

## 管路・開水路流れ境界面の伝播を考慮した 非定常流の数値解析法

細田 尚・井上 和也・多田 彰秀

### HYDRAULIC TRANSIENT WITH PROPAGATION OF INTERFACE BETWEEN OPEN-CHANNEL FREE SURFACE FLOW AND PRESSURIZED FLOW

By *Takashi HOSODA, Kazuya INOUE and Akihide TADA*

#### Synopsis

The hydraulic transients with the propagation of multiple interfaces between open channel free surface flows and pressurized pipe flows, which can be seen due to the rapid change of flow discharge in the sewer network system, the tailrace tunnel of hydropower plants, etc., are investigated numerically. The fundamental 2D simulation model is firstly proposed for the simple assumed flow field by means of the control volume method. The numerical treatment of the propagation of an interface is considered in the model and then combined with the common methods of numerical simulation for the 2D unsteady incompressible flows. The simulation model developed here is applied to the hydraulic transients caused by the rapid change of discharge in the closed conduit with vertical slots such as manholes. It will be shown that the intrusion process of the long air cavities through vertical slots can be reproduced numerically in good agreement with the laboratory tests.

#### 1. 緒 言

近年、大都市の治水安全度を高める方策の一つとして、地下放水路や地下河川などが計画・施工されている。しかし、地下空間内で生じる可能性のある水工学上の諸問題については、今後検討を要する点も少なくないと思われる。そこで本研究では、下水道・地下放水路網などの地下水路系で生じる水理現象として、雨水・河川氾濫水の浸入によって生じる急変非定常流を取り上げ、その水理解析法について考察する。

地下水路系における過渡現象の水理学的な特徴は、水路内の流量が急増・急減した場合、流れの状態が自由表面を有する開水路流れの状態から自由表面が水路天端に着水した満管状態（管路流れの状態）に、または逆に管路流れから開水路流れに遷移する可能性があることである。このような遷移現象は、発電所放水路系においても負荷遮断などによる流量の急変時に生じることが知られている。

開水路流れと管路流れが共存している非定常流の解析法に関しては、従来、対象とする現象に応じて個々に研究が進められてきたように思われる。例えば、林<sup>1)</sup>は流れ込み式発電所放水路のサージングに関して、サージタンク水位が放水路天端より低くなった場合の簡易解析法を提案している。すなわち、Fig. 1を参照して、自由水面が放水路内へ進入した場合、水面を下流水位とサージタンク水位を結んだ直線で近似して、サージングの基礎式を導いている。また、Benjamin<sup>2)</sup>は、滴水の管路末端を解放したときの大空気泡の進入現象を理論的に研究し、空気泡先端の移動速度や空気泡形状を求めた。Benjaminの理論は、表面張力

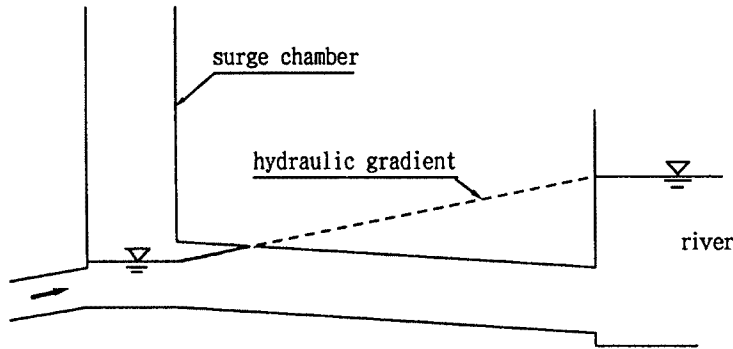


Fig. 1. Approximate graphical method for surging at initially full flowing tail-race tunnel [1].

の効果を考慮するなどしてより現実的な条件に適合するように改良され、実験的にも検証されている<sup>3)</sup>。これらの研究では、いずれも流れを非圧縮性流体と仮定している。一方、下水道網内の非定常流に関して、管路状態の領域には水の圧縮性を考慮した水撃波の基礎式を適用し、開水路状態の領域には通常の開水路非定常流の基礎式を用いる方法が開発されている<sup>4)</sup>。この場合、管路頂部に圧力波の伝播速度に対応する幅のスロットを立てることで、形式上全領域を開水路状態として解析することが可能になり、スロット・モデルと呼ばれている。ただし、雨水の浸入のような時間スケールの現象に対して水の圧縮性を考慮する必要性や、用いられている圧力波の伝播速度が数十メートル/秒とかなり小さいこと、スロット・モデルでは平面2次元場への拡張が容易でないなど、水理学的に明確でない点もある。

以上のように、管路・開水路共存状態の非定常流は、対象とする現象によって用いられる基礎式や解析法が異なり、また境界面の非定常伝播過程の水理学的取り扱いなど検討すべき課題も多い。そこで本研究では、非圧縮性流体の仮定の下で、開水路・管路状態の境界面の伝播の取り扱いについて考察し、これを従来の非定常流解析法に組み込むことにより共存状態の基本的な解析モデルを作製する。さらに、モデルを単純な流れ場および立杭からの空気浸入により境界面が発生・伝播する管路のサージング現象に適用し、現象の再現可能性と実用性を検討する。

## 2. 平面2次元数値解析モデル

まず、基本となる平面2次元場における流れの基礎式を示し、その後に管路・開水路流れ境界面の伝播を伴う数値解析の手順について説明する。

### 2.1 基礎式

#### (1) 管路状態の平面2次元流れの基礎式

Fig. 2 に示した座標系の下で、路床と天井の間を満管状態で流れる場合の基礎式を示せば次のようになる。

(連続式)

$$\frac{\partial UD}{\partial x} + \frac{\partial VD}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

(運動方程式)

$$\frac{\partial UD}{\partial t} + \frac{\partial DU^2}{\partial x} + \frac{\partial DUV}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p_D}{\rho} \right) - gD \frac{\partial (D + z_b)}{\partial x} - 2 \frac{\tau_{bx}}{\rho} \dots\dots\dots (2)$$

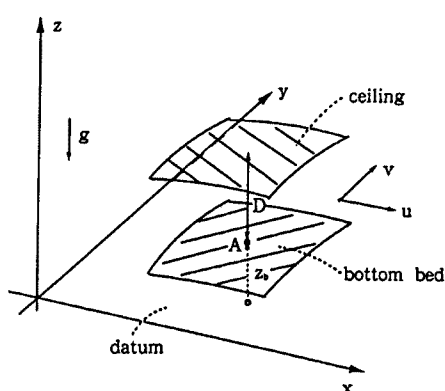


Fig. 2. Coordinate system for 2-D pressurized flow region.

