

河川における流れと横分散に関する数値実験的研究

岩佐 義朗・綾 史郎・井上 智夫

2-D NUMERICAL ANALYSIS OF FLOW AND TRANSVERSE MIXING OF CONTAMINANTS IN A RIVER

By Yoshiaki IWASA, Shirou AYA and Tomoo INOUE

Synopsis

This paper deals with the two-dimensional numerical analysis method of flows and transverse mixing of contaminants in a river by means of the generalized curvilinear coordinate system. Basic mathematical models for flow and mixing of contaminants are derived in the generalized coordinate system from the usual models for shallow water in the Cartesian coordinate system and their difference forms are also presented. The developed models are applied to the Yodo River system which has the three main tributaries of different flow characteristics and concentration fields. They merge into Yodo River in the confluence and it has the very complicate geometry, therefore the selected study area is suitable for examining the models developed. Transverse concentration distributions of $\text{NH}_3\text{-N}$ and SiO_2 obtained by the numerical analysis with the transverse mixing coefficient $D_T = 0.2 hu_*$ are successfully compared with the measured data and the validity of the models is verified.

1. はじめに

本研究は、河川における流れと水質の横分散解析を数値的手法により行うものである。基礎数学モデルとしては、一般曲線座標系による平面2次元モデル¹⁾を用い、数値解析手法としては、差分法を用いている。一般曲線座標系による数値解析法では、非正方形格子網を任意に生成することができるから、デカルト座標系による解析に比べて、地形形状の表現、計算点の配置、境界条件の処理等において有利である。有限要素法による数値解析も同様な特長を有しているが、一次内挿による三角形要素を用いる限り、拡散現象の解析等においては離散化誤差の問題を避けることが困難である。したがって、一般曲線座標系による数値解析において、より高精度の差分法を導入すれば、従来より高い精度を持った数値モデルの確立が期待される。

筆者らは、このような見地より、一般曲線座標系と高精度差分法を用いた、流れと分散の平面2次元解析の為の高精度数値モデルの開発を進めてきた。すなわち、岩佐・綾・土屋・西内¹⁾は、従属変数をデカルト座標系における運動量束、水位、水質濃度の水深積分とし、独立変数を一般曲線座標系とする流れと分散の平面2次元解析の為の基礎方程式を導き、その物理的意義を明らかにした。さらに、移流項の離散化に三次精度のQUICK法を用いた離散式を用いて二次元の移流分散解析を行い、解の精度を確認した。また、岩佐・綾・井上²⁾は、2種の矩形断面を有する湾曲流路に対して、一般曲線座標系を用いた流れと分散の数値解析を行い、解析例を示している。

本論文では、まず、一般曲線座標系における差分法による数値解析について述べた。更に、それを淀川水系の三川合流部を含む水域に適用し、流れと水質分散の解析を行い、計算結果と観測資料の比較を行い、数学モデルの妥当性を検証した。淀川水系の三川合流部では、流況、水質の異なった桂川、宇治川、木津川の三河川が合流しており、合流部の地形は複雑であり、流れ場、濃度場もそれに伴って複雑となっているから、本研究で示した計算手法の適用の場としては、極めて適切である。また、淀川下流部には大阪都市圏が位置しており、多くの取水施設が設けられているから、高精度の水質分散解析モデルの確立が望まれているところでもある。

2. 従来の研究

河川流は、水深方向、水路幅方向、流下方向に拡がりを持つが、水深方向の拡がり、他の二方向に比べて極めて小さく、また、密度変化も少ないことから、水質分布は水深方向に一様とみなし得る場合が多く、水路幅、流下方向の濃度分布を問題とすることが多い。湾曲部、合流部においては、流れは三次元的である場合も多く、流れの三次元解析^{3), 4)}も行われているが、水質解析に関しては上述のことより二次元的解析が一般的である。二次元モデルでは、流れの三次元性は分散係数の形で取り入れるのが通常であるが、合流部、湾曲部などにおいては流れが複雑なこともあって、横分散係数の個別的な計測値はあるものの⁵⁾一般化は困難である。一方、直線水路における横分散係数値には、多くの実験、観測値がまとめられている^{5), 6), 7), 8)}。

河川水質の横分散解析モデルとしては、Yotsukuraらによって提案されたStream Tube Model⁹⁾を用いた解析例が多い^{10), 11), 12)}。Stream Tube Modelでは、二次元移流分散方程式が直交曲線座標系で記述され、河川の横断方向に相当する座標系が累積流量によって正規化されているから、取り扱いが非常に容易なものになっており、報告例では観測値と計算値は良く一致しており、適用性の高いモデルであることがわかっている。しかし、あらかじめ何らかの方法によって平均流速の横断方向分布を知る必要があるから、流れ場が複雑な場への適用に際しては、注意する必要がある。

デカルト座標系による平面二次元解析モデルは、浅い湖沼、内湾などを中心にして、従来より最も多く用いられてきた二次元モデルであるが、第1章で述べたような短所を有する為か、湾曲を有し、しかも水路長/水路幅比が極めて大きくなる河川流への適用の例は、あまり多くないようである。

一般曲線座標系による解析については、Durić, Kapor and Pavlovićらは、河川模型を対象として、流れ場と濃度場の定常解析を行い、実験値と計算値を比較している^{13), 14)}。また、Lebosseは、河川における非定常な流れ場と水温場の解析を行い、観測値と比較している¹⁵⁾。このように、このモデルを用いたいくつかの数値解析が近年発表されており、現在発展途上であるといえよう。

3. 基礎方程式とその離散化

3.1 基礎方程式系

平面二次元解析モデルは、周知のように時間平均された連続方程式、Reynoldsの方程式、乱流拡散方程式を静水圧分布を仮定して、水底より水表面まで水深積分することによって得られ、これをデカルト座標系で示すと

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ h \\ N \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_1} (U_1) \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ h \\ N \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2} (U_2) \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ h \\ N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -gh\partial\zeta/\partial x_1 \\ -gh\partial\zeta/\partial x_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_1} (h) \begin{Bmatrix} \tau_{11}/\rho \\ \tau_{21}/\rho \\ 0 \\ S_1 \end{Bmatrix} \\ + \frac{\partial}{\partial x_2} (h) \begin{Bmatrix} \tau_{12}/\rho \\ \tau_{22}/\rho \\ 0 \\ S_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tau_{1b}/\rho \\ \tau_{2b}/\rho \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

である。ここに、 U_i : 水深平均流速ベクトルの x_i 軸成分 ($i=1, 2$ とし、以下同様)、 M_i : 運動量束ベクトルの x_i 軸成分、 N : 水質濃度の水深積分であり、各々次式で定義される。

$$U_i \equiv \int_{z_b}^{\zeta} \bar{u}_i dx_3 / h \dots\dots\dots (2)$$

$$M_i \equiv \int_{z_b}^{\zeta} \bar{u}_i dx_3 = U_i h \dots\dots\dots (3)$$

$$N \equiv \int_{z_b}^{\zeta} \bar{c} dx_3 \dots\dots\dots (4)$$

また、 ζ : 水位、 Z_b : 河床高さ、 h : 水深 ($\equiv \zeta - Z_b$)、 τ_{ij} : x_j 軸に垂直な面に作用する x_i 軸方向の応力、 S_i : x_i 軸に垂直な面を流出入する勾配輸送型水質フラックス、 τ_{ib} : x_i 軸方向の底面摩擦応力、 g : 重力加速度、 ρ : 水の密度、 t : 時間、 x_i : デカルト座標である (Fig. 1)。

(1) 第1, 第2式は、運動量束ベクトル ρM の各座標軸成分 ρM_i の保存を示す運動量方程式であり、第3式は水の連続式、第4式は水質量の保存を示す移流分散方程式である。なお、運動量方程式中の τ_{ij} は、乱流運動に伴う渦動粘性の効果 (Reynolds 応力)、および、水深積分操作に伴って、 \bar{u}_i の鉛直方向分布の非一様性によって生じるみかけの (分散) 応力の和で

$$\tau_{ij}/\rho = -\frac{1}{h} \left\{ \int_{z_b}^{\zeta} \overline{(u_i - \bar{u}_i)(u_j - \bar{u}_j)} dx_3 + \int_{z_b}^{\zeta} (\bar{u}_i - U_i)(\bar{u}_j - U_j) dx_3 \right\} \dots\dots\dots (5)$$

である。ここに、 $\bar{\quad}$ (オーバーバー) は、時間平均量を示しており、第1項が Reynolds 応力、第2項が

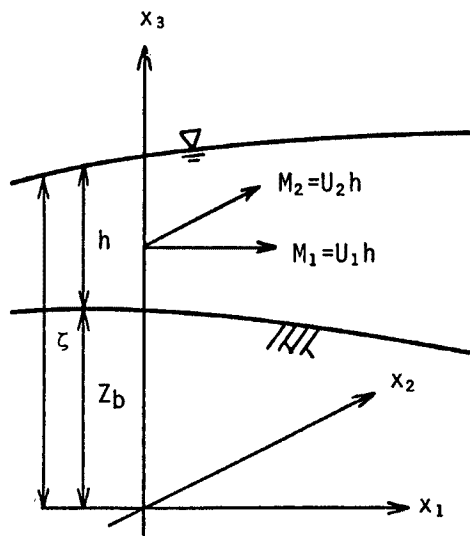


Fig. 1. Definition sketch of variables and the Cartesian coordinate system.

