

二層モデルによる複断面河道の流れおよび河床変動の数値解析

芦田 和男・江頭 進治・劉 炳義

NUMERICAL CALCULATION OF FLOW AND BED EVOLUTION IN COMPOUND CHANNELS BY A TWO-LAYER FLOW MODEL

By Kazuo ASHIDA, Shinji EGASHIRA and Bingyi LIU

Synopsis

A numerical model is developed based on a two-layer flow model for the purposes of predicting the flow and the bed evolution of alluvial rivers with complicate geometries including the case of compound channel flow. The reasons for using a two-layer model instead of the common depth-averaged two-dimensional model are: (a) It overcomes the difficulty due to the sudden change of water depth between main channel and flood plain, and then the boundary conditions at the side banks of main channel can be exactly represented; (b) It is very useful for investigating the influence of over-bank flow on the in-bank flow, which is important for river management, especially for the protection of bank erosion; (c) Based on the velocity profiles computed by the two layer model, the velocity components near bed surface, which is an indispensable parameter in the calculation of bed variation, can be easily predicted in terms of an approximate method.

In the present model, a boundary-fitted orthogonal coordinate system is employed, which has several advantages: (a) accurate representation of the boundary conditions, especially for the Neumann type; (b) the avoidance of complexities and the substantial computing time and storage; (c) increasing the accuracy of the computed solution. Furthermore, in order to evaluate the influences of sediment sorting on bed deformation, the model is constructed to deal with sediment mixtures. By comparing the calculated results with the measured ones, it is shown that the present numerical model has the ability of simulating the bed deformation and sediment sorting phenomenon in meandering channels with flood plain flows.

1. 序 論

河川は、一般に広い高水敷を持った複断面河道を持っている (Fig. 1)。高水敷は、いうまでもなく洪水を流下させ、かつ中小洪水や平時時の流量を低水路におさめ、河道の安定をはかるばかりでなく、水を有効に利用するために作られたものである。その広い空間は、ウォーターフロントとしての機能を持っており、治水を基本におきながらも、様々の用途に利用されつつある。こうした状況にあり、堤防および高水敷を含めて河川をいかに適切に維持・管理していくかは重要な課題となっている。そのためには、複断面流れおよびそれに伴う流砂・河床変動に関する知識の集積が必要である。

こうした見地より、著者らは、「複断面河道における流砂と河床変動」に関する研究に取り組んできた^{1), 2), 3), 4)}。それによって、いくつかの興味ある現象を明らかにした。しかし、複雑な形状をもつ実河川

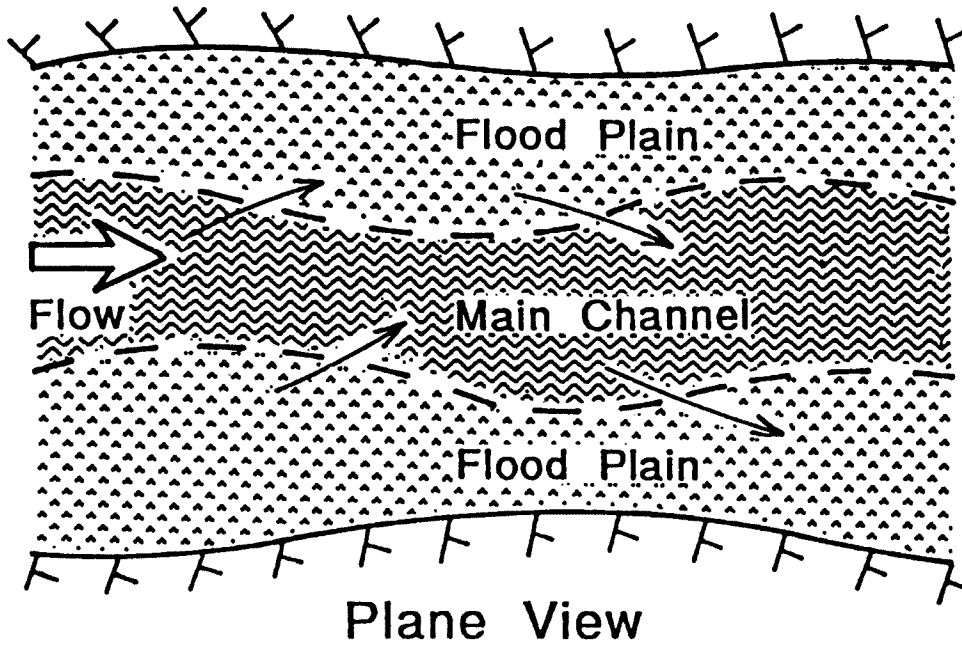


Fig. 1. Schematizing of compound channel flows.

を対象として論じる場合には、汎用性のある数値解析モデルの確立が必要となっている。そこで、本研究は、複断面河道の流れ及び河床変動の解析に適用できる実用性のある数値モデルを開発することを目的として行なったものである。

2. 支配方程式

2.1 座標系

序論に述べられたように、本数値解析モデルは任意の法線形を持つ河道流れを対象とするため、Fig. 2に示すような境界に相応した直交曲線座標系 (Boundary-fitted orthogonal curvilinear coordinates) が用いられている。ここに、 ξ と η は水平面上 (Horizontal plane) における直交曲線座標軸であり、 z は鉛直軸 (上向きが正とする) である。任意の三次元直交曲線座標系と区別するために、これが“河道型直交座標系”と呼ばれている⁴⁾。 $\eta = \text{constant}$ と $\xi = \text{constant}$ の曲線軸の長さは、それぞれ s 、 n で表わされ、測度係数 $h_\xi(\xi, \eta)$ と $h_\eta(\xi, \eta)$ は次式で定義されている。

$$\begin{cases} \delta s = h_\xi(\xi, \eta) \delta \xi \\ \delta n = h_\eta(\xi, \eta) \delta \eta \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

それぞれ s-lines と n-lines が正の方向に発散する場における n-lines と s-lines の曲率を正とする場合、次式が得される。

$$\begin{cases} \frac{1}{r_s} = \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \\ \frac{1}{r_n} = \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \end{cases} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 r_s と r_n はそれぞれ s-line と n-line の曲率半径である。

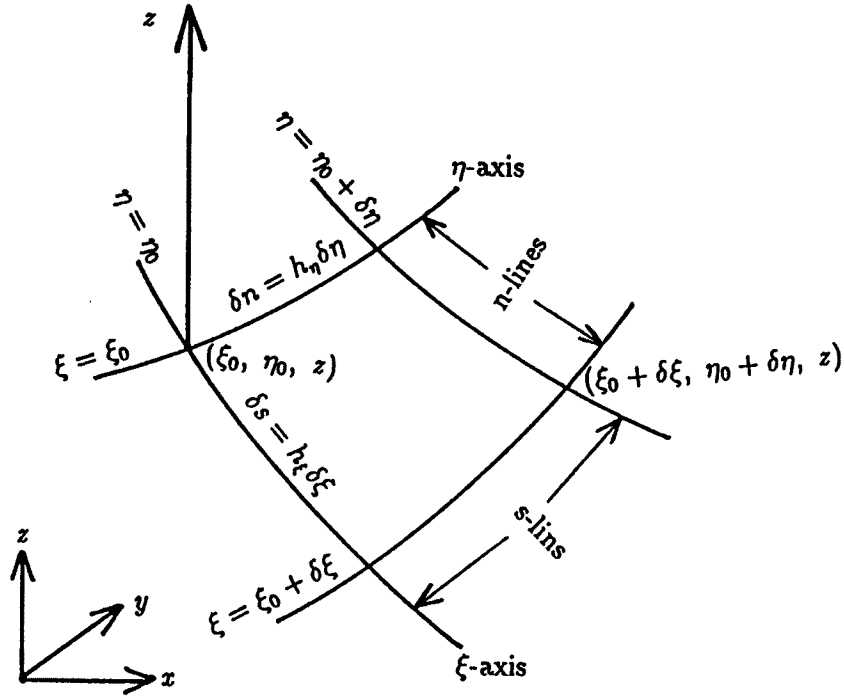


Fig. 2. Definition sketch of the river boundary-fitted orthogonal curvilinear coordinates.

2.2 二層浅水流モデル

流れの連続式および運動方程式を Fig. 3 に示すように、水深方向に上下層の二層に分けて積分することにより、二層モデルの支配方程式が得される⁴⁾。上述の直交座標系において、連続式と運動方程式は、それぞれ次のように表わされる。

$$\sum_{l=1}^2 \left[\frac{\partial(u_{sl}h_l)}{\partial s} + \frac{\partial(u_{nl}h_l)}{\partial n} + \frac{u_{sl}h_l}{r_n} + \frac{u_{nl}h_l}{r_s} \right] = 0 \dots\dots\dots (3)$$

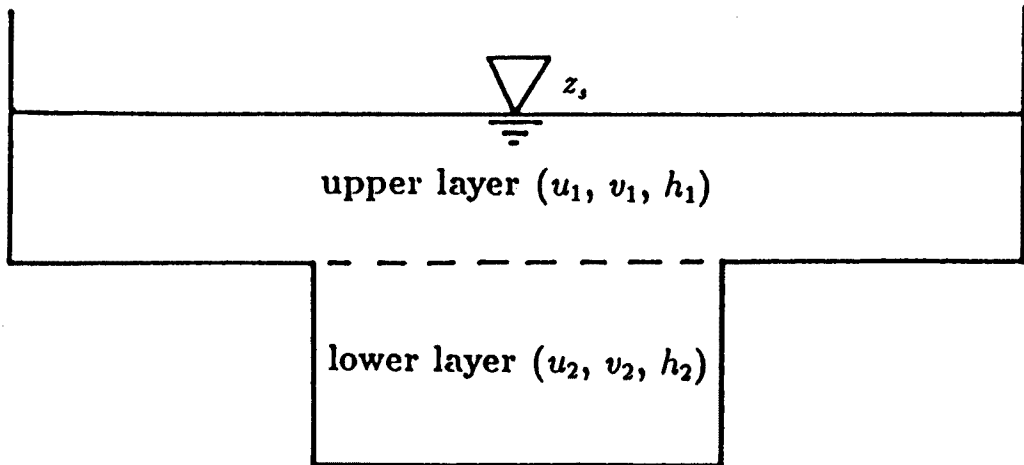


Fig. 3. Two-layer model of a compound channel.