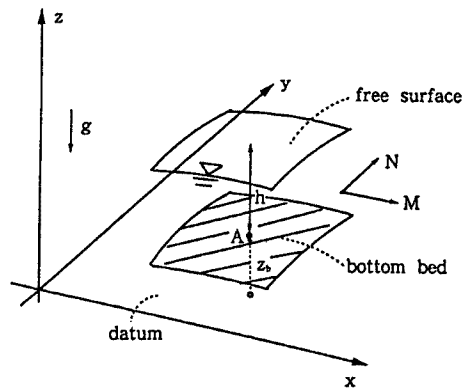


Fig. 3. Coordinate system for 2-D free surface open channel flow region.

$$\frac{\partial VD}{\partial t} + \frac{\partial DUV}{\partial x} + \frac{\partial DV^2}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p_D}{\rho} \right) - gD \frac{\partial (D + z_b)}{\partial y} - 2 \frac{\tau_{by}}{\rho} \dots (3)$$

ここに、(U, V)：路床から天端で平均された流速の (x, y) 方向成分，D：路床から天井までの距離，z<sub>b</sub>：基準水平面から路床までの距離，p<sub>D</sub>：Fig. 2 の A 点での z = z<sub>b</sub> + D における圧力，(τ<sub>bx</sub>, τ<sub>by</sub>)：路床および天井に作用する応力ベクトルの成分。

(2) 開水路状態の平面 2 次元流れの基礎式

Fig. 3 に示した座標系の下で、自由水面を有する流れの基礎式は次のようになる。

(連続式)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \dots (4)$$

(運動方程式)

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial UM}{\partial x} + \frac{\partial VM}{\partial y} = -gh \frac{\partial (z_b + h)}{\partial x} - \frac{\tau_{bx}}{\rho} \dots (5)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial UN}{\partial x} + \frac{\partial VN}{\partial y} = -gh \frac{\partial (z_b + h)}{\partial y} - \frac{\tau_{by}}{\rho} \dots (6)$$

ここに、(M, N)：各々 M ≡ Uh, N ≡ Vh で定義される流量フラックス・ベクトルの成分，h：水深である。

運動方程式中のせん断応力は、次のマニング則で評価する。

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho} = \frac{gn^2 U \sqrt{U^2 + V^2}}{h^{1/3}}, \quad \frac{\tau_{by}}{\rho} = \frac{gn^2 V \sqrt{U^2 + V^2}}{h^{1/3}} \dots (7)$$

2.2 数値解析の手順

数値解析法としてはコントロール・ボリューム法を用いる。Fig. 4 に格子分割および水理量の定義位置を示した。流れを管路状態、開水路状態および両者の境界の三領域に分類し、各領域に対応した基礎式を用いて計算を行う。各領域の解析法を具体的に示せば次のようになる。

(1) 管路流れの領域の解析法

時刻 t = n · Δt の M, N および p<sub>D</sub> を既知とする。このとき、時刻 t = (n + 1) · Δt の各水理量を次の手順により求める。

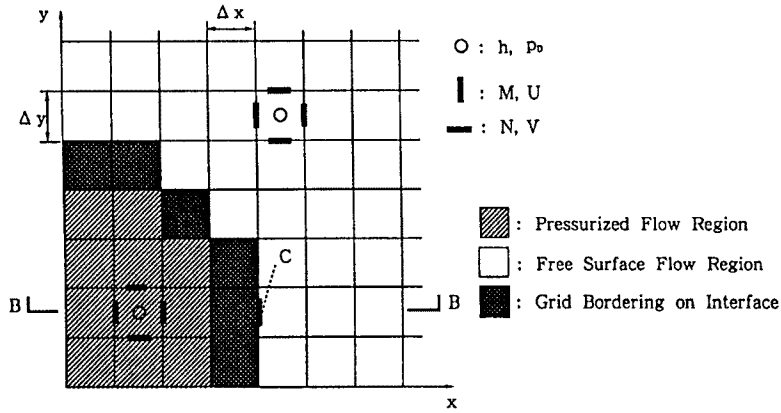


Fig. 4. Classification of flow domain and definition points of hydraulic variables.

