

流出予測精度を基準とした降雨・流量観測システムの 設計に関する基礎的検討

高棹 琢馬・椎葉 充晴・堀 智晴

A FUNDAMENTAL STUDY ON THE DESIGN OF RAINFALL AND STREAMFLOW OBSERVATION SYSTEM BASED ON THE RUNOFF PREDICTION ACCURACY

By *Takuma TAKASAO, Michiharu SHIIBA and Tomoharu HORI*

Synopsis

In this study, we propose a method to design an observation system of rainfall and discharge based on the prediction error at the lowest reach of a basin. Decision variables of the system are the number and the spatial arrangement of rainguages, the rainfall measurement interval, the number and the spatial arrangement of flowmeters, and the flow measurement interval. The variance of flow estimation error for different combinations of these decision variables is computed by the use of linear filtering technique of a random vector field. The application of the method to a one-dimensional basin has made it clear that rainguages should not be arranged uniformly in space when the prediction error of peak flow is used as a design criterion of a rainfall and flow observation system.

1. 序 論

降雨・流量の観測データは、水文現象の解明やモデル化のための基礎資料として、また、リアルタイムの降雨予測・流出予測を通じて洪水制御の際の意志決定の情報として重要なものである。したがって、限られた数の観測所からなる観測網から得られる情報を最大限に活用するためには、降雨観測所や流量観測所をどこに設けるべきか、その数はどの程度必要なのか、観測の時間間隔はどうあるべきかといった問題が解決されなければならない。以上の認識から、降雨観測所の配置や流量観測所の配置に関する研究は、数多く行われている。もちろん、降雨・流量観測ネットワークの設計には、そこから得られるデータをいかなる目的に用いるかによって、アプローチの立場も異なってくる。従来の研究の立場は、降雨観測所がまばらにしか配置できないことから、面積雨量の推定や降雨の空間分布の推定に重点をおく立場が中心であった（この場合、設計対象は降雨観測所に限られる）。石原・池淵¹⁾は、降雨観測における問題として、観測期間の長短、観測値の欠測・不良、観測位置がまばらであることをとりあげ、これらの問題に対処し、降水資料を補足・拡充するための方法として、降水の地域相関分析と基幹観測所を中心とする等相関係数線図をもとにした降雨観測所の配置基準を提案している。さらに、Rodoriguez-Iturbe and Mejia²⁾は、年、季、月単位といった長期の空間平均降雨の推定に着目し、無作為抽出法、層別無作為抽出法を用いて降雨観測所の数および観測時間間隔を決定する方法を示している。また、高棹・池淵³⁾は、日単位以上の

降水量を対象とし、降水の観測効果を情報量で表す新しい方法を提案すると同時に、観測所の継続・廃止・新設にかかる費用をも考慮にいたれた観測網最適配置計画の基本フレームを示している。

一方、近年、流出予測理論の発展とともに、降雨観測データは、実時間降雨予測のための基本的な資料として、また、流量観測データとともに洪水の実時間予測のための基本情報として用いられることが多くなってきている。したがって、降雨・流量観測値を流出予測を通じて洪水制御に利用するという立場に立てば、観測ネットワークの設計基準として流量予測の精度を用いることが考えられる。この場合、降雨観測所のための配置を考えるだけでは不十分であり、降雨観測所と流量観測所を同時に扱う必要がある。降雨・流量観測ネットワークを流出予測の精度を基準として設計しようとする試みは、Tarbotonら⁴⁾に始まる。Tarbotonらは、降雨が時・空間に分離可能で定常な共分散構造を持つものとして、降雨・流量変換の線形性を仮定し、流量の最小分散線形推定を行い、その誤差分散を基準として、流域内に設けるべき降雨観測所・流量観測所の数及び観測時間間隔を決定する方法を提案した。また、Brasら⁵⁾は、この方法を降雨分布が定常でない場合に拡張して議論している。

降雨や流量の観測が実時間流出予測の基礎情報として果たす役割は、今後、ますます重要となってくると考えられる。特に、レーダー雨量計など降雨の空間分布を面的にとらえる手段が手に入った今、地上雨量計による降雨観測が果たす役割としては、レーダ雨量の補正⁶⁾や実時間流出予測に用いるデータといった比重が高い。したがって、流出予測の精度を基準として降雨・流量の観測システムを設計する方法を確立することは、洪水制御のための情報としてデータを利用する上で重要な課題である。もちろん、この方向で、降雨観測所・流量観測所を同時に設計する手法として、上に述べたTarbotonら⁴⁾およびBrasら⁵⁾の試みがあるが、両者とも、分布型の流出モデルに対応していないこと、流量観測所を流域下流端だけでなく流域内部に設けた場合の効果を算定できるものではないこと、雨量観測所間あるいは雨量観測所と流量観測所との間の相対的な位置関係を与えるものでないこと等の問題がある。流出予測の精度を観測システムの評価指標とする場合には、降雨観測所と流量観測所の数だけでなく、これら相互の位置関係が予測精度に大きな影響を与えることが予想される。特に、実際の観測システムの設計の際には、雨量や流量観測所の数は費用面の制約から決定されることも予想され、この場合には、これら観測所の空間的な配置こそが問題となろう。本研究では、特にこの点に留意し、降雨・流量観測システムの設計に際し、設計の基準を流量予測の精度とし、流域内に設けるべき降雨観測所と流量観測所の数、空間的な配置、観測時間間隔を決定する方法を提案する。

2. 流出予測の精度を基準とした降雨・流量観測システムの設計問題

本研究の目的は、流域下流端での流量予測精度を評価指標として、降雨・流量観測システムを設計することにある。具体的には、流域内に設けるべき降雨観測所の数 I とその位置 $x_i (i=1, \dots, I)$ および降雨観測時間間隔 Δt_r 、流量観測所の数 M と位置 $y_m (m=0, \dots, M)$ 、ただし 0 は流域下流端を $1 \sim M$ は流域内部を表す)および流量の観測時間間隔 Δt_q を決定する問題を考えることになる (Fig. 1 参照)。したがって、以上の項目が、流量予測の精度 (予測誤差分

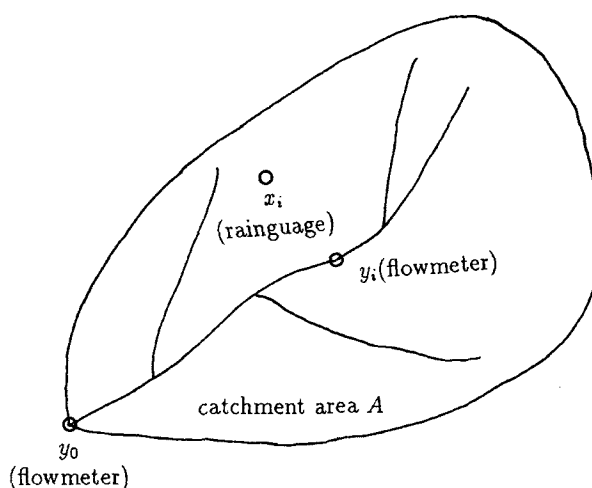


Fig. 1. An observation system of rainfall and streamflow.

散) にいかなる効果を及ぼすかを定量的に把握しなければならない。

本研究では、降雨観測所・流量観測所の数及び配置と観測時間間隔が流域下流端流量の予測誤差の分散に与える影響を導くため、次の仮定をおく。

1. 時刻 t , 地点 x における降雨強度を $\zeta(t, x)$ とする時, $\zeta(t, x) = 0, t < 0, x \in A$ (A は流域を表す)。
2. 時刻 $t > 0$ での降雨強度の期待値 $E[\zeta(t, x)]$, 共分散 $Cov[\zeta(t_1, x_1), \zeta(t_2, x_2)]$ は既知である。すなわち, 降雨や流量の観測値を得る以前に降雨強度の期待値と共分散を与える先験分布がある。
3. 降雨は時間間隔 Δt_r で観測され, 時刻 $k \cdot \Delta t_r$, 観測地点 x_i の観測値 $z_i(k \cdot \Delta t_r)$, ($k = 0, 1, \dots$) は次式で得られる。

$$z_i(k \cdot \Delta t_r) = \int_{(k-1) \cdot \Delta t_r}^{k \cdot \Delta t_r} \zeta(t, x) dt \dots\dots\dots (1)$$

4. 時刻 t , 地点 y_m での流量 $q_m(t)$ は, 既知関数 $h_m(t, x)$ ($t < 0$ で $h_m(t, x) = 0$) を用いて,

$$q_m(t) = \int_{-\infty}^t dt \int_A dx \zeta(\tau, x) h_m(t - \tau, x) \dots\dots\dots (2)$$

で与えられる。もちろん, 実際の流出現象は線形とはいえないから, ここでの議論は何等かの線形化手法を用いた近似を前提にしたものである。線形化したことにより, 全ての時刻における流域下流端流量の推定誤差分散をオフラインで計算できることになり, 設計問題の取扱に適した形になる。非線形の式を用いると, 流域下流端流量の推定誤差分散をオフラインで計算することは不可能であり, 観測値の実現系列が必要となる。この場合, 観測値の実現系列ごとに異なる推定誤差分散が得られることになり, システムを事前に設計するには不適當である。

5. 流量は時間間隔 Δt_q で観測され, 流量観測値 $q_m(l \cdot \Delta t_q)$, ($l = 0, 1, \dots$) は (2) 式で与えられる。上記 3 および 5 に示す形式で降雨強度 $\zeta(t, x)$ を観測していると考えたと, 確率ベクトル場の Kalman Filter 理論を用いて観測値が得られたときの降雨強度の推定値と推定誤差分散を導くことができる。この方法については, 3. で導く。

3. 降雨・流量観測が流出予測精度に及ぼす効果の算定

本章では, 確率ベクトル場のカルマンフィルター理論を駆使して, 2. で設定した仮定のもと, 降雨・流量観測が流域下流端流量の予測精度に及ぼす効果を算定するための諸式を導く。なお, 本章の理論展開の基礎となる確率ベクトル場のカルマンフィルター理論を線形最小二乗推定の立場から導いたものを付録に示しておくので随時参照されたい。

3.1 降雨観測が流出予測の精度に与える影響

本節では, (1) 式で与えられる降雨観測値が得られたときに, 観測値を用いて流域下流端流量を予測し, その予測誤差分散を求める方法を導く。

まず, 時刻 t_0 に, I 個の降雨観測所から得られる降雨観測値を I 次元確率ベクトル $z(t_0)$ で表す。すなわち,

$$z(t_0) = (z_1(t_0) \ z_2(t_0) \ \dots \ z_I(t_0))^T \dots\dots\dots (3)$$

である。 $z_i(t_0)$ は, 地点 x_i に位置する降雨観測所における時刻 t_0 の観測値であり, (1) 式で与えられる。いま, 時刻 t_0 において (3) 式の形の観測値 $z(t_0)$ を得, $z(t_0)$ を用いた降雨強度 $\zeta(t, x)$ の線形最小二乗推定値 $\zeta(t, x | z(t_0))$ と推定誤差の共分散関数,

$$R(t_1, x_1, t_2, x_2 | z(t_0)) = E_{z, \zeta} [\{\zeta(t_1, x_1) - \zeta(t_1, x_1 | z(t_0))\} \{\zeta(t_2, x_2) - \zeta(t_2, x_2 | z(t_0))\}] \dots\dots\dots (4)$$