$$u_{sl} \frac{\partial u_{sl}}{\partial s} + u_{nl} \frac{\partial u_{sl}}{\partial n} + \frac{u_{sl} u_{nl}}{r_s} - \frac{u_{nl}^2}{r_n} = -g \frac{\partial z_s}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\tau_{ssl}}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\tau_{snl}}{\rho} \right) + \frac{1}{h_l} \frac{\tau_{sal} - \tau_{sbl}}{\rho} + \frac{2}{r_s} \frac{\tau_{snl}}{\rho} + \frac{1}{r_n} \frac{\tau_{ssl} - \tau_{nnl}}{\rho} \dots (4)$$

$$u_{sl} \frac{\partial u_{nl}}{\partial s} + u_{nl} \frac{\partial u_{nl}}{\partial n} + \frac{u_{sl} u_{nl}}{r_n} - \frac{u_{sl}^2}{r_s} = -g \frac{\partial z_s}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\tau_{nnl}}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\tau_{snl}}{\rho} \right) + \frac{1}{h_l} \frac{\tau_{nal} - \tau_{nbl}}{\rho} + \frac{2}{r_n} \frac{\tau_{snl}}{\rho} + \frac{1}{r_s} \frac{\tau_{nnl} - \tau_{ssl}}{\rho} \dots (5)$$

ここに、 l は層を示す指標であり、 $l=1$ は上層、 $l=2$ は下層を示す。 u_{sl} 、 u_{nl} はそれぞれ第 l 層の $s \cdot n$ 方向の流速、 h_l は第 l 層の水深、 τ_{sal} 、 τ_{nal} はそれぞれ第 l 層の上面に働く $s \cdot n$ 方向のせん断応力、 τ_{sbl} 、 τ_{nbl} は第 l 層の下面に働くせん断応力の $s \cdot n$ 方向成分である。 τ_{ssl} 、 τ_{nnl} 、 τ_{snl} は第 l 層について水深平均した乱れによる応力であり、それぞれ次式で与えられる。

$$\frac{\tau_{ssl}}{\rho} = 2\varepsilon_l \left(\frac{\partial u_{sl}}{\partial s} + \frac{u_{nl}}{r_s} \right) \dots (6)$$

$$\frac{\tau_{nnl}}{\rho} = 2\varepsilon_l \left(\frac{\partial u_{nl}}{\partial n} + \frac{u_{sl}}{r_n} \right) \dots (7)$$

$$\frac{\tau_{snl}}{\rho} = \varepsilon_l \left(\frac{\partial u_{sl}}{\partial n} + \frac{\partial u_{nl}}{\partial s} - \frac{u_{sl}}{r_s} - \frac{u_{nl}}{r_n} \right) \dots (8)$$

ここに、 ε_l は第 l 層の平均渦動粘性係数である。

渦動粘性係数の鉛直分布は次式のように与えられると仮定する。

$$\varepsilon = \kappa u_* z \left(1 - \frac{z}{h} \right) \dots (9)$$

従って、

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{6} \kappa u_* \frac{h_1(h_1 + 3h_2)}{h_1 + h_2} & \text{上層}(l=1) \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{6} \kappa u_* \frac{h_2(3h_1 + h_2)}{h_1 + h_2} & \text{下層}(l=2) \end{cases} \dots (10)$$

上層上面は自由水面であり、それに働くせん断応力は無視される。一方、河床せん断応力は、流れに大きな影響を与えるだけでなく、河床変動をも支配する重要なものである。本モデルにおいては、従来の浅水流モデルと同様に、抵抗係数 C_f と全水深の平均流速を用いて次のように与える。

$$\begin{cases} \frac{\tau_{sb}}{\rho} = C_f u_s \sqrt{u_s^2 + u_n^2} \\ \frac{\tau_{nb}}{\rho} = C_f u_n \sqrt{u_s^2 + u_n^2} \end{cases} \dots (11)$$

従って、摩擦速度は次式で与えられる。

$$u_* = \sqrt{C_f} \sqrt{u_s^2 + u_n^2} \dots (12)$$

主流方向に対数則分布を仮定すると、 C_f は次式により算定される。

$$C_f = \frac{1}{\left(6.0 + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{h}{k_s} \right)^2} \dots (13)$$

ここに、 k_s は相当粗度高さである。

二層間のせん断応力 τ_{sbl} 、 τ_{sa2} および τ_{nbl} 、 τ_{na2} については二層間の流速差を用いて次式のように表されるものとする。

$$\begin{cases} \frac{\tau_{sb1}}{\rho} = \frac{\tau_{sa2}}{\rho} = \alpha C_f (u_{1s} - u_{2s}) \sqrt{(u_{1s} - u_{2s})^2 + (u_{1n} - u_{2n})^2} \\ \frac{\tau_{nb1}}{\rho} = \frac{\tau_{na2}}{\rho} = \alpha C_f (u_{1n} - u_{2n}) \sqrt{(u_{1s} - u_{2s})^2 + (u_{1n} - u_{2n})^2} \end{cases} \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 α は二層間のせん断応力の強度を示す無次元パラメータであり、次のような仮定に基づいて決定する。

まず、主流方向に対数則分布を仮定すると次式が得られる。

$$\frac{\tau_{pb1}}{\rho} = \frac{\tau_{pa2}}{\rho} = \frac{h_1}{h_1 + h_2} \cdot C_f (u_s^2 + u_n^2) \dots\dots\dots (15)$$

ここに、下付き添字 p は主流方向を示す。

さらに、二層間のせん断応力に及ぼす二次流の影響を無視すると、 α は次式で与えられる。

$$\alpha = \frac{h_1}{h_1 + h_2} \cdot \frac{u_s^2 + u_n^2}{(u_{1s} - u_{2s})^2 + (u_{1n} - u_{2n})^2} \dots\dots\dots (16)$$

2.3 河床変動および粒度分布モデル

一般に、実河川は広い粒度分布を持っているため、本数値解析モデルにおいては、一様砂のみならず混合砂をも対象とする。河床材料は離散変量として扱い、質量保存則より、河床位方程式および河床の粒度分布式は、直交曲線座標系においてそれぞれ次のように表される⁴⁾。

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{1}{(1-\lambda)} \sum \left(\frac{\partial q_{bsk}}{\partial s} + \frac{\partial q_{bnk}}{\partial n} + \frac{q_{bsk}}{r_n} + \frac{q_{bnk}}{r_s} \right) = 0 \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{\partial p_{bk}}{\partial t} + \frac{1}{(1-\lambda)E_m} \left(\frac{\partial q_{bsk}}{\partial s} + \frac{\partial q_{bnk}}{\partial n} + \frac{q_{bsk}}{r_n} + \frac{q_{bnk}}{r_s} \right) + \frac{1}{E_m} \frac{\partial z_b}{\partial t} \{ \eta p_{bk} + (1-\eta) p_{bk0} \} = 0 \dots\dots\dots (18)$$

ここに、下付き k は粒径階の指標、 t は時間、 λ は河床材料の空隙率、 z_b は河床位、 q_{bsk} 、 q_{bnk} はそれぞれ粒径階 D_k の s 、 n 方向の単位幅流砂量、 p_{bk} は混合層における粒径階 D_k の含有率、 p_{bk0} は混合層の下層（遷移層とする）における粒径階 D_k の含有率、 E_m は混合層の厚さ (D_{90} とする)、 η は係数、侵食の時 $\eta = 0$ 、堆積の時 $\eta = 1$ である。

縦・横断方向の粒径別流砂量の算定には、底面流速の流向および河床勾配を考慮した劉の方法⁴⁾を用いて求める。

$$\begin{cases} q_{bnk} = q_{bsk} \cdot \tan \beta_k \\ q_{bsk} = q_{bk} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta_s + \cos^2 \theta_n \tan^2 \beta_k + 0.5 \sin 2\theta_s \sin 2\theta_n \tan \beta_k}} \end{cases} \dots\dots\dots (19)$$

ここに、 q_{bk} はクラス k の砂粒子の単位幅流砂量、 θ_s と θ_n はそれぞれ河床の s 、 n 方向の傾斜角である。 β_k は流砂方向と s 軸とのなす角であり、次式で与えられる。

$$\tan \beta_k = \frac{\sin \alpha - \Pi \theta_n \frac{\tau_{*ck0}}{\tau_{*k0}} \frac{\partial z}{\partial n}}{\cos \alpha - \Pi \theta_s \frac{\tau_{*ck0}}{\tau_{*k0}} \frac{\partial z}{\partial s}} \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 α は流れの底面流速の流向角 ($=\arctan(u_{bs}/u_{bn})$)、 τ_{*ck0} はクラス k の砂粒子の水平床での無次元限界掃流力、 τ_{*k0} は流れの無次元掃流力 ($=\sqrt{\tau_{*s}^2 + \tau_{*n}^2}/(\rho R g D_k)$)、 g は重力加速度、 R は砂粒子の水中共比重 ($=\rho_s/\rho - 1$)、 ρ_s は砂粒子の密度、 ρ は流体の密度、 Π 、 θ_s 、 θ_n は係数であり、それぞれ次のように定義されている。

$$\begin{cases} \Pi = K_l + \frac{1}{\mu_s} \\ \theta_n = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta_s + \tan^2 \theta_n} \dots\dots\dots (21) \\ \theta_s = \theta_n + \frac{\cos^2 \theta_s}{R} \end{cases}$$

である。ここに、 K_l は砂粒子に働く流体揚力と抗力の比例係数、 μ_s は砂粒子の静止摩擦係数である。 τ_{*ck0} は次式で示す修正 Egiazaroff の式⁵⁾で求める。

$$\frac{\tau_{*ck0}}{\tau_{*cm0}} = \begin{cases} 1.64 / (\log_{10} 19D_k/D_m)^2, & D_k/D_m \geq 0.4 \\ 0.85 D_m/D_k, & D_k/D_m < 0.4 \end{cases} \dots\dots\dots (22)$$

ここに τ_{*cm0} は粒径が平均粒径 D_m である一様砂の水平床上での無次元限界掃流力であり、岩垣の式⁶⁾を用いる。

粒径階 D_k の流砂量 q_{bk} の算定には、芦田・道上式⁵⁾に斜面勾配を考慮した次式を用いている。

$$\frac{q_{bk}}{\sqrt{RgD_k^3}} = 17p_{bk} \tau_{*k}^{3/2} \left(1 - \frac{K_C \tau_{*ck0}}{\tau_{*kf}}\right) \left(1 - \sqrt{\frac{K_C \tau_{*ck0}}{\tau_{*kf}}}\right) \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 τ_{*k} はクラス k の砂粒子に働く流れおよび斜面勾配による重力と浮力による無次元掃流力、 τ_{*kf} は傾斜床面上にあるクラス k の砂粒子に働く流れの無次元掃流力である。 K_C は河床勾配および流向の影響を考慮する係数であり、次の近似式で与えられる。

$$K_C = 1 + \frac{1}{\mu_s} \left[\left(1 + \frac{1}{R}\right) \cos \alpha \frac{\partial z}{\partial s} + \sin \alpha \frac{\partial z}{\partial n} \right] \dots\dots\dots (24)$$