① 次式で  $M^*$  および  $N^*$  を求める。

$$\frac{M^* - M^n}{\Delta t} = - (\text{慣性項})^n - (\text{圧力項})^n - (\text{残りの項})^n \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{N^* - N^n}{\Delta t} = - (\text{慣性項})^n - (\text{圧力項})^n - (\text{残りの項})^n$$

(8) 式右辺各項の離散化は、汎濫水の挙動解析法<sup>5)</sup>に準じる。

②  $M^*$  および  $N^*$  は連続式(1)を満足する必要があるため、圧力  $p_D$  を  $p_D^*$  に修正する。

$$p_D^* = p_D + \delta p_D \dots\dots\dots (9)$$

Fig. 5 に示した圧力  $p_{D_{i+1/2, j+1/2}}$  を考え、連続式に関する誤差を

$$\varepsilon^* = \frac{M_{i+1, j+1/2}^* - M_{i, j+1/2}^*}{\Delta x} + \frac{N_{i+1/2, j+1}^* - N_{i+1/2, j}^*}{\Delta y} \dots\dots\dots (10)$$

とおけば、圧力の修正量  $\delta p_D$  は通常の2次元非圧縮性流体の解析法<sup>6)</sup>と同様に次式で与えられる。

$$\delta p_{D_{i+1/2, j+1/2}}^* = \frac{-\omega \cdot \rho \varepsilon^*}{2D\Delta t \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)} \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $\omega$  は収束計算のパラメータで、本研究では0.5とした。

③ ②で求められた  $p_D^*$  を運動方程式(8)に代入して  $M^*$  および  $N^*$  を求め直す。

④  $M^*$  および  $N^*$  が連続式を満足しておれば(実際には誤差の絶対値が基準値より小さければ)  $M^*$  および  $N^*$  を時刻  $t = (n+1) \cdot \Delta t$  の値として次ステップに進む。満足していないならば、(8)式の圧力項中の  $p_D$  を  $p_D^*$  に置き換えて、②、③の手順で  $p_D^*$ ,  $M^*$  および  $N^*$  を求め直す。

⑤ ④の手順を誤差  $\varepsilon$  が収束するまで繰り返す。

以上述べた①~⑤を繰り返すことによって、管路領域の流れの時間発展を計算することができる。

(2) 開水路流れの領域の解析法

洪水汎濫水の挙動解析法<sup>5)</sup>を用いる。

(3) 管路領域と開水路領域の境界面の取扱い

Fig. 4 に示した B-B 断面を例として、境界面の取り扱いを説明する。B-B 断面の境界面 C の流量フ

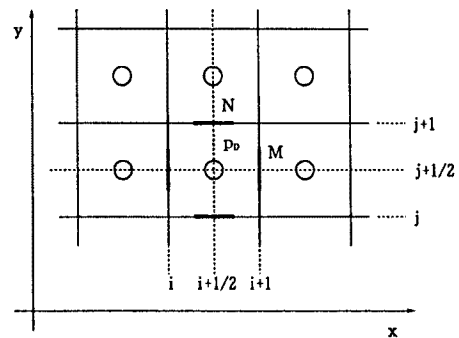


Fig. 5. Control volume for derivation of Eq. (11).

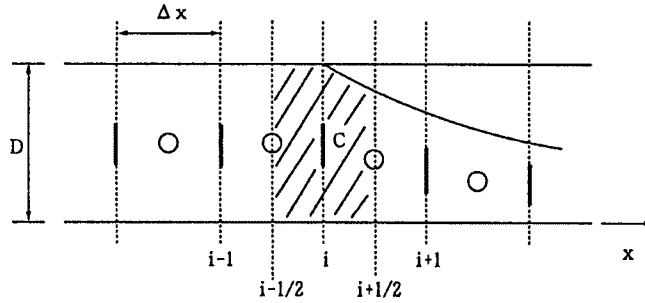


Fig. 6. Side view along B-B line of Fig. 4.

ラックス  $M$  が次のように計算される。

まず、運動方程式 (2) および (5) を  $x$  に関して Fig. 6 の  $x_{i-1/2}$  から  $x_{i+1/2}$  まで積分する。 $x_{i-1/2} \leq x \leq x_i$  に対して (2) 式を適用し、 $x_i < x \leq x_{i+1/2}$  に対して (5) 式を適用することにより次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} \Delta x + \Delta x + (UM)_{x_{i+1/2}} - (UM)_{x_{i-1/2}} + \frac{\partial VM}{\partial y} \Delta x \\ = -g \left( \frac{h^2}{2} \right)_{x_{i+1/2}} + \left( D \frac{\partial p}{\rho} + \frac{gD^2}{2} \right)_{x_{i-1/2}} \dots\dots\dots (12) \\ - gD (z_{bx_{i+1/2}} - z_{bx_{i-1/2}}) - \left( \frac{\tau_{bx}}{\rho} \right)_{x_i} \frac{3\Delta x}{2} \end{aligned}$$

上式を管路・開水路領域と同様に離散化し、境界面 C の流量フラックス  $M$  を計算する。他の境界面も同様に計算される。

上述の (1)～(3) で述べた 3 通りの領域の解析法を用いて、境界面の 2 次元的伝播を伴う非定常流の再現が可能になる。計算の手順を示せば以下のようなになる。

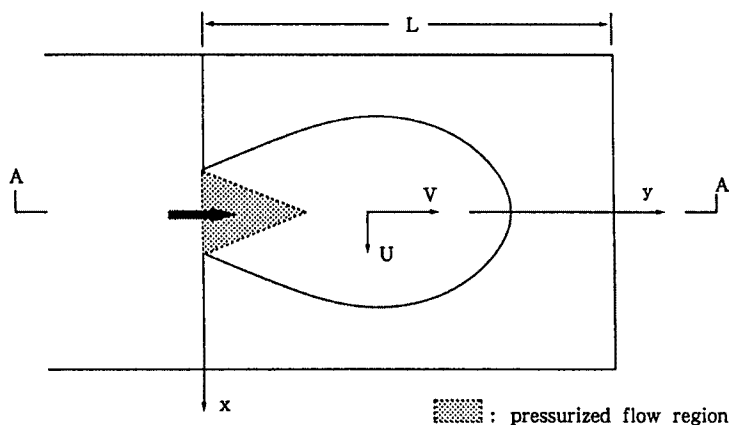
- ① 時刻  $t = (n - 1/2) \cdot \Delta t$  の境界面の位置、開水路領域の水深および  $t = n \cdot \Delta t$  の流量フラックスを既知とする。
- ② 時刻  $t = (n - 1/2) \cdot \Delta t$  の開水路領域と、管路領域のうち境界面に接している格子に開水路流れの連続式 (4) を適用し、時刻  $t = (n + 1/2) \cdot \Delta t$  の水深を求める。開水路領域内格子の水深が路床から天端までの距離  $D$  を越えれば、この格子を管路領域の格子とする。また境界面に接する管路領域内格子の水深が  $D$  より小さくなれば、この格子を開水路内格子とする。このように、時刻  $t = (n + 1/2) \cdot \Delta t$  の流れの新たな領域区分と境界面の移動が行われる。
- ③ 時刻  $t = (n + 1) \cdot \Delta t$  の流量フラックスを (1)～(3) で述べた方法で計算する。
- ④ ①～③ を所要の時刻まで繰り返す。

