

竜巻内の物体に作用する非定常力

谷池義人

FLUID FORCES ON BODIES IN TATSUMAKI

By *Yoshihito* TANIKE

Synopsis

In the present paper, we assume the swirling motion of tatsumaki as the Rankine vortex moving with a constant velocity and analyze the unsteady horizontal flow at any point in the tatsumaki path. The inertial force on bodies due to the action of unsteady/accelerating flow is obtained by using the velocity potential for inviscid flow. The inertial force and the drag which is dependent on the square of the fluid velocity may be combined with the Morison's equation, which constitutes the total fluid force. The results are discussed and examined, comparing to the steady-state wind loadings with a constant velocity.

1. まえがき

竜巻に襲われた地域の被害を調べると、建物、鉄塔等の構造物や電柱、標識、カンバン等の工作物の破損の度合いが場所によって大きく異っており、またそれらの転倒方向や瓦、木材、小石等の飛散方向にも規則性が乏しい。近接している同種の物体においても、それらの被害や転倒方向が異っている場合がある。これは竜巻がある速度で進行する施衝風であることに関係する。竜巻の接近につれて、各々の地点における風速と風向は時々刻々変化し、これに伴って各地点の物体に作用する風力の大きさとその方向が時間的にも空間的にも大きく変化するためであると考えられる。

速度ベクトルが時間的に変化する非定常流れが物体にあたると、物体の受ける力は一様な定常流れの場合に比べて異ってくる。このため、竜巻時に構造物に作用する風力は、台風や季節風時の定常流れで近似できる場合の風力と異ってくるものと思われる。

本報では、竜巻を Rankine 渦がある一定の速度で移動する現象と仮定し、竜巻の通過に伴い任意の地点に生じる水平方向の非定常流れを解析する。次に、この非定常流（加速度流）によって物体に生じる慣性力（圧力勾配による力と付加質量による力の合力）を速度ポテンシャルを用いて計算する。さらに Morison の仮説に基づいてこの慣性力と風速の2乗に比例する抗力とを合成させて、竜巻の通過に伴って任意の地点の物体（ここでは円柱）に作用する非定常力を推定し、定常流による風力と比較検討する。

2. 竜巻通過に伴う水平方向の非定常流れ

Mitsuta & Monji¹⁾ の竜巻の発生装置を用いた実験によると、地表面の極近傍を除くと渦のコア内部と外部の接線速度は Rankine の結合渦で近似できる。また、渦の中心に向う半径方向の速度成分は、地表面付近を除くと接線速度成分に比べて小さくなる。実際の竜巻の風速分布の測定例は少ない²⁾ が、1957年に Dallas

で起った tornado の写真測量による解析結果によると、接線速度はほぼ Rankine 渦で近似できる³⁾。したがって、ここでは竜巻の接近速度を反時計回りの Rankine 渦で近似し、その渦が同じ形状を保った状態で一定の速度 v で移動すると仮定する。

竜巻と同じ速度で移動する座標系で見ると、渦の接線速度 U_θ は

$r \leq R$ のとき

$$U_\theta = U_m \frac{r}{R} \dots\dots\dots (1)$$

$r \geq R$ のとき

$$U_\theta = U_m \frac{R}{r} \dots\dots\dots (2)$$

で表される。ここで r, θ は渦中心からの距離と反時計回りの角度、 R は渦のコア半径、 U_m は $r = R$ における接線速度。次に地面に固定した座標系で水平方向の速度成分を表す (Fig. 1)。竜巻の進行方向に y 軸をとり、時刻 $t = 0$ のときの渦の中心を原点、 $t = t_0$ のときの渦の中心を $y = y_0$ とおく。 $t = t_0$ のときの任意の点 (x, y) における速度ベクトル U の x, y 方向成分は