分散応力である。τ_{ij}の正確な評価は重要ではあるが困難な課題であって、ここでは、Reynolds 応力の渦動粘性係数表示を参照し、対称性を考慮して、簡単に

$$\frac{\tau_{ij}}{\rho} = \nu' \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \dots\dots\dots (6)$$

とする。ここに、ν' : [L²T⁻¹] の次元を有する係数であり、以下では分散粘性係数と呼ぶ。移流分散方程式中の S_i も τ_{ij} と同様に、乱流運動に伴う乱流拡散の効果および \bar{u}_i , \bar{c} の鉛直方向分布の非一様性により水深平均操作に伴って生じる分散効果の和を示しているが、乱流拡散効果の拡散係数表示にならない、

$$S_i = D_{ij} \frac{\partial C}{\partial x_j} \dots\dots\dots (7)$$

とする。ここに、D_{ij} : 分散係数、C : 水深平均濃度である。分散係数テンソル D_{ij} は、乱流拡散、分散の主軸が共に、水深平均流速ベクトルの方向およびそれと直角な方向に一致するものとするれば

$$(D_{ij}) = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta D_L + \sin^2 \theta D_T & \sin \theta \cos \theta (D_L - D_T) \\ \sin \theta \cos \theta (D_L - D_T) & \sin^2 \theta D_L + \cos^2 \theta D_T \end{pmatrix} \dots\dots\dots (8)$$

となる。ここに、D_L : 縦分散係数、D_T : 横分散係数、θ : x₁ 座標軸の正の向きと水深平均流速ベクトルのなす角である。底面摩擦応力 τ_{ib} は、Manning 型の抵抗則が適用されるものとする、方向性を考慮して

$$\frac{\tau_{ib}}{\rho} = \frac{gn^2 M_i \sqrt{M_1^2 + M_2^2}}{h^{7/3}} \dots\dots\dots (9)$$

となる。ここに、n : Manning の粗度係数である。

デカルト座標系上で記述された (1) 式を、座標変換

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2) \dots\dots\dots (10)$$

を用いて、従属変数はデカルト座標系におけるものを用い、独立変数のみ一般曲線座標系におけるものに改めると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{J} \right) \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ h \\ N \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{U^1}{J} \right) \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ h \\ N \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{U^2}{J} \right) \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ h \\ N \end{Bmatrix} \\ & = -\frac{gh}{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{h}{J} \right) \begin{Bmatrix} \tau^{11} / \rho \\ \tau^{21} / \rho \\ 0 \\ S^1 \end{Bmatrix} \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{h}{J} \right) \begin{Bmatrix} \tau^{12} / \rho \\ \tau^{22} / \rho \\ 0 \\ S^2 \end{Bmatrix} + \left(-\frac{1}{J} \right) \begin{Bmatrix} \tau_{1b} / \rho \\ \tau_{2b} / \rho \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

となる。ここに、J : Transformation Jacobian, Uⁱ : 水深平均流速ベクトルの反変ベクトル成分、Sⁱ : 勾配輸送型フラックスベクトルの反変ベクトル成分であって、各々、次式で定義される (Fig. 2)。

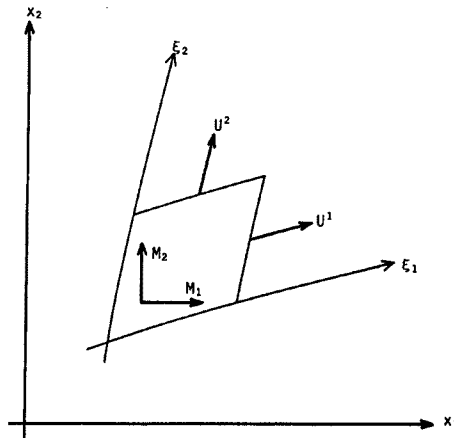


Fig. 2. Cartesian and generalized coordinate systems.

$$J \equiv \left| \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right| \dots\dots\dots (12)$$

$$U^i \equiv \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} U_j \dots\dots\dots (13)$$

$$S^i \equiv \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} S_j \dots\dots\dots (14)$$

τ^{ij} と τ_{ij} の関係は

$$\tau^{ij} = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \tau_{ik} \dots\dots\dots (15)$$

であって、 τ_{ij} と水深平均流速の一般曲線座標系上における勾配との関係は (6) 式を参照すると

$$\frac{\tau_{ij}}{\rho} = \nu' \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \frac{\partial U_i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial \xi_k} \right) \dots\dots\dots (16)$$

となる。 S^i と水深平均濃度の一般曲線座標系上における勾配との関係は

$$S^i = D^{ij} \frac{\partial C}{\partial \xi_j} \dots\dots\dots (17)$$

$$D^{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} D^{kl} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_l} \dots\dots\dots (18)$$

となる。

3.2 離散式の誘導

(11) 式の離散式は、積分による方法、Taylor 展開を用いた差分法、FEM 等により導かれる。積分による方法では、積分領域の境界における値の評価の方法により、種々の離散化表現が可能であり、得られる最終結果は差分法による各種スキームとほぼ同等のものとなることが多いが、物理的意味が明瞭であり、各々の保存量の収支を明確に記述し得ることから、積分による方法を用いることとする。なお、(11) 式

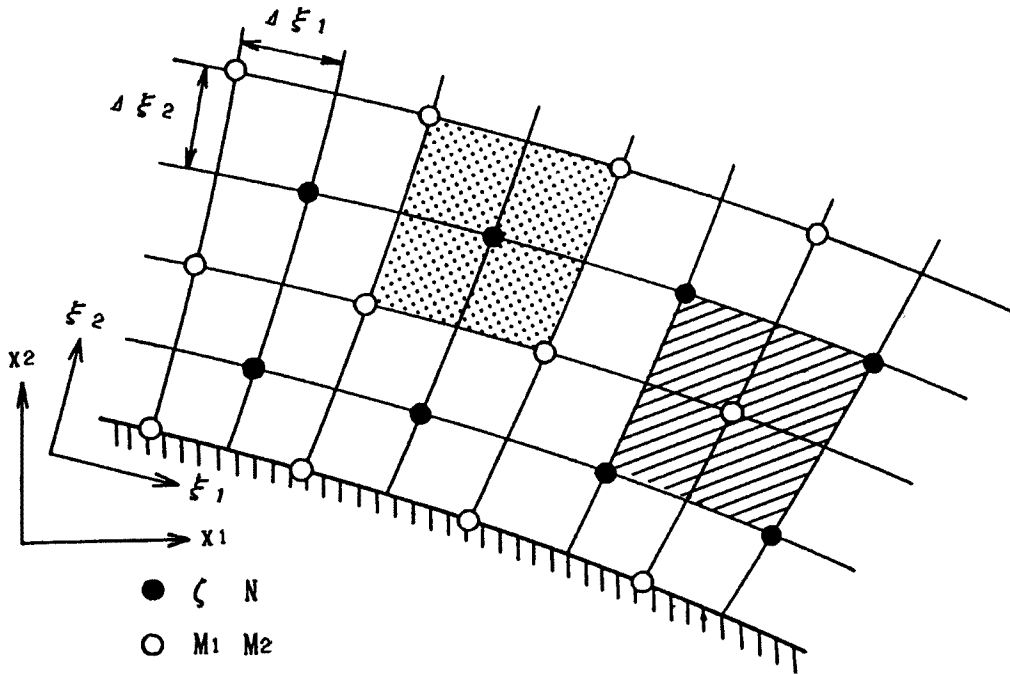


Fig. 3. Definition points of variables and domains for integrating the mathematical models in a physical plane.

の $\xi_1-\xi_2$ 平面上における積分は (1) 式の x_1-x_2 平面上の積分に他ならないことが、著者ら¹⁾により示されている。積分境界面における値の評価の方法には、種々の方法が可能であるが^{1), 2)}、今回用いた方法を述べれば以下のようなものである。

まず、各変数の定義点を Fig. 3 に示すように定める。すなわち、ベクトル量である M_1, M_2 を同一の格子点で定義し、水位 (水深) $\zeta(h)$ 、および水深積分濃度 N を M_i の定義点を中心とする四点で定義し、千鳥格子状に各定義点を配置する。運動量方程式 ((11) 第 1, 第 2 式)、連続式と移流分散方程式 ((11) 第 3, 第 4 式) の積分領域は、各々の定義点を中心とするハッチで示される領域であり、互いにずれている。

離散式を 4 本の方程式全てについて示すことは、困難であるから、(11) 第 1 式についてのみ示せば、以下のようなものである。 M_1 の定義点は $(2i\Delta\xi_1, 2j\Delta\xi_2)$ ($i, j=1, 2, \dots$) であり、積分領域は

$(2i-1)\Delta\xi_1 \leq \xi_1 \leq (2i+1)\Delta\xi_1, (2j-1)\Delta\xi_2 \leq \xi_2 \leq (2j+1)\Delta\xi_2$ であるから、(11) 第 1 式の積分は次のように近似できる。なお、簡単のため $\Delta\xi_1 = \Delta\xi_2 = 1$ とする。

(1) 局所的時間変化項

$$\int_{(2i-1)\Delta\xi_1}^{(2i+1)\Delta\xi_1} \int_{(2j-1)\Delta\xi_2}^{(2j+1)\Delta\xi_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{M_1}{J} \right) d\xi_1 d\xi_2 \approx 4 \frac{\partial}{\partial t} \frac{M_1(2i, 2j)}{J(2i, 2j)} \dots (19)$$