が求められているとする。時間が進んで, 時刻 $t_0 + \Delta t_r$ に新たな降雨観測値 $z(t_0 + \Delta t_r)$ が得られたとき,

$z(t_0 + \Delta t_r)$ を用いて降雨強度の推定値 $\hat{\xi}(t, x | z(t_0 + \Delta t_r))$ と推定誤差の共分散関数 $R(t_1, x_1, t_2, x_2 | z(t_0 + \Delta t_r))$ を求めたい。

この問題は、状態量が確率場 $\zeta(t, x)$ で観測方程式が (1) なる線形の式であるから、付録〈系 1.6〉において、 $x(\omega)$ が $\zeta(t, x)$ 、 y が $z(t_0 + \Delta t_r)$ 、 Y が $z(t_0)$ 、 $h(s_0)$ が I 次列ベクトル $h = (1 \dots 1)^t$ である場合に対応する。したがって、降雨強度の推定値 $\hat{\xi}(t, x | z(t_0 + \Delta t_r))$ は次式で与えられる。

$$\hat{\xi}(t, x | z(t_0 + \Delta t_r)) = \hat{\xi}(t, x | z(t_0)) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_r} R(t, x, \tau, x_0 | z(t_0)) h^t d\tau \left[\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_r} d\tau_1 \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_r} d\tau_2 h R(\tau_1, x_0, \tau_2, x_0 | z(t_0)) h^t \right]^{-1} (z(t_0 + \Delta t_r) - \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_r} h \hat{\xi}(\tau, x_0 | z(t_0)) d\tau) \dots \dots \dots (5)$$

ここに、 x_0 は降雨観測所の位置を表す。簡単のため、 I 次行ベクトル $K(t, x)$ を

$$K(t, x) = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_r} R(t, x, \tau, x_0 | z(t_0)) h^t d\tau \left[\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_r} d\tau_1 \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_r} d\tau_2 h R(\tau_1, x_0, \tau_2, x_0 | z(t_0)) h^t \right]^{-1} \dots \dots \dots (6)$$

とおけば、(5) は、

$$\hat{\xi}(t, x | z(t_0 + \Delta t_r)) = \hat{\xi}(t, x | z(t_0)) + K(t, x) (z(t_0 + \Delta t_r) - \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_r} h \hat{\xi}(\tau, x_0 | z(t_0)) d\tau) \dots \dots \dots (7)$$

とかける。(7)式および(6)式を各ベクトルの成分を用いて表現すれば、

$$\hat{\xi}(t, x | z(t_0 + \Delta t_r)) = \hat{\xi}(t, x | z(t_0)) + \sum_{i=1}^I k_i(t, x) \{z_i(t_0 + \Delta t_r) - \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_r} \hat{\xi}(\tau, x_i | t_0) d\tau\} \dots \dots \dots (8)$$

$$\sum_{j=1}^I k_j(t, x) \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_r} d\tau_1 \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_r} d\tau_2 R(\tau_1, x_b, \tau_2, x_j | z(t_0)) = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_r} R(t, x, \tau, x_i | z(t_0)) d\tau \quad (i=1, \dots, I) \dots (9)$$

ただし、 $k_i(t, x)$ は行ベクトル $K(t, x)$ の第 i 成分である。

また、推定誤差の共分散関数 $R(t_1, x_1, t_2, x_2 | z(t_0 + \Delta t_r))$ は、(6)式の $K(t, x)$ を用いると、付録〈系 1.6〉より次式で与えられる。

$$R(t_1, x_1, t_2, x_2 | z(t_0 + \Delta t_r)) = R(t_1, x_1, t_2, x_2 | z(t_0)) - K(t_1, x_1) \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_r} h R(t_1, x_1, \tau, x_0 | z(t_0)) d\tau \\ = R(t_1, x_1, t_2, x_2 | z(t_0)) - \sum_{i=1}^I k_i(t_1, x_1) \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_r} R(\tau, x_b, t_2, x_2 | z(t_0)) d\tau \dots \dots \dots (10)$$

以上により、降雨観測値を得たときに、入手した降雨観測値を用いた降雨強度の推定値は(8)式で、推定誤差の共分散関数は(10)式で与えられる。降雨観測式(1)が線形であることから、式(10)で与えられる降雨強度推定誤差の共分散関数は観測値に依存していない。したがって、最初に、観測を行っていないときの降雨強度の分布特にその共分散関数が与えられれば、(10)式を用いて観測時間毎の降雨強度の推定誤差の共分散関数を観測値の実現系列を用いることなく求めることができる。

なお、本研究では、流出モデルとして(2)式の線形応答関係を用いていることから、付録〈系 1.5〉より流域下流端流量の推定値 $q(t | z(t_0 + \Delta t_r))$ は、降雨強度の推定値 $\hat{\xi}(t, x | z(t_0 + \Delta t_r))$ を(2)式に代入して求めればよい。また、流量の推定誤差の共分散関数 $Q(t_1, t_2 | z(t_0 + \Delta t_r))$ は、

$$Q(t_1, t_2 | z(t_0 + \Delta t_r)) = \int_A d\xi_1 \int_A d\xi_2 \int_{-\infty}^t d\tau_1 \int_{-\infty}^t d\tau_2 h_0(t - \tau_1, \xi_1) \\ R(t_1, \xi_1, t_2, \xi_2 | z(t_0 + \Delta t_r)) h_0(t - \tau_2, \xi_2) \dots \dots \dots (11)$$

で与えられる。ただし、 $h_0(t, x)$ は(2)式で定義した応答関数である。

3.2 流量観測が流出予測の精度に与える影響

本節では、(2)式で与えられる流量観測値が得られたときに、観測値を用いて流域下流端流量を推定し、その予測誤差分散を求める方法を導く。まず、時刻 t_0 に、 M 個の流量観測所から得られる流量観測値 $q_m(t_0)$ 、($m = 1, \dots, M$) を列ベクトルの形に並べたものを $q(t_0)$ とかく。 $q_m(t_0)$ は(2)式で与えられる。

いま、時刻 t_0 において流量観測値 $q(t_0)$ を得、 $q(t_0)$ を用いた降雨強度 $\zeta(t, x)$ の線形最小二乗推定値 $\hat{\zeta}(t, x | q(t_0))$ と推定誤差の共分散関数 $R(t_1, x_1, t_2, x_2 | q(t_0))$ を得たとする。時間が進んで次の流量観測時刻 $t_0 + \Delta t_q$ に流量観測値 $q(t_0 + \Delta t_q)$ を入手したときの降雨強度の推定値 $\hat{\zeta}(t, x | q(t_0 + \Delta t_q))$ と推定誤差の共分散関数 $R(t_1, x_1, t_2, x_2 | q(t_0 + \Delta t_q))$ を求めたい。

この問題は、降雨強度 $\zeta(t, x)$ を (2) 式で観測していると考え、付録〈系 1.6〉において、 $x(\omega)$ が $\zeta(t, x)$ 、 y が $q(t_0 + \Delta t_q)$ 、 Y が $q(t_0)$ 、 $h(s_0)$ が M 次列ベクトル $h(t - \tau, x) = (h_1(t - \tau, x), \dots, h_M(t - \tau, x))^t$ である場合に対応する。したがって、推定値 $\hat{\zeta}(t, x | q(t_0 + \Delta t_q))$ は次式で与えられる。

$$\hat{\zeta}(t, x | q(t_0 + \Delta t_q)) = \hat{\zeta}(t, x | q(t_0)) + \int_A d\xi \int_{-\infty}^{t_0 + \Delta t_q} d\tau R(t, x, \tau, \xi | q(t_0)) \{h(t_0 + \Delta t_q - \tau, \xi)\}^t \left[\int_A dx_1 \int_A dx_2 \int_{-\infty}^{t_0 + \Delta t_q} d\tau_1 \int_{-\infty}^{t_0 + \Delta t_q} d\tau_2 h(t_0 + \Delta t_q - \tau_1, x_1) R(\tau_1, x_1, \tau_2, x_2 | q(t_0)) \{h(t_0 + \Delta t_q - \tau_2, x_2)\}^t \right]^{-1} \{q(t_0 + \Delta t_q) - \int_A d\xi \int_{-\infty}^{t_0 + \Delta t_q} d\tau h(t_0 + \Delta t_q - \tau, \xi) \hat{\zeta}(\tau, \xi | q(t_0))\} \dots (12)$$

これを、 M 次行ベクトル $K'(t, x)$ を用いて、

$$\hat{\zeta}(t, x | q(t_0 + \Delta t_q)) = \hat{\zeta}(t, x | q(t_0)) + K'(t, x) \{q(t_0 + \Delta t_q) - \int_A d\xi \int_{-\infty}^{t_0 + \Delta t_q} d\tau h(t_0 + \Delta t_q - \tau, \xi) \hat{\zeta}(\tau, \xi | q(t_0))\} \dots (13)$$

とかく。ただし、

$$K'(t, x) = \int_A d\xi \int_{-\infty}^{t_0 + \Delta t_q} d\tau R(t, x, \tau, \xi | q(t_0)) \{h(t_0 + \Delta t_q - \tau, \xi)\}^t \left[\int_A dx_1 \int_A dx_2 \int_{-\infty}^{t_0 + \Delta t_q} d\tau_1 \int_{-\infty}^{t_0 + \Delta t_q} d\tau_2 h(t_0 + \Delta t_q - \tau_1, x_1) R(\tau_1, x_1, \tau_2, x_2 | q(t_0)) \{h(t_0 + \Delta t_q - \tau_2, x_2)\}^t \right]^{-1} \dots (14)$$

である。さらに、推定誤差の共分散関数 $R(t_1, x_1, t_2, x_2 | q(t_0 + \Delta t_q))$ は、

$$R(t_1, x_1, t_2, x_2 | q(t_0 + \Delta t_q)) = R(t_1, x_1, t_2, x_2 | q(t_0)) - K'(t_1, x_1) \int_A d\xi \int_{-\infty}^{t_0 + \Delta t_q} d\tau h(t_0 + \Delta t_q - \tau, \xi) R(\tau, \xi, t_2, x_2 | q(t_0)) \dots (15)$$

