$= d + d_r + Q\left(\frac{q_*}{q_L} - 1\right) \times$$

$$\left\{1 - \sqrt{\frac{\frac{K + q_r d_r}{d + d_r} + (q_L - q_H) + \frac{q_L - q_H}{d + d_r} Q\left(\frac{q_*}{q_L} - 1\right)}{\frac{q_L}{\alpha}(c_w - \beta_1 - \beta_2) - (q_L - q_H) + \frac{q_L - q_H}{d + d_r} Q\left(\frac{q_*}{q_L} - 1\right)}}\right\} \quad \cdots\cdots (48)$$

すなわち，$x_*^{USE} < d_L$ となるためには，ルート項が1より大きくなければならず，次の条件が必要となる。この条件が満たされない場合には，$x_*^{USE} = d_L$ と再利用の上限値をとることになる。

$$\frac{K + q_r d_r}{d + d_r} + 2(q_L - q_H) \gg \frac{q_L}{\alpha}(c_w - \beta_1 - \beta_2) \quad \cdots\cdots (49)$$

このとき，$v(USE)$ は次で与えられる。

$$v(USE)$$
$$= \mathrm{BD} + \mathrm{C} - 2\sqrt{\mathrm{BE}}$$
$$= (c_w d - c_s d_r) + (\beta_1 + \beta_2 - c_w)\left\{d + d_r + Q\left(\frac{q_*}{q_L} - 1\right)\right\}$$
$$+ \frac{\alpha}{q_L}(K + q_r d_r)\left\{1 - \frac{Q}{d + d_r}\left(\frac{q_*}{q_L} - 1\right)\right\}$$
$$+ \frac{\alpha}{q_L}(q_L - q_H)(d + d_r)\left\{1 - 2\left(\frac{Q}{d + d_r}\left(\frac{q_*}{q_L} - 1\right)\right)^2\right\}$$
$$- 2\frac{\alpha}{q_L} Q\left(\frac{q_*}{q_L} - 1\right)\sqrt{(q_L - q_H)\left\{\frac{Q}{d + d_r}\left(\frac{q_*}{q_L} - 1\right) + 1\right\} + \frac{K + q_r d_r}{d + d_r}}$$
$$\times \sqrt{(q_L - q_H)\left\{\frac{Q}{d + d_r}\left(\frac{q_*}{q_L} - 1\right) - 1\right\} + \frac{q_L}{\alpha}(c_w - \beta_1 - \beta_2)} \quad \cdots\cdots (50)$$

(6) $v(S)$ の検討

$C_S(S)$，$C_S(U)$，$C_S(UE)$ に費用関数を代入して整理すると次のようになる。

$$C_S(S) = \frac{\alpha}{q_1}(K + q_r d_r) - c_s(d + d_r) \quad \cdots\cdots (51)$$

$$C_S(U) = \left\{\frac{\alpha}{q_1}(K + q_r d_r) - c_s(d + d_r)\right\} + \left\{c_s - \frac{\alpha}{q_1}\left(\frac{K}{d} + q_L - q_H\right)\right\} x^U$$
$$- \frac{\alpha}{q_1}\frac{q_L - q_H}{d}(x^U)^2 \quad \cdots\cdots (52)$$

$$C_S(UE) = \left\{\frac{\alpha}{q_1}(K + q_r d_r) - c_s(d + d_r)\right\} + \left\{c_s - \frac{\alpha}{q_1}\left(\frac{K}{d} + q_L - q_H\right)\right\} x^{UE}$$
$$- \frac{\alpha}{q_1}\frac{q_L - q_H}{d}(x^{UE})^2 \quad \cdots\cdots (53)$$

ここで，式(52)(53)は，切片を $C_S(S)$ とする上に凸な2次関数となっており，

$$x = \frac{c_s - \frac{\alpha}{q_1}\left(\frac{K}{d} + q_L - q_H\right)}{2\frac{\alpha}{q_1}\frac{q_L - q_H}{d}} \qquad \cdots\cdots (54)$$