また、 τ_{*kf} と τ_{*k} は次式で算定される。

$$\begin{cases} \tau_{*kf} = \tau_{*k0} \cdot \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \theta_s} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \theta_n} + \tan \theta_s \tan \theta_n \sin 2\alpha} \dots\dots\dots (25) \\ \tau_{*k} = \tau_{*k0} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \sin \theta_s \sin \theta_n} \end{cases}$$

ここに、係数 a_1, a_2 は次のように与える。

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\cos \alpha}{\cos \theta_s} - \left(\frac{1}{R} + \frac{\cos^2 \theta_n}{1 - \sin^2 \theta_s \sin^2 \theta_n} \right) \Pi \sin \theta_s \frac{\tau_{*ck0}}{\tau_{*k0}} \dots\dots\dots (26) \\ a_2 = \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_n} - \frac{\cos^2 \theta_s}{1 - \sin^2 \theta_s \sin^2 \theta_n} \Pi \sin \theta_n \frac{\tau_{*ck0}}{\tau_{*k0}} \end{cases}$$

3. 曲線直交格子の生成法

支配方程式を差分法で解く場合に、まず計算に扱う領域を直線直交格子か曲線直交格子か、あるいは非直交格子で細分する必要がある。直線直交格子を用いる場合には、それに対する支配方程式の形が簡明であるが、境界の処理に当たって無理が生じるところが多い。反対に、非直交格子を用いる場合には、任意の境界形状に対応できる長所があるが、一般曲線座標系における支配方程式がかなり複雑になるため、それに伴う記憶メモリと計算時間の増加やコード化時の煩雑さなどがある。一方、曲線直交格子を用いる場合には、式(3), (4), (5) に示されるように、直交曲線座標系における微分方程式の形とデカルト座標系におけるものとは大差が無く、ほぼ任意の境界に適用される利点がある。

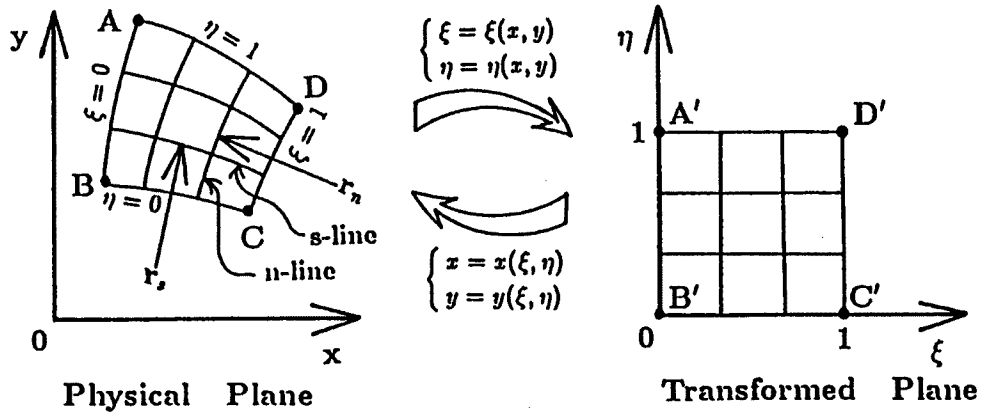


Fig. 4. Illustration diagram of mapping of a domain in the (x, y) plane to a square in the (ξ, η) plane.

近年、境界に合わせた曲線座標格子の生成法 (Boundary-fitted grid generation) の重要性が認識され、多くの研究 (例えば、Thompson et al.^{7),⁸⁾ Eiseman⁹⁾) が行われ、一つの応用学問になりつつある。計算格子の生成には、解析的方法と代数的方法があり、本計算モデルにおいては、前者が採用されている。}

Fig. 4 に示されるように、物理面上にある任意の領域 (ABCD) と写像面上にある正方形 (A'B'C'D') とは変換関数

$$\begin{cases} x=x(\xi, \eta) \\ y=y(\xi, \eta) \end{cases} \dots\dots\dots (27)$$

で対応させている。

写像面上にある各格子点に対応する (x, y) 座標を求められれば、領域 (ABCD) 上の格子が形成されることになる。これは、 ξ - η 座標系における楕円形方程式の境界値問題として解くことができる。ここでは、曲線直交格子を生成するために、Ryskin and Leal¹⁰⁾ の方法を用いて、下記のラプラス方程式を解くことにする。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(f \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(f \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (28)$$

ここに、 $f(\xi, \eta)$ は形状係数 (shape factor) と呼ばれ、測度テンソル (metric tensor) の直交成分 (diagonal components) h_ξ と h_η の比を表すものである。

$$f(\xi, \eta) = \frac{h_\eta}{h_\xi} \dots\dots\dots (29)$$

また、 h_ξ と h_η はそれぞれ次のように与えられる。

$$\begin{cases} h_\xi^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \\ h_\eta^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \end{cases} \dots\dots\dots (30)$$

上記の方程式を ADI 法を用いて、境界上にある格子点の x, y 座標を与えれば、境界に合わせた曲線直交格子が形成される (詳細は参考文献⁴⁾を参照されたい)。Fig. 5 は本計算法によって形成された蛇行低水路を有する複断面流路の曲線直交格子である。

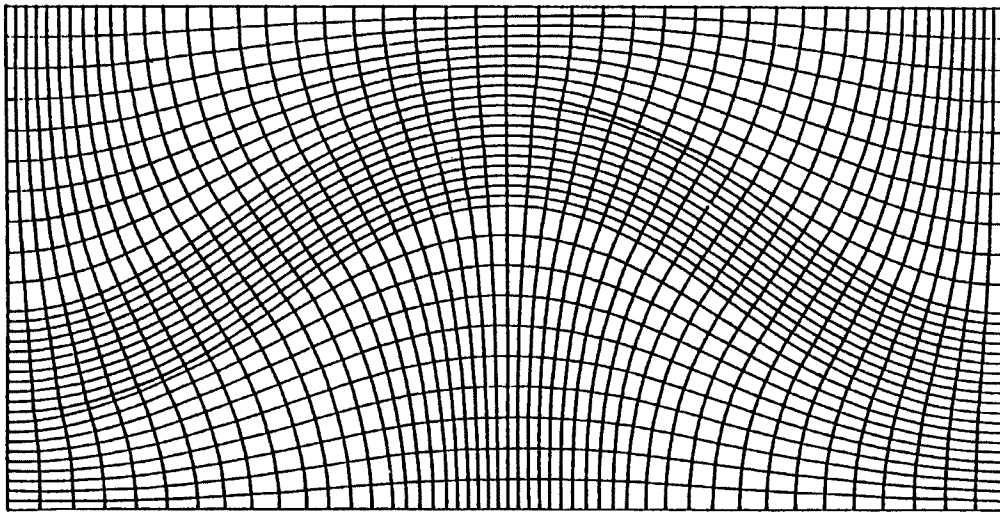


Fig. 5. An example of boundary-fitted orthogonal curvilinear grid resulting from the present numerical grid generating method.

4. 流れ場の解析

4.1 離散化方程式の誘導

流れの支配方程式を差分法で離散化する。2.1 に述べたように、流下方向に *s*-Line、横断方向に左岸側を正方向にして *n*-Line をとる。ここで方程式を差分化するにあたり、*s*-Line には右岸側から 1 ~ *NI* までの番号 *i* を、*n*-Line は上流側から 1 ~ *NJ* までの番号 *j* をつける。

(1) 変数計算点の配置

本数値計算においては、流速 u_s, u_n 、水位 z_s の計算点を Fig. 6 のように互いにずらして配置したスタaggerド格子を採用する。*s*-Line、*n*-Line により形成されるメッシュの中央において水位 z_s を計算することにする。すなわち、水位の算定に用いられるコントロール・ボリュームは両ラインにより形成されるものと一致する。そして、 u_s の計算点は *n*-line 上に、 u_n の計算点は *s*-line 上に配置する。こうすることにより、側壁における $u_n = 0$ という条件を有利に用いることができる。

(2) 離散化方程式

運動方程式の離散化に当たって、移流項に関して風上差分、粘性項に関して中央差分を行なう。紙面の関係で、結果だけを以下のように示す。

s 方向と *n* 方向の流速に関する差分式はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned}
 u_{si,j} &= \frac{1}{a_{u5i,j}} (a_{u1i,j} u_{si,j-1} + a_{u2i,j} u_{si,j+1} + a_{u3i,j} u_{si-1,j} + a_{u4i,j} u_{si+1,j} + c_{ui,j}) \\
 &\quad + \frac{b_{u6i,j}}{a_{u5i,j}} (z_{si,j} - z_{si,j-1}) \\
 &= \frac{1}{a_{u5i,j}} \left(\sum_{k=1}^4 a_{uki,j} u_{sk} + c_{ui,j} \right) + \frac{b_{u6i,j}}{a_{u5i,j}} (z_{si,j} - z_{si,j-1}) \dots\dots\dots (31) \\
 u_{ni,j} &= \frac{1}{a_{v5i,j}} (a_{v1i,j} u_{ni-1,j} + a_{v2i,j} u_{ni+1,j} + a_{v3i,j} u_{ni,j-1} + a_{v4i,j} u_{ni,j+1} + c_{vi,j})
 \end{aligned}$$