時間微分の離散化は、2 次の精度を有する Adams-Bashforth 法により離散化する。

(2) 移流項

$$\begin{aligned} \int_{(2i-1)\Delta\xi_1}^{(2i+1)\Delta\xi_1} \int_{(2j-1)\Delta\xi_2}^{(2j+1)\Delta\xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{U^1}{J} \right) M_1 d\xi_1 d\xi_2 &= \int_{(2i-1)\Delta\xi_2}^{(2i+1)\Delta\xi_2} \frac{U^1}{J} M_1 \Big|_{\xi_1=(2i+1)\Delta\xi_1} d\xi_2 - \int_{(2i-1)\Delta\xi_2}^{(2i+1)\Delta\xi_2} \frac{U^1}{J} M_1 \Big|_{\xi_1=(2i-1)\Delta\xi_1} d\xi_2 \\ &\approx \frac{U^1(2i+1, 2j)}{J(2i+1, 2j)} \{M_1(2i, 2j) + M_1(2(i+1), 2j)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{|U^1(2i+1, 2j)|}{J(2i+1, 2j)} \{M_1(2i, 2j) - M_1(2(i+1), 2j)\} \\
 & - \frac{U^1(2i-1, 2j)}{J(2i-1, 2j)} \{M_1(2(i-1), 2j) + M_1(2i, 2j)\} \\
 & - \frac{|U^1(2i-1, 2j)|}{J(2i-1, 2j)} \{M_1(2(i-1), 2j) - M_1(2i, 2j)\} \dots\dots\dots (20)
 \end{aligned}$$

この離散化は、Donor-Cell法と同等のものである。

$$\begin{aligned}
 & \int_{(2i-1)\Delta\xi_1}^{(2i+1)\Delta\xi_1} \int_{(2j-1)\Delta\xi_2}^{(2j+1)\Delta\xi_2} \frac{\partial}{\partial\xi_2} \left(\frac{U^2}{J} \right) M_1 d\xi_1 d\xi_2 = \int_{(2i-1)\Delta\xi_1}^{(2i+1)\Delta\xi_1} \frac{U^2}{J} M_1 \Big|_{\xi_2=(2j+1)\Delta\xi_2} d\xi_1 - \int_{(2i-1)\Delta\xi_1}^{(2i+1)\Delta\xi_1} \frac{U^2}{J} M_1 \Big|_{\xi_2=(2j-1)\Delta\xi_2} d\xi_1 \\
 & \approx \frac{U^2(2i, 2j+1)}{J(2i, 2j+1)} \{M_1(2i, 2j) + M_1(2i, 2(j+1))\} \\
 & + \frac{|U^2(2i, 2j+1)|}{J(2i, 2j+1)} \{M_1(2i, 2j) - M_1(2i, 2(j+1))\} \\
 & - \frac{U^2(2i, 2j-1)}{J(2i, 2j-1)} \{M_1(2i, 2(j-1)) + M_1(2i, 2j)\} \\
 & - \frac{|U^2(2i, 2j-1)|}{J(2i, 2j-1)} \{M_1(2i, 2(j-1)) - M_1(2i, 2j)\} \dots\dots\dots (21)
 \end{aligned}$$

(3) 圧力項

$$\begin{aligned}
 & \int_{(2i-1)\Delta\xi_1}^{(2i+1)\Delta\xi_1} \int_{(2j-1)\Delta\xi_2}^{(2j+1)\Delta\xi_2} \frac{gh}{J} \left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial\zeta}{\partial\xi_1} + \frac{\partial\xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial\zeta}{\partial\xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2 \\
 & = 2g \frac{h(2i, 2j)}{J(2i, 2j)} \left[\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} (2i, 2j) \{\zeta(2i+1, 2j) - \zeta(2i-1, 2j)\} \right. \\
 & \left. + \frac{\partial\xi_2}{\partial x_1} (2i, 2j) \{\zeta(2i, 2j+1) - \zeta(2i, 2j-1)\} \right] \dots\dots\dots (22)
 \end{aligned}$$

(4) 分散粘性項

$$\begin{aligned}
 & \int_{(2i-1)\Delta\xi_1}^{(2i+1)\Delta\xi_1} \int_{(2j-1)\Delta\xi_2}^{(2j+1)\Delta\xi_2} \frac{\partial}{\partial\xi_1} \left(\frac{h}{J} \right) \frac{\tau^{11}}{\rho} d\xi_1 d\xi_2 = \int_{(2i-1)\Delta\xi_1}^{(2i+1)\Delta\xi_1} \frac{h}{J} \frac{\tau^{11}}{\rho} \Big|_{\xi_2=(2j+1)\Delta\xi_2} d\xi_1 - \int_{(2i-1)\Delta\xi_1}^{(2i+1)\Delta\xi_1} \frac{h}{J} \frac{\tau^{11}}{\rho} \Big|_{\xi_2=(2j-1)\Delta\xi_2} d\xi_1 \\
 & = 2 \frac{h(2i+1, 2j)}{J(2i+1, 2j)} \frac{\tau^{11}(2i+1, 2j)}{\rho} - 2 \frac{h(2i-1, 2j)}{J(2i-1, 2j)} \frac{\tau^{11}(2i-1, 2j)}{\rho} \dots\dots\dots (23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{(2i-1)\Delta\xi_1}^{(2i+1)\Delta\xi_1} \int_{(2j-1)\Delta\xi_2}^{(2j+1)\Delta\xi_2} \frac{\partial}{\partial\xi_2} \left(\frac{h}{J} \right) \frac{\tau^{12}}{\rho} d\xi_1 d\xi_2 = \int_{(2i-1)\Delta\xi_1}^{(2i+1)\Delta\xi_1} \frac{h}{J} \frac{\tau^{12}}{\rho} \Big|_{\xi_2=(2j+1)\Delta\xi_2} d\xi_1 - \int_{(2i-1)\Delta\xi_1}^{(2i+1)\Delta\xi_1} \frac{h}{J} \frac{\tau^{12}}{\rho} \Big|_{\xi_2=(2j-1)\Delta\xi_2} d\xi_1 \\
 & = 2 \frac{h(2i, (2j+1))}{J(2i, (2j+1))} \frac{\tau^{12}(2i, (2j+1))}{\rho} - 2 \frac{h(2i, (2j-1))}{J(2i, (2j-1))} \frac{\tau^{12}(2i, (2j-1))}{\rho} \dots\dots\dots (24)
 \end{aligned}$$

τ^{ij} は (15), (16) 式を用いて計算されるが、同式中にあらわれる水深平均流速の勾配については、中央差分の考え方にならって離散化するものとし、たとえば、

$$\frac{\partial U_1}{\partial\xi_1}(2i+1, 2j) \approx \frac{1}{2} \{U_1(2(i+1), 2j) - U_1(2i, 2j)\} \dots\dots\dots (25)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial \xi_2}(2i+1, 2j) = \frac{1}{4} \{ (U_1(2(i+1), 2(j+1)) + U_1(2i, 2(j+1))) / 2 - (U_1(2(i+1), 2(j-1)) + U_1(2i, 2(j-1))) / 2 \} \dots\dots\dots (26)$$

である。

(5) 底面せん断応力項

$$\int_{(2i-1)\Delta\xi_1}^{(2i+1)\Delta\xi_1} \int_{(2j-1)\Delta\xi_2}^{(2j+1)\Delta\xi_2} \frac{gn^2 M_i \sqrt{M_1^2 + M_2^2}}{h^{7/3}} d\xi_1 d\xi_2 = 4gn(2i, 2j)^2 \frac{M_i(2i, 2j) \sqrt{M_1(2i, 2j)^2 + M_2(2i, 2j)^2}}{h(2i, 2j)^{7/3}} \dots\dots\dots (27)$$

なお、本解析法においては、運動量束ベクトルと水位の定義点が、Fig. 3に示されるように異なっている。定義点におけるこれらの値は、基礎方程式系の離散式より直接求まるが、定義点外の格子点上において必要とされるこれらの量は、内挿によって求めることとし、例えば、

$$M_i(2i+1, 2j) = \{M_i(2(i+1), 2j) + M_i(2i, 2j)\} / 2.0 \dots\dots\dots (28)$$

$$\zeta(2i+1, 2j) = \{\zeta(2i+1, 2j+1) + \zeta(2i+1, 2j-1)\} / 2.0 \dots\dots\dots (29)$$

$$\zeta(2i, 2j) = \{\zeta(2i-1, 2j-1) + \zeta(2i+1, 2j-1) + \zeta(2i-1, 2j+1) + \zeta(2i+1, 2j+1)\} / 4 \dots\dots (30)$$

等である。

3.3 境界条件

(1) 流れ場

解析対象水域は、周囲を陸で囲まれるか、あるいは、解析対象外の水域に接続しており、境界は陸境界と水境界に区分できる。陸境界においては、ノンスリップ条件が適用されるものとする、境界における速度ベクトル $U_b = 0$ であるから、

$$M_1 = 0, M_2 = 0, \text{ at boundary } \dots\dots\dots (31)$$

を適用する。水境界については、対象とする河川流のような一方向流れでは、流れを常流と仮定すると、3つの従属変数のうち上流側境界では2つを、下流側境界では1つを課すことにより解が求まる¹⁶⁾。通常の河川では、流量 Q 、水位 ζ が常時観測されているから、境界条件としては、これらの値を利用することが便利であり、ここでは、流量 Q が上流側境界で、水位 ζ が下流側境界で利用可能とする場合を考える。上述のことより、上流側境界で M_1 、 M_2 の2つの値を与えることとすると、流量 Q から M_1 、 M_2 への変換は次の様に行われる。境界では、非正方形格子網を直交するように生成するものとし、流下方向の運動量束を M^1 、水路幅方向のそれを M^2 とする。流れは流下方向に卓越するものと仮定すると

$$M^2 = 0 \dots\dots\dots (32)$$

であり、 M^1 は、単位幅流量 q が Manning 型の抵抗則を用いる時、水深 h の $5/3$ 乗に比例することを考慮して、流量 Q を用いて、

$$M_j^1 = Q h_j^{5/3} / \sum_{i=1}^N h_i^{5/3} \quad (i=2\dots, j, \dots, N-1) \dots\dots\dots (32)$$