$r \leq R$ のとき

$$U_x = -U_m \frac{y - y_0}{R} = -U_m \frac{r \sin \theta}{R} \dots\dots\dots (3-a)$$

$$U_y = \frac{U_m}{R} x + v = U_m \frac{r \cos \theta}{R} + v \dots\dots\dots (3-b)$$

$r \geq R$ のとき

$$U_x = -U_m R \frac{y - y_0}{\{x^2 + (y - y_0)^2\}} = -U_m \frac{R \sin \theta}{r} \dots\dots\dots (4-a)$$

$$U_y = U_m R \frac{x}{\{x^2 + (y - y_0)^2\}} + v = U_m \frac{R \cos \theta}{r} + v \dots\dots\dots (4-b)$$

ここで

$$r = \sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}, \quad \sin \theta = \frac{y - y_0}{\sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}}, \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}} \dots\dots\dots (5)$$

また、任意の点 (x, y) における加速度 DU/Dt は

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \left(U_x \frac{\partial}{\partial x} + U_y \frac{\partial}{\partial y} \right) U \dots\dots\dots (6)$$

3, 4 式を 6 式に代入し、さらに $\dot{y}_0 = v$ とおいて DU/Dt の x, y 成分を求めると

$r \leq R$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{DU_x}{Dt} &= \frac{\partial U_x}{\partial t} + \left(U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \\ &= \frac{U_m}{R} \dot{y}_0 + \left(-\frac{U_m^2}{R^2} x - \frac{U_m v}{R} \right) = -\frac{U_m^2}{R^2} x = -\frac{U_m^2}{R^2} r \cos \theta \dots\dots\dots (7-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{DU_y}{Dt} &= \frac{\partial U_y}{\partial t} + \left(U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) \\ &= 0 + \left(-U_m \frac{y - y_0}{R} \right) \frac{U_m}{R} = -\frac{U_m^2}{R^2} (y - y_0) = -\frac{U_m^2}{R^2} r \sin \theta \dots\dots\dots (7-b) \end{aligned}$$

$r \geq R$ のとき

$$\frac{DU_x}{Dt} = -\frac{U_m^2 R^2 x}{\{x^2 + (y - y_0)^2\}^2} = -\frac{U_m^2 R^2}{r^3} \cos \theta \dots\dots\dots (8-a)$$

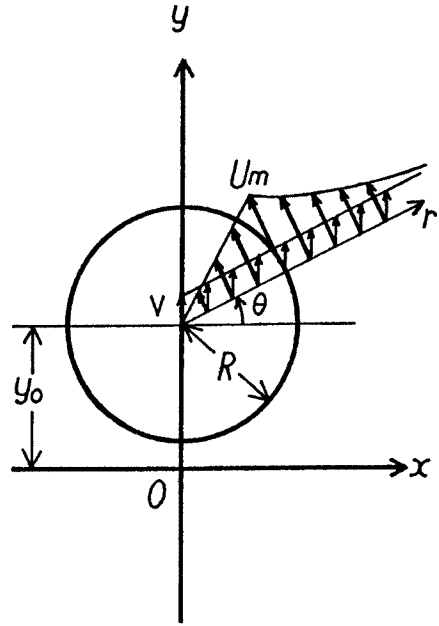


Fig. 1. Total horizontal velocity in a tatsumaki with respect to an absolute frame of reference.