で与えられる。

(13), (14), (15) 式をそれぞれ各ベクトルの成分を用いて具体的に書くとそれぞれ次のようになる。

$$\hat{\zeta}(t, x | q(t_0 + \Delta t_q)) = \hat{\zeta}(t, x | q(t_0)) + \sum_{m=1}^M k'_m(t, x) \{q(t_0 + \Delta t_q) - \int_{A_m} d\xi \int_{-\infty}^{t_0 + \Delta t_q} d\tau h_m(t_0 + \Delta t_q - \tau, \xi) \hat{\zeta}(\tau, \xi | q(t_0))\} \dots (16)$$

$$\sum_{n=1}^M k'_n(t, x) \int_{A_m} dx_1 \int_{A_n} dx_2 \int_{-\infty}^{t_0 + \Delta t_q} d\tau_1 \int_{-\infty}^{t_0 + \Delta t_q} d\tau_2 h_m(t_0 + \Delta t_q - \tau_1, x_1) R(\tau_1, x_1, \tau_2, x_2 | q(t_0)) h_n(t_0 + \Delta t_q - \tau_2, x_2) = \int_{A_m} d\xi \int_{-\infty}^{t_0 + \Delta t_q} d\tau R(t, x, \tau, \xi | q(t_0)) h_m(t_0 + \Delta t_q - \tau, \xi) \quad (m=1, \dots, M) \dots (17)$$

$$R(t_1, x_1, t_2, x_2 | q(t_0 + \Delta t_q)) = R(t_1, x_1, t_2, x_2 | q(t_0)) - \sum_{m=1}^M k'_m(t_1, x_1) \int_{A_m} d\xi \int_{-\infty}^{t_0 + \Delta t_q} d\tau h_m(t_0 + \Delta t_q - \tau, \xi) R(\tau, \xi, t_2, x_2 | q(t_0)) \dots (18)$$

以上により、新たな流量観測値を得たときに、入手した観測値を用いた降雨強度の推定値は (16) 式で、推定誤差の共分散関数は (18) 式で与えられる。流出モデルとして線形の (2) 式を与えたことから、式 (18) で与えられる降雨強度推定誤差の共分散関数は観測値に依存していない。したがって、最初に、観測を行っていないときの降雨強度の分布特にその共分散関数が与えられれば、3.1 で導いた降雨観測値を得た場合と同様に (18) 式を用いて観測時間毎の降雨強度の推定誤差の共分散関数を観測値の実現系列を

用いることなく求めることができる。なお、流量の推定誤差の共分散関数 $Q(t_1, t_2 | q(t_0 + \Delta t_0))$ は、(11)式を用いて計算できる。

4. 適用と考察

4.1 適用流域モデル

本章では、2., 3. に示した理論展開の有効性の確認と問題点の抽出のため、モデル流域での降雨観測所の位置に重点をおいて適用を行う。特に、流域の流出の速さおよび雨量計の位置と降雨予測精度との関係を考察するため、Fig. 2 に示すような1次元流域モデルを考え、この流域に1個の雨量観測所を設け、その観測値をもとにして流域下流端流量を予測する場合を考える。Fig. 2 中 L は流域長、 B は流域幅、 ξ は流域下流端から雨量観測所までの距離を表す。ただし、流域幅 B は十分小さいものとする。なお、本研究では $L = 10 \text{ km}$ とした。

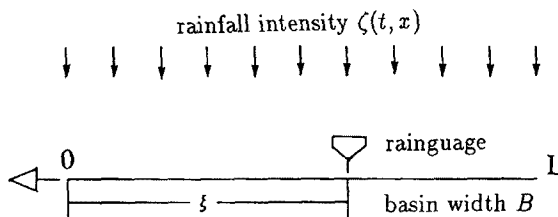


Fig. 2. The applied basin model.

また、流出速度 v (一定とする) と雨量計の適切な位置との関係を検討するため、流出モデルとして流域下流端での時刻 t における流量 $q_0(t)$ を

$$q_0(t) = B \int_0^L \int_{-\infty}^t \zeta(\tau, x) \delta\left(t - \frac{x}{v} - \tau\right) d\tau dx \dots\dots\dots (19)$$

で与える。ただし、 $\delta(\cdot)$ は Dirac のデルタ関数である。

4.2 観測を行う前の降雨分布モデル

本研究で提案する降雨・流量観測システムの設計法は、2. でも述べたとおり、降雨や流量の観測値を得る以前に降雨強度の期待値と共分散を与える形式の先験分布があることが必要である。そこで、本適用例では、観測が無い場合の先験的な降雨分布モデルとして、Rodriguez-Iturbe and Eagleson のモデル⁷⁾を採用する。本モデルは、降雨を、時間的・空間的にランダムに生じかつその時・空間的な生起確率を表すパラメータを持つ多数の降雨セルの集まりによって構成されるものとしてモデル化したものであり、時刻 t 、地点 x における降雨強度 $\zeta(t, x)$ の平均値および共分散は次式で与えられている。

$$E[\zeta(t, x)] = \frac{E\{i_0\} \lambda \beta 2\pi D^2}{\alpha - \beta} \{ \exp(-\beta t) - \exp(-\alpha t) \} \dots\dots\dots (20)$$

$$Cov[\zeta(t_1, x_1), \zeta(t_2, x_2)] = \frac{\lambda \beta E\{i_0^2\} \pi D^2}{2\alpha - \beta} \exp(-\alpha t_1) \{ \exp((\alpha - \beta)t_2) - \exp(-\alpha t_2) \} \exp\left(\frac{-d^2}{4D^2}\right) \dots\dots (21)$$

$$d = \| x_1 - x_2 \|$$

ただし、 i_0 は降雨セルが発生した瞬間のセル中心における降雨強度を表す確率変数であり、 $E\{i_0\}$ は降雨事象全体で変化しない。 i_0 は指数分布にしたがうものとする。このとき、 $E\{i_0\} = 2E^2\{i_0\}$ が成立する。また、 β はセルの数の減少の割合を表すパラメータであり、 α は降雨強度の時間的な減少の割合を表すパラメータである。 D はセルの空間的な広がりを表すパラメータであり、 λ は空間的なセルの数の平均値である。なお、各パラメータの値は Rodriguez-Iturbe and Eagleson⁷⁾ が仮定した値

$$E\{i_0\} = 1.00 \text{mm/min} \dots\dots\dots (22)$$

$$\beta = 6.6 \times 10^{-3} \text{cells/min} \dots\dots\dots (23)$$

$$2\pi D^2 = 30 \text{km}^2 \dots\dots\dots (24)$$

$$\alpha = 0.025/\text{min} \dots\dots\dots (25)$$

$$\lambda = 0.016 \text{cells/km}^2 \dots\dots\dots (26)$$

$$E\{i_0^2\} = 2E^2\{i_0\} = 2.00 \text{mm}^2/\text{min}^2 \dots\dots\dots (27)$$

を用いることにする。

また、降雨強度の分散は (21)式で $t_1=t_2=t$, $x_1=x_2=x$ とおくことにより

$$Var[\zeta(t, x)] = \frac{\lambda\beta E\{i_0^2\}\pi D^2}{2\alpha - \beta} \exp(\alpha t) \{ \exp((\alpha - \beta)t) - \exp(-\alpha t) \} \exp\left(\frac{-d^2}{4D^2}\right) \dots\dots\dots (28)$$

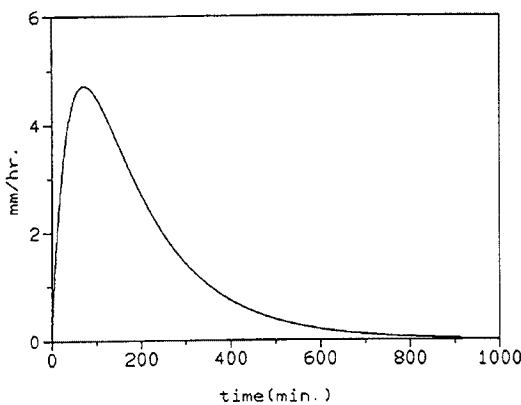
で与えられる。(20), (28)式で与えられる降雨強度の平均値と分散の時間適推移を Fig. 3 に示す。さらに, (20), (28)式から降雨の平均値が最大になる時刻 t^* , 分散が最大になる時刻 t^{**} は

$$t^* = \frac{1}{\alpha - \beta} \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \dots\dots\dots (29)$$

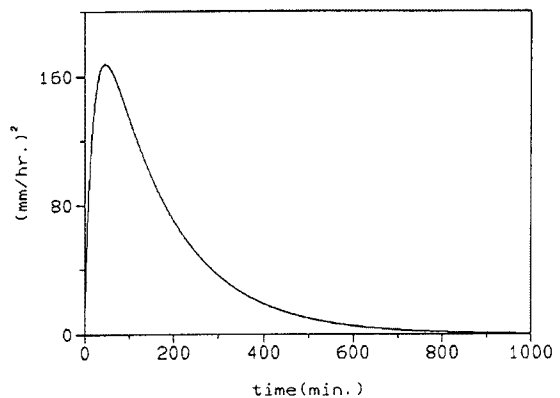
$$t^{**} = \frac{1}{2\alpha - \beta} \ln\left(\frac{2\alpha}{\beta}\right) \dots\dots\dots (30)$$

で与えられる。パラメータとして前述の値を用いると $t^* = 72.38(\text{min})$, $t^{**} = 46.66(\text{min})$ となる。以上のモデルを, まだ観測値が得られていない時点での降雨強度の分布の先験的モデルとして採用すれば, 観測値が得られていない時点での流域下流端における流量の推定値 $E[q_0(t)]$ と分散 $Var[q_0(t)]$ は (2)式および (11)式より,

$$\begin{aligned} E[q_0(t)] &= B \int_0^L \int_{-\infty}^t E[\zeta(\tau, x)] \delta\left(t - \frac{x}{v} - \tau\right) d\tau dx \\ &= B \int_0^L E\left[\zeta\left(t - \frac{x}{v}, x\right)\right] dx \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$



(a) Estimates of rainfall intensity.



(b) Variance of Estimation error of rainfall intensity.