以上が、境界面の 2 次元的伝播を伴う非定常流の基本的数値解析モデルの概要である。次に、このモデルを用いて試験的な数値計算を試み、少なくとも定性的には妥当な結果が得られることを確かめる。

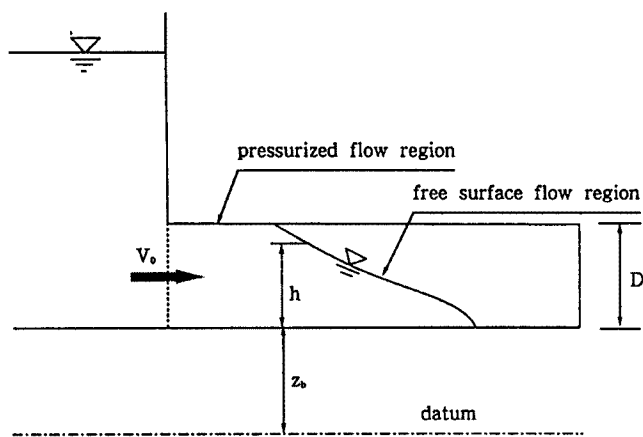
### 3. テスト・シミュレーション

#### 3.1 対象とする流れ

単純な流れ場を想定して数値解析を行い、現象再現の可能性を検討する。対象とする流れは Fig. 7 に示した貯水槽の部分的急開によって生じる流れである。急開により水槽の水が水の存在していない領域に浸入していくとともに、入口近傍に水面が天端に着水した管路流れの領域 (Fig. 7(a) 網掛部) が発生し伝播する。



(a) Plan view



(b) Side view (A - A section)

Fig. 7. Subjected flow domain for test simulation.

Table 1. Conditions of test simulation

$D$ (m)	$V_0$ (cm/s)	$n$	$L$ (m)	$\Delta x$ (m)	$\Delta y$ (m)	$\Delta t$	$Fr$
3.0	10.0	0.02	40	1.0	0.5	0.001	1.84

### 3.2 計算結果の考察

Table 1 に計算の条件を示す。Fig. 8 は時間の経過に伴う水深および流速ベクトルの変化を示したものである。また、Fig. 9 には  $y$  軸上の水の浸入過程を示した。これらの図から、時間の経過とともに入口付近の管路領域が拡がるとともに、水が下流端に到達すると段波状になって管路領域が上流に遡上する様子が再現されている。ただし、空気圧は大気圧から変化しないと仮定して計算している。この試験的計算の結果から、本解析モデルを用いて境界面の伝播を伴う非定常流が少なくとも定性的には再現されることが確認される。