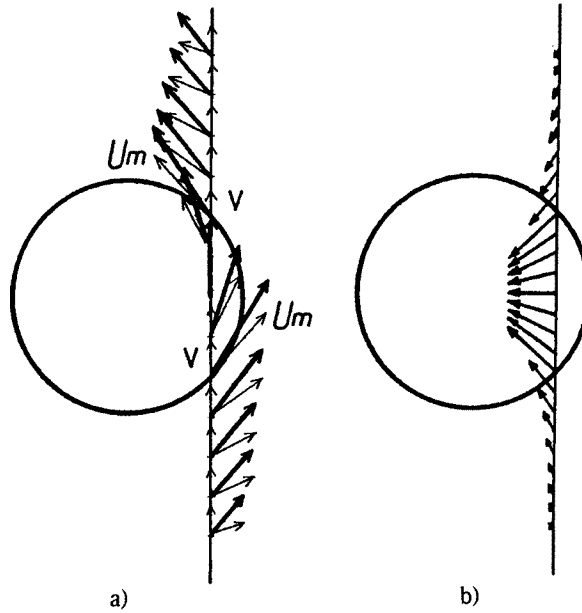


Fig. 2. Velocity and acceleration distributions along a line parallel to the tatsumaki path: a) velocity (when $U_m=3v$); b) acceleration.

$$\frac{DU_y}{Dt} = -\frac{U_m^2 R^2 (y - y_0)}{\{x^2 + (y - y_0)^2\}^2} = -\frac{U_m^2 R^2}{r^3} \sin \theta \dots \dots \dots (8-b)$$

7, 8式から明らかなように、加速度の非定常項 (local acceleration) $\partial U/\partial t$ は移流項 (convective acceleration) $(U \cdot \text{grad}) U$ の一部によって打消され、total acceleration としては、渦の中心に向かう成分のみになる。また、この大きさは竜巻の移動速度 v に関係しなくなる。

Fig. 2(a, b) に3, 4, 7, 8式より求めた竜巻の進行方向に沿った地点 (y 軸に平行) での速度ベクトル U と加速度ベクトル DU/Dt を示す。この図は別の見方をすれば、ある固定した地点において、竜巻の通過に伴って変化する U と DU/Dt の時刻歴を表している。

速度ベクトル、加速度ベクトルは、いずれも渦のコア上 ($r = R$) を含む全ての点で連続的に変化し、 $r = R$ 上でそれらの大きさは最大になる。

3. 加速度流中における慣性力

2節に示したように、竜巻の通過する地点においては加速度流が存在する。物体が加速度流中に置かれたとき、圧力勾配によって生じる力 (buoyancy force) と物体の存在によって周りの流体が加速されるために生じる力 (added mass force) の合わさった慣性力 (inertial force) を受ける (例えば Sarpkaya & Isaacson⁴⁾)。速度ベクトルと加速度ベクトルの方向が一致する一方向の様な非定常流れの中の慣性力に関しては Sarpkaya⁵⁾, Garrison et al.⁶⁾ 等の実験結果があるが、風速と風向が別々に変化する場合の慣性力は実験的には求められていない。ここでは風速と風向がそれぞれ時間的かつ場所的に一様に変化する流れの中で物体に作用する慣性力を速度ポテンシャルを用いて求めてみる。問題を簡単にするため、2次元の非定常流れの中の円柱を対象にする。

Fig. 3 に示すように、 x 軸に対して α だけ傾いた速度 U の一様流の複素速度ポテンシャルは

$$w = U(t) e^{-i\alpha} z \dots \dots \dots (9)$$

ここで $z = x + iy$, i は虚数。原点に直径 D の円柱を置いたときの複素速度ポテンシャルは, Milne-Thomson の円定理⁷⁾ により

$$w = U(t) e^{-i\alpha(t)z} + U(t) \left(\frac{D}{2}\right)^2 e^{i\alpha(t)} \frac{1}{z} \dots\dots\dots (10)$$

円周上 ($z = De^{i\theta}/2$) で

$$w = DU(t) \cos(\theta - \alpha) \equiv \phi \dots\dots\dots (11)$$

ここで ϕ は円周上の速度ポテンシャル, よって円周上の $\dot{\phi}$ 及び接線速度 U_θ は

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D\dot{U} \cos(\theta - \alpha) + DU \dot{\alpha} \sin(\theta - \alpha) \dots\dots\dots (12)$$

$$U_\theta = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)_{r=\frac{D}{2}} = -2U \sin(\theta - \alpha) \dots\dots\dots (13)$$