Fig. 3. Estimates of Rainfall intensity Process when no observations are made.

$$\text{Var}[q_0(t)] = B^2 \int_0^L dx_1 \int_0^L dx_2 \text{Cov} \left[\zeta \left(t - \frac{x_1}{v}, x_1 \right), \zeta \left(t - \frac{x_2}{v}, x_2 \right) \right] \dots\dots\dots (32)$$

また、流量の平均値が最大になる時刻 t_q^* は

$$t_q^* = \frac{1}{\alpha - \beta} \ln \frac{\exp(\alpha L/v) - 1}{\exp(\beta L/v) - 1} \dots\dots\dots (33)$$

で与えられる。(31)式で与えられる流量の平均値をの時間的推移を流出速度 $v = 3.33 \text{ m/s}$, 1.67 m/s , 0.833 m/s , 0.556 m/s の4ケースについてそれぞれプロットしたものを Fig. 4 に示す。また、(32)式で与えられる流域下流端流量の分散を同じく4ケースの流出速度に対してそれぞれプロットしたものを Fig. 5 に示す。ただし、(32)式の積分には台形公式を用いた。数値積分の幅 Δx , Δt は、 $v = 3.33 \text{ m/s}$ のときは $\Delta x = 1.0 \text{ km}$, $\Delta t = 5.0 \text{ min}$ とし、 $v = 1.67 \text{ m/s}$, 0.833 m/s , 0.556 m/s のときは $\Delta x = 0.5 \text{ km}$, $\Delta t = 5.0 \text{ min}$ とした。Fig. 5 によれば、流量の分散の最大値は流出速度 v が小さくなるにしたがって小

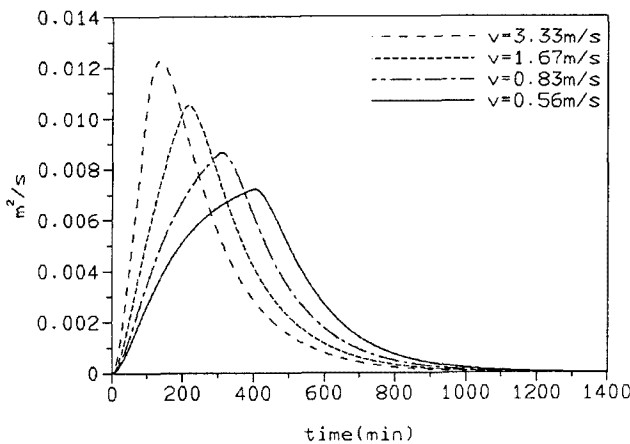


Fig. 4. Streamflow estimation in the case of no observation.

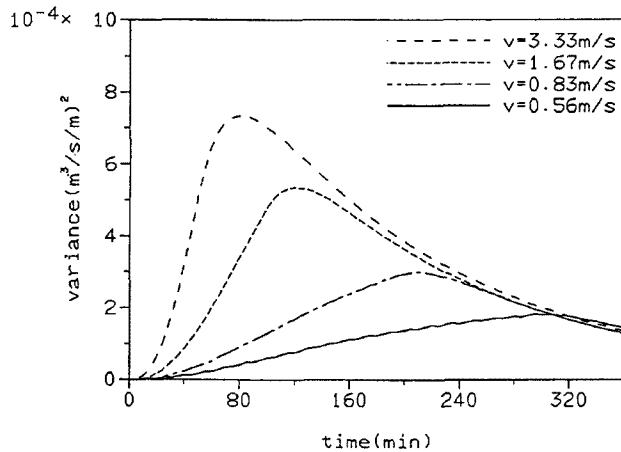


Fig. 5. The variance of estimation error when no observations are made.

さくなっているが、これは、流出速度が大きい時は分散が大きい時刻の降雨が流出の大部分をしめるのに比べ、流出速度が小さいときは降雨の分散が平均化されて流量の分散になるためと考えられる。

4.3 降雨観測のみを行った場合の最適観測所位置

本節では、流量予測精度を評価指標した場合に、降雨観測所を流域内に一様に配置するという方針でよいかどうかを明らかにするため、Fig. 2 に示すモデル流域に降雨観測所を1箇所設けるものとして、最適な観測位置を決定する。この場合、もし、降雨観測所を流域内に一様に配置すべきなのであれば、流域の中央がよいということになる。

いま、降雨観測所を流域下流端から距離 z の位置に設けるものとする。この観測所から、時間間隔 Δt_r ごとに降雨観測値 $z_1(k \Delta t_r)$ ($k=1, 2, \dots$) が得られる。また、観測値を得る以前の降雨強度の推定値と推定誤差の共分散はそれぞれ (20)式, (21)式で、流域下流端流量の推定値と推定誤差の共分散はそれぞれ (31)式, (32)式で与えられるとする。このとき、降雨観測値を得たときの降雨強度の推定値 $\hat{\zeta}(t, x | z_1(k \Delta t_r))$ 及び推定誤差の共分散関数 $R(t_1, x_1, t_2, x_2 | z_1(k \Delta t_r))$ は、3.1の(8), (9), (10)式から、

$$\xi(t, x | z_1(k \Delta t_r)) = \xi(t, x | z_1((k-1) \Delta t_r)) + k_1(t, x) \int_{(k-1) \Delta t_r}^{k \Delta t_r} \xi(\tau, \xi) d\tau \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$k_1(t, x) = \frac{\int_{(k-1) \Delta t_r}^{k \Delta t_r} R(t, x, \tau, \xi) d\tau}{\int_{(k-1) \Delta t_r}^{k \Delta t_r} d\tau_1 \int_{(k-1) \Delta t_r}^{k \Delta t_r} d\tau_2 R(\tau_1, \xi, \tau_2, \xi | z_1((k-1) \Delta t_r))} \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$R(\tau_1, \xi, \tau_2, \xi | z_1(k \Delta t_r)) = R(\tau_1, \xi, \tau_2, \xi | z_1((k-1) \Delta t_r)) - k_1(t_1, x_1) \int_{(k-1) \Delta t_r}^{k \Delta t_r} R(\tau, \xi, t_2, x_2) d\tau \quad \dots\dots (36)$$

与えられる。また、流域下流端での単位幅当りの流量の推定値 $q_0(t | k \Delta t_r) / B$ は (31)式より、

$$\frac{q_0(t | z_1(k \Delta t_r))}{B} = \int_0^L \xi\left(t - \frac{x}{v}\right) dx \quad \dots\dots\dots (37)$$

となり、流量の推定誤差の分散は、(32)式より、

$$\frac{Var[q_0(t | z_1(k \Delta t_r))]}{B^2} = \int_0^L dx_1 \int_0^L dx_2 R\left(t - \frac{x_1}{v}, x_1, t - \frac{x_2}{v}, x_2 | z_1(k \Delta t_r)\right) \quad \dots\dots\dots (38)$$

で表される。

さて、実際に降雨観測システムを評価する指標としては、上式の $Var[q_0(t | z_1(k \cdot \Delta t_r))]$ を用いるにしても種々定義できるが、ここでは、ピーク流量の予測が洪水制御の上で特に重要であることを考慮し、ピーク流量の予測精度を用いることにする。ただし、ピーク流量の生起時刻を予測するためには、ハイドログラフ全体の予測を行うことが必要である⁸⁾から、ここでは、観測値を行わない場合における流域下流端流量の推定値 ((31)式) が最大になる時刻 t_q^* ((33)式で与えられる) をピーク流量生起時刻と仮定し、時刻 t_q^* の流域下流端流量の予測誤差分散を用いることにする。具体的な手順を次に示す。

1. 観測を行わない場合について、流域下流端流量の平均値のピーク生起時刻 t_q^* と時刻 t_q^* での流量の分散 $Q_0(t_q^*)$ を求める。
2. 雨量観測を行った場合について、時刻 t_q^* の流域下流端流量をリード時間 $t_L (= 2/3 t_q^*)$ で、すなわち時刻 $t_q^* - t_L$ に予測し、予測誤差分散 $Q(t_q^* | t_q^* - t_L)$ を求める。
3. $Q(t_q^* | t_q^* - t_L) / Q_0(t_q^*)$ を最小化する。

以上の手順で Fig. 2 に示す流域において流出速度 $v = 3.33 \text{ m/s}, 1.67 \text{ m/s}, 0.833 \text{ m/s}, 0.556 \text{ m/s}$ について流域下流端より 1 km ごとに雨量計を配置して $Q(t_q^* | t_q^* - t_L) / Q_0(t_q^*)$ を計算し、雨量計の各位置に対してプロットしたものを Fig. 6 に示す。Fig. 6 をみると $Q(t_q^* - t_L) / Q_0(t_q^*)$ の値は、流出速度が $v = 3.33 \text{ m/s}, 1.67 \text{ m/s}, 0.833 \text{ m/s}$ のときは雨量計を流域下流端から 6 km の地点に置いたときに最小となり、 $v = 0.556 \text{ m/s}$ のときは 7 km の地点に置いたときに最小となっており、 $Q(t_q^* | t_q^* - t_L) / Q_0(t_q^*)$ が最小となる地点は流出速度が小さくなるにつれて上流側に移動する傾向があることがわかる。

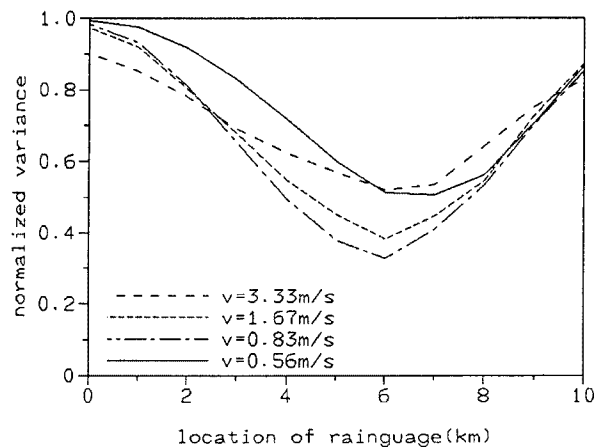


Fig. 6. Relation between the location of a rain-gauge and the variance of estimation error of peak flow.

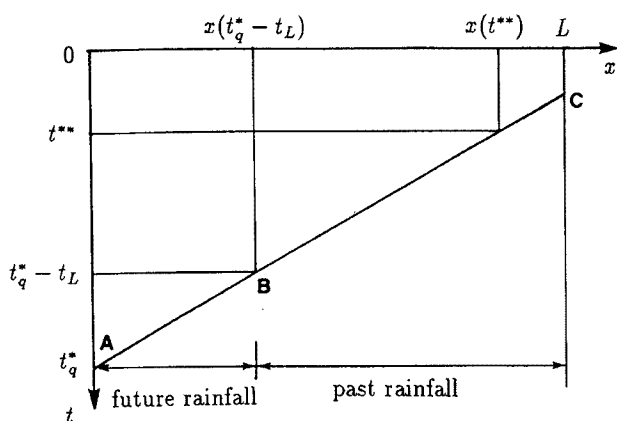


Fig. 7. Time and location of the rainfall which composes peak flow discharge.