のとき最大となる。この値を$\tilde{x}$とすると，$C_S(S)$，$C_S(U)$，$C_S(UE)$の大小関係は，$\tilde{x}$が負になる場合を含めて次のように整理される。ここで，$x_*^U < x_*^{UE}$を前提としており，$\approx$は無差別であることを示す。

$$\begin{aligned}
&c_s \leq \frac{\alpha}{q_1}\left(\frac{K}{d} + q_L - q_H\right) \text{ のとき} && && C_S(S) > C_S(U) > C_S(UE)\\
&c_s > \frac{\alpha}{q_1}\left(\frac{K}{d} + q_L - q_H\right) \text{ のとき} && \tilde{x} < x_*^U && \text{ならば } C_S(S) \approx C_S(U) > C_S(UE)\\
& && x_*^U < \tilde{x} < x_*^{UE} && \text{ならば } C_S(U) \approx C_S(UE) > C_S(S)\\
& && x_*^{UE} < \tilde{x} && \text{ならば } C_S(UE) > C_S(U) > C_S(S) \qquad \cdots (55)
\end{aligned}$$

このため，$C_S(U)$が最小となることはないことが分かる。x_*^Uと$\tilde{x}$の差分を整理すると，

$$x_*^U - \tilde{x} = \frac{d}{2\alpha(q_L - q_H)}\left\{q_L\left(c_w + c_s - \beta_1 - \frac{q_1}{q_L}c_s\right) + \alpha(q_L - q_H)\right\} \qquad \cdots\cdots (56)$$

となり，$q_1 \gg q_L$の場合には$x_*^U < \tilde{x}$となることが有り得るため，いずれのケースも可能性がある。

4. 提携合理性の検討

任意の提携が成立するためには，その提携を構成する互いに素な部分集合による提携の費用よりも安くなる必要がある。

$$v(T) \leq \sum_i v(T_i) \quad \text{ただし} \quad \cap_i T_i = \phi,\ \cup_i T_i = T \qquad \cdots\cdots (57)$$

以下では，この条件を整理する。なお，$v(S) = C_S(S)$，$v(U) = C_U(U)$として考察する。

4.1 2人提携の合理性

(1) $v(US) \leq v(U) + v(S)$となる条件

式(29)(34)(51)より，$v(US) - v(U) - v(S) \leq 0$は次のように整理される。

$$\frac{d}{4\alpha(q_L - q_H)}\left[\frac{\left(\beta_1 + \frac{\alpha}{q_L}\frac{K}{d} - c_w - c_s\right)^2}{\frac{1}{q_L}} - \frac{\left\{-c_w + \beta_1 + \beta_2 + \frac{\alpha}{q_1}(q_L - q_H) + \alpha\frac{K + q_r d_r}{d + d_r}\left(\frac{1}{q_L} - \frac{1}{q_1}\right)\right\}^2}{\frac{1}{q_L} - \frac{1}{q_1}}\right] \leq 0 \qquad \cdots\cdots (58)$$

$x_*^U > 0$，$x_*^{US} > 0$となる条件式(27)(32)より，合理性が成立する本質的な条件は，

$$\frac{\beta_1+\frac{\alpha}{q_L}\frac{K}{d}-c_w-c_s}{\sqrt{\frac{1}{q_L}}} \geq \frac{-c_w+\beta_1+\beta_2+\frac{\alpha}{q_1}(q_L-q_H)+\alpha\frac{K+q_rd_r}{d+d_r}\left(\frac{1}{q_L}-\frac{1}{q_1}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{q_L}-\frac{1}{q_1}\right)}} \quad \cdots\cdots (59)$$