圧力 $p(t)$ は, Bernoulli の定理より

$$p(t) = -\frac{\rho}{2} U_\theta^2 - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \dots\dots\dots (14)$$

ここで ρ は流体の密度。よって円柱の受ける力 F の x, y 成分 F_x, F_y は12, 13, 14式を用いると

$$F_x = -\int_0^{2\pi} p(t) \cos \theta \frac{D}{2} d\theta = \rho \frac{D^2}{2} \pi (\dot{U} \cos \alpha - U \dot{\alpha} \sin \alpha) \dots\dots\dots (15a)$$

$$F_y = -\int_0^{2\pi} p(t) \sin \theta \frac{D}{2} d\theta = \rho \frac{D^2}{2} \pi (\dot{U} \sin \alpha + U \dot{\alpha} \cos \alpha) \dots\dots\dots (15b)$$

一方, 遠方場の流体の加速度は, 9式より

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{DU_x}{Dt} - i \frac{DU_y}{Dt} = (\dot{U} \cos \alpha - U \dot{\alpha} \sin \alpha) - i(\dot{U} \sin \alpha + U \dot{\alpha} \cos \alpha) \dots\dots\dots (16)$$

よって, 円柱に作用する慣性力は, 15, 16式より

$$F_x = \rho\pi \frac{D^2}{2} \frac{DU_x}{Dt} \dots\dots\dots (17-a)$$

$$F_y = \rho\pi \frac{D^2}{2} \frac{DU_y}{Dt} \dots\dots\dots (17-b)$$

となり, 各々の加速度成分に比例する。このときの比例定数は $\rho\pi D^2/2$ と一定になる。

4. 物体に作用する非定常力

Morison によると, 一方向の様な非定常流中で円柱に作用するある瞬間の流体力 F_T は, 速度の 2 乗に依存する抗力 F_D と加速度に依存する慣性力 F_a の合力で表される⁴⁾。

$$F_T = F_D + F_a = \frac{1}{2} \rho C_D D |U(t)| U(t) + \frac{1}{4} \rho\pi D^2 C_M \frac{dU(t)}{dt} \dots\dots\dots (18)$$

ここで D は円柱の直径, C_D は抗力係数, C_M は慣性力係数で $C_M = C_a + 1$ の関係がある。 C_a は付加(仮想)質量係数。ポテンシャル流中の円柱の場合, 17式より $C_M = 2$ となる。

ここでは, Morison の式を 2 方向の流れ場に拡張して, 次式で表すことにする。

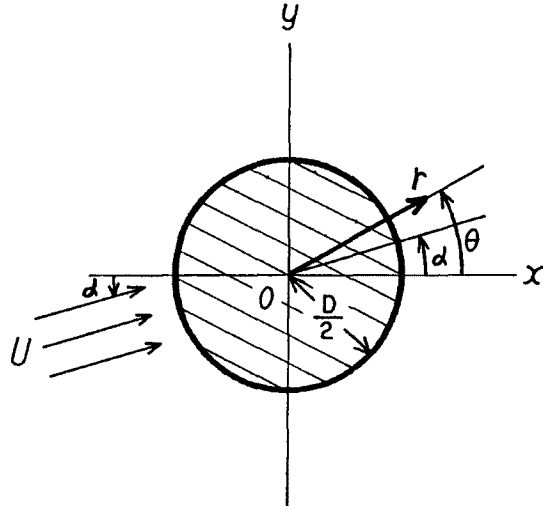


Fig. 3. The coordinate on a two dimensional circular cylinder in an unsteady inviscid flow whose speed and direction change with time.