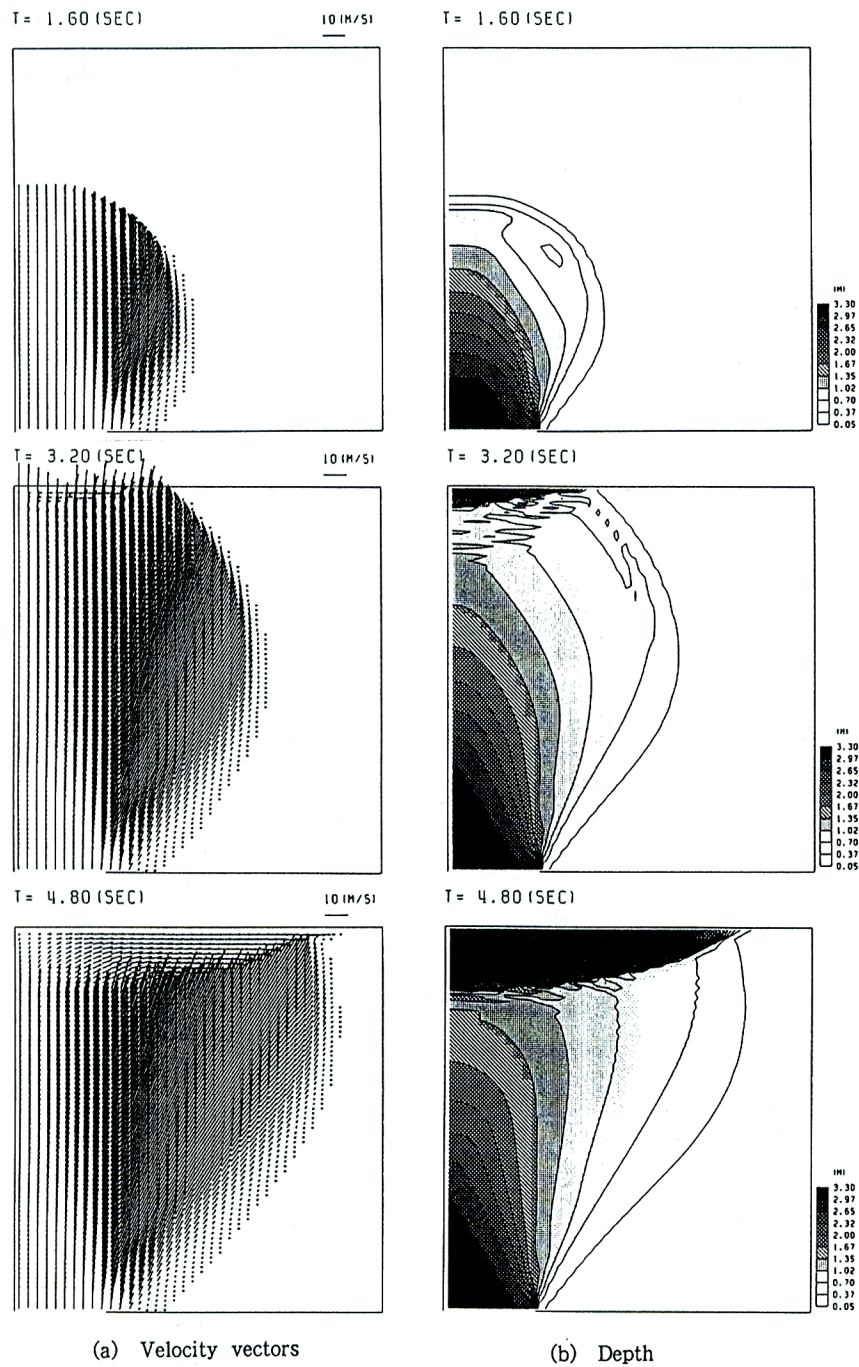


Fig. 8. Intrusion process of water flow with interface (velocity vectors and contour line of depth).

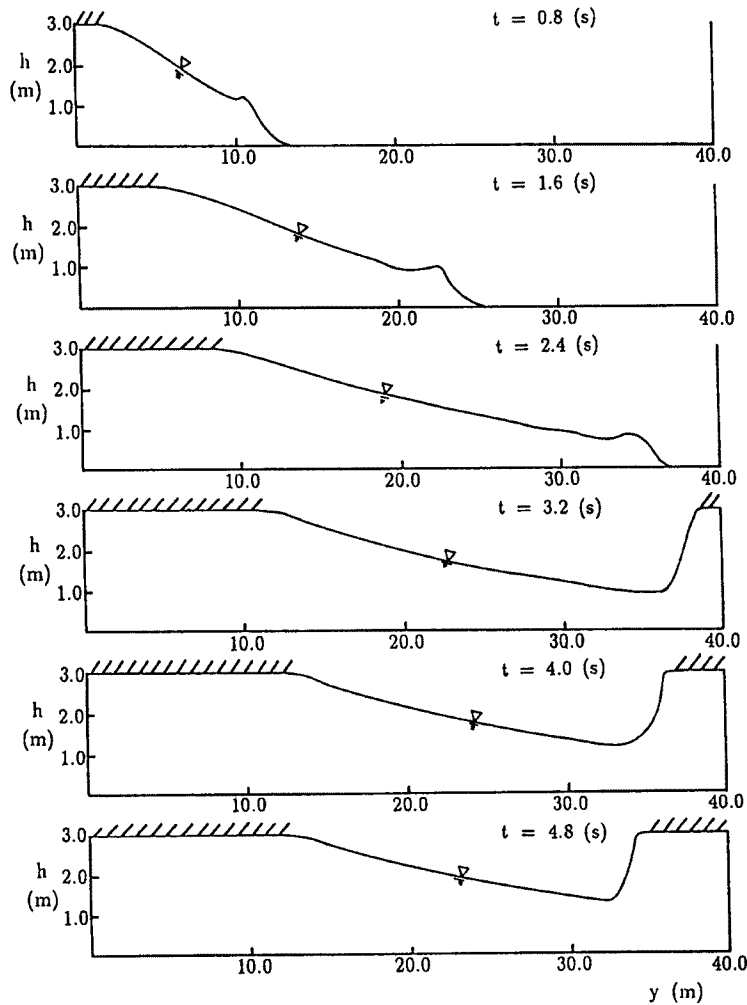


Fig. 9. Spatial depth distribution along y axis.

#### 4. 実験結果との比較によるモデルの検証

次に、境界面の伝播を伴う非定常流に関する基礎的な水理実験を行い、数値解析モデルを用いた計算結果と実験結果を比較することによりモデルの適用性について検討する。

##### 4.1 水理実験の概要

Fig. 10 に示す複数の立杭を有する管路系に通水し、管路入口で流量を急遮断することにより、管路・開水路境界面の伝播を伴う非定常流を発生させた。実験の水理諸量を Table. 2 に示した。Run 1 は管路入口に立杭が一つ存在する場合、Run 2 は入口と中央付近の計二つ存在する場合であり、初期の流量および下流端水深は両者とも同一である。

流量遮断後の流れをビデオ撮影し、立杭水位および空気泡浸入後の水面形の時間変化を読み取った。生じた現象の特徴を示せば次のようになる。まず、流量遮断後立杭水位が急減し、水路天端より低くなると空気泡の浸入と境界面の下流方向への伝播が見られる。さらに時間が経過すると、境界面は停止し流れの逆流とともに上流方向に遡上する。



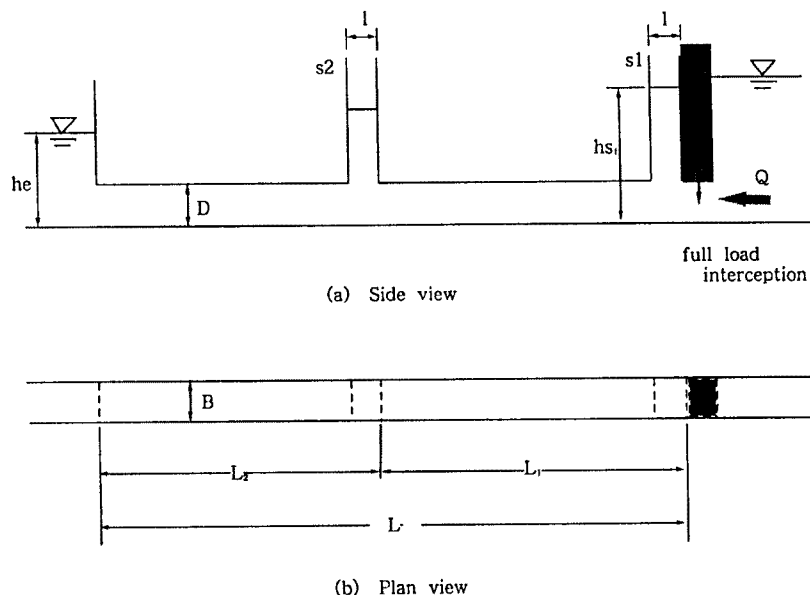


Fig. 10. Schematic illustration of laboratory test.