となる。ここに、 M_j^1 、 h_j は、第 j 格子点における流下方向の運動量束および水深であり、 N は上流境界における水路幅方向の格子点数である。 M^1 、 M^2 から、 M_1 、 M_2 への変換は、反変ベクトル成分の直交座標系における変換則を用いて、

$$M_{1j} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} M^1(i, j) \dots\dots\dots (33)$$

$$M_{2j} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} M'(i, j) \dots\dots\dots (34)$$

となり, (33), (34) が境界条件となる。次に, 下流端境界条件は, 水位 ζ が与えられるが, 水位は水路幅 (ξ_2 軸) 方向に一様と仮定し, 各格子点上ですべて同一の値を与えるものとする。

(2) 濃度場

陸境界においては, 境界と垂直方向の濃度フラックスがゼロであることより,

$$U_n N - hD \frac{\partial C}{\partial n} = 0 \dots\dots\dots (35)$$

の境界条件が課せられる。ここに, U_n : 境界面に垂直方向の水深平均流速ベクトル, h : 水深, D : 分散係数であり, $\partial/\partial n$ は境界面に垂直な方向微分を意味する。陸境界では, 前述のことより $U_n = 0$ が課せられるから, $U_n = 0$ であり, 更に境界において非正方形格子網は直交するものとする, 水路幅方向の勾配輸送フラックスのみを考えればよく,

$$\frac{\partial C}{\partial \xi_2} = 0 \dots\dots\dots (36)$$

が適用される。一方, 水境界では, 上流側境界においてのみ境界条件を課すことができ, ここでは, 濃度 C の水路幅方向の分布が与えられるものとする。 N の定義点と水深 h の定義点は一致するから, h を既知とすると,

$$N = Ch \dots\dots\dots (38)$$

より, ただちに N の値を課すことができる。実際の数値解析にあたっては, 何らかの条件を下流側境界においても課さねば実行できないことが多い。ここでは, 下流側境界条件として,

$$\frac{\partial C}{\partial \xi_1}(i, j) = \frac{\partial C}{\partial \xi_1}(i-1, j) \dots\dots\dots (39)$$

を用いるものとした。

4. 現地河川への適用

4.1 対象領域と解析の概要

本研究で解析対象とする水域は, 淀川中流部である。周知のように, 淀川水系は, 京都, 大阪の二つの大都市圏を貫流し, 大阪湾へ注ぐ近畿地方で最も重要な河川の1つであるが, 京都市北部の山地を源とする桂川, 琵琶湖, 高見山地をそれぞれ源とする宇治川, 木津川からなっている (Fig. 4)。これらの流況, 水質が異なった三川は, 京都市南方の淀付近で相ついで合流し淀川となるが, 合流部の河川形状は複雑なものとなっており, また, 合流部付近の流れ場, 下流の水質分散の解析は水理学的に非常に興味深いものである。更に, 淀川下流部には大阪都市圏が位置し, 多くの都市用水取水施設が合流部下流に設けられているから, 精度の高い水質分散解析が実際にも望まれている。

このような状況より, 本水域に対しては南部ら¹⁷⁾の研究を始めとして, 多くの観測, 研究が行われているが, 近年では, 大阪府水道部と末石らのグループ^{12), 18)}により行われている。これらの研究では, 二次元移流分散方程式, あるいは, Yotsukura らの Stream Tube Model による水質解析が行われており, 最も重要なパラメータである横分散係数値としては, $D_T = 0.05 \text{ m}^2/\text{s}$ ¹⁷⁾, $0.6 \sim 2.0 hu_*$ ¹²⁾, $2.2 hu_*$ ¹⁹⁾ 程度の値が報告されている。

今回行った数値計算の主目的は, 第2, 第3章で述べた数値モデルの妥当性を検証することであり, 各種観測資料のととのっている大阪府水道部による昭和61年10月28日の観測に準じて境界条件を設定し,

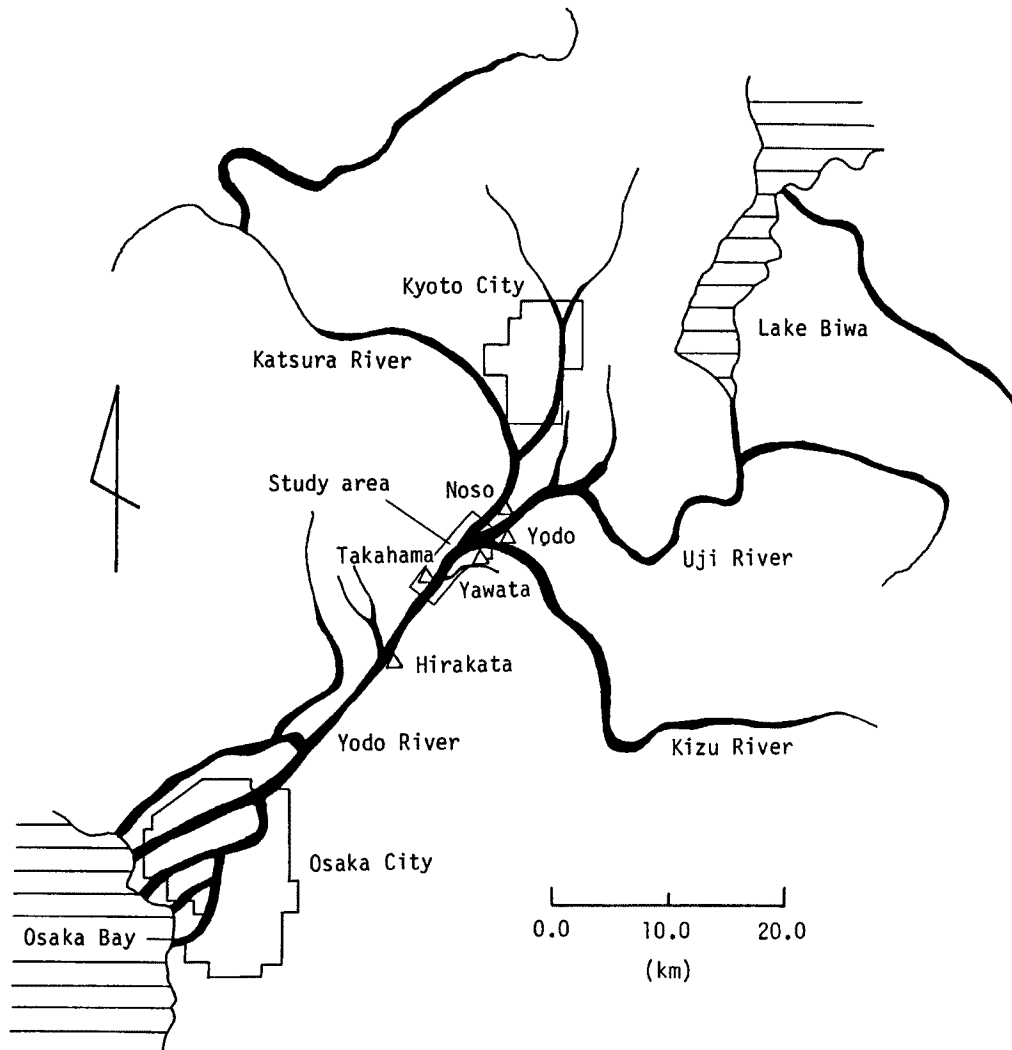


Fig. 4. The Yodo River system and study area.

数値解析によって得られた水質指標の横方向濃度分布と観測によるそれとを比較することとした。

対象水域は、淀川 32.0 km地点を下流端境界とし、上流端境界を桂川 36.2 km、宇治川 36.2 km、木津川 0.6 kmとする合流部を含む淀川低水路部分である。この領域を流下 (ξ_1 軸) 方向に 168 分割し、水路幅 (ξ_2 軸) 方向には、合流部下流部では 20 分割、桂川では 4 分割、宇治川、木津川では 6 分割し、非正方形格子網を生成した (Fig. 5)。格子の大きさは、概ね流下方向に 25 m、横断方向 5 m 程度である。基礎地形資料としては、建設省河川現況附図 (昭和 48 年測量, 57 年, 58 年修正, 縮尺 1/5000) および建設省淀川横断面図昭和 61 年 2 月測量, 鉛直縮尺 1/100, 水平縮尺 1/1000) を用い、平面図より陸境界 (左岸を $\xi_2=1$, 右岸を $\xi_2=21$ とする曲線) を定めるとともに、横断測量線に沿って、 $\xi_1=\text{const.}$ の線を物理面上で決定した後、200 m 毎の横断測量線間および $1 \leq \xi_2 \leq 21$ の領域を代数的方法¹⁾により非正方形格子網に分割した。河床高さの決定にあたっては、横断測量図を利用するとともに、測量線間は秋間法により内挿補間した。但し、木津川については、低水路中の流水部分の決定に困難があったので、平担河床 (長方形断面) を仮定した (Fig. 6)。

昭和 62 年 10 月 24 日の流況は、枚方地点日平均流量 79.8 m³/s, 高浜地点日平均水位 O. P. + 5.755 m であり、淀川では渇水流量程度に相当する。また、建設省による自記記録より流れはほぼ定常であること

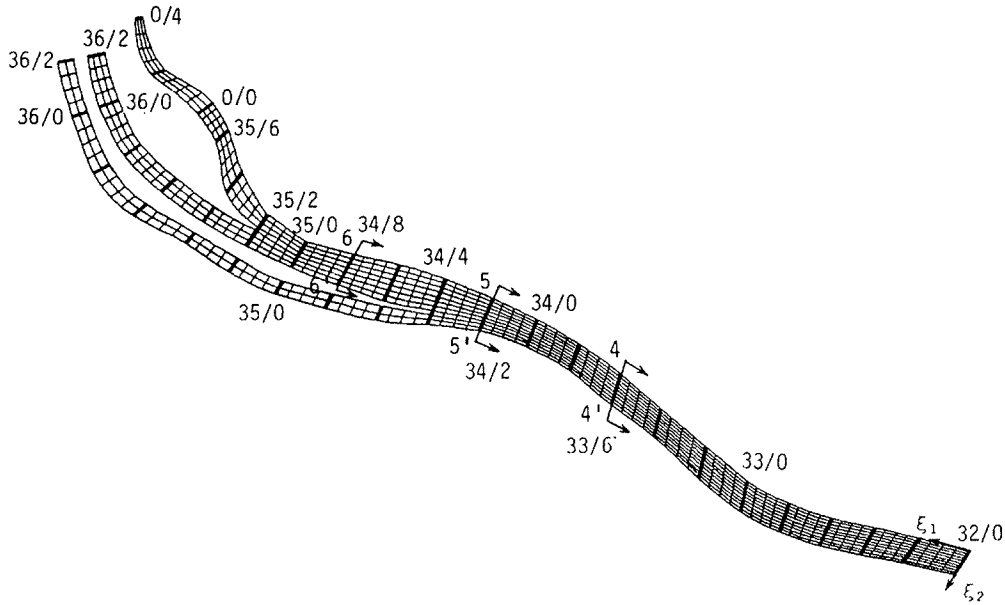


Fig. 5. Generated curvilinear grid for study area.