となる。

(2) $v(UE)\leq v(U)+v(E)$となる条件

$v(UE)-v(U)$を整理すると，次のようになる。

$$v(UE)-v(U)$$

$$=\frac{1}{\frac{\alpha}{q_L}\frac{q_L-q_H}{d}}\left[\frac{\alpha}{q_L}\frac{q_L-q_H}{d}\frac{q_0}{q_0-q_1}\left\{d+d_r+Q\left(\frac{q_*}{q_0}-1\right)\right\}\right.$$

$$\left.+\left(\beta_1-c_w-c_s+\frac{\alpha}{q_L}\frac{K}{d}\right)\right]^2 \quad \cdots\cdots (60)$$

ゆえに，$v(UE)\geq v(U)$であるが，$v(E)$が式(60)より大きい場合に$v(UE)\leq v(U)+v(E)$という合理性が成立する。

(3) $v(SE)\leq v(S)+v(E)$となる条件

$v(SE)-v(S)$を整理すると次のようになる。

$$v(SE)-v(S)$$

$$=\frac{\alpha}{q_0}\frac{K+q_rd_r}{\frac{Q}{d+d_r}\left(\frac{q_*}{q_0}-1\right)+1}-\frac{\alpha}{q_1}(K+q_rd_r)$$

$$=\frac{\alpha}{q_0q_1}\frac{1}{\frac{Q}{d+d_r}\left(\frac{q_*}{q_0}-1\right)+1}\frac{K+q_rd_r}{d+d_r}\{(q_1-q_0)(d+d_r)-(q_*-q_0)Q\} \quad \cdots\cdots (61)$$

現況における都市域からの排出負荷量$(q_1-q_0)(d+d_r)$は河川での将来的な許容負加量$(q_*-q_0)Q$以上であるから，$v(SE)>v(S)$となる。合理性が成り立つためには，$v(E)$が式(61)の値以上である必要がある。

4.2 3人提携の合理性

以下の検討では，$q_0=q_L$を前提として考察する。

(1) $v(USE)\leq v(U)+v(S)+v(E)$となる条件

$v(E)=\infty$より$v(USE)\leq v(U)+v(S)$と合理性が成立する。

(2) $v(USE)\leq v(US)+v(E)$となる条件

$v(E)=\infty$より$v(USE)\leq v(US)+v(E)$と合理性が成立する。

(3) $v(USE)\leq v(UE)+v(S)$となる条件

式(37)(50)(51)より，$v(USE)-v(UE)-v(S)$を整理すると次のようになる。

$$v(USE)-v(UE)-v(S)$$

$$=(\beta_1+\beta_2-c_w)\left\{Q\left(\frac{q_*}{q_0}-1\right)+d+d_r\right\}+\frac{\alpha}{q_L}(q_L-q_H)(d+d_r)$$

$$
-2\frac{\alpha}{q_L}(q_L-q_H)\frac{Q^2}{d+d_r}\left(\frac{q*}{q_0}-1\right)^2
$$

$$
-\frac{\alpha}{L}(K+q_r d_r)\frac{Q}{d+d_r}\left(\frac{q*}{q_0}-1\right)-\left(\beta_1-c_w-c_s+\frac{\alpha}{q_L}\frac{K}{d}\right)\left\{\frac{q_0}{q_0-q_1}Q\left(\frac{q*}{q_0}-1\right)+d+d_r\right\}
$$

$$
-\frac{\alpha}{q_L}\frac{q_L-q_H}{d}\left\{\frac{q_0}{q_0-q_1}Q\left(\frac{q*}{q_0}-1\right)+d+d_r\right\}^2-2\sqrt{\mathrm{BE}} \quad \cdots\cdots (62)
$$

ここで，$x_*^{USE}>0$ の条件式(46)より $\mathrm{B}<0$ を第1項の $\beta_1+\beta_2-c_w$ に適用し，第3項までを整理すると，

$$
\{第1項+第2項+第3項\}<-\frac{\alpha}{q_L}(q_L-q_H)\frac{Q^2}{d+d_r}\left(\frac{q*}{q_0}-1\right)^2<0 \quad \cdots\cdots (63)
$$