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_a = \frac{1}{2} \rho C_D D |U| U + \frac{1}{4} \rho \pi D^2 C_M \frac{DU}{Dt} \dots\dots\dots (19)$$

各々の成分で表示すると

$$\begin{Bmatrix} F_{Tx} \\ F_{Ty} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \rho C_D D \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \end{Bmatrix} \sqrt{U_x^2 + U_y^2} + \frac{1}{4} \rho \pi D^2 C_M \begin{Bmatrix} \frac{dU_x}{dt} \\ \frac{dU_y}{dt} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (20)$$

20式に2節の3, 4, 7, 8式を代入して円柱に作用する非定常力 \mathbf{F}_T を求める。このとき $t=0$, すなわち $y_0=0$ のときの各地点 (x, y) における \mathbf{F}_T で表しても一般性は失われない。

$r \leq R$ のとき

$$F_{Tx} = -\frac{1}{2} \rho C_D D \frac{U_m}{R} y \left\{ \frac{U_m^2}{R^2} (x^2 + y^2) + v^2 + 2 \frac{U_m}{R} vx \right\}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \rho \pi D^2 C_M \frac{U_m^2}{R^2} x \dots\dots\dots (21-a)$$

$$F_{Ty} = \frac{1}{2} \rho C_D D \left(\frac{U_m}{R} x + v \right) \left\{ \frac{U_m^2}{R^2} (x^2 + y^2) + v^2 + 2 \frac{U_m}{R} vx \right\}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \rho \pi D^2 C_M \frac{U_m^2}{R^2} y \dots\dots\dots (21-b)$$

\mathbf{F}_T の大きさの2乗 $|\mathbf{F}_T|^2$ は上式より

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}_T|^2 &= F_{Tx}^2 + F_{Ty}^2 = \frac{1}{4} \rho^2 C_D^2 D^2 \left\{ \frac{U_m^2}{R^2} (x^2 + y^2) + v^2 + 2 \frac{U_m}{R} vx \right\}^2 \\ &\quad + \frac{1}{16} \rho^2 \pi^2 C_M^2 D^4 \frac{U_m^4}{R^4} (x^2 + y^2) - \frac{1}{4} \rho^2 \pi C_D C_M D^3 \frac{U_m^2}{R^2} vy \left\{ \frac{U_m^2}{R^2} (x^2 + y^2) + v^2 + 2 \frac{U_m}{R} vx \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

$r \geq R$ のとき

$$\begin{aligned} F_{Tx} &= -\frac{1}{2} \rho C_D U_m DR \frac{y}{x^2 + y^2} \left\{ \frac{U_m^2 R^2}{x^2 + y^2} + v^2 + 2 U_m Rv \frac{x}{x^2 + y^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - \frac{1}{4} \rho \pi D^2 C_M U_m^2 R^2 \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} \dots\dots\dots (23a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{Ty} &= \frac{1}{2} \rho C_D D \left(U_m R \frac{x}{x^2 + y^2} + v \right) \left\{ \frac{U_m^2 R^2}{x^2 + y^2} + v^2 + 2 U_m Rv \frac{x}{x^2 + y^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - \frac{1}{4} \rho \pi D^2 C_M U_m^2 R^2 \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} \dots\dots\dots (23b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}_T|^2 &= \frac{1}{4} \rho^2 C_D^2 D^2 \left\{ \frac{U_m^2 R^2}{x^2 + y^2} + v^2 + 2 U_m Rv \frac{x}{x^2 + y^2} \right\}^2 + \frac{1}{16} \rho^2 \pi^2 D^4 C_M^2 U_m^4 R^4 \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} \\ &\quad - \frac{1}{4} \rho^2 \pi D^3 C_D C_M U_m^2 R^2 v \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} \left\{ \frac{U_m^2 R^2}{x^2 + y^2} + v^2 + 2 U_m Rv \frac{x}{x^2 + y^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