この理由を考えるため、時刻 t_q^* の流域下流端流量を形成する降雨の時刻と位置との関係を $v t_q^* > L$ の場合についてプロットしたものを Fig. 7 に示す。Fig. 7 中両者の関係は AC で示され、 $x(t_q^* - t_L)$ はピーク流量を形成する雨が時刻 $t_q^* - t_L$ に降った位置を表す。時刻 t_q^* の流域下流端流量を形成する降雨のうち予測を行う時刻 $t_q^* - t_L$ までに降る雨の時刻と位置の関係は BC で表される。したがって、降雨の時間的な相関が弱ければ区間 BC で表される降雨を精度良く推定することがピーク流量の予測精度を上げることにつながるため、BC に対応する流域上の区間 $(x(t_q^* - t_L) \sim$

$L)$ の中間点付近に雨量計を設けるのが適当であると考えられる。この中間点は流出速度 v が小さくなるにつれ上流に移動するから、それに伴い最適な雨量計の位置も上流側に移動する。本適用例では最適な雨量計位置は $x(t_q^* - t_L)$ から L の区間の中間点よりは下流側にずれる結果となっているが、これは降雨強度に時間的な相関があるためであると考えられる。

また、降雨強度の分散が最大になる時刻 t^* が降雨初期に訪れるため、時刻 t^* の降雨のうちピーク形成に寄与する地点 t^* 付近の降雨推定精度を上げることもピーク予測精度の向上に必要であり、このことも流域上流側に雨量計を配置するという効果を与えていると考えられる。

なお、 $Q(t_q^* - t_L)/Q_0(t_q^*)$ の値の最小値は流出速度 v が 3.33 m/s, 1.67 m/s, 0.833 m/s となるにしたがって減少し、 $v = 0.556$ m/s で再び上昇している。これは、流出速度が小さくなるにしたがって $Q(t_q^* - t_L)$ の値は減少するが、同時に $Q_0(t_q^*)$ の値も減少するため (Fig. 5 参照)、この $Q(t_q^* - t_L)$ と $Q_0(t_q^*)$ の減少の割合の差によってこの様な変化が生じると考えられる。

以上の適用結果から、流出予測の精度向上を考える場合には、雨量計を必ずしも流域内に一様に配置すべきではないこと、また、望ましい雨量計の位置は各流域の流出特性に大きく依存することがわかった。

5. 結 語

本研究では、降雨・流量観測システムの設計に関し、降雨観測所・流量観測所の設置位置、観測時間間隔をどのようにとるかという問題を流域下流端での流量予測精度、特にピーク流量の予測精度を評価基準として設計する方法を展開した。得られた成果としては、

1. 降雨・流量観測システムの設計を流域下流端での流量予測精度を基準として行うため、流域内に設ける降雨観測所と流量観測所の数、空間的な配置および観測時間間隔が流域下流端流量の推定精度に及ぼす影響を算定する方法を確率ベクトル場のカルマンフィルター理論を用いることによって導いた。本研究で、提案した方法は、特に流域内に設ける降雨観測所の総数を考慮するだけでなく、流域内部に設ける流量観測所の効果および降雨観測所と流量観測所の相対的な位置関係をも設計に組み入れることができるものである。
2. 適用における第一段階として1次元流域モデル上での降雨観測所の設置位置決定問題を扱い、雨量計の最も効果の高い設置位置は、常識的に考えられる流域の中心ではなく、流出の速度に応じて流域中央より上流に寄った位置であることを見いだした。これは、降雨観測所を流域内に一様に置き

ばよいとは限らないことを示している。
 などが挙げられる。

また、今後の課題としては次のことが考えられる。

1. 流量観測についても適用を行い、流量観測所の位置、特に、流量観測所と降雨観測所の相対的な位置関係と流出予測精度の関係、解明する必要がある。
2. 実際流域への適用を行い、本方法の有効性の確認と適用にあたっての問題点の抽出およびその解決を図らなければならない。

参 考 文 献

- 1) 石原藤次郎・池淵周一：降雨観測網の統計的評価，京大防災研年報，第13号B，1970，pp.33-51.
- 2) Rodoriguez-Iturbe, I. and J. Mejia: The Design of Rainfall Networks in Time and Space, Water Resources Research, Vol.10, No.4, 1974, pp.713-728.
- 3) 高棹琢馬・池淵周一：降水観測網がもたらす情報量とその観測網配置計画への応用，土木学会論文報告集，第234号，1975，pp.83-95.
- 4) Tarboton, D.G., R.L. Bras and C.E. Puente: Combined Hydrologic Sampling Criteria for Rainfall and Streamflow, Journal of Hydrology, No.95, 1987, pp.323-339.
- 5) Hydrologic Sampling—a Characterization in Terms of Rainfall and Basin properties, Water Resources Research, Vol.102, pp.113-135.
- 6) 高棹琢馬・宝 馨・三谷裕次郎：洪水予測精度向上のためのレーダー雨量計の逐次補正について，第33回水理講演会論文集，1989，pp.103-108.
- 7) Rodoriguez-Iturbe, I. and P.S. Eagleson: Mathematical Models of Rainstorm Events in Space and Time, Water Resources Research, Vol.23, pp.181-190.
- 8) 高棹琢馬・椎葉充晴・劉春燕・上林好之：降雨流出の実時間予測情報の形式について，水工学論文集，第34巻，1990，pp.79-84.

付 録

ここでは、確率ベクトル場の線形最小2乗推定を定義することから始めて、確率ベクトル場におけるKalman Filter理論を導く。

まず、空間 Ω 上で定義された確率ベクトル場 $x(\omega)$ 、 $\omega \in \Omega$ と m 次元の確率ベクトル y とを考える。 y の実現値が得られたときの $x(\omega)$ の推定値 $x(\omega|y)$ を求める式として次のような線形式

$$x(\omega|y) = A(\omega)y + b(\omega) \dots\dots\dots \text{付-(1)}$$

を考えよう。ただし、 $A(\omega)$ は $m \times n$ 次行列、 $b(\omega)$ は n 次元列ベクトルである。以後、特に断わらない限り、ベクトルはすべて列ベクトルとする。上式中の $x(\omega|y)$ 、 y も列ベクトルである。

全ての $n \times m$ 次行列 $A(\omega)$ 、 n 次元列ベクトル $b(\omega)$ の中で

$$E_{x,y}[\|x(\omega) - A(\omega)y - b(\omega)\|^2] = E_{x,y}[\{x(\omega) - A(\omega)y - b(\omega)\}^t \{x(\omega) - A(\omega)y - b(\omega)\}]$$

を最小にする $A(\omega)$ 、 $b(\omega)$ を $\hat{A}(\omega)$ 、 $\hat{b}(\omega)$ とすると、

$$\hat{A}(\omega|y) = \hat{A}(\omega)y + \hat{b}(\omega) \dots\dots\dots \text{付-(2)}$$

を確率ベクトル場 $x(\omega)$ の線形最小2乗推定子という。

定 理 1

$x(\omega)$ を空間 Ω で定義された n 次元確率ベクトル場, y を m 次元の確率ベクトルとする。これらの平均値, 共分散関数が存在するものと仮定し, 次のように表す。

$$E_x[x(\omega)] = \bar{x}(\omega), \quad E_y[y] = \bar{y} \quad \text{付-(3)}$$

$$E_x[\{x(\omega_1) - \bar{x}(\omega_1)\} \{x(\omega_2) - \bar{x}(\omega_2)\}^T] = \Sigma_{x(\omega_1)x(\omega_2)} \quad \text{付-(4)}$$

$$E_y[(y - \bar{y})(y - \bar{y})^T] = \Sigma_{yy} \quad \text{付-(5)}$$

$$E_{xy}[\{x(\omega) - \bar{x}(\omega)\} (y - \bar{y})^T] = \Sigma_{x(\omega)y} \quad \text{付-(6)}$$

$$E_{xy}[(y - \bar{y}) \{x(\omega) - \bar{x}(\omega)\}^T] = \Sigma_{yx(\omega)} = \Sigma_{x(\omega)y}^T \quad \text{付-(7)}$$

さらに, Σ_{yy} の送行列が存在するものと仮定する。そうすると, y が与えられたときの $x(\omega)$ の線形最小 2 乗推定子は,

$$\hat{x}(x | y) = \bar{x}(\omega) + \Sigma_{x(\omega)y} \Sigma_{yy}^{-1} (y - \bar{y}) \quad \text{付-(8)}$$

で与えられる。また, この推定式を用いたときの推定誤差の共分散関数は,

$$E_{xy}[\{x(\omega_1) - \hat{x}(\omega_1 | y)\} \{x(\omega_2) - \hat{x}(\omega_2 | y)\}^T] = \Sigma_{x(\omega_1)x(\omega_2)} - \Sigma_{x(\omega_1)y} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx(\omega_2)} \quad \text{付-(9)}$$

で与えられる。

(証明)

$$f(A, b) = E_{xy}[\|x(\omega) - A(\omega)y - b(\omega)\|^2] = E_{xy}[\{x(\omega) - A(\omega)y - b(\omega)\} \{x(\omega) - A(\omega)y - b(\omega)\}^T]$$

とおき, $f(A, b)$ を A, b について偏微分し, それを 0 とおくことにより

$$0 = \frac{\partial f}{\partial A} \Big|_{A, b} = 2E_{xy}[y \{b(\omega) + \hat{A}(\omega)y - x(\omega)\}^T] \quad \text{付-(10)}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial b} \Big|_{A, b} = 2E_{xy}[-x(\omega) + \hat{A}(\omega)y + b(\omega)] \quad \text{付-(11)}$$

を得る。付-(11)式より $b(\omega) = \hat{A}(\omega)y - x(\omega) + \bar{x}(\omega)$ を得るから, これを付-(10)式に代入すると

$$E_{xy}[y \{\hat{A}(\omega)(y - \bar{y}) - (x(\omega) - \bar{x}(\omega))\}^T] = 0 \quad \text{付-(12)}$$

となる。ここで, 恒等式

$$E_{xy}[-\bar{y} \{\hat{A}(\omega)(y - \bar{y}) - (x(\omega) - \bar{x}(\omega))\}^T] = 0 \quad \text{付-(13)}$$

を付-(12)式にたせば

$$E_{xy}[(y - \bar{y}) \{\hat{A}(\omega)(y - \bar{y}) - (x(\omega) - \bar{x}(\omega))\}^T] = 0 \quad \text{付-(14)}$$

が得られる。したがって, 付-(5), 付-(6), 付-(7)式の記法を用いると

$$\hat{A}(\omega) = \Sigma_{x(\omega)y} \Sigma_{yy}^{-1} \quad \text{付-(15)}$$

を得る。また, $b(\omega)$ は付-(11), 付-(13)式より

$$\hat{b}(\omega) = \bar{x}(\omega) - \Sigma_{x(\omega)y} \Sigma_{yy}^{-1} \bar{y} \quad \text{付-(16)}$$

となる。以上から

$$\hat{x}(\omega | y) = \bar{x}(\omega) + \Sigma_{x(\omega)y} \Sigma_{yy}^{-1} (y - \bar{y})$$