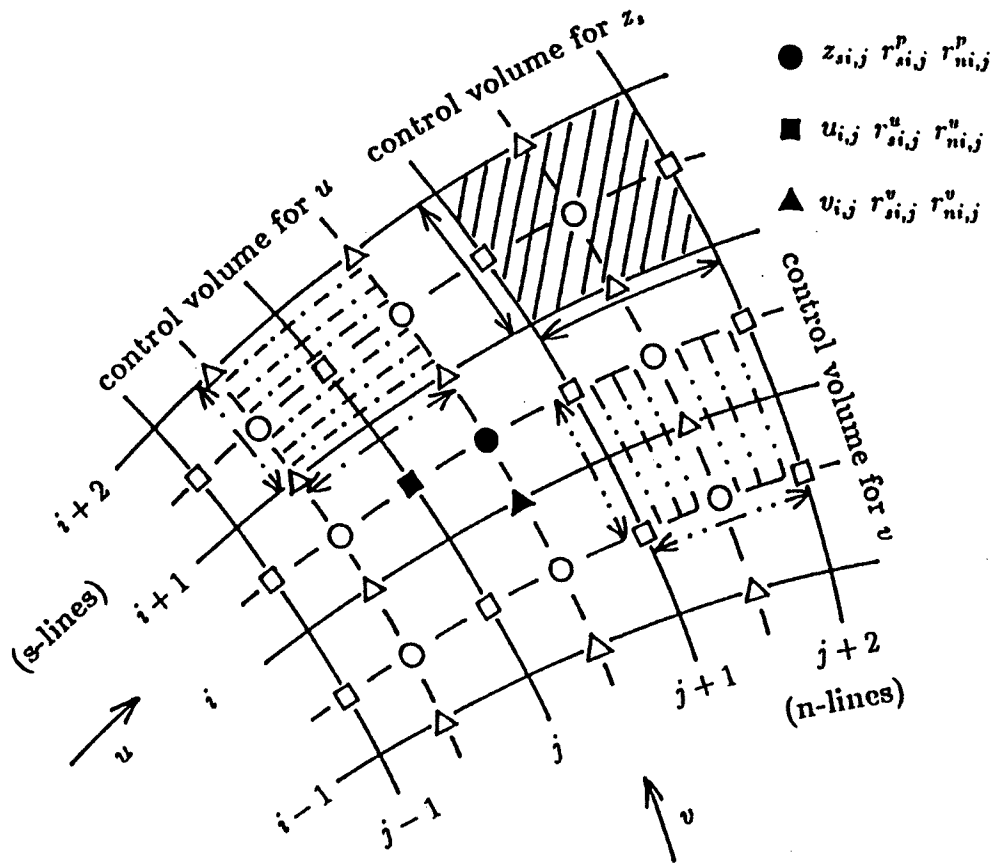


Fig. 6. Staggered locations and control volumes for velocities and water surface elevation.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{b_{v_i,j}}{a_{v5i,j}} (z_{s_i,j} - z_{s_{i-1},j}) \\
 & = \frac{1}{a_{v5i,j}} \left(\sum_{k=1}^4 a_{vki,j} u_{nk} + c_{v_i,j} \right) + \frac{b_{v_i,j}}{a_{v5i,j}} (z_{s_i,j} - z_{s_{i-1},j}) \dots\dots\dots (32)
 \end{aligned}$$

ここに、 $a_{u1i,j}$, $a_{u2i,j}$, $a_{u3i,j}$, $a_{u4i,j}$, $a_{u5i,j}$, $c_{u_i,j}$, $b_{u_i,j}$, $a_{v1i,j}$, $a_{v2i,j}$, $a_{v3i,j}$, $a_{v4i,j}$, $a_{v5i,j}$, $c_{v_i,j}$, $b_{v_i,j}$ は差分係数である。

水位に関する差分式は、 $z_{s_i,j}$ を計算するコントロール・ボリューム全体にわたって連続式を積分することより導かれる。

$$z_{s_i,j} = \frac{1}{\sum_{l=1}^2 a_{p5li,j}} \left[\sum_{l=1}^2 \left(\sum_{k=1}^4 a_{pkli,j} z_{sk} + \check{c}_{pli,j} \right) \right] \dots\dots\dots (33)$$

ここに、

$$z_{sk} = \begin{cases} z_{s_i,j-1} & k=1 \\ z_{s_i,j+1} & k=2 \\ z_{s_{i-1},j} & k=3 \\ z_{s_{i+1},j} & k=4 \end{cases} \dots\dots\dots (34)$$

$$a_{pkli,j} = \begin{cases} A_{li,j}^n \frac{b_{uli,j}}{a_{u5li,j}} & k=1 \\ A_{li,j+1}^n \frac{b_{uli,j+1}}{a_{u5li,j+1}} & k=2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ A_{li,j}^s \frac{b_{vli,j}}{a_{v5li,j}} & k=3 \\ A_{li+1,j}^s \frac{b_{vli+1,j}}{a_{v5li+1,j}} & k=4 \end{cases} \quad (35)$$

$$a_{p5li,j} = a_{p1li,j} + a_{p2li,j} + a_{p3li,j} + a_{p4li,j} \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$\check{c}_{pli,j} = A_{li,j+1}^n \check{u}_{sli,j+1} - A_{li,j}^n \check{u}_{sli,j} + A_{li+1,j}^s \check{u}_{nli+1,j} - A_{li,j}^s \check{u}_{nli,j} \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$\check{u}_{si,j} = \frac{1}{a_{u5li,j}} \left(\sum_{k=1}^4 a_{uk} u_{sk} + c_{ui,j} \right) \quad \dots\dots\dots (38)$$

$$\check{u}_{ni,j} = \frac{1}{a_{v5li,j}} \left(\sum_{k=1}^4 a_{vk} u_{nk} + c_{vi,j} \right) \quad \dots\dots\dots (39)$$

ただし、 $A_{li,j}^s$ は、そのコントロール・ボリュームの右岸側 ($u_{nli,j}$ が位置する辺) の第 l 層の断面積であり、 $A_{li,j}^n$ は、上流側 ($u_{sli,j}$ が位置する辺) の第 l 層の断面積である。

4.2 計算方法

(1) SIMPLER 法

前節において、 u_s, u_n, z_s についての連立方程式が得られた。これらの式を解くために、繰り返し計算を行なう必要がある。ここでは、収束解を求めるために、Patankar により開発された SIMPLER⁽¹⁾ 法を用いる。以下はその概略について述べる。

繰り返し計算のあるステップにおいて、水位が求められたものとし、 z_s^* と記する。また、 z_s^* に対応する流速および係数を上付きのアスタリスク (*) で示すこととする。式(33) と (34) を用いると、 u_{si}^*, u_{ni}^* は次式で得られる。

$$u_{si,j}^* = \frac{1}{a_{u5li,j}^*} \left(\sum_{k=1}^4 a_{uki,j}^* u_{sk}^* + c_{ui,j}^* \right) + \frac{b_{ui,j}^*}{a_{u5li,j}^*} (z_{si,j}^* - z_{si,j-1}^*) \quad \dots\dots\dots (40)$$

$$u_{ni,j}^* = \frac{1}{a_{v5li,j}^*} \left(\sum_{k=1}^4 a_{vki,j}^* u_{nk}^* + c_{vi,j}^* \right) + \frac{b_{vi,j}^*}{a_{v5li,j}^*} (z_{si,j}^* - z_{si-1,j}^*) \quad \dots\dots\dots (41)$$

以下、 $z_s^*, u_{si,j}^*, u_{ni,j}^*$ が真の値に近づくように、補正を行なう。

まず、 $u_{si,j}^*, u_{ni,j}^*$ が連続式を満たすようにするため水位補正量を $z'_{si,j}$ とすると、新たな水位 $z_{si,j}$ は次式で与えられる。

$$z_{si,j} = z_{si,j}^* + z'_{si,j} \quad \dots\dots\dots (42)$$

さらに、水位が $z'_{si,j}$ 補正されたことに伴う流速補正量を $u'_{si,j}, u'_{ni,j}$ とすると、新たな流速は次式で与えられる。

$$u_{si,j} = u_{si,j}^* + u'_{si,j} \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$u_{ni,j} = u_{ni,j}^* + u'_{ni,j} \quad \dots\dots\dots (44)$$

ここで、(31)式から (41)式をひき、さらに水位補正量を陽的に含まない項をすべて省略すると、

$$u'_{si,j} = \frac{b_{ui,j}^*}{a_{u5li,j}^*} (z'_{si,j} - z'_{si,j-1}) \quad \dots\dots\dots (45)$$

となる。 u_s, u_n, z_s が収束解に近づいていくならば、この簡略化は問題ないはずである。よって、補正された $z_{si,j}$ に対応する s 方向の流速 u は次式で得られる。

$$u_{st,j} = u_{st,j}^* + \frac{b_{ut,j}^*}{a_{ust,j}^*} (z'_{st,j} - z'_{st,j-1}) \dots\dots\dots (46)$$

n 方向の流速 v についても同様に,

$$u_{ni,j} = u_{ni,j}^* + \frac{b_{vt,j}^*}{a_{vst,j}^*} (z'_{st,j} - z'_{st-1,j}) \dots\dots\dots (47)$$

となる。

水位の補正量 $z'_{st,j}$ については、連続式より式(33) が導かれたのと同様に、次式が導かれる。

$$z'_{st,j} = \frac{1}{\sum_{i=1}^2 a_{psi,j}^*} \left[\sum_{l=1}^2 \left(\sum_{k=1}^4 a_{pkli,j}^* z'_{sk} + c_{pli,j}^* \right) \right] \dots\dots\dots (48)$$

ここに,

$$z'_{sk} = \begin{cases} z'_{st,j-1} & k=1 \\ z'_{st,j+1} & k=2 \\ z'_{st-1,j} & k=3 \\ z'_{st+1,j} & k=4 \end{cases} \dots\dots\dots (49)$$

$$a_{pkli,j}^* = \begin{cases} A_{li,j}^n \frac{b_{ut,j}^*}{a_{ust,j}^*} & k=1 \\ A_{li,j+1}^n \frac{b_{ut,j+1}^*}{a_{ust,j+1}^*} & k=2 \\ A_{li,j}^s \frac{b_{vt,j}^*}{a_{vst,j}^*} & k=3 \\ A_{li+1,j}^s \frac{b_{vt+1,j}^*}{a_{vst+1,j}^*} & k=4 \end{cases} \dots\dots\dots (50)$$

$$a_{psi,j}^* = a_{p1li,j}^* + a_{p2li,j}^* + a_{p3li,j}^* + a_{p4li,j}^* \dots\dots\dots (51)$$

$$c_{pli,j}^* = A_{li,j+1}^n u_{st,j+1}^* - A_{li,j}^n u_{st,j}^* + A_{li+1,j}^s u_{nt+1,j}^* - A_{li,j}^s u_{nt,j}^* \dots\dots\dots (52)$$

以上のようにして補正量 $z'_{st,j}$, $u'_{st,j}$, $u'_{ni,j}$ を求めることより、新たな $z_{st,j}$, $u_{st,j}$, $u_{ni,j}$ が算定される。これを繰り返すことにより、最終的に真の解が求められる。

(2) 連立方程式の解法

式(31), (32), (33), (49) は、それぞれ離散化された、 u_s , u_n , z_s , z'_s に関する連立方程式である。これらを一般化すると次式のように表示できる。

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{a_{5i,j}} \left(\sum_{k=1}^4 a_{ki,j} \phi_k + d_{i,j} \right) \dots\dots\dots (53)$$

逆行列を用いると、この連立方程式の解は一度に求まるが、計算機に巨大な記憶容量を必要とし、また時間もかかる。繰り返し計算の途中においては、これらの式の係数が真の値ではないことを考えると、正確な解を求めることは無意味である。ここでは、ADI法を用いて次のように取り扱う。Fig. 7に示すように、ある n -Line (あるいは s -Line) について、そのライン上の $\phi_{i,j}$ のみを未知数として扱い、それ以外の $\phi_{i,j}$ を定数とする。例えば、第 j 番目の n -Line においては、 $\phi_{i,j-1}$, $\phi_{i,j+1}$ を定数として扱うことにより次式が得られる。

$$-a_{3k,j} \phi_{i-1,j} + a_{5i,j} \phi_{i,j} - a_{4k,j} \phi_{i+1,j} = m_{i,j} \quad (i=1, 2, \dots, NI; j=1 \rightarrow NJ) \dots\dots\dots (54)$$