$r = R$ のとき, 21式と23式は一致し, \mathbf{F}_T はコア上で連続とする。このときの $|\mathbf{F}_T|^2$ は

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}_T|_{r=R}^2 &= \frac{1}{4} \rho^2 C_D^2 D^2 \left\{ U_m^2 + v^2 + 2 \frac{U_m}{R} vx \right\}^2 + \frac{1}{16} \rho^2 \pi^2 C_M^2 D^4 \frac{U_m^4}{R^2} \\ &\quad - \frac{1}{4} \rho^2 \pi C_D C_M D^3 \frac{U_m^2}{R^2} vy \left\{ U_m^2 + v^2 + 2 \frac{U_m}{R} vx \right\}^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

竜巻の進行方向に沿った地点 (y 軸に平行) において, $|\mathbf{F}_T|$ が最大になる位置を求める。

$r \leq R$ の場合, 22式に $x = x_p$ (但し, x_p は $|x_p| \leq R$ の定数) を代入すると, 22式の第1, 2項は明らかに $y = \pm y_p$ (但し, $x_p^2 + y_p^2 = R^2$ を満たす), すなわち $r = R$ 上で最大になるが, 第3項は $y = -|y_p|$ のとき最大になるため, $|\mathbf{F}_T|$ の最大値はコア上 $(x_p, -|y_p|)$ で生じる。

$r \geq R$ の場合, 24式に $x = x_p$ を代入すると, 24式の第1, 2項は $|y|$ が最小, すなわち $|x_p| \leq R$ のときには $y = \pm y_p$ (但し, $x_p^2 + y_p^2 = R^2$) で, $|x_p| \geq R$ のときには $y = 0$ で最大になる。第3項は $|x_p| \leq R$ のときには $y = -|y_p|$ で, $|x_p| \geq R$ のときには $y = 0$ で最大になる。よって $|\mathbf{F}_T|$ の最大値は, $|x_p|$

$\leq R$ のときには $r \leq R$ の場合と同様、コア上 $(x_p, -|y_p|)$ で生じ、 $|x_p| \geq R$ のときには $(x_p, 0)$ で生じる。

Fig. 4 に竜巻の進行方向に沿った線上で $|F_T|$ が最大となる位置を太線で示す。この図から物体 (円柱) に作用する非定常力は、物体が竜巻の風下側のコア上にくるときに最も大きくなることがわかる。また、全ての地点における $|F_T|$ の最大値は、Fig. 4 の太線のうち $0 \leq x_p \leq R$ の領域に存在することは明らかにであるが、正確な位置とその値は、25式の x, y に掛っている係数が定まらないと求まらない。

次に19式の非定常力に寄与する抗力 F_D と慣性力 F_a の比率を求めてみる。コア上 $r = R$ で $|F_D|$ と $|F_a|$ を比較すると、3(or 4), 7(or 8) 及び19式より

$$|F_D| = \frac{1}{2} \rho DC_D (U_m^2 + v^2 + 2 U_m v \cos \theta) \dots\dots\dots (26)$$

$$|F_a| = \frac{1}{4} \rho \pi D^2 C_M \frac{U_m^2}{R} \dots\dots\dots (27)$$

$$\frac{|F_a|}{|F_D|} = \frac{\pi DC_M}{2 RC_D} \left\{ 1 + \frac{2 v \cos \theta}{U_m} + \left(\frac{v}{U_m} \right)^2 \right\}^{-1} \dots\dots\dots (28)$$

Sarpkaya & Garrison⁸⁾ によると、 C_M, C_D は共に、Reynolds 数 $R_e (= UD/v, v$ は動粘性係数) と相対距離 $\bar{s} (= 0.5 (DU/Dt)t^2/D)$ の関数になる。一方向の様な非定常流れ ($R_e = 5.2 \times 10^5$) の中で円柱の C_M, C_D の値は、 \bar{s} の増加につれてある幅をもって変動するが、 $\bar{s} > 20$ になると $C_M = 1.3, C_D = 1.2$ になる (Sarpkaya & Garrison⁸⁾)。 C_M は理論値である $C_M = 2.0$ より小さくなるが、 C_D は定常流中の値に等しくなる。ここで対象としている2次元流れに対して、 $C_D \approx C_M$ とする。一方、Fujita⁹⁾ の統計によると、最大の接線速度 U_m と移動速度 v との間には $U_m \approx 3v$ の関係がある。さらに物体 (円柱) の大きさ D とコア半径 R の比を $D/R \approx 0.1$ とする。よって

$$C_D \approx C_M, U_m \approx 3v, \text{ and } D/R \approx 0.1 \dots\dots\dots (29)$$