を得る。次に, この $\hat{x}(\omega | y)$ を付-(9)式の左辺に代入すると付-(9)式の右辺が得られる。

〈系1.1〉

定理1の仮定のもとで

$$\bar{x}(\omega) = E_x[x(\omega)] = E_y[\hat{x}(\omega | y)] \quad \text{付-(17)}$$

が成り立つ。

(証明) 付-(8)式より明らか。

〈系1.2〉

〈定理1〉の仮定のもとで付-(8)式による推定子 $\hat{x}(\omega | y)$ の推定誤差 $x(\omega) - \hat{x}(\omega | y)$ は, y および $x(\omega | y)$ と無相関である。すなわち,

$$E_{xy}[y\{x(\omega) - \hat{x}(\omega | y)\}^t] = 0 \quad \text{付-(18)}$$

$$E_{xy}[\hat{x}(\omega | y)\{x(\omega) - \hat{x}(\omega | y)\}^t] = 0 \quad \text{付-(19)}$$

である。

(証明)

付-(18)式は付-(18)式よりただちに導かれる。付-(19)式の左辺は

$$\begin{aligned} E_{xy}[\{\hat{A}(\omega)y + \hat{\delta}(\omega)\}\{x(\omega) - \hat{x}(\omega | y)\}^t] \\ = \hat{A}(\omega)E_{xy}[y\{x(\omega) - \hat{x}(\omega | y)\}^t] + \hat{\delta}(\omega)E_{xy}[\{x(\omega) - \hat{x}(\omega | y)\}^t] \end{aligned}$$

となるが、右辺第1項は、付-(18)式により0、第2項は〈系1.1〉によって0である。

〈系1.3〉

$x(\omega)$ 、 y とは無相関である p 次の確率ベクトル z を考える。このとき、 y と z (すなわち、確率ベクトル $[y^t, z^t]^t$) が与えられたときの $x(\omega)$ の最小2乗推定子 $\hat{x}(\omega | y, z)$ は

$$\hat{x}(\omega | y, z) = \hat{x}(\omega | y) + \hat{x}(\omega | z) - \bar{x}(\omega) \quad \text{付-(20)}$$

で与えられる。ただし、 $\hat{x}(\omega | y)$ 、 $\hat{x}(\omega | z)$ はそれぞれ y 、 z が得られたときの $x(\omega)$ の線形最小2乗推定子である。また、

$$\begin{aligned} E_{xyz}[\{x(\omega_1) - \hat{x}(\omega_1 | y, z)\}\{x(\omega_2) - \hat{x}(\omega_2 | y, z)\}^t] \\ = \Sigma_{x(\omega_1)x(\omega_2)} - \Sigma_{x(\omega_1)y} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx(\omega_2)} - \Sigma_{x(\omega_1)z} \Sigma_{zz}^{-1} \Sigma_{zx(\omega_2)} \quad \text{付-(21)} \end{aligned}$$

である。ここに

$$\Sigma_{x(\omega)z} = E_{xz}[\{x(\omega) - \bar{x}(\omega)\}\{z - \bar{z}\}^t] \quad \text{付-(22)}$$

$$\Sigma_{zx(\omega)} = E_{xz}[\{z - \bar{z}\}\{x(\omega) - \bar{x}(\omega)\}^t] = \Sigma_{x(\omega)z}^t \quad \text{付-(23)}$$

$$\Sigma_{zz} = E_z[\{z - \bar{z}\}\{z - \bar{z}\}^t] \quad \text{付-(24)}$$

$$\bar{z} = E_z[z] \quad \text{付-(25)}$$

であって、 Σ_{zz} は正則とする。

(証明)

$$u = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix}$$

とおくと、付-(8)式により

$$\hat{x}(\omega | u) = \bar{x}(\omega) + \Sigma_{x(\omega)u} \Sigma_{uu}^{-1} (u - \bar{u}) \quad \text{付-(26)}$$

が成り立つ。ここで、 y と z は無相関であるから

$$\Sigma_{x(\omega)u} = [\Sigma_{x(\omega)y} \quad \Sigma_{x(\omega)z}] \quad \text{付-(27)}$$

$$\Sigma_{uu} = \begin{bmatrix} \Sigma_{yy} & 0 \\ 0 & \Sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{付-(28)}$$

であることに注意すると、式付-(26)式から

$$x(\omega | u) = \bar{x}(\omega) + [\Sigma_{x(\omega)y} \quad \Sigma_{x(\omega)z}] \begin{bmatrix} \Sigma_{yy}^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{zz}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y - \bar{y} \\ z - \bar{z} \end{bmatrix} = \hat{x}(\omega | y) + \hat{x}(\omega | z) - \bar{x}$$

を得る。また、付-(20)式の推定子に対する推定誤差分散行列は付-(9)式より

$$E_{xu}[\{x(\omega_1) - \hat{x}(\omega_1 | y)\}\{x(\omega_2) - \hat{x}(\omega_2 | y)\}^t] = \Sigma_{x(\omega_1)x(\omega_2)} - \Sigma_{x(\omega_1)u} \Sigma_{uu}^{-1} \Sigma_{ux(\omega_2)}$$

$$= \Sigma_{x(\omega_1)x(\omega_2)} - \Sigma_{x(\omega_1)y} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx(\omega_2)} - \Sigma_{x(\omega_1)z} \Sigma_{zz}^{-1} \Sigma_{zx(\omega_2)}$$

となり、付-(21)式を得る。

〈系1.4〉

〈系1.3〉において、 y と z が必ずしも無相関ではないとする。すなわち、

$$\Sigma_{yz} = \Sigma_{zy} = E_{yz}[\{y - \bar{y}\} \{z - \bar{z}\}] \neq 0$$

であるかも知れないとする。このときは

$$\hat{x}(\omega | y, z) = \hat{x}(\omega | y) + \hat{x}(\omega | z) (z - \bar{z}(y)) - \bar{x}(\omega) \dots\dots\dots \text{付-(29)}$$

である。また、

$$\begin{aligned} E_{xyz}[\{x(\omega_1) - \hat{x}(\omega_1 | y, z)\} \{x(\omega_2) - \hat{x}(\omega_2 | y, z)\}] \\ = E_{xy}[\{x(\omega_1) - \hat{x}(\omega_1 | y)\} \{x(\omega_2) - \hat{x}(\omega_2 | y)\}] - E_{yz}[\{z - \bar{z}(y)\} \{x(\omega_2) - \bar{x}(\omega_2)\}] \dots\dots\dots \text{付-(30)} \end{aligned}$$

である。

(証明)

〈系1.2〉によって y と $z - \bar{z}(y)$ は無相関である。よって、 y と z の実現値が得られたとき、 y と $z - \bar{z}(y)$ が得られたと考えれば 〈系1.3〉より直ちに

$$\hat{x}(\omega | y, z) = \hat{x}(\omega | y, z - \bar{z}(y)) = \hat{x}(\omega | y) + \hat{x}(\omega | z - \bar{z}(y)) - \bar{x}(\omega) \dots\dots\dots \text{付-(31)}$$

を得る。同様に推定誤差の共分散行列は、付-(21)式により

$$\begin{aligned} E_{xyz}[\{x(\omega_1) - \hat{x}(\omega_1 | y, z)\} \{x(\omega_2) - \hat{x}(\omega_2 | y, z)\}] \\ = E_{xyz}[\{x(\omega_1) - \hat{x}(\omega_1 | y, z - \bar{z}(y))\} \{x(\omega_2) - \hat{x}(\omega_2 | y, z - \bar{z}(y))\}] \\ = E_{xyz}[\{x(\omega_1) - \hat{x}(\omega_1 | y)\} \{x(\omega_2) - \hat{x}(\omega_2 | y)\}] - E_{yz}[\{x(\omega_1) - \bar{x}(\omega_1)\} \{z - \bar{z}(y)\}] \\ [E_{yz}[\{z - \bar{z}(y)\} \{z - \bar{z}(y)\}]^{-1} E_{xyz}[\{z - \bar{z}(y)\} \{x(\omega_2) - \bar{x}(\omega_2)\}]] \end{aligned}$$

となり付-(30)式を得る。なお、上の式展開において $E_{yz}[\{z - \bar{z}(y)\}] = 0$ および、付-(9)式を用いた。

〈系1.5〉

$x_0(\omega)$ 、 y を互いに結合分布する確率ベクトル場および確率ベクトルとする。 v は $x_0(\omega)$ と y の双方と無相関な確率ベクトルで $x_1(\omega)$ は

$$x_1(\omega) = \Phi x_0(\omega) + v \dots\dots\dots \text{付-(32)}$$

で定められる確率ベクトル場とする。ただし、 $x_0(\omega)$ を n 次、 v を p 次とする。 Φ は $p \times n$ 次の非確率行列である。このとき、

$$\hat{x}_1(\omega) = \Phi \hat{x}_0(\omega | y) + \bar{v} \dots\dots\dots \text{付-(33)}$$

$$\begin{aligned} E_{x_1yz}[\{x_1(\omega_1) - \hat{x}_1(\omega_1 | y)\} \{x_1(\omega_2) - \hat{x}_1(\omega_2 | y)\}] \\ = \Phi E_{x_0yz}[\{x_0(\omega_1) - \hat{x}_0(\omega_1 | y)\} \{x_0(\omega_2) - \hat{x}_0(\omega_2 | y)\}] \Phi + E_v[\{v - \bar{v}\} \{v - \bar{v}\}] \dots\dots\dots \text{付-(34)} \end{aligned}$$

である。

(証明)

〈定理1〉により

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_0(\omega | y) &= \bar{x}_0(\omega) + \Sigma_{x_0(\omega)y} \Sigma_{yy}^{-1} (y - \bar{y}), \\ E_{x_0yz}[\{x_0(\omega_1) - \hat{x}_0(\omega_1 | y)\} \{x_0(\omega_2) - \hat{x}_0(\omega_2 | y)\}] &= \Sigma_{x_0(\omega_1)x_0(\omega_2)} - \Sigma_{x_0(\omega_1)y} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx_0(\omega_2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots \text{付-(35)}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_1(\omega | y) &= \bar{x}_1(\omega) + \Sigma_{x_1(\omega)y} \Sigma_{yy}^{-1} (y - \bar{y}), \\ E_{x_1yz}[\{x_1(\omega_1) - \hat{x}_1(\omega_1 | y)\} \{x_1(\omega_2) - \hat{x}_1(\omega_2 | y)\}] &= \Sigma_{x_1(\omega_1)x_1(\omega_2)} - \Sigma_{x_1(\omega_1)y} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx_1(\omega_2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots \text{付-(36)}$$