となり，第5項以外は全て負である。第5項については，$\frac{q_0}{q_0-q_1}Q\left(\frac{q*}{q_0}-1\right)+d+d_r>0$ より，係数$\left(\beta_1-c_w-c_s+\frac{\alpha}{q_L}\frac{K}{d}\right)<0$ のときに正の値をもつ（これは，式(29)より，$x_*^U>0$ のときに該当する)。このため，具体的な数値を代入しないと合理性の判定はできないが，

$$
\beta_1+\frac{\alpha}{q_L}\frac{K}{d}\ll c_w+c_s \quad \cdots\cdots (64)
$$

とならない限り合理性は成立すると考えられる。

(4)　$v(USE)\leq v(SE)+v(U)$ となる条件

式(29)(36)(50)より，$v(USE)-v(SE)-v(U)$ を整理すると次のようになる。

$$
v(USE)-v(SE)-v(U)
$$

$$
=(\beta_1+\beta_2-c_w)\left\{Q\left(\frac{q*}{q_0}-1\right)+d+d_r\right\}+\frac{\alpha}{q_L}(q_L-q_H)(d+d_r)
$$

$$
-2\frac{\alpha}{q_L}(q_L-q_H)\frac{Q^2}{d+d_r}\left(\frac{q*}{q_0}-1\right)^2
$$

$$
-\frac{\alpha}{q_L}(K+q_r d_r)\left\{1-\frac{Q}{d+d_r}\left(\frac{q*}{q_0}-1\right)\right\}-\frac{\alpha}{q_L}\frac{K+q_r d_r}{\frac{Q}{d+d_r}\left(\frac{q*}{q_0}-1\right)+1}
$$

$$
+\frac{\left(\beta_1-c_w-c_s+\frac{\alpha}{q_L}\frac{K}{d}\right)^2}{4\frac{\alpha}{q_L}\frac{K}{d}}-2\sqrt{\mathrm{BE}} \quad \cdots\cdots (65)
$$

ここで第1項から第3項は先と同様に負の値をもつ。第4項と第5項を整理すると，

$$
\{第4項+第5項\}=-\frac{\alpha}{q_L}\frac{K+q_r d_r}{\frac{Q}{d+d_r}\left(\frac{q*}{q_r}-1\right)+1}\left(\frac{Q}{d+d_r}\right)^2\left(\frac{q*}{q_0}-1\right)^2<0 \quad \cdots\cdots (66)
$$

と負になる。このため，第6項のみが正となり，先と同様に合理性は式(64)とならない場合に成立する。

5. 費用配分

提携の合理性が成立する場合は，その提携を採用するようにプレイヤーが働きかける。しかし，合理性が必ずしも成立しない場合は無差別な関係にあり，提携を組んでも費用が大きく減少することは望めないことになる。

前節で分析した提携間の合理性の関連を図示すると，**Fig. 4** のように，循環利用(U)から(US)へは条件付きで選好され，この結果(S)にとっても(US)は条件付き選好となる。U と S にとっては，$v(U)$，$v(US)$ のいずれでもよいということになろう。これに比べて，環境管理者 E は単独行動を回避するために提携を推進しようとする。全体提携(USE)は(US)からは条件付き選好となるが，他の提携からは積極的に選考される形となる。

このような状況において，全体提携(USE)に対するコアが存在するかどうかは次の条件による。

$$\frac{1}{2}\{\min(v(U), v(US)) + v(UE) + v(SE)\} \leq v(USE) \quad \cdots\cdots (67)$$