の関係を28式に代入すると

$$|F_a|/|F_D| \approx O(0.1) \cdot O(1) \approx O(0.1) \dots\dots\dots (30)$$

となり、加速度による慣性力は速度の2乗による抗力の10%のオーダーになる。

5. む す び

竜巻を Rankine の結合渦で近似し、これがある一定の速度で移動する際の、水平方向の速度場と加速度場を解析した。この結果、任意の地点の速度ベクトルと加速度ベクトルは、竜巻の通過に伴って連続的に変化し、それらの大きさは竜巻のコア上で最大になる。加速度は、竜巻の移動速度に関係せず、渦の中心に向う方向に作用する。

また、物体 (ここでは円柱) に作用する非定常力を、Morison の仮説に基づいて計算した結果、最大の風力は物体が竜巻の風下側のコア上にくるときに生じる。このときの加速度による慣性力は、速度の2乗による抗力の10%のオーダーに達する。

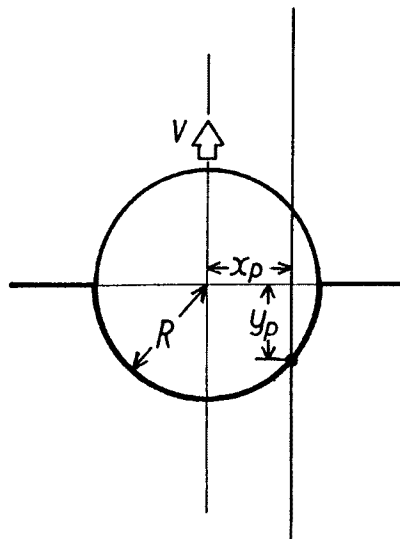


Fig. 4. The point where the total fluid force on a body becomes maximum along a line parallel to the tatsumaki path.

参 考 文 献

- 1) Mitsuta, Y. and N. Monji: Development of a Laboratory Simulator for Small Scale Atmospheric Vortices, *Natural Disaster Science*, Vol. 6, No. 1, 1981, pp. 43-54.
- 2) 文字信貴：龍巻渦の実験的研究——室内実験の展望——，日本風工学研究会誌，12号，1982，pp. 3-19.
- 3) Hoecker, W.H.Jr.: Wind Speed and Air Flow Patterns in the Dallas Tornado of April 2, 1957, *Mon. Weath. Rev.*, Vol. 88, 1960, pp. 167-180.
- 4) Sarpkaya, T. and M. Isaacson: *Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures*, Van Nostrand Reinhold Co., 1981.
- 5) Sarpkaya, T.: Forces on Cylinders and Spheres in a Sinusoidally Oscillating Fluid, *J. Applied Mech.*, ASME, Mar., 1975, pp. 32-37.
- 6) Garrison, C.J., J.B. Field and M.D. May: Drag and Inertia Forces on a Cylinder in Periodic Flow, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Division*, ASCE, Vol. 103, No. ww2, 1977, pp. 193-205.
- 7) 例えば，今井功：流体力学，裳華房，1973.
- 8) Sarpkaya, T. and C.J. Garrison: Vortex Formation and Resistance in Unsteady Flow, *J. Applied Mech.*, Vol. 30, E, No. 1, 1963, pp. 16-24.
- 9) Fujita, T.T.: *Workbook of Tornadoes and High Winds*, SMRP Research Paper 165, Sep., 1978.