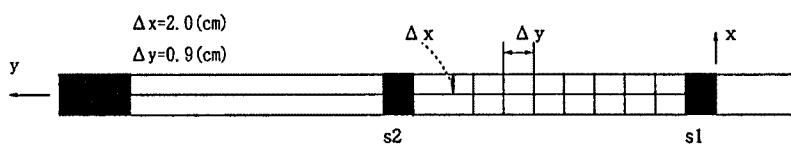


Fig. 11. Grid system of numerical simulations.

Table 2. Hydraulic variables of laboratory tests

	Q (1/s)	U (cm/s)	D (cm)	$\omega$ (cm)	tank	L (cm)	L <sub>1</sub> (cm)	h <sub>s1</sub> (cm)	l (cm)	h <sub>e</sub> (cm)	n	Re
Run 1	0.224	69.1	1.8	1.8	s1	184	110	9.0	2	5.12	0.008	11052
Run 2	0.224	69.1	1.8	1.8	s1, s2	184	110	9.0	2	5.12	0.008	11052

$$Re \equiv UD/\nu$$

次に、数値解析モデルを用いてこのような現象の再現を試みる。

#### 4.2 実験結果と計算結果の比較と考察

管路を Fig. 11 に示すように格子分割し、路床、天端だけでなく側壁のせん断応力も Manning 則で評価して計算を行った。

Fig. 12 に Run 1 の実験結果と計算結果の水深分布を示した。計算結果は実験結果の特性を定性的には再現しているが、境界面が下流方向に大きく浸入し過ぎており、実験結果と適合していない。これを改善するために、開水路流れの運動方程式中に渦動粘性項を付加して計算を行った。すなわち、 $y$  方向の運動方程式 (6) 右辺に

$$\frac{\partial -v'^2 h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( h D_h \frac{\partial V}{\partial y} \right), \quad D_h = \alpha h |V| \dots \dots \dots (13)$$

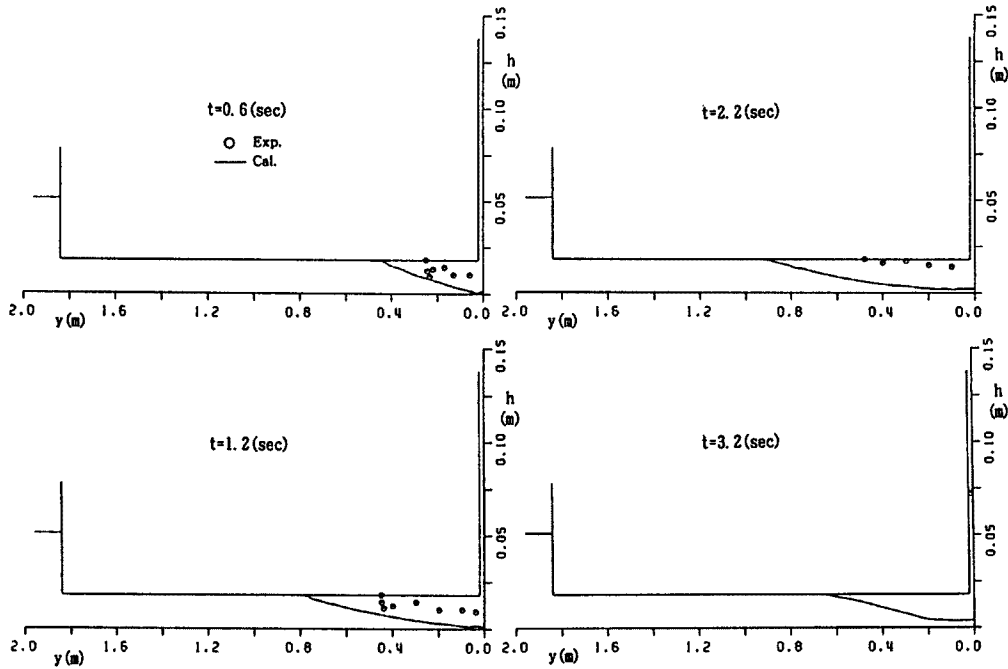
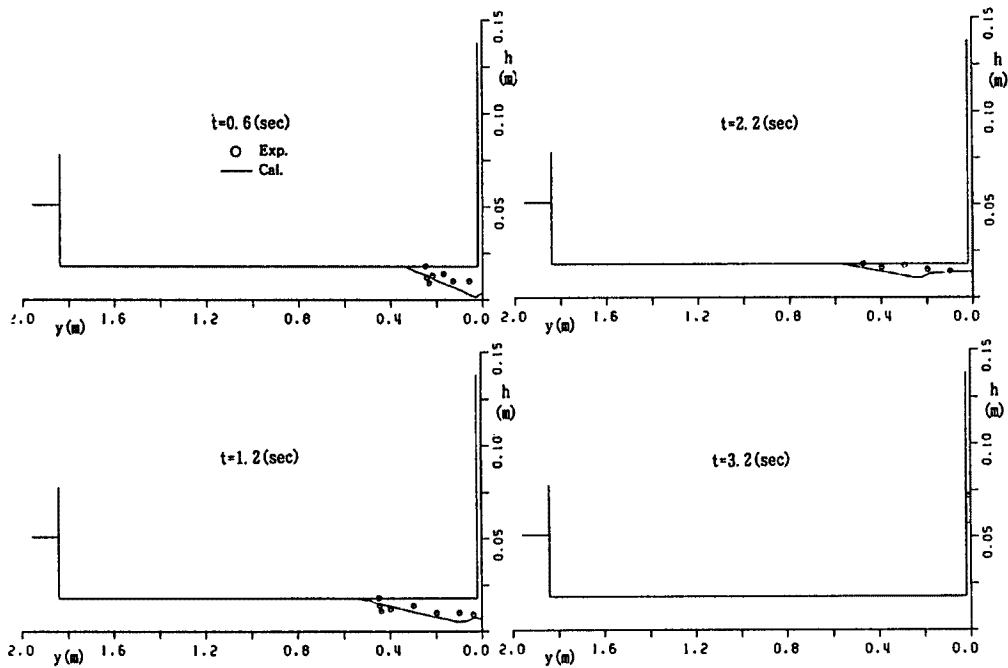