成立しない場合はその差異を不満として配分することが必要となる。その際，次に示す Shapley 値を利用することができる。

Shapley 値は，ゲーム(N, v)に対し次式で定義される。

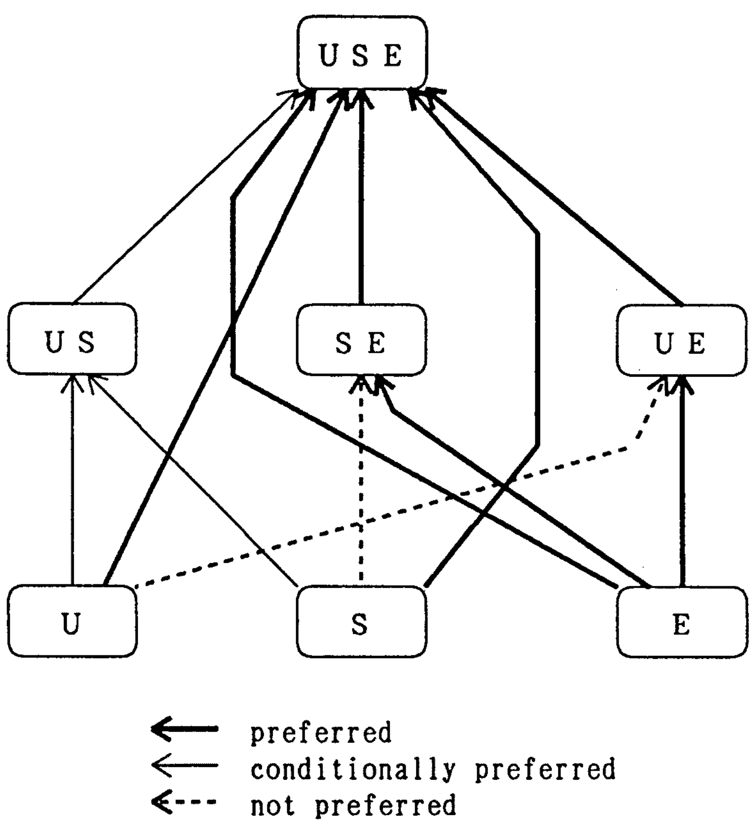

Fig. 4　Preference structure of coalitions

$$\theta_i[v]=\sum_{T\subset N}\gamma_n(t)\,[v(T)-v(T-i)]\quad i=1,\dots,n \qquad (68)$$

ここで，

$$\gamma_n(t)=\frac{(t-1)!\,(n-t)!}{n!}\quad ただし\quad t=|T| \qquad (69)$$

これをもとに，先の水質改善ゲームの費用配分を行うと次のようになる。

$$\theta_U=\frac{1}{3}v(U)+\frac{1}{6}\{v(US)-v(S)+v(UE)-v(E)\}+\frac{1}{3}\{v(USE)-v(SE)\} \qquad (70)$$

$$\theta_S=\frac{1}{3}v(S)+\frac{1}{6}\{v(US)-v(U)+v(SE)-v(E)\}+\frac{1}{3}\{v(USE)-v(UE)\} \qquad (71)$$

$$\theta_E=\frac{1}{3}v(E)+\frac{1}{6}\{v(UE)-v(U)+v(SE)-v(S)\}+\frac{1}{3}\{v(USE)-v(US)\} \qquad (72)$$

具体的な大小関係は，ケーススタディを通した分析が必要であるが，以下では，将来の河川水質基準q_*の設定の仕方により配分される値がどのように変わるかを考えてみよう。

q_*をパラメータに含むのは，環境管理者Eが関与する提携である。その関数形状を，式(36)(37)(50)をもとに整理すると，次のようになる。

$$v(SE)=\frac{a_1}{q_*+a_2}+a_3\quad (a_1>0)\quad 下に凸な単調減少関数 \qquad (73)$$

$$v(UE)=b_1q_*^2+b_2q_*+b_3\quad (b_1>0)\quad 下に凸な2次関数 \qquad (74)$$

$$v(USE)=c_1q_*^2+c_2q_*+c_3\quad (c_1>0)\quad 下に凸な2次関数 \qquad (75)$$

式(70)(71)(72)におけるこれらの符号を見ると，q_*の変化に対して配分の変化が最も小さいと推定されるのは2次関数が差形式となるθ_Sである。最も大きいのは，2次関数の和形式となるθ_Eであり，中間に2次関数と単調関数の差形式をとるθ_Uが位置づけられる。従って，パラメータの値により厳密には異なるが，下水道管理者の負担は相対的に少なくなる傾向にあると推測される。