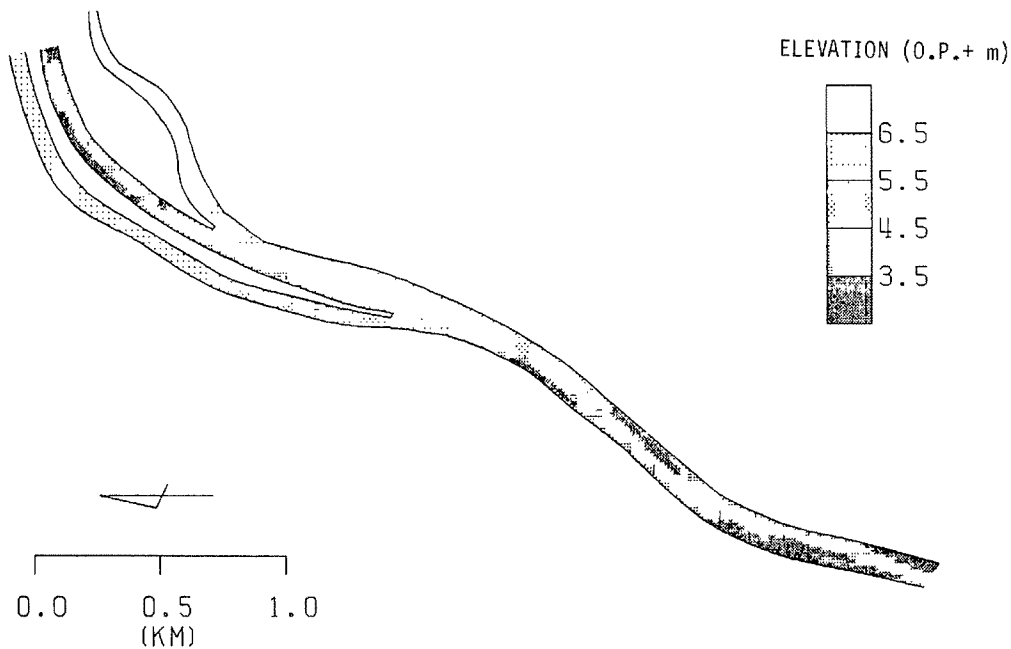


Fig. 6. Bathymetric map (in O. P. + m).

がわかっている。

4.2 計算法と境界条件

観測資料からは、流れ場、濃度場ともに定常現象として取り扱い得ることがわかっているが、本解析では非定常現象として数値計算を行い、境界条件を一定値に漸近させ、その後、境界条件を一定にして計算をすすめることにより定常状態を得るという方法をとった。

すなわち、流れ場の解析では、初期条件として水平面 O. P. + 8.0 m を仮定し、上流境界における流量を $0 \text{ m}^3/\text{s}$ より所定の流量へ、下流境界においては、水位を O. P. + 8.0 m より所定の水位 O. P. + 5.75 m

Table 1. Summary of boundary conditions.

		Katsura R.	Uji R.	Kizu R.	Yodo R.
Discharge	Q (m ³ /s)	18.36	60.48	11.38	—
NH ₃ -N Concentration	C (ppm)	≈3.03	≈0.35	≈0.14	—
SiO ₂ Concentration	C (ppm)	≈9.00	≈2.27	≈13.21	—
Stage	ζ (O. P. +m)	—	—	—	5.75

に、0.5時間かけて余弦曲線を用いて漸近させた後、流量、水位を一定値としたまま、1.5時間の非定常解析を行い、ほぼ定常とみられる流れ場を再現した。その後、流れ場と濃度場の非定常計算を連立して行い、定常な流れ場と濃度場を得た。濃度場の解析にあたっては、初期濃度を全領域でゼロとし、上流境界で定常な横断方向濃度分布を与えた。パラメータ値としては、Manningの粗度係数 $n = 0.02$ 、分散粘性係数 $\nu' = 0.01 \text{ m}^2/\text{s}$ 、縦分散係数 $D_L = 5.93 hu_*$ 、横分散係数 $D_T = 0.2 hu_*$ を用い、また、計算時間間隔 $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ を用いた。

最終的な一定値となる境界条件をTable 1に示す。流量、水位、水質の観測点と対象水域の境界とは必ずしも一致しておらず、桂川においては、納所(桂川2.4 km)、宇治川においては、淀(宇治川38.9 km)、木津川においては、八幡(木津川1.2 km)各観測所における昭和61年10月28日の日平均流量を用いている。また、下流端水位は若干の試行錯誤の後、高浜水位観測所(淀川33.0 km)の日平均水位O. P. + 5.75 mに33.0 km地点における計算水位が一致するように、淀川32.0 km地点で与えた。濃度の計算条件については、大阪府水道部による昭和61年10月28日の水質観測資料のうち、アンモニア性窒素(NH₃-N)、およびケイ酸(SiO₂)をトレーサーとして用いることとし、桂川においては、34.8 km地点(St. 7)における観測横断方向濃度分布を、宇治川においては、36.0 km(St. 8)地点におけるものを36.2 km地点に、木津川においては、1.7 km(St. 10)地点におけるものを0.6 km地点において、それぞれ与えた。アンモニア性窒素、ケイ酸のいずれにおいても、3つの観測点における横断方向濃度分布は、ほぼ同様であり、観測点と境界との間には大きな流入出はないことから、このような観測点と境界との位置の差は無視できる。また、桂川については、34.8 km~36.2 kmにおける濃度の解析は行っていない。Table 1に示されている濃度値は、断面内における平均的な濃度であるが、アンモニア性窒素については桂川が、ケイ酸については木津川が高い濃度値を有している。

4.3 結果とその考察

Fig. 7 (a), (b), (c)に最終的に得られた定常状態の水深平均流速ベクトル図、運動量束ベクトル図、等水位線図を示した。水位(Fig. 7 (a))は河床高の縦断的变化(Fig. 6)に対応して、32.0~34.0 km地点までは比較的緩かに上昇している(この区間は、一次元解析法からは水面形は、M₁曲線となる)が、34.0~34.4 km付近では、河床高の上昇に伴い急激に水位が上昇する。合流前の三川の水位変化についてみれば、桂川については、合流直前で水位が上昇した後、ゆるやかに水位上昇が続いている。一方、宇治川は、河床が逆勾配となっている区間もあり、この区間での水位変化は極めてゆるやかである。これに対して木津川は、河床勾配が極めて大きく(0.6 km地点の河床標高O. P. + 7.05 m)、これに伴い水位の上昇も最も大きくなっている。運動量束ベクトル図(Fig. 7 (b))よりは、流れは境界形状に応じてなめらかに流向を転じていることが示される。合流前の三川における運動量束の横断方向分布は、河床高さが、横断方向に比較的一様であることから、比較的一様に分布している。宇治川、木津川合流後は、左岸側河床が高く、右岸が低い為、流れは右岸側に集中して流れ、桂川合流後は、河道中央付近から左岸側へと滞筋をかえる。背水区間では、横断方向の一様化が進むが、滞筋を右岸側、左岸側、右岸側へとかえながら流れている。このように、流れは河床の低い部分に集中して流れていく。一方、水深平均流速ベクトルの変