ここに,

$$m_{i,j} = a_{1k,j} \hat{\phi}_{i,j-1} + a_{2k,j} \hat{\phi}_{i,j+1} + d_{i,j} \dots\dots\dots (55)$$

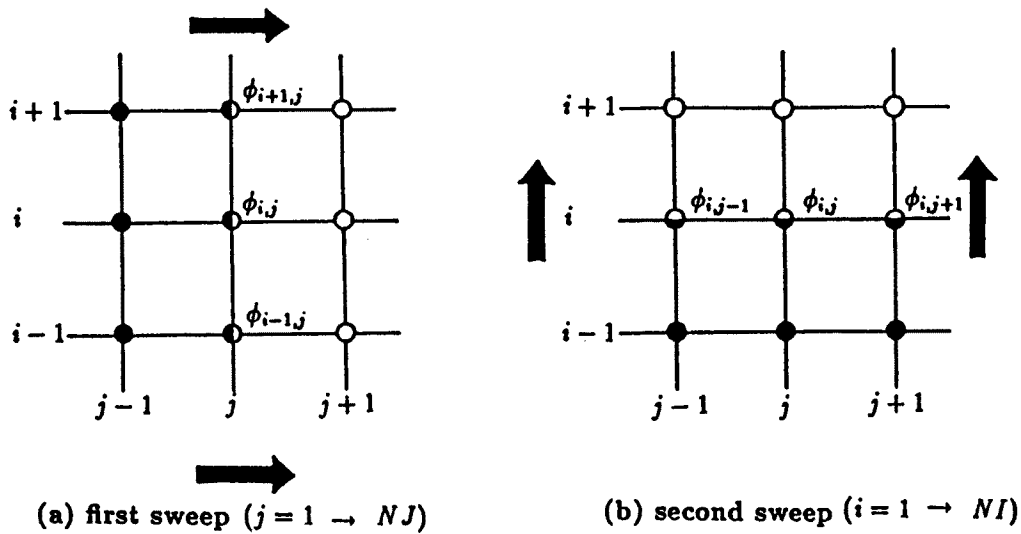


Fig. 7. Illustration diagram of the line-by-line iterative method.

であり、ハット (^) は既知数を示す。

この連立方程式を上流端 ($j = 1$) から下流端 ($j = NJ$) まで順に解いていく。以下は、これを s 方向掃引と呼ぶことにする。ここで $\phi_{i,j-1}$, $\phi_{i,j+1}$ の値としては、 s 方向掃引を始める前に得られていた値を一律に与えることとする。

$j = NJ$ までの掃引が終わると、 $\phi_{i,j}$ の新しい値がすべて求まる。ところが、これは (57) 式の真の解ではない。 $\hat{\phi}_{i,j}$ として以前の値を用いているためである。ここで計算が発散するのを防ぐために次式で緩和する。

$$\phi_{i,j} = \beta \cdot \phi_{i,j}^{new} - (1-\beta) \cdot \phi_{i,j}^{old} \dots\dots\dots (56)$$

ここに、 $\phi_{i,j}^{new}$ は今回の掃引によりあらたに求まった値、 $\phi_{i,j}^{old}$ は今回の掃引を始める前の $\phi_{i,j}$ の値、 $\phi_{i,j}$ は新たな $\phi_{i,j}$ として用いる値である。 β は緩和係数であり、本数値計算においては、 u_s, u_n 関して 0.5、 z_s, z'_s に関しては 0.7 を用いる。

S 方向掃引が終わると、 $i = 1 \rightarrow i = NI$ までの n 方向掃引を行なう。この際には、(56) 式の $\phi_{i-1,j}$, $\phi_{i+1,j}$ を定数と考えることにより得られる次式を用いる。

$$-a_{1i,j} \phi_{i,j-1} + a_{2i,j} \phi_{i,j} - a_{4i,j} \phi_{i,j+1} = n_{i,j} \quad (j=1, 2, \dots, NJ; i=1 \rightarrow NI) \dots\dots\dots (57)$$

ここに、

$$n_{i,j} = a_{3i,j} \hat{\phi}_{i-1,j} + a_{4i,j} \hat{\phi}_{i+1,j} + d_{i,j} \dots\dots\dots (58)$$

そして得られた $\phi_{i,j}$ について式(59) で緩和する。

本計算においては、流れの繰り返し step あたりの s, n 方向掃引の繰り返し回数を、 u_s, u_n については 1 回、 z_s, z'_s については 2 回としている。

(57), (60) 式の解法については次のようにする。

まず、これらを行列で表示すると、次のようになる。

$$A_j \Phi_j = M_j \quad (j=1 \rightarrow NJ) \dots\dots\dots (59)$$

$$B_i \Phi_i = N_i \quad (i=1 \rightarrow NI) \dots\dots\dots (60)$$

ここに、

$$\Phi_j = \begin{bmatrix} \phi_{1,j} \\ \phi_{2,j} \\ \vdots \\ \phi_{NI-1,j} \\ \phi_{NI,j} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (61)$$

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \phi_{i,1} \\ \phi_{i,2} \\ \vdots \\ \phi_{i,NJ-1} \\ \phi_{i,NJ} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (62)$$

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{5(1,j)} & -a_{4(1,j)} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -a_{3(2,j)} & a_{5(2,j)} & -a_{4(2,j)} & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & -a_{3(NI-1,j)} & a_{5(NI-1,j)} & -a_{4(NI-1,j)} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_{3(NI,j)} & a_{5(NI,j)} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (63)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} a_{5(i,1)} & -a_{2(i,2)} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -a_{1(i,2)} & a_{5(i,2)} & -a_{2(i,2)} & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & -a_{1(i,NJ-1)} & a_{5(i,NJ-1)} & -a_{2(i,NJ-1)} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_{1(i,NJ)} & a_{5(i,NJ)} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (64)$$

$$M_j = \begin{bmatrix} a_{1(1,j)} \hat{\phi}_{1,j-1} + a_{2(1,j)} \hat{\phi}_{1,j+1} + d_{1,j} \\ a_{1(2,j)} \hat{\phi}_{2,j-1} + a_{2(2,j)} \hat{\phi}_{2,j+1} + d_{2,j} \\ \vdots \\ a_{1(NI-1,j)} \hat{\phi}_{NI-1,j-1} + a_{2(NI-1,j)} \hat{\phi}_{NI-1,j+1} + d_{NI-1,j} \\ a_{1(NI,j)} \hat{\phi}_{NI,j-1} + a_{2(NI,j)} \hat{\phi}_{NI,j+1} + d_{NI,j} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (65)$$

$$N_i = \begin{bmatrix} a_{3(i,1)} \hat{\phi}_{i-1,1} + a_{4(i,1)} \hat{\phi}_{i+1,1} + d_{i,1} \\ a_{3(i,2)} \hat{\phi}_{i-1,2} + a_{4(i,2)} \hat{\phi}_{i+1,2} + d_{i,2} \\ \vdots \\ a_{3(i,NJ-1)} \hat{\phi}_{i-1,NJ-1} + a_{4(i,NJ-1)} \hat{\phi}_{i+1,NJ-1} + d_{i,NJ-1} \\ a_{3(i,NJ)} \hat{\phi}_{i-1,NJ} + a_{4(i,NJ)} \hat{\phi}_{i+1,NJ} + d_{i,NJ} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (66)$$

である。TDMA法 (Tri-Diagonal Matrix Algorithm) を用いることにより、簡単に解を求めることができる。

4.3 計算手順

以上より、流れの計算手順は次のようにまとめられる。

- (1) 推測した速度場から計算を開始する。
- (2) 離散化された運動方程式 (31) と (32) の各係数を求め、更に、流速のうち、水位差以外によるもの (\tilde{u}_s, \tilde{u}_n) を求める。
- (3) \tilde{u}_s, \tilde{u}_n を用いて、水位方程式 (33) の各係数を求め、水位を求める。

- (4) (3) で求められた水位 z_s を z_s^* として、運動方程式より新たな流速 $u_{st,j}^*$, $u_{nt,j}^*$ を求める。
- (5) $u_{st,j}^*$, $u_{nt,j}^*$ が連続式を満たすように (49) 式より、水位の補正量 z_s' を求める。
- (6) (44), (45) 式を用いて z_s' による流速補正を行なう。ただし、水位には補正は行なわない。
- (7) 収束の判断をする。もし収束していなければ緩和したのち (2) に戻り繰り返す。

5. 河床変動および粒度分布の解析

前節で記述された流れの解析モデルを用いて、河床変動および粒度分布の解析を行なう。

流れが定常状態に達するための時間は、河床変動の進行速度に対して十分小さいと考えられるので、ある河床形状における流れは常に定常であるとする。まず、流れの解析モデルを用いて、ある河床形状に対する流れ場を求める。ついで、その流れが Δt 時間変化しないと仮定し、流砂の連続条件よりその間の河床変動量および粒度分布の変化が求まる。これを繰り返すことにより河床変動を求めることができる。

5.1 底面流速の算定

上述の二層モデルにより求まる流速は各層の水深平均流速であり、底面付近の流速は求まらない。しかしながら、流砂方向に大きな影響を与えるのは流れによる河床せん断応力の方向、すなわち底面流速の方向である。従って、河床変動を正確に計算するためには、底面流速の評価が肝要である。

本文において、全水深平均流の流向を主流とし、それに直交する方向の流れを二次流としている。従って、 n 方向の流れを二次流としているのではないことに注意が必要である。

主流方向の底面流速に関しては、主流方向に対数則分布が成立すると仮定し、相当粗度高さの流速を用いると次式が得られる。

$$u_{bp} = 8.5 \sqrt{C_f (u_s^2 + u_n^2)} \dots\dots\dots (67)$$

ただし、 u_{bp} は主流方向の底面流速である。

一方、二次流の底面流速に関しては、従来の浅水流モデルにおいて、次式がよく用いられている。

$$u_{bh} = -N_* \frac{h}{r} u_{bp} \dots\dots\dots (68)$$

ここに、 u_{bh} は底面における二次流速、 r は流線の曲率半径、 N_* はらせん流の強度を表わす係数である。

しかし、本来上式は一樣弯曲流路における十分発達したらせん流に対するものであり、さらに N_* の値として様々なものが提案されていることを考えあわせると、(71) 式を蛇行流路において平坦固定床流れから平衡河床流れまで一律に適用できるかどうかは疑問の残るところである。そこで本二層モデルにおいては、二次流の鉛直分布形として半波長のコサインカーブを仮定し、上下層の平均流速を用いて分布形を決定することにより底面流速を求めることとする⁴⁾。すなわち二次流の鉛直分布形としては、次のように与える。

$$u_h = \eta_h \pi \sqrt{u_{s2}^2 + u_{n2}^2} \frac{\sin(\delta_2 - \delta)}{\sin(\eta_h \pi)} \cos\left(\frac{z}{h} \pi\right) \dots\dots\dots (69)$$