6.　おわりに

都市排水の再利用は，これまで水資源の不足を補う手段としての評価が主になされてきた。特に，造水コストが水道料金，下水道料金に対しどの程度になるかが注目されてきた。本稿で定義した提携費用のうち，オンサイト循環の費用最小化問題として扱われてきたと言える。しかしながら，再利用が徐々に増加する傾向にある現在では，都市全体の問題として捉えなおし，環境面からの評価も加えた計画論が必要と考えられる。

本研究は，循環利用による河川水質改善の効果を明示的に評価するため，再利用の水利用者，下水道管理者，環境管理者の協力3人ゲームとしてモデル化し，提携費用の分析を行い，次の結論を得た。

- 費用関数を線形と置いた場合の提携費用については，$v(U)$，$v(US)$が2次関数，$v(USE)$が2次関数に漸近する曲線となることを明らかにし，最小費用を与える再利用規模の存在条件を整理した。
- この結果，水利用に関わる水質の条件値(q_0，q_L，q_1)の関係と，費用関数のパラメータ(c_w，c_s，β_1，β_2，α)との関係を把握した。

●提携費用を将来水質基準 q_* の関数として整理しているため，ゲーム理論による配分額もその関数として整理できる。

今後の課題としては，具体的なケーススタディを通した分析が必要であるが，特に次の点からの検討が求められる。

●全体提携の費用が3次方程式の解となるが，その一般解を求めることは困難であるため，数値シミュレーションが必要である。

●合理性の成立要件に関して実際のパラメータの範囲を検討し，地域により異なる可能性がある要件と必ず成立する要件に分類する必要がある。

● q_* の変化に関する関数形を具体的に設定し，その影響の現れ方を把握する必要がある。

今後，上記の課題の解決を図り，地域に応じた循環利用型の水利用システムのあり方について分析を進めたいと考えている。

参考文献

1) 国土庁水資源部:平成5年度水資源白書，1993

2) Watanabe, H. and N. Okada: Game-theoretic Analysis of Integrated Environmetal Management with Reuse of Wastewater Combined, Stochastic and Statistical methods in Hydorology and Environmental Engineering, forthcoming.

3) 渡辺晴彦・岡田憲夫:循環型都市水利用システムの整備形態に関する基礎的考察，第4回水資源に関するシンポジウム前刷集，pp.177-182，1992.

4) 鈴木光男：社会システム—ゲーム論的アプローチ，共立出版，1976.

付録　下水処理場への流入水質の検討

提携 T における下水処理場への流入水質 $\widehat{q}^T$ は，次の3ケースで異なる。

- 提携 (S) 及び (SE) の場合（特に $\widehat{q}^S = \widehat{q}^{SE}$ である）
- 提携 (U) 及び (UE) の場合
- 提携 (US) 及び (USE) の場合

ここで，E が参加するか否かは再利用量 x の値により異なるが，定義式としては同じであり，下式のようになる。

$$\widehat{q}^S = \frac{(q_H + w_H)d_H + (q_H + w_L)d_L + q_r d_r}{d + d_r} = \frac{K + q_r d_r}{d + d_r} \quad \cdots\cdots 付\text{-}(1)$$

$$\widehat{q}^U = \frac{(q_H + w_H)d_H + (q_H + w_L)d_L + (q_L - q_H)x^U}{d} = \frac{K}{d} + \frac{q_L - q_H}{d}x^U \quad \cdots\cdots 付\text{-}(2)$$