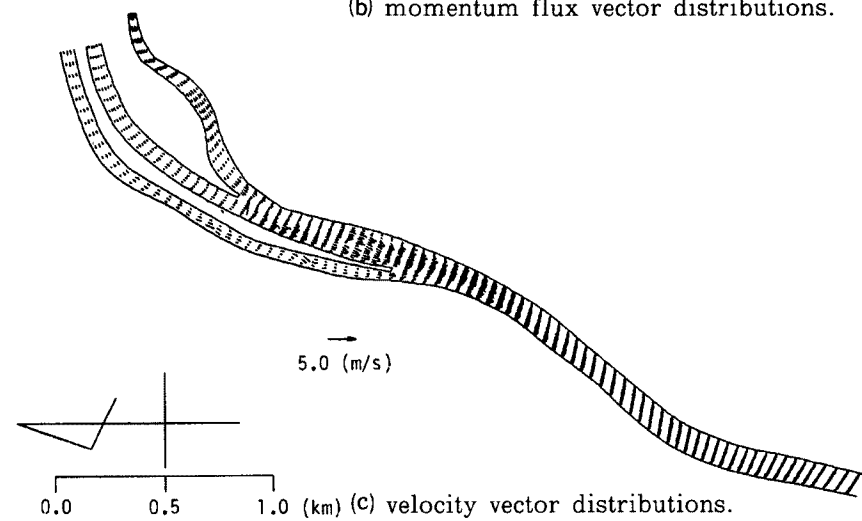
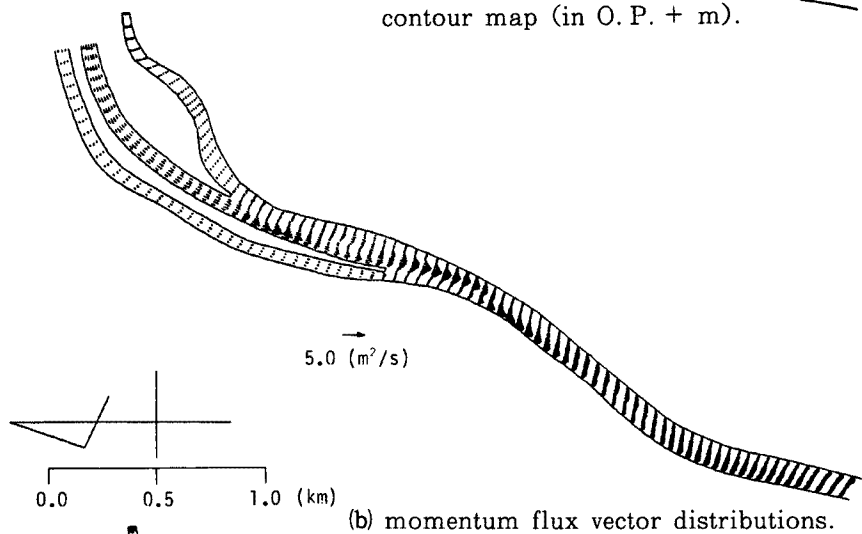
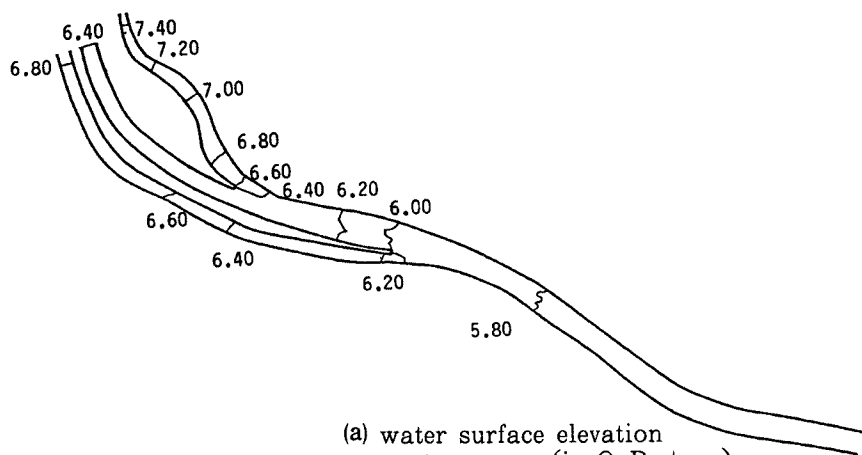


Fig. 7. Simulated results.

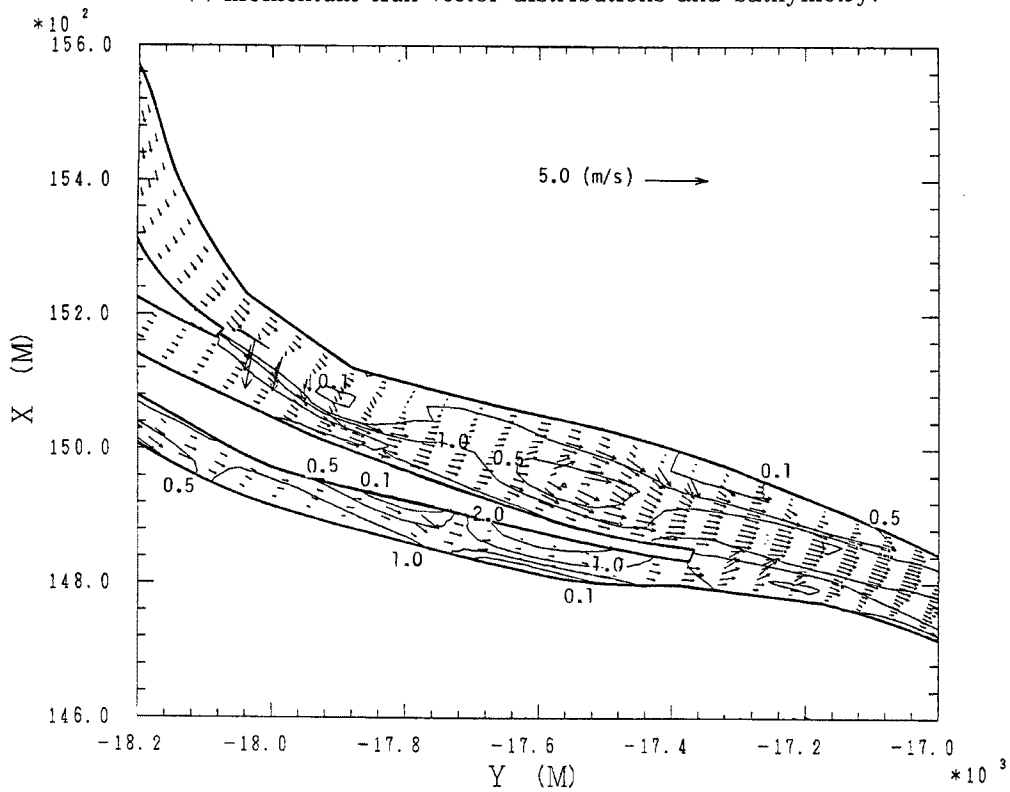
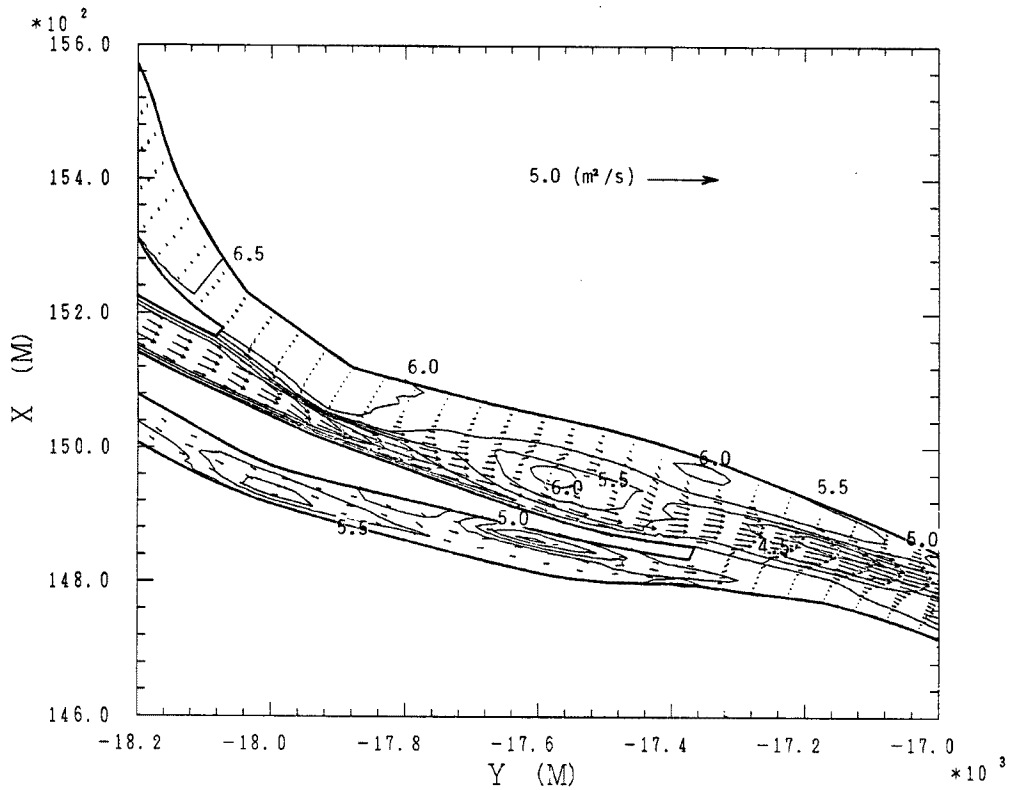


Fig. 8. Simulated Results in the confluence.