ここに、 η_h は全層水深と下層水深の比、 δ は全層の流向が s 軸となす角、 δ_2 は下層の流向が s 軸となす角である。

底面流速の二次流速 u_{bh} は相当粗度高さにおけるものを用いて次式で求める。

$$u_{bh} = \eta_h \pi \sqrt{u_{s2}^2 + u_{n2}^2} \frac{\sin(\delta_2 - \delta)}{\sin(\eta_h \pi)} \cos\left(\frac{k_s}{h} \pi\right) \dots\dots\dots (70)$$

流砂量計算に実際に必要となる底面流速の s, n 成分は、それぞれ次式のように与えられる。

$$u_{bs} = A_r u_* \cos \delta - \eta_h \pi \sqrt{u_{s2}^2 + u_{n2}^2} \frac{\sin(\delta_2 - \delta)}{\sin(\eta_h \pi)} \cos\left(\frac{k_s \pi}{h}\right) \sin \delta \quad \dots\dots\dots (71)$$

$$u_{bn} = A_r u_* \sin \delta + \eta_h \pi \sqrt{u_{s2}^2 + u_{n2}^2} \frac{\sin(\delta_2 - \delta)}{\sin(\eta_h \pi)} \cos\left(\frac{k_s \pi}{h}\right) \cos \delta \quad \dots\dots\dots (72)$$

5.2 河床位の計算

二次元河床変動の計算を行う際には、式(17)を離散化して計算するわけであるが、流砂量の計算地点、差分法の選定の違いによっていくつかの方法が考えられる。本計算モデルにおいては、Fig. 8に示すように、 s 方向の流砂量 q_{bsk} 、 n 方向の流砂量 q_{bnk} および河床位 z_b の配置点を、それぞれ流速 u_s, u_n および水位 z_s と同一にする。(17)式を z_b を囲むコントロール・ボリュームについて積分すると、次式が得られる。

$$z_{b(i,j)}^{n+1} = z_{b(i,j)}^n - \frac{\Delta t}{1-\lambda} \sum_{k=1}^{N_k} (q_{bsk(i,j+1)}^n \Delta n_{i,j+1}^p - q_{bsk(i,j)}^n \Delta n_{i,j}^p + q_{bnk(i+1,j)}^n \Delta s_{i+1,j}^p - q_{bnk(i,j)}^n \Delta s_{i,j}^p) \quad \dots\dots\dots (73)$$

5.3 粒度分布の計算

河床変動に伴う河床材料の粒度分布を数値的に求めるために、従来より、河床面を含む河床表層（混合層あるいは交換層と呼ばれている）の概念がよく用いられてきた。式(18)に示されたように、混合砂礫床上的ある地点における河床表層の粒度分布を解くためにはその下層の粒度分布の情報が必要である。変動が侵食一方の場合、堆積一方の場合、および侵食が起こったのち堆積一方に転じる場合には、下層の粒度分布は簡単に与えられる。しかし、侵食と堆積が繰り返される場合には、問題が複雑になる。このような場合に、河床表層に限らず河床の深さ方向の粒度分布の時間変化を計算する必要がある。特に数値計算においては、上述の三つのケースにおいても、平衡河床に達する際に河床位の変動が微少ではあるが振動

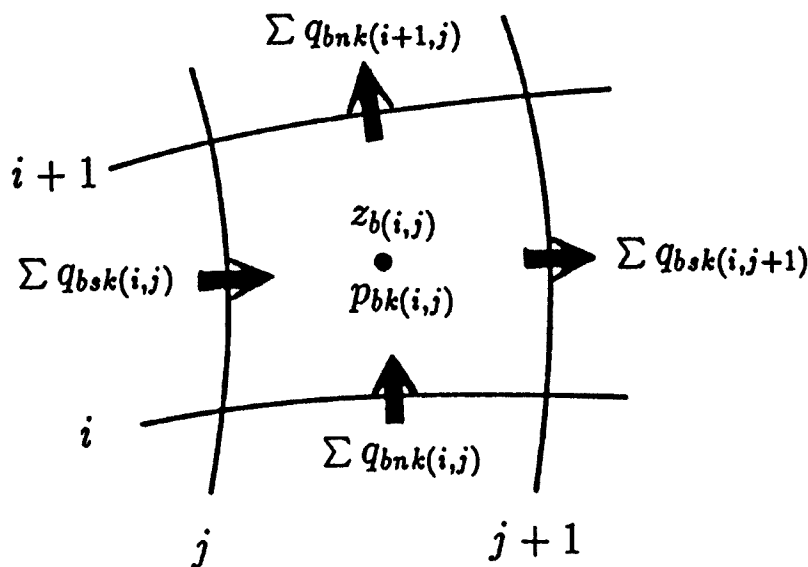


Fig. 8. Control volume for bed elevation and size fractions.

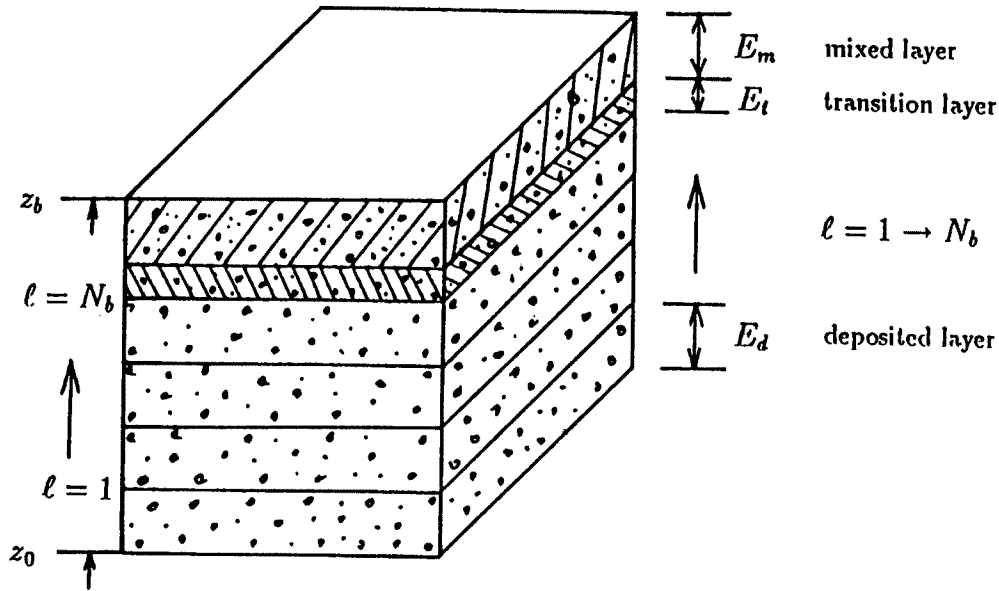


Fig. 9. Definition sketch of the sediment sorting computational model.

するため、堆積—侵食—堆積というプロセスが繰り返すことが起こる。従って、河床粒度分布を正確に評価するために、解析モデルに河床材料の深さ方向の粒度分布の時間変化をも計算すべきである。

劉⁴⁾は、混合層の概念に遷移層と堆積層の概念を導入し、粒度分布の鉛直方向の変化も数値解析的に求められる計算モデルを提案した。Fig. 9に示すように、河床を、床面から順に混合層・遷移層・ N_b 個の堆積層に分ける。粒度分布は一つの層全体にわたって一様であるとする。堆積層には下から順に1から N_b までの番号をつける。すなわち、

$$z_b = E_m + E_t + N_b \cdot E_d + z_0 \quad \dots\dots\dots (74)$$

ここに、 E_m は混合層の厚さであり、初期河床粒度分布の D_{90} の値を与える。 E_t は遷移層の厚さ、 E_d は堆積層一層あたりの厚さ、 z_0 は最下部に位置する堆積層の下辺の高さ（河床変動の及ぶ範囲の限界を表す）である。 E_d は常に一定値とするが、 E_t は河床変動に伴い変化し、次式のような制限をつける。

$$0 < E_t \leq E_d \quad \dots\dots\dots (75)$$

具体的には、例えば河床変動量 Δz_b が負の場合、すなわち侵食が起こった場合には新たな遷移層の厚さ E_t^{n+1} は

$$E_t^{n+1} = E_t^n + \Delta z \quad \dots\dots\dots (76)$$

とする。ここで E_t^{n+1} が0または負になった場合には、堆積層のうち最上部に位置するものを遷移層に組み入れる。このとき、遷移層数はひとつ減少する。逆に Δz_b の堆積がおこった場合には、 E_t^{n+1} が堆積層の厚さ E_d よりも大きくなったときには、堆積層を新たにひとつ増加させることとする。

粒度分布の計算点を河床位のものと同じに配置し、Fig. 8に示されたコントロール・ボリュームについて、上述の考えと連続条件より、粒度分布および関連の各パラメータに関する計算式が導かれる。

(a) $\Delta z_b > 0$ (aggradation) のとき、

$$p_{bk}^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta z_b}{E_m}\right) p_{bk}^n + \frac{\Delta z_{bk}}{E_m} \quad \dots\dots\dots (77)$$

$$E_t^{n+1} = \begin{cases} E_t^n + \Delta z_b & E_t^n + \Delta z_b \leq E_d \\ E_t^n + \Delta z_b - E_d & E_t^n + \Delta z_b > E_d \end{cases} \quad \dots\dots\dots (78)$$

$$p_{ik}^{n+1} = \begin{cases} \frac{E_b^n}{E_i^{n+1}} p_{ik}^n + \frac{\Delta z_b}{E_i^{n+1}} p_{bk}^n & E_i^n + \Delta z_b \leq E_d \\ p_{bk}^n & E_i^n + \Delta z_b > E_d \end{cases} \dots\dots\dots (79)$$

$$N_b^{n+1} = \begin{cases} N_b^n & E_i^n + \Delta z_b \leq E_d \\ N_b^n + 1 & E_i^n + \Delta z_b > E_d \end{cases} \dots\dots\dots (80)$$

$$p_{N_b k}^{n+1} = \begin{cases} p_{N_b k}^n & E_i^n + \Delta z_b \leq E_d \\ \frac{E_i^n}{E_d} p_{ik}^n + \left(1 - \frac{E_i^n}{E_d}\right) p_{bk}^n & E_i^n + \Delta z_b > E_d \end{cases} \dots\dots\dots (81)$$