である。ここで、付-(8)式と、 v が $x_0(\omega)$ 、 y と無相関であることを用いると

$$\left. \begin{aligned} x_1(\omega) &= \Phi x_0(\omega) + \bar{v} \\ \Sigma_{x_1(\omega_1)x_1(\omega_2)} &= \Phi \Sigma_{x_0(\omega_1)x_0(\omega_2)} \Phi' + \Sigma_{vv} \\ \Sigma_{x_1(\omega)y} &= \Sigma_{yx_1(\omega)}' = \Phi \Sigma_{x_0(\omega)y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots \text{付-(37)}$$

を得るから、付-(35)、付-(36) を用いて

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(\omega | y) &= \Phi x_0(\omega) + \bar{v} + \Phi \Sigma_{x_0(\omega)y} \Sigma_{yy}^{-1} (y - \bar{y}) = \Phi x_0(\omega | y) + \bar{v} \\ E[\{x_1(\omega_1) - \hat{x}_1(\omega_1 | y)\} \{x_1(\omega_2) - \hat{x}_1(\omega_2 | y)\}] &= \Phi \Sigma_{x_0(\omega_1)x_0(\omega_2)} \Phi' + \Sigma_{vv} - \Phi \Sigma_{x_0(\omega_1)y} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx_0(\omega_2)} \Phi' \\ &= \Phi E_{x_0y}[\{x_0(\omega_1) - \hat{x}_0(\omega_1 | y)\} \{x_0(\omega_2) - \hat{x}_0(\omega_2 | y)\}] \Phi' + \Sigma_{vv} \end{aligned}$$

を得、〈系1.5〉は証明された。

〈系1.5'〉

2つの空間 $\Omega_1 \Omega_2$ の直積空間 $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ で定義された n 次元確率ベクトル場 $x_0(\omega)$, $\omega = (t, s) \in \Omega$, $t \in \Omega_1$, $s \in \Omega_2$ と、 $x_0(\omega)$ を y と互いに結合分布する確率ベクトルとする。また、 $x_1(t)$ を

$$x_1(t) = \int_A h(s) x_0(t, s) ds \dots\dots\dots \text{付-(38)}$$

で定められる確率ベクトル場とする。ただし、 $x_0(t, s)$ を n 次とする。 $h(s)$ は空間 Ω_2 で定義される p 次元非確率ベクトル場である。また、 $A \subset \Omega_2$ とする。このとき、

$$\hat{x}_1(t) = \int_A h(s) \hat{x}_0(t, s | y) ds \dots\dots\dots \text{付-(39)}$$

$$\begin{aligned} E_{x_1y}[\{x_1(t_1) - \hat{x}_1(t_1 | y)\} \{x_1(t_2) - \hat{x}_1(t_2 | y)\}] \\ = \int_A ds_1 \int_A ds_2 h(s_1) E_{x_0y}[\{x_0(t_1, s_1) - \hat{x}_0(t_1, s_1 | y)\} \{x_0(t_2, s_2) - \hat{x}_0(t_2, s_2 | y)\}] \{h(s_2)\}' \dots\dots \text{付-(40)} \end{aligned}$$

で与えられる。

(証明)

〈定理1〉により

$$\begin{aligned} \hat{x}_0(t, s | y) &= \bar{x}_0(t, s) + \Sigma_{x_0(t,s)y} \Sigma_{yy}^{-1} (y - \bar{y}), \\ E_{x_0y}[\{x_0(t_1, s_1) - \hat{x}_0(t_1, s_1 | y)\} \{x_0(t_2, s_2) - \hat{x}_0(t_2, s_2 | y)\}] &= \Sigma_{x_0(t_1, s_1)x_0(t_2, s_2)} - \Sigma_{x_0(t_1, s_2)} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx_0(t_2, s_2)} \\ &\dots\dots\dots \text{付-(41)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(t) &= \bar{x}_1(t) + \Sigma_{x_1(t)y} \Sigma_{yy}^{-1} (y - \bar{y}), \\ E_{x_1y}[\{x_1(t_1) - \hat{x}_1(t_1 | y)\} \{x_1(t_2) - \hat{x}_1(t_2 | y)\}] &= \Sigma_{x_1(t_1)x_1(t_2)} - \Sigma_{x_1(t_1)y} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx_1(t_2)} \dots\dots\dots \text{付-(42)} \end{aligned}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(t) &= \int_A h(s) \bar{x}_0(t, s) ds \\ \Sigma_{x_1(t_1)x_1(t_2)} &= E \left[\left\{ \int_A h(s) x_0(t_1, s) ds - \int_A h(s) \bar{x}_0(t_1, s) ds \right\} \left\{ \int_A h(s) x_0(t_2, s) ds - \int_A h(s) \bar{x}_0(t_2, s) ds \right\}' \right] \\ &= \int_A ds_1 \int_A ds_2 h(s_1) \Sigma_{x_0(t_1, s_1)x_0(t_2, s_2)} \{h(s_2)\}' \\ \Sigma_{x_1(t)y} &= \Sigma_{yx_1(t)}' = \int_A h(s) \Sigma_{x_0(t,s)y} ds \dots\dots\dots \text{付-(43)} \end{aligned}$$

であることに注意すれば、付-(41)、付-(42) を用いて

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(t) &= \int_A h(s) \bar{x}_0(t, s) ds + \int_A h(s) \Sigma_{x_0(t,s)y} \Sigma_{yy}^{-1} (y - \bar{y}) = \int_A h(s) \hat{x}_0(t, s | y) ds \\ E_{x_1y}[\{x_1(t_1) - \hat{x}_1(t_1 | y)\} \{x_1(t_2) - \hat{x}_1(t_2 | y)\}] & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_A ds_1 \int_A ds_2 h(s_1) \Sigma_{x_0(t_1, s_1)x_0(t_2, s_2)} \{h(s_2)\}^t - \int_A h(s) \Sigma_{x_0(t_1, s)y} ds \Sigma_{yy}^{-1} \int_A \Sigma_{yx_0(t_2, s)} \{h(s_2)\}^t ds \\
 &= \int_A ds_1 \int_A ds_2 h(s_1) \{ \Sigma_{x_0(t_1, s_1)x_0(t_2, s_2)} \Sigma_{x_0(t_1, s_1)y} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx_0(t_2, s_2)} \} \{h(s_2)\} \{h(s_2)\}^t \\
 &= \int_A ds_1 \int_A ds_2 h(s_1) E_{x_0y} [\{x_0(t_1, s_1) - \bar{x}_0(t_1, s_1 | y)\} \{x_0(t_2, s_2) - \bar{x}_0(t_2, s_2 | y)\}^t] \{h(s_2)\}^t
 \end{aligned}$$

を得る。

〈系1.6〉

$x(\omega)$, Y を互いに結合分布するそれぞれ n 次, p 次の確率ベクトル場および確率ベクトルとする。また, u は $x(\omega)$, Y とは無相関な m 次確率ベクトルとする。このとき, m 次の確率ベクトル y が, $m \times n$ 次非確率行列 H と u を用いて

$$y = Hx(\omega_0) + u \dots\dots\dots \text{付-(44)}$$

で定められるとする。また,

$$\left. \begin{aligned}
 E[\{x(\omega_1) - \bar{x}(\omega_1 | Y)\} \{x(\omega_2) - \bar{x}(\omega_2 | Y)\}^t] &= P(\omega_1, \omega_2) \\
 E[u] &= \bar{u} \\
 E[(u - \bar{u})(u - \bar{u})^t] &= R
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots \text{付-(45)}$$

と書く。 R^{-1} は存在すると仮定する。このとき,

$$\bar{x}(\omega | Y, y) = \bar{x}(\omega | Y) + P(\omega, \omega_0) H^t \{HP(\omega_0, \omega_0) H^t + R\}^{-1} \{y - H\bar{x}(\omega_0 | Y) - \bar{u}\} \dots\dots\dots \text{付-(46)}$$

$$\begin{aligned}
 E[\{x(\omega_1) - \bar{x}(\omega_1 | Y, y)\} \{x(\omega_2) - \bar{x}(\omega_2 | Y, y)\}^t] \\
 = P(\omega_1, \omega_2) - P(\omega_1, \omega_0) H^t \{HP(\omega_0, \omega_0) H^t + R\}^{-1} HP(\omega_0, \omega_2) \dots\dots\dots \text{付-(47)}
 \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明)

〈系1.4〉より

$$\bar{x}(\omega | Y, y) = \bar{x}(\omega | Y) + \bar{x}(\omega | y - \hat{y}(Y)) - \bar{x}(\omega) \dots\dots\dots \text{付-(48)}$$

である。そこで, まず $\hat{y}(Y)$ を求めることを考える。いま, $x(\omega_0)$ と y は互いに結合分布する n 次, m 次の確率ベクトルであるから, 確率ベクトルの線形最小2乗推定の理論により

$$\hat{y}(Y) = H\bar{x}(\omega_0 | Y) + \bar{u} \dots\dots\dots \text{付-(49)}$$

$$\begin{aligned}
 E_{y,Y} [\{y - \hat{y}(Y)\} \{y - \hat{y}(Y)\}^t] &= HE_{x_0y} [\{x(\omega_0) - \bar{x}(\omega_0 | Y)\} \{x(\omega_0) - \bar{x}(\omega_0 | Y)\}^t] H^t + \\
 E_u [(u - \bar{u})(u - \bar{u})^t] &= HP(\omega_0, \omega_0) H^t + R \dots\dots\dots \text{付-(50)}
 \end{aligned}$$

である。次に, $\bar{x}(\omega | y - \hat{y}(Y))$ を求める。簡単のため

$$\hat{y} = y - \hat{y}(Y) = H\{x(\omega_0) - \bar{x}(\omega_0 | Y)\} + (u - \bar{u}) \dots\dots\dots \text{付-(51)}$$

とおくと

$$\bar{\hat{y}} = E_{y,Y} [y - \hat{y}(Y)] = E_y [y] - E_Y [\hat{y}(Y)] = 0 \dots\dots\dots \text{付-(52)}$$

$$\Sigma_{\hat{y}\hat{y}} = E_{y,Y} [\hat{y}\hat{y}^t] = HP(\omega_0, \omega_0) H^t + R \dots\dots\dots \text{付-(53)}$$

である。また

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{x(\omega)\hat{y}} &= E_{yY} [\{x(\omega) - \bar{x}(\omega)\} \hat{y}^t] \\
 &= E[\{x(\omega) - \bar{x}(\omega | Y) + \bar{x}(\omega | Y) - \bar{x}(\omega)\} \{(x(\omega_0) - \bar{x}(\omega_0 | Y))\}^t] H^t \\
 &= \{E[\{x(\omega) - \bar{x}(\omega | Y)\} \{(x(\omega_0) - \bar{x}(\omega_0 | Y))\}^t] + E[\bar{x}(\omega | Y) \{(x(\omega_0) - \bar{x}(\omega_0 | Y))\}^t] \\
 &\quad - \bar{x}(\omega_0) E[\{x(\omega_0) - \bar{x}(\omega_0 | Y)\}^t] \} H^t
 \end{aligned}$$