$$\widehat{q}^U = \frac{\widehat{q}^U(d - x^U) + q_r d_r}{d - x^U + d_r}$$
$$= \frac{q_H d + w_H d_H + w_L d_L + q_r d_r}{d + d_r - x^U} - \frac{(2q_H d - q_L d + w_H d_H + w_L d_L)x^U + (q_L - q_H)(x^U)^2}{d(d + d_r - x^U)}$$
$$= \left\{\frac{K}{d} + \frac{(q_L - q_H)(2d + d_r)}{d}\right\} + \frac{q_L - q_H}{d}x^U$$
$$+ \frac{d_r\left(\frac{K}{d} - q_r\right) + \frac{q_L - q_H}{d}(d + d_r)(2d + d_r)}{x^U - d - d_r} \quad \cdots\cdots 付\text{-}(3)$$

$$\widehat{q}^{US} = \frac{(q_H + w_H)d_H + (q_H + w_L)d_L + q_r d_r + (q_L - q_H)x^{US}}{d + d_r} = \frac{K + q_r d_r}{d + d_r} + \frac{q_L - q_H}{d + d_r}x^{US} \quad \cdots\cdots 付\text{-}(4)$$

ただし，$K = q_H d + w_H d_H + w_L d_L$ である。双曲線関数となる式付-(3)の範囲を **Fig. 5** に示す。この関数は上に凸な形をとり，最大値は，

$$x = (d + d_r) - \sqrt{\frac{d_r}{d}\frac{K/d - q_r}{q_L - q_H} + (d + d_r)(2d + d_r)} \quad \cdots\cdots 付\text{-}25)$$

である。$K/d \gg q_r$ の場合（循環利用地区の現状の排水水質に比べ，他の市街地からの排水水質が良い）に，最大値は左側にシフトすることになる。

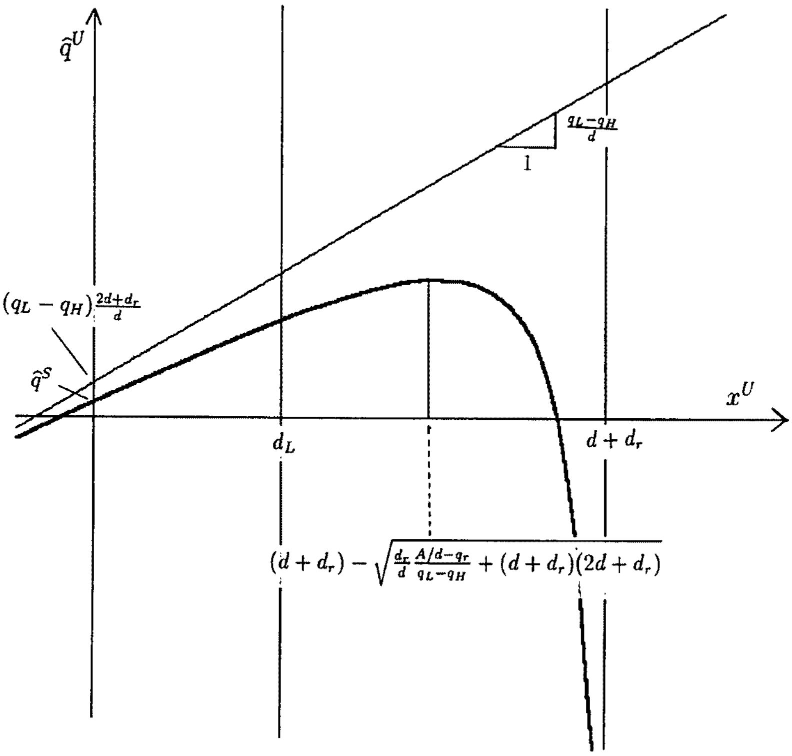

Fig. 5　Feasible area of $(x^U, \hat{q}^U)$