(b) $\Delta z_b < 0$ (degradation) のとき,

$$p_{bk}^{n+1} = \begin{cases} p_{bk}^n - \frac{\Delta z_b}{E_m} p_{ik}^n + \frac{\Delta z_{bk}}{E_m} & E_i^n + \Delta z_b > 0 \\ p_{bk}^n + \frac{E_i^n}{E_m} p_{ik}^n - \frac{E_i^n + \Delta z_b}{E_m} p_{N_b k}^n + \frac{\Delta z_{bk}}{E_m} & E_i^n + \Delta z_b \leq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (82)$$

$$E_i^{n+1} = \begin{cases} E_i^n + \Delta z_b & E_i^n + \Delta z_b > 0 \\ E_d + E_i^n + \Delta z_b & E_i^n + \Delta z_b \leq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (83)$$

$$p_{ik}^{n+1} = \begin{cases} p_{ik}^n & E_i^n + \Delta z_b > 0 \\ p_{N_b k}^n & E_i^n + \Delta z_b \leq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (84)$$

$$N_b^{n+1} = \begin{cases} N_b^n & E_i^n + \Delta z_b > 0 \\ N_b^n - 1 & E_i^n + \Delta z_b \leq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (85)$$

$$p_{N_b k}^{n+1} = \begin{cases} p_{N_b k}^n & E_i^n + \Delta z_b > 0 \\ p_{(N_b-1)k} & E_i^n + \Delta z_b < 0 \end{cases} \dots\dots\dots (86)$$

ここに、 p_{bk} 、 p_{ik} 、および $p_{N_b k}$ はそれぞれ混合層、遷移層、および第 N 番目の堆積層における k の粒子の割合を示す。

6. 本解析モデルの検証

本節においては、第 4、5 節で述べた流れおよび河床変動の数値解析モデルを用いて計算を行ない、それらの結果と著者らの水路実験結果^{1),2)}とを比較検討する。

6.1 水理条件

実験水路は Fig. 10 に示すような蛇行低水路を有する複断面蛇行水路である。水路の中心線は、次式に示す sine-generated curve に従う。

$$\theta = \theta_{max} \sin(2\pi s/L) \dots\dots\dots (87)$$

ここに、 θ は x 軸との偏角、 θ_{max} は最大蛇行偏角、 L は蛇行長、 s は蛇行流路中心曲線に沿って測った距離である。また、水路全幅は 100 cm、蛇行低水路幅は 20 cm、蛇行長は 220 cm、最大蛇行偏角は 35°、河床勾配は 0.01 である。

本論文で示された二つの計算例に用いられる実験条件はそれぞれ：

- (1) 流速分布に関するもの：流量 7.15 (l/s)、高水敷高 3 cm である。また、低水路と高水敷はともに粒径 1.3 mm のほぼ均一砂で敷かれている。
- (2) 平衡河床形状及び粒度分布に関するもの：流量 8.3 (l/s)、平均粒径 1.7 mm、標準偏差 (= D_{84}/D_{16}) 2.2、 $D_{90} = 4$ mm である。

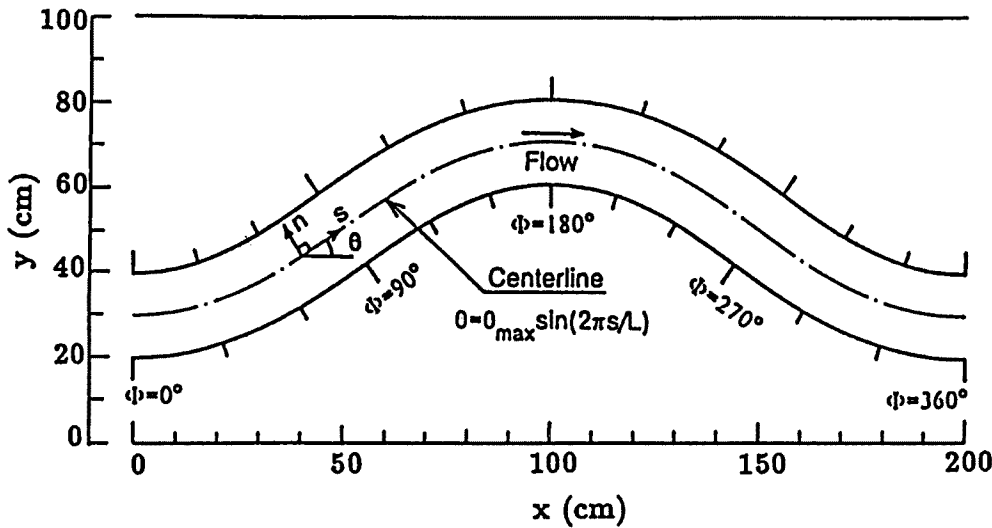


Fig. 10. Comparison of measured and predicted velocity vector distributions in a meandering compound channel.

なお、計算メッシュは Fig. 5 に示すとおりである。

6.2 境界条件

本計算は、連続する複断面蛇行流路の一波長区間について解を求めるため、その周期性を生かして、境界条件として上下流端において、ある変数（流速、水深など）に対して、次式のように与える。

$$\Psi(n, 0) = \Psi(n, 2\pi) \dots\dots\dots (88)$$

ここに、 Ψ は計算変数を表す。

一方、側壁において、横断方向の流速については $u_n = 0$ を用い、流下方向の流速については Slip-Velocity の概念を導入し、側壁におけるせん断応力 τ_{sn} は次式で与える。

$$\frac{\tau_{sn}}{\rho} \Big|_{\text{at the side walls}} = C_w u_w^2 \dots\dots\dots (89)$$

ここに、 u_w 、 C_w はそれぞれ側壁における Slip-Velocity と抵抗係数である。

6.3 流量補正

繰り返し計算により流れの収束解を求めるが、収束に至る過程では各コントロール・ボリュームにおいて連続式が満たされない。本計算においては、流量条件が、初期値としてしか現われないので、繰り返し計算中に断面流量が変化していく。したがって、断面流量が常に初期値と等しくなるように補正を行なう必要がある。本研究では、毎回の流れの計算毎に、 z_s を求めた後で水位を補正することとする。

補正量 Δz_j は n 方向に一律とし、次式で与える。

$$\Delta z_j = \frac{Q - \sum_{i=1}^{N_j-1} 0.5(u_{st,j} + u_{st,j+1})h_{i,j}}{B_j} \dots\dots\dots (90)$$

ここに、 Δz_j は j 断面の水位補正量、 B_j は j 断面の全幅、 Q は初期流量である。

水面勾配は、 n 方向については水位の補正量が一定なので変わらないが、 s 方向に変わる可能性がある。そのため流れの計算が不安定になる可能性があるが、本数値計算においては、通常の場合にはこのような

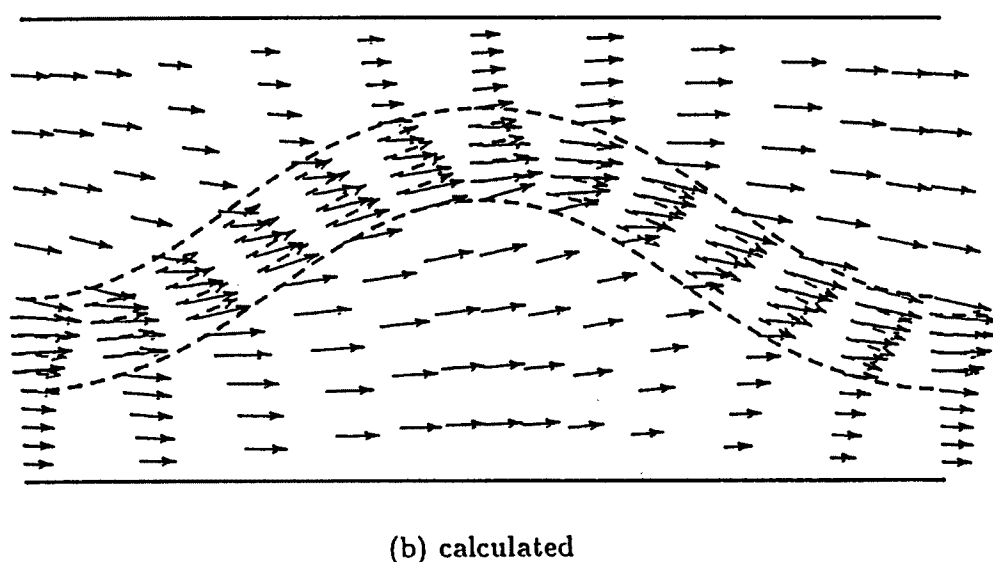
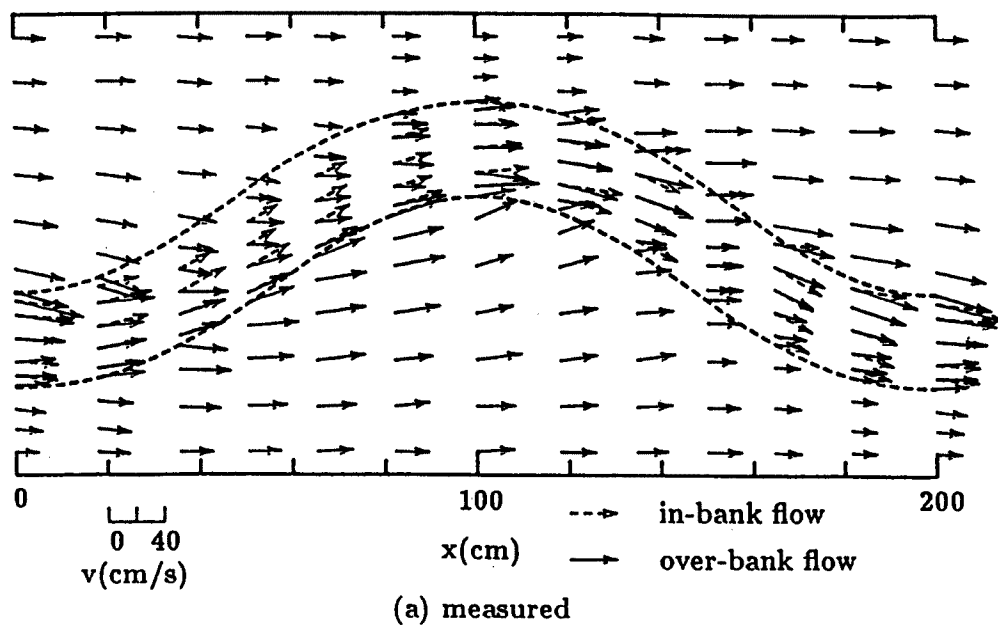


Fig. 11. Verification of the TLDAM model by comparing the calculated and measured velocity vector distributions in a meandering compound channel.