ここで 〈系1.2〉 により右辺第2項は0, また 〈系1.1〉 によって第3項も0となり, 結局

$$\Sigma_{x(\omega)\hat{y}} = E[\{x(\omega) - \bar{x}(\omega | Y)\} \{(x(\omega_0) - \bar{x}(\omega_0 | Y))\}^t] H^t = P(\omega, \omega_0) H^t \dots\dots\dots \text{付-(54)}$$

を得る。また、〈定理 1〉により

$$\begin{aligned} \hat{x}(\omega | y - \hat{y}(Y)) &= \hat{x}(\omega | \hat{y}) = \bar{x}(\omega) + \Sigma_{x(\omega)y} \Sigma_{yy}^{-1} (\hat{y} - \bar{y}) \\ &= \bar{x}(\omega) + P(\omega, \omega_0) H' (HP(\omega_0, \omega_0) H' + R)^{-1} (y - H\bar{x}(\omega_0 | Y) - \bar{u}) \dots\dots\dots \text{付-(55)} \end{aligned}$$

を得る。これを、付-(48)式に代入して

$$\hat{x}(\omega | Y, y) = \hat{x}(\omega | Y) + P(\omega, \omega_0) (HP(\omega_0, \omega_0) H' + R)^{-1} (y - H\hat{x}(\omega_0 | Y) - \bar{u})$$

を得る。さらに、 $\hat{x}(\omega | Y, y)$ の推定誤差の共分散行列は、〈系 1.4〉により

$$\begin{aligned} &E[\{x(\omega_1) - \hat{x}(\omega_1 | Y, y)\} \{x(\omega_2) - \hat{x}(\omega_2 | Y, y)\}] \\ &= E[\{x(\omega_1) - \hat{x}(\omega_1 | Y)\} \{x(\omega_2) - \hat{x}(\omega_2 | Y)\}] - E[\{x(\omega_1) - \bar{x}(\omega_1)\} \{y - \hat{y}(Y)\}]^T \\ &E[\{y - \hat{y}(Y)\} \{y - \hat{y}(Y)\}^T]^{-1} E[\{y - \hat{y}(Y)\} (x(\omega_2) - \bar{x}(\omega_2))]^T \\ &= P(\omega_1, \omega_2) - P(\omega_1, \omega_0) H' (HP(\omega_0, \omega_0) H' + R)^{-1} HP(\omega_0, \omega_2) \end{aligned}$$

となる。

〈系 1.6〉

2つの空間 Ω_1, Ω_2 の直積空間 $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ で定義された n 次の確率ベクトル場 $x(\omega), \omega = (t, s) \in \Omega, t \in \Omega_1, s \in \Omega_2$ と、互いに結合分布する p 次の確率ベクトルを Y とする。このとき、 m 次の確率ベクトル y が

$$y(t_0) = \int_A h(s_0) x(t_0, s_0) ds_0 \dots\dots\dots \text{付-(56)}$$

で定められるとする。また、

$$E[\{x(t_1, s_1) - \hat{x}(t_1, s_1 | Y)\} \{x(t_2, s_2) - \hat{x}(t_2, s_2 | Y)\}^T] = P(t_1, s_1, t_2, s_2) \dots\dots\dots \text{付-(57)}$$

と書く。このとき、

$$\begin{aligned} \hat{x}(t, s | Y, y) &= \hat{x}(\omega | Y) + \int_A P(t, s, t_0, s_0) \{h(s_0)\}^T ds_0 \left[\int_A ds_1 \int_A ds_2 h(s_1) \right. \\ &\quad \left. P(t_0, s_1, t_0, s_2) \{h(s_2)\}^T \right]^{-1} (y(t_0) - \int_A h(s_0) \hat{x}(t_0, s_0 | Y) ds_0) \dots\dots\dots \text{付-(58)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\{x(t_1, s_1) - \hat{x}(t_1, s_1 | Y, y)\} \{x(t_2, s_2) - \hat{x}(t_2, s_2 | Y, y)\}^T] &= P(t_1, s_1, t_2, s_2) - \int_A P(t_1, s_1, t_0, s_0) \\ &\quad \{h(s_0)\}^T ds_0 \left[\int_A d\xi_1 \int_A d\xi_2 h(\xi_1) P(t_0, \xi_1, t_0, \xi_2) \{h(\xi_2)\}^T \right]^{-1} \int_A h(s_0) P(t_0, s_0, t_2, s_2) ds_0 \dots\dots\dots \text{付-(59)} \end{aligned}$$

である。

(証明)

〈系 1.4〉より

$$\hat{x}(t, s | Y, y) = \hat{x}(t, s | Y) + \hat{x}(t, s | y - \hat{y}(Y)) - \bar{x}(t, s) \dots\dots\dots \text{付-(60)}$$

である。そこで、まず $\hat{y}(Y)$ を求めることを考える。いま、 $x(t_0, s_0)$ と y は互いに結合分布する n 次、 m 次の確率ベクトルであるから

$$y(t_0 | Y) = \int_A h(s_0) \hat{x}(t_0, s_0 | Y) ds_0 \dots\dots\dots \text{付-(61)}$$

$$\begin{aligned} &E_{yY}[\{y - \hat{y}(t_0 | Y)\} \{y - \hat{y}(t_0 | Y)\}^T] \\ &= \int_A ds_1 \int_A ds_2 h(s_1) E_{xY}[\{x(t_0, s_1) - \hat{x}(t_0, s_1 | y)\} \{x(t_0, s_2) - \hat{x}(t_0, s_2 | y)\}^T] \{h(s_2)\}^T \\ &= \int_A ds_1 \int_A ds_2 h(s_1) P(t_0, s_1, t_0, s_2) \{h(s_2)\}^T \dots\dots\dots \text{付-(62)} \end{aligned}$$

である。次に $\hat{x}(t, s | y(t_0) - \hat{y}(t_0 | Y))$ を求める。簡単のため

$$\hat{y}(t_0) = y(t_0) - \hat{y}(t_0 | Y) = \int_A h(s_0) \{x(t_0, s_0) - \hat{x}(t_0, s_0 | Y)\} ds_0 \dots\dots\dots \text{付-(63)}$$

とおくと

$$\bar{y}(t_0) = E_{y,Y}[y(t_0) - \vartheta(t_0 | Y)] = E_y[y(t_0)] - E_Y[\vartheta(t_0 | Y)] = 0 \dots\dots\dots \text{付-(64)}$$

$$\Sigma_{\vartheta(t_0)\vartheta(t_0)} = E_{y,Y}[y(t_0)\vartheta(t_0 | Y)] = \int_A ds_1 \int_A ds_2 h(s_1)P(t_0, s_1, t_0, s_2) \{h(s_2)\}^t \dots\dots\dots \text{付-(65)}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \Sigma_{x(t,s)\vartheta(t_0)} &= E[\{x(t, s) - \bar{x}(t, s)\} \bar{y}(t_0)^t] \\ &= E\left[\int_A \{x(t, s) - \bar{x}(t, s)\} \{x(t_0, s_0) - \bar{x}(t_0, s_0 | Y)\}^t \{h(s_0)\}^t ds_0\right] \\ &= \int_A E[\{x(t, s) - \bar{x}(t, s | Y) + \bar{x}(t, s | Y) - \bar{x}(t, s)\} \{x(t_0, s_0) - \bar{x}(t_0, s_0 | Y)\}^t] \{h(s_0)\}^t ds_0 \\ &= \int_A E[\{x(t, s) - \bar{x}(t, s | Y)\} \{x(t_0, s_0) - \bar{x}(t_0, s_0 | Y)\}^t] \{h(s_0)\}^t ds_0 \\ &= \int_A P(t, s, t_0, s_0) \{h(s_0)\}^t ds_0 \dots\dots\dots \text{付-(66)} \end{aligned}$$

である。また、定理 1 より

$$\begin{aligned} \hat{x}(t, s | y(t_0) - \vartheta(t_0 | Y)) &= \hat{x}(t, s | \bar{y}(t_0)) = \bar{x}(t, s) + \Sigma_{x(t,s)\vartheta(t_0)} \Sigma_{\vartheta(t_0)\vartheta(t_0)}^{-1} (\bar{y}(t_0) - \bar{y}(t_0)) \\ &= \bar{x}(t, s) + \int_A P(t, s, t_0, s_0) \{h(s_0)\}^t ds_0 \left[\int_A ds_1 \int_A ds_2 h(s_1)P(t_0, s_1, t_0, s_2) \{h(s_2)\}^t \right]^{-1} \\ &\quad \left\{ y(t_0) - \int_A h(s_0) \hat{x}(t_0, s_0 | Y) ds_0 \right\} \dots\dots\dots \text{付-(67)} \end{aligned}$$

を得る。これを (付-60)式に代入して

$$\begin{aligned} \hat{x}(t, s | Y, y) &= \hat{x}(t, s | Y) + \int_A P(t, s, t_0, s_0) \{h(s_0)\}^t ds_0 \left[\int_A ds_1 \int_A ds_2 h(s_1)P(t_0, s_1, t_0, s_2) \{h(s_2)\}^t \right]^{-1} \\ &\quad \left\{ y(t_0) - \int_A h(s_0) \hat{x}(t_0, s_0 | Y) ds_0 \right\} \dots\dots\dots \text{付-(68)} \end{aligned}$$

を得る。さらに、 $\hat{x}(t, s | Y)$ の推定誤差の共分散行列は〈系 1. 4〉により、

$$\begin{aligned} &E[\{x(t_1, s_1) - \hat{x}(t_1, s_1 | Y, y)\} \{x(t_2, s_2) - \hat{x}(t_2, s_2 | Y, y)\}^t] \\ &= E[\{x(t_1, s_1) - \hat{x}(t_1, s_1 | Y)\} \{x(t_2, s_2) - \hat{x}(t_2, s_2 | Y)\}^t] - E[\{x(t_1, s_1) - \hat{x}(t_1, s_1)\} \{y(t_0) - \vartheta(t_0 | Y)\}^t] E[\{y(t_0) - \vartheta(t_0 | Y)\} \{y(t_0) - \vartheta(t_0 | Y)\}^t]^{-1} E[\{y(t_0) - \vartheta(t_0 | Y)\} \{x(t_2, s_2) - \hat{x}(t_2, s_2 | Y)\}^t] \\ &= P(t_1, s_1, t_0, s_0) \{h(s_0)\}^t ds_0 \left[\int_A d\xi_1 \int_A d\xi_2 h(\xi_1)P(t_0, \xi_1, t_0, \xi_2) \{h(s_2)\}^t \right]^{-1} \int_A h(s_0)P(t_1, s_1, t_0, s_0) ds_0 \end{aligned}$$

となる。