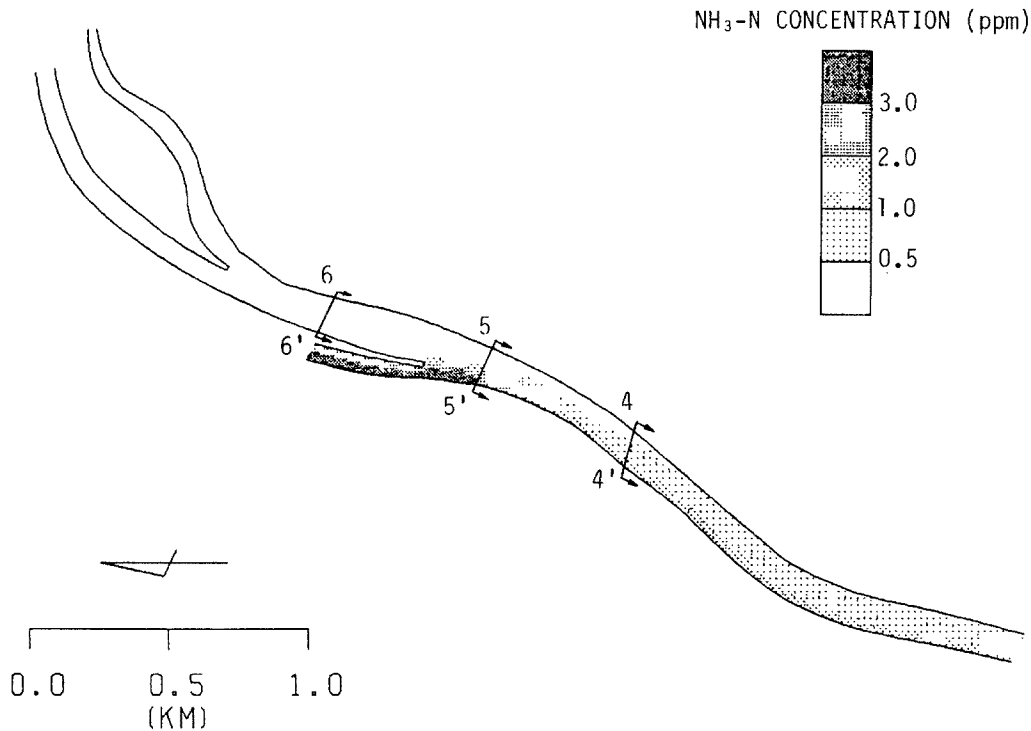


Fig. 9. Simulated $\text{NH}_3\text{-N}$ concentration distribution (in ppm).

化は、Fig. 7 (c)にみられるように、木津川・宇治川合流後から宇治川・桂川合流後の領域を除いて、横断方向には比較的一様であるが、合流区間では、河床高分布、水位分布に対応して、木津川から宇治川への流れがみられるとともに、左右両岸へ流れが分岐した後、桂川の合流前後より、再び、中央付近へ流れが集中していることがわかる。これらの合流区間における流れ場の状況は、この部分を拡大し、等河床高線図、等水深線図とともに、運動量束ベクトルおよび水深平均流速ベクトルを描いた Fig. 8(a)(b)に一層明らかである。

定常状態とみなされるアンモニア性窒素濃度の平面分布を描いたものが Fig. 9 である。桂川からの高濃度のアンモニア性窒素が右岸側を流下しながら河幅方向に拡散している状況がよくみられる。Fig. 10 (a)(b)(c)は、断面 6-6'、5-5'、4-4' における横断方向の濃度分布を観測値と比較して示したものであるが、極めて良く一致した濃度分布が得られていることがわかる。また、Fig. 11 は、同様にケイ酸の平面濃度分布を示したものであるが、木津川、桂川からのケイ酸が本川において横断方向に混合しながら、流下している様子が描かれている。また、Fig. 12 (a)(b)(c)は、断面 6-6'、5-5'、4-4' における横断方向の濃度分布を観測値と比較して示したものであるが、観測値が左岸側で計算値より大きくなっている点を除き、比較的良好に合っているものと言えよう。観測値にあらわれる左岸側の高濃度値については、木津川の境界条件、右岸からの流入等について今後検討する必要がある。

5. 結 語

本研究は、河川における流れと横分散を高精度な数値実験により、明らかにすることを目的として、一般曲線座標系による差分法を用いた平面 2 次元解析モデルによる流れと横分散の数値モデルを開発したものである。数値モデルは、淀川水系の三川合流部を含んだ複雑な地形形状を有する水域に適用され、流れ場およびアンモニア性窒素、ケイ酸の横分散による濃度場が解析され、観測濃度分布と計算結果が比較対

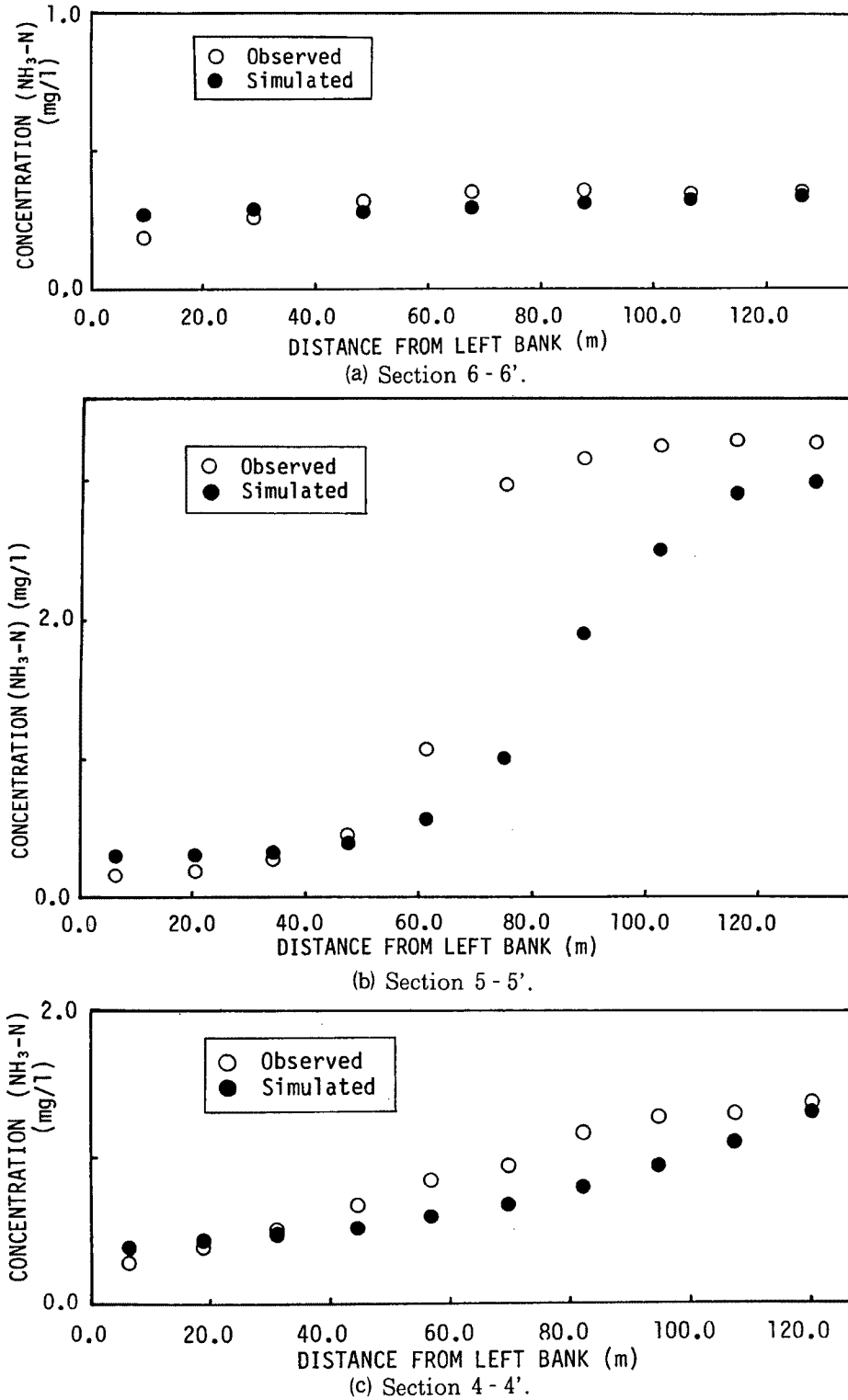


Fig. 10. Simulated and Observed $\text{NH}_3\text{-N}$ concentration distributions along the transverse direction.

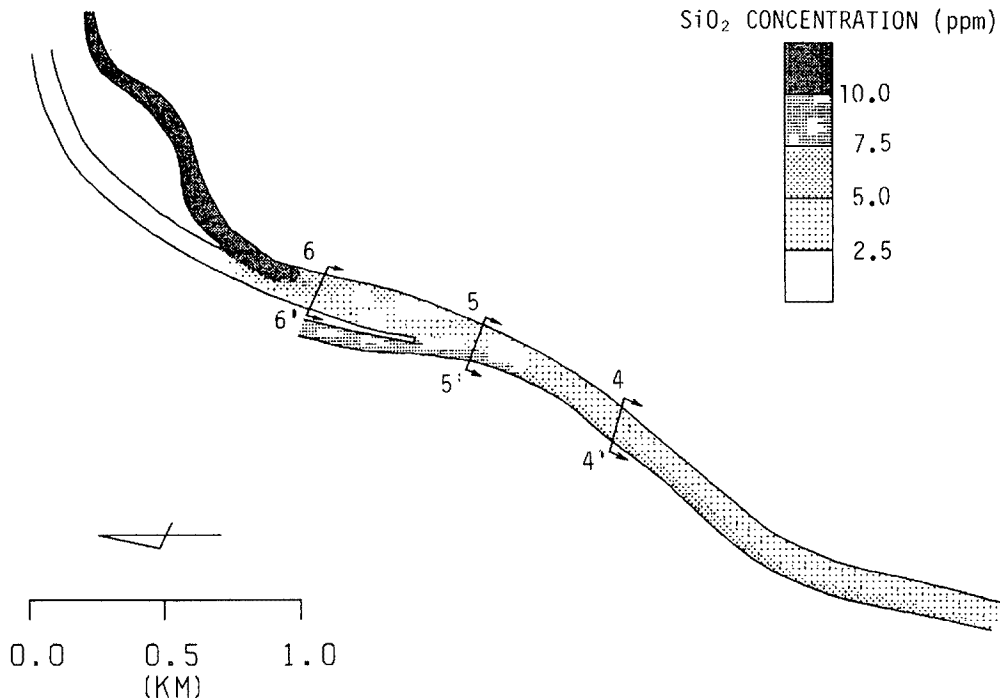


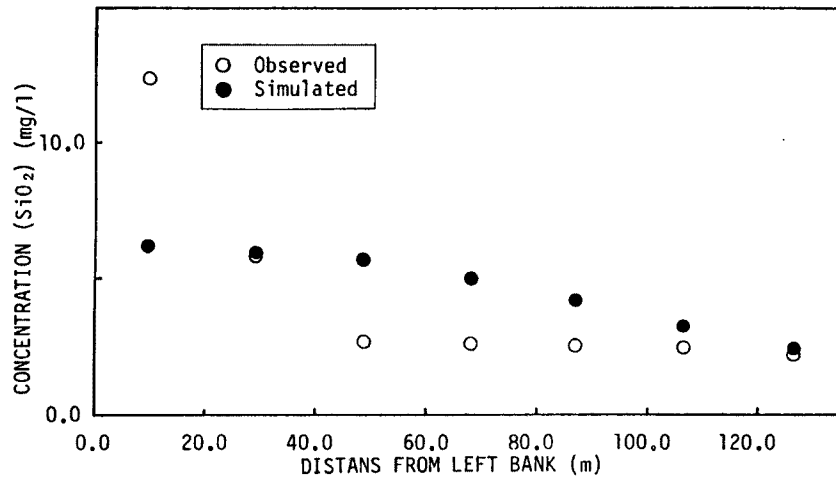
Fig. 11. Simulated SiO_2 concentration distribution (in ppm).