問題は見られなかった。

6.4 収束判定

水理量 $u_{st,j}$, $u_{mt,j}$, $z_{st,j}$, $z_{bt,j}$, および $d_{mi,j}$ を $\phi_{i,j}$ で示すことにし、次式が成立すればそのメッシュにおいて $\phi_{i,j}$ は収束したと判断することにする。

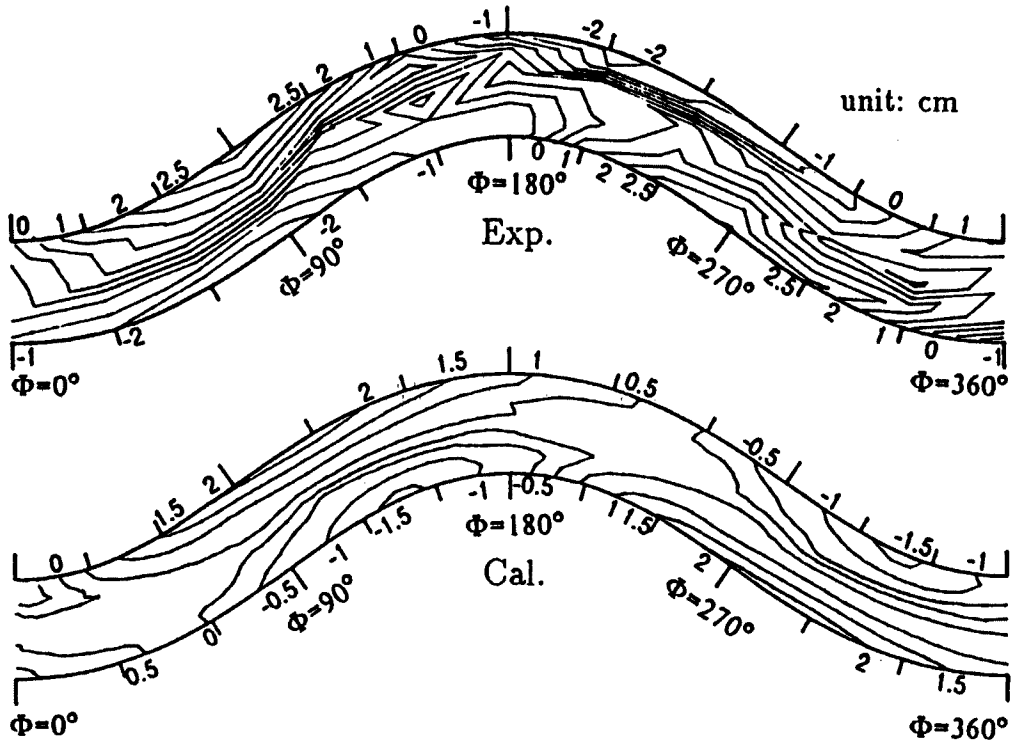


Fig. 12. Comparison of measured and predicted bed topography in a meandering channel with over-bankfull flow.

$$\frac{\phi_{i,j}^{new} - \phi_{i,j}^{old}}{\phi_{max}} < EPS \dots\dots\dots (91)$$

ここに、 $\phi_{i,j}^{new}$ はあらたに求まった $\phi_{i,j}$ を、 $\phi_{i,j}^{old}$ は前回の $\phi_{i,j}$ の計算値を示し、 ϕ_{max} は変数 ϕ の最大値である。EPS は許容誤差を示し、本数値計算においては 0.01 を用いている。

さらにある水理量 ϕ について収束したメッシュが、全メッシュの 98% 以上であれば、 ϕ については収束したものと見なす。 u_s 、 u_n 、 z_s がすべて収束して初めてある河床形状に対する流れが収束したとみなされる。

6.5 計算値と実験値との比較

Fig. 11 は Fig. 10 に示された複断面蛇行流路における平坦河床上的流速分布の実験結果と計算結果とを比較したものである。図示のように、低水路と高水敷における流れの相互作用によって、高水敷上の流れも蛇行していることや低水路の凹岸側付近に低流速領域が形成されていることなどの複断面蛇行流の諸特性が本計算モデルによってよく再現されていることが分かる。

Fig. 12 と Fig. 13 はそれぞれ上記の複断面蛇行流路の低水路における平衡河床形状と河床表層の平均粒径分布の計算結果と実験結果とを示している。

これらの図の比較より、全体のパターンとしては、計算値と実験値はほぼ一致していることが分かる。しかし、洗掘・堆積域については、計算値の方がかなり下流へシフトしている。これは、計算モデルにおいて、流れの上下層間のせん断応力の評価や底面流速の算定などに問題があるものと思われる。今後、これらの問題点について検討し、モデルの改良を図っていく必要がある。

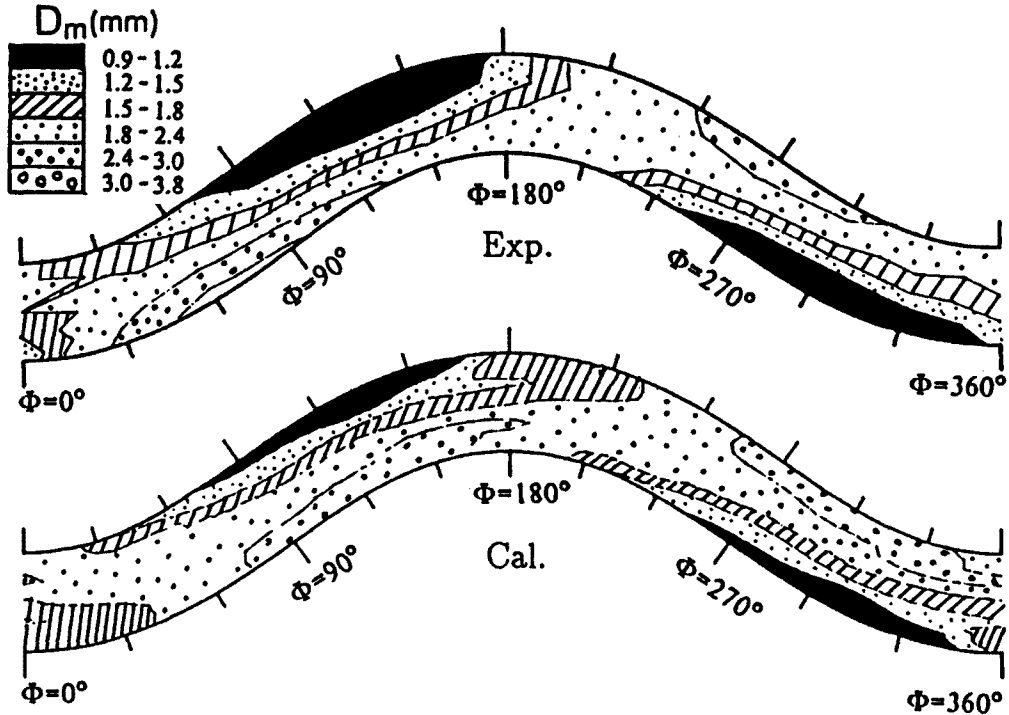


Fig. 13. Comparison of measured and predicted mean grain size distribution.

7. 結 論

本研究においては、複断面蛇行流路のような複雑な境界形状をもつ流路における流れを算定するために、一般直交曲線座標系を用いた二次元数値解析モデルを開発した。すなわち、数学モデルには、一般直交曲線座標系による二層浅水流モデルを用い、数値解析手法としては、差分法を用いている。この解析法は、デカルト座標系を用いたモデルに比べて、河道形状の表現、計算格子の配置、境界条件の処理などにおいて有利である。また、従来の浅水流モデルに比べて、ここで開発した二層モデルの優れた点は、主に三つある。すなわち、複断面蛇行流れにおける低水路流と高水敷流の相互作用を評価できること、水深が急変するような場での境界条件を適切に表現できること、および河床変動を支配する底面流速を算定できることである。

さらに、二層浅水流モデルを基礎として、河床材料の粒度分布の時・空間変化も算定できる二次元河床変動の数値解析モデルを開発した。このモデルは、従来の二次元モデルと比べると、次のように、いくつかの面で優れている。すなわち、縦断的にも横断的にも勾配を持つ傾斜路床面上における掃流砂の計算方法を用いているため、河床変動に及ぼす底面流速の方向や局所河床勾配の影響が十分に考慮されている。二層モデルによって得られた流速場の情報に基づいて底面流速を計算しているため、従来の底面流速の算定方法（すなわち、十分発達した一様弯曲流路におけるらせん流の計算式に基づくもの）と比較すると、流路の平面形状によらず、正確に底面流速を評価できる。さらに、一般直交曲線座標系を採用しているため、これは、蛇行流路のような規則的な平面形状を持つ流路はいうまでもなく、任意の形状の流路にも容易に適用できる利点を持っている。このように、混合砂礫床からなる複断面河道のような複雑な場での流れおよび河床変動を予測するには非常に有効である。なお、この数値解析モデルを用いて、蛇行流路における混合砂の分級現象、粗粒化による洗掘の抑制効果、および河床材料の粒度分布などの計算を行い、そ

これらの結果と実験結果との比較を通して、その妥当性が検証されている。

参考文献

- 1) 芦田和男・江頭進治・劉炳義・滝口将志：蛇行低水路を有する複断面流路における流れの特性と河床変動機構，京都大学防災研究所年報，第32号 B-2，1989，pp.527-551.
- 2) 芦田和男・江頭進治・劉炳義・梅本正樹：蛇行流路における Sorting 現象および平衡河床形状に関する研究，京都大学防災研究所年報，第33号 B-2，1990，pp.261-279.
- 3) Lui, B. Y., Ashida, K., and S. Egashira, : Sediment sorting and its simulation model in meander streams, Proc. 24 th IAHR Cong., Madrid, Spain, 1991, pp. A 453 -A 460.
- 4) 劉 炳義：複断面河道における流砂と河床変動に関する研究，京都大学学位論文，1991. (in English)
- 5) 芦田和男・道上正規：混合砂礫の流砂量と河床変動に関する研究，京都大学防災研究所年報，14号 B，1971，pp.259-273.
- 6) 岩垣雄一：限界掃流力に関する基礎的研究：(I) 限界掃流力の流体力学的研究，土木学会論文報告集，第41号，1956，pp.1-20.
- 7) Patankar, S. V.: Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemi sphere Publishing Corporation, 1980.
- 8) Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A., and C. W. Mastin : Boundary-fitted coordinate systems for numerical solution of partial differential equations—a review, J. Comput. Phy., Vol. 47, 1982, pp. 1-108.
- 9) Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A., and C. W. Mastin : Numerical grid generation, Elsevier Science Publishing Co., Inc. New York, 1985.
- 10) Eiseman, P. R.: Grid generation for fluid mechanics computations, Annual review of fluid mechanics, Vol.17, 1985.
- 11) Ryskin, G., and L. G. Leal : Orthogonal mapping, J. Comput. Phys., Vol.50, 1983, pp.71-100.