Fig. 12. Spatial distributions of depth (Run 1).

Fig. 13. Calculated results of depth distributions with eddy viscous term (Run 1,  $\alpha=0.05$ ).

を付加し、渦動粘性係数  $D_h$  を  $\alpha h |V|$  と評価して計算した結果が Fig. 13 である。ただし、 $v'$  は  $y$  方向の乱れ速度であり、Fig. 13 では  $\alpha = 0.05$  を用いている。渦動粘性項を付加した計算結果には、境界面の浸入長および水面形にかなりの改善が見られる。ただし、境界面近傍の水面の形を詳細に見ると、計算結果には実験結果に見られるくびれた形が再現されていない。大空気泡の浸入過程に関して、Benjamin<sup>2)</sup> や

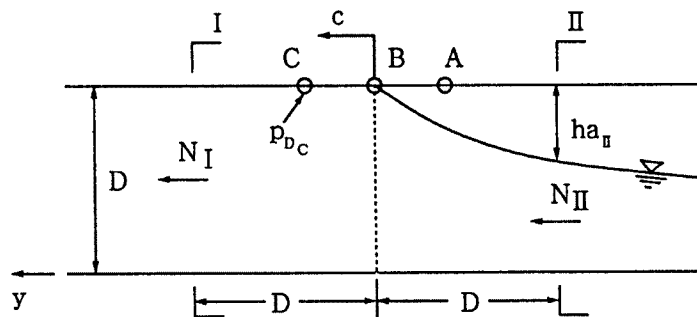


Fig. 14. Schematic illustration for evaluation of pressure near stagnation point B.

Wilkinson<sup>3)</sup> などにより理想的な場を対象に研究が進められてきた。これらの研究では、Benjamin が導入した空気泡先端（よどみ点）での水と空気の圧力の不連続性が考慮されている。本研究においても、よどみ点の圧力処理を数値解析モデルの中に次のように導入する。

Fig. 14 の空気泡先端（B 点）の伝播速度を  $c$  とすると、C 点の圧力はベルヌーイの式から次のように評価される<sup>2)</sup>。

$$\frac{p_{Dc}}{\rho} = \frac{p_{Db}}{\rho} - \frac{(V_1 - c)^2}{2} \quad \text{for } V_1 - c < 0 \dots\dots\dots (14)$$

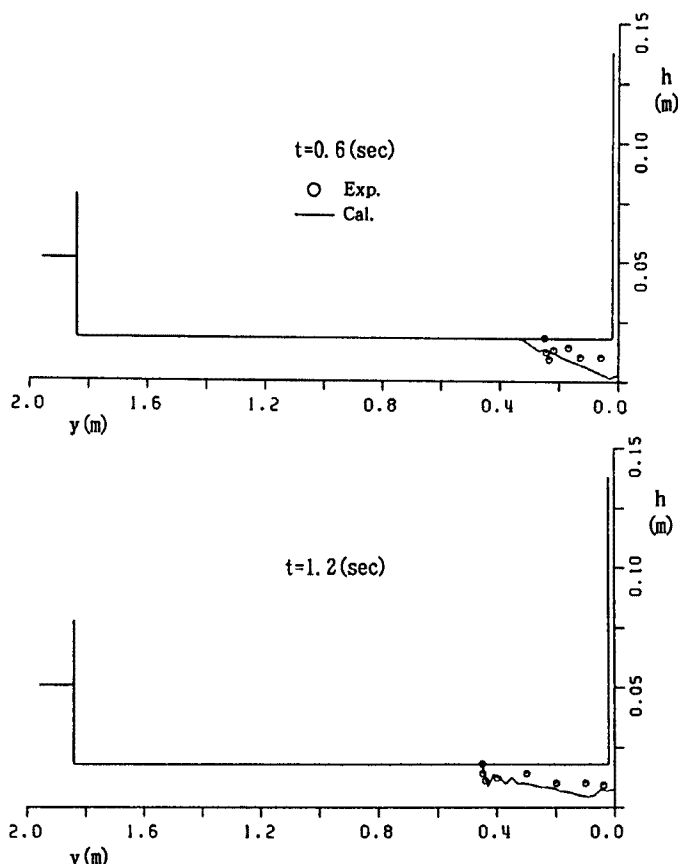


Fig. 15. Calculated results with both eddy viscous term and pressure evaluated by Eq. (14) (Run 1,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = \sqrt{1.5}$ ).