照された。流れ場は、複雑な地形形状、河床高の影響をよく反映しており、妥当なものと考えられる。一方、アンモニア性窒素、ケイ酸の濃度分布は、観測値と概ね一致しており、本研究で示した方法の妥当性、有効性が確認された。

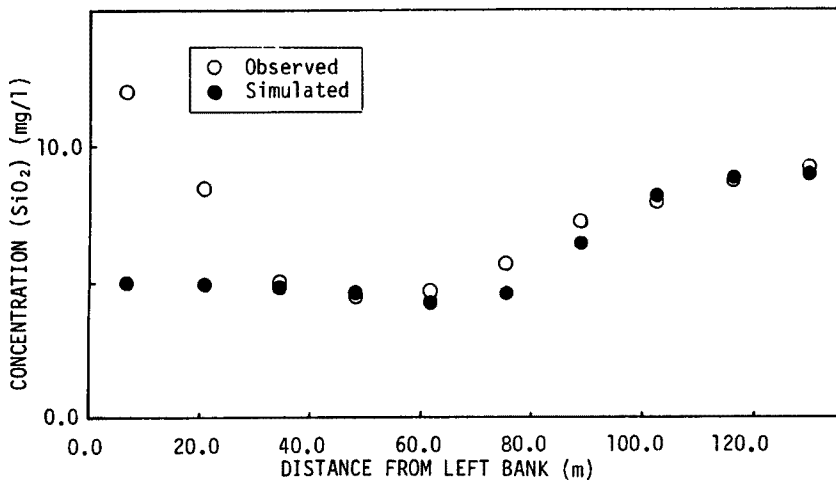
今回の解析では、パラメータ値として、Manning 粗度係数 $n = 0.02$ 、分散粘性係数 $\nu' = 0.01 \text{ m}^2/\text{s}$ 、縦分散係数 $D_L = 5.93 hu_*$ 、横分散係数 $D_T = 0.2 hu_*$ が用いられたが、パラメータ値の妥当性、その影響については検討を行えなかった。特に分散粘性係数、横分散係数の値とその影響については、重要な検討課題の一つである。今回用いた横分散係数の値は、直線水路における値としては標準的なものであるが、従来この水域で報告されているものに比較するとかなり小さめの値である。この水域の水質の混合機構としては、今回の数値解析結果からは、横分散係数値のみならず、三川合流部における流れ場の影響がかなり大きいことが推察されるが、横分散係数の値と合わせて、水質の混合機構を明らかにして行きたい。前述した様に、本水域の水質混合については関心も高く、異なった水理条件下における多くの観測資料が収集されているから、種々の水理条件下における他の水質指標の混合についても、検討を加えて行きたいと考えている。

最後に、関係行政機関には快よく観測資料の提供を頂き、資料の使用と公表を許可して頂いた。摂南大学八木俊策助教授には、淀川水系の水質指標の濃度分布について御教示を頂いた。記して謝意を表す。また、京都大学大学院学生馬場寿人、尾植正順両君には、本研究の実施に際し御協力を得、感謝する次第である。

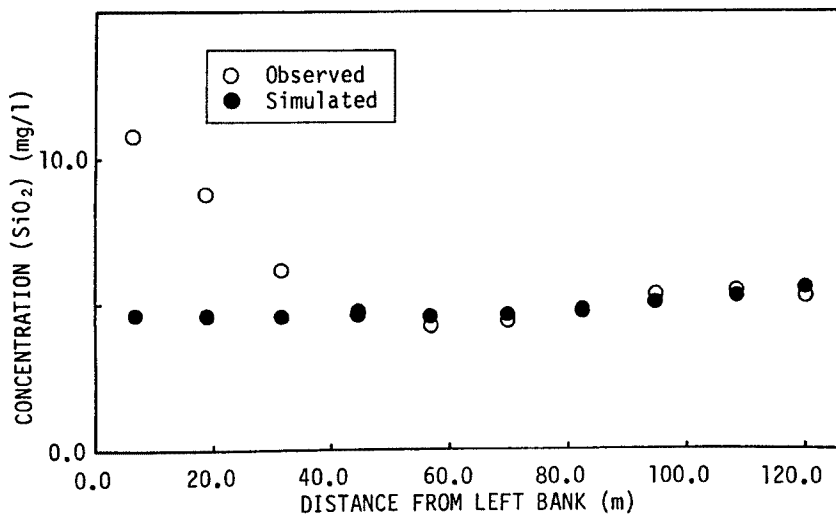
なお、本研究の一部は文部省科学研究費の補助を得て実施されたものであることを付記する。



(a) Section 6 - 6'.



(b) Section 5 - 5'.



(c) Section 4 - 4'.

Fig. 12. Simulated and observed SiO₂ concentration distributions along the transverse direction.

参考文献

- 1) 岩佐義朗・綾 史郎・土屋 勉・西内美宜: 一般曲線座標系を用いた流れと水質混合の2次元数値解析, 京都大学防災研究所年報, 第31号B-2, 1988, pp.589-600.
- 2) 岩佐義朗・綾 史郎・井上智夫: 一般曲線座標系を用いた開水路流れの平面2次元解析, 第2回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 1988, pp.259-262.
- 3) 清水康行: 蛇行河川における3次元流れと掃流砂, 浮遊砂を考慮した河床変動の計算, 開発土木研究所報告, 北海道開発局土木研究所, 第88号, 1988.
- 4) 玉井信行・上田 悟: 乱流モデルによる河川合流部の流れの予測, 第31回水理講演会論文集, 1987, pp.437-442.
- 5) Fischer, H. B. et al: Mixing in Inland and Coastal Waters, Academic Press, 1979, p.110.
- 6) Okoye, J. K.: Characteristics of Transverse Mixing in Open Channel Flows, Report No. KH-R-23, California Institute of Technology, 1970.
- 7) 岩佐義朗・細田 尚・野口好夫: 粗滑面水路における水路幅方向の乱流拡散係数, 京都大学防災研究所年報, 第25号B-2, 1982, pp.559-572.
- 8) Webel, G. and M. Schatzmann: Transverse Mixing in Open Channel Flows, J. Hydraulic Division, Vol.110, No. 4, 1988, pp.423-435.
- 9) Yotsukura, Y. and W. W. Sayre: Transverse Mixing in Natural Stream, Water Resources Research, Vol.12, No. 4, 1976, pp.695-704.
- 10) Lam Lau, Y. and B. G. Krishnappan: Modeling Transverse Mixing in Natural Streams, J. Hydraulic Division, Proc. ASCE, Vol.107, No. HY 2, 1981, pp.209-226.
- 11) Holley, F. M. and G. Nerat: Field Calibration of Stream-Tube Dispersion Model, J. Hydraulic Division, Vol.109, No.11, 1983, pp.1455-1470.
- 12) 李 適宇・八木俊策・末石富太郎: 淀川の水質拡散およびその水道水源に対する影響, 第31回水理講演会論文集, 1987, pp.311-316.
- 13) Djurić, M., R. Kapor and R. N. Pavlović: Depth-Average Model with Body Fitted Coordinates for the Calculation of Strongly Curved Elliptic Flows, Proc. HydroSoft 86, IAHR, 1986.
- 14) Djurić, M., R. Kapor, R. N. Pavlović and V. P. Tranjković: Prediction of Velocity and Concentration Fields in the Intake Region, Topics in Fluvial Hydraulics, Proc. 22 IAHR Congress, Lausanne, 1987, pp.293-298.
- 15) Lebosse, M. A.: Calcul d' une Tache Themique dans la Loire a St. Laurent des Eaux, Topics in Fluvial Hydraulics, Proc. 22 IAHR Congress, Lausanne, 1987, pp.275-280.
- 16) Lin, P. N.: Recent Chinese Trend of Research on Unsteady Flows in Open Channels, Proc. Japan-China Bilateral Seminar on River Hydraulics and Engineering Experience, 1984, p.167.
- 17) 南部祥一: 汚濁河川における汚染度分布の解析, 水道協会雑誌, No.304, 1960, pp.29-37.
- 18) 大阪府水道部: 淀川水系水質調査報告書, 1987.
- 19) 米田稔一・岩田和也・井上頼輝: 河川における実測水質データを用いた分散係数の推定, 京都大学環境衛生工学研究会第8回シンポジウム論文集, 1986, pp.103-110.