伝播速度  $c$  を、B 点より管の長さ  $D$  離れた I 断面と II 断面の流量フラックス  $N_I$  および  $N_{II}$  を用いて

$$c = \beta \frac{N_I - N_{II}}{h_{aII}} \dots \dots \dots (15)$$

と評価し、 $p_{DB}$  を大気圧とすれば (14) 式から境界面に接する格子の圧力が求められる。この圧力処理を数値解析モデルに組み込み、 $\beta = \sqrt{1.5}$  として計算した結果の一部が Fig. 15 である。計算結果には、実験結果に見られるくびれた水面形がある程度再現されている。

Run 2 の粘性項を考慮しよどみ点圧力処理を行った計算結果と実験結果の比較を Fig. 16 に示す。計算結果は実験結果とほぼ適合しており、本解析モデルの適用性が確認される。

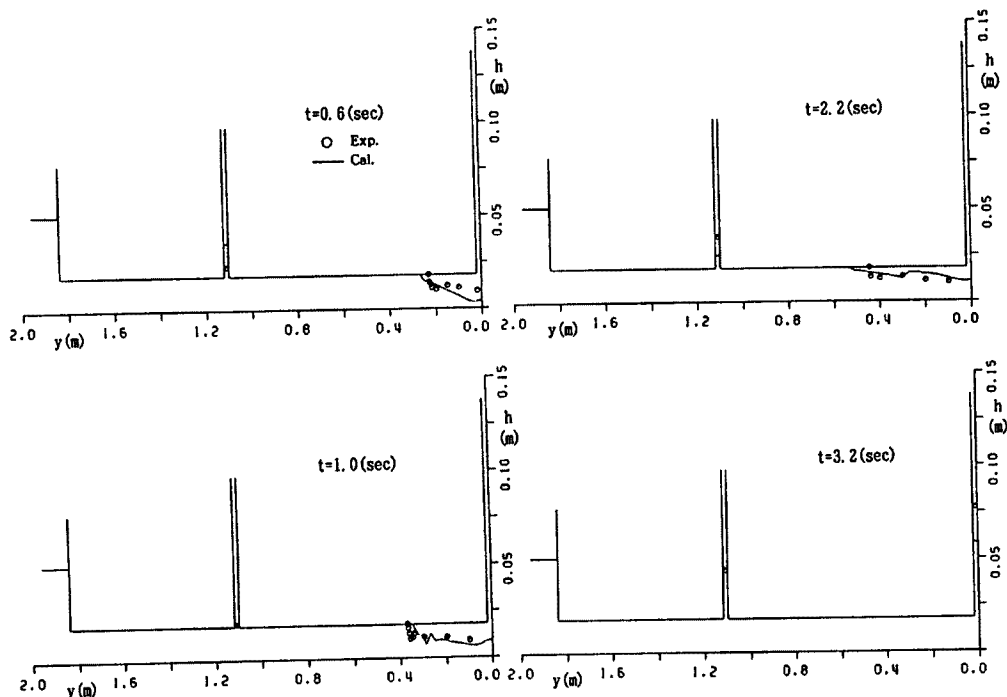


Fig. 16. Calculated results with both eddy viscours term and pressure evaluated by Eq. (14) (Run 2,  $\alpha=0.05$ ,  $\beta=\sqrt{1.5}$ ).

## 5. 結 語

本研究は、管路・開水路流れ境界面の伝播を伴う非定常流の非圧縮性流体としての数値解析モデルについて考察するとともに、試験的なシミュレーションの結果および基礎的な実験結果との比較を通じて、モデルの適用性と実用性を検証しようとしたものである。得られた主要な結果をまとめると次のようになる。

- ① 流れを管路、開水路および境界面の3領域に分割し、各領域の数値的な取り扱いを示すとともに、境界面位置を追跡しながら全体の流れを解析する基本的な方法を示した。
- ② 基本解析モデルを、ゲートの部分的急開によって生じる流れに適用し、境界面の2次元的伝播過程が少なくとも定性的には再現されることを確認した。
- ③ さらに、モデルを立杭を有する管路系の流量遮断後の非定常流に適用し、計算結果と実験結果を比較した。その結果、基本解析モデルの開水路流れの運動方程式に渦動粘性項を付加し、空気泡先端（よどみ点）の圧力の不連続性を考慮することにより、実験結果とほぼ適合する結果が得られた。

以上のように、本研究の解析モデルは境界面の伝播を伴う非定常流を再現する有効な方法の一つと考えられる。今後、下水道内の流れ解析に用いられてきた流体の圧縮性を考慮したスロット・モデルと比較するとともに、本解析モデルのより実的な適用について研究を進めて行きたい。

最後に、本研究を行うに当たって多大な協力を頂いた京都大学大学院・北原政宏氏および福住晃氏に深く感謝いたします。

#### 参 考 文 献

- 1) Hayashi, T.: Simplified Solution of Surging at the Surge Chamber at the Initially Full-Flowing Tail-Race Tunnel due to Load Decrease, 土木学会論文集, 第71号, 1960, pp. 1-6.
- 2) Benjamin, T. B.: Gravity Current and Related Phenomena, J. Fluid Mech., Vol. 31, pp. 209-248, 1968.
- 3) Wilkinson, D. L.: Motion of Air Cavities in Long Horizontal Ducts, J. Fluid Mech., Vol. 118, pp. 109-122, 1982.
- 4) Song, C. C. S., J. A. Cardle and K. S. Leung: Transient Mixed-Flow Models for Storm Sewers, J. Hydraulic Eng., ASCE, Vol. 109, No. 11, pp. 1487-1504, 1983.
- 5) 井上和也：開水路非定常流の数値計算法とその水工学への応用に関する研究, 京都大学学位論文, 1986.
- 6) Hirt, C. W. and J. L. Cook: Calculating Three-Dimensional Flows around Structures and over Rough Terrain, J. Computational Physics, Vol. 10, 1972, pp. 324-340.