

## カルマンフィルタを用いた多入力系の入力地震動の推定

土岐 憲三・佐藤 忠信・清野 純史・竹内 廣高

### IDENTIFICATION OF THE INPUT GROUND MOTIONS OF A MULTI-INPUT SYSTEM

By *Kenzo TOKI, Tadanobu SATO, Junji KIYONO*  
and *Hiroataka TAKEUCHI*

#### Synopsis

We report a procedure by which input ground motions of multi-input system are identified from structural parameters and measured responses. We usually are interested in estimating the response of a structure or its foundation, however, there is much uncertainty as to the contact point between the soil and a structure. Kalman filter analysis, a method that updates the estimated value at each time step by incorporating new observation data, is used in our procedure. To verify the effectiveness of this procedure, we have simulated the responses of three kind of systems (linear one-degree-of-freedom, bilinear one-degree-of-freedom, and multi-degree-of-freedom system) and made estimations using the simulated responses as observed records. The estimated input accelerograms are in good agreement with the original ground motion. We have applied this procedure to the observation data recorded at Kawasaki on the 1980 Izu East-offshore Earthquake.

#### 1. ま え が き

入力地震動の設定は耐震解析において最も重要な問題の一つである。耐震解析によって得られるものは、想定された地震動を入力とする地盤系、構造系、あるいは地盤-構造系の応答値であり、そこでは入力地震動は既知として取り扱われる。しかしながら、この入力地震動を適切に設定することは極めて難しい問題である。入力地震動は主として、対象とする系の安全性の照査を行う動的解析に用いられるものであるが、もしこれが構造物の設計を目的として用いられるのなら、入力地震動を小さく設定することによる構造物の破壊などの危険性は言うまでもなく、これを大きく設定することも不必要に安全側の誤差を含むこととなり、建設コストの増大など経済性の要求と相入れない結果に終わりがねない。

現在までの入力地震動の設定は、既存の実地震波形を用いるもの、蓄積されたデータを基にした統計解析手法によるもの、断層モデルに従って理論的あるいは半経験的に設定する方法などが主体であるが、いずれの場合も震源から伝播経路を経て当該地点に至るまでの情報から設定されたものである。本研究では、系の動特性と応答値からその系に直接入力している地震動を逆推定する方法を扱う。振動・地震工学においては、このような入力の推定を目的とした研究はあまり多くない。これは上述したように、震動の問題に関しては、地盤系、構造系、あるいは地盤-構造系の応答の把握が主たる目的であり、そこへの入力は

通常、既知として取り扱うからである。しかし、有効入力のお考え方からしても、構造物に実際に入力している地震動をその構造系から直接逆推定することは、地盤と構造物系の接点を取り扱う問題としても重要である。

本研究の目的は、入力としての地震動と出力としての応答値を確率過程として捉え、カルマンフィルタアルゴリズムを用いて系の動特性と出力波形から入力波形を導く手法を開発し、これを実際問題に適用することである。これは、OTTら<sup>1)</sup>が地盤探査に用いた deconvolution 手法を多自由度系に拡張して、アルゴリズムの中で得られる予測誤差から入力波形を推定したものである。

本研究で用いたカルマンフィルタは、もともと情報処理工学の分野で開発された情報処理のアルゴリズムである。通信制御の重要性が認識され始めた頃に提唱されたウィナーフィルタは、信号と雑音を確率過程として捉え、雑音に乱された信号から信号成分だけを抽出するフィルタリングの手法であるが、理論自体の制約条件が多いために、実際問題への応用はなかなか進まなかった。しかし、R. E. Kalman は、状態量を1階の微分方程式で定式化し、状態方程式と観測方程式で系を記述することにより、新たなフィルタ手法を提唱した。これがカルマンフィルタである。ウィナーフィルタの理論は周波数領域で取扱いが行われる古典制御理論であり、カルマンフィルタの理論は時間領域で取扱いが行われる現代制御理論である。ウィナーフィルタを始めとする古典制御理論から導かれるフィルタでは、入力すべきデータをすべて一度に入力してから処理する。これに対し、カルマンフィルタはデータを逐次入力して逐次処理をするシーケンシャル処理を行うため、ウィナーフィルタに比べて計算の際に記憶容量が少なく済み、また変動に対する追従性がよい。このため、最近ではデジタル計算機の急激な発達に伴い多くの分野で利用と研究が進み、同定、制御、推定問題などの解析に有効な方法となっている。対象を土木工学に限れば、振動系の同定問題にカルマンフィルタを導入し、同定結果が高い安定性を示す様な手法を提案した研究<sup>2)3)</sup>、カルマンフィルタを用いた deconvolution 手法を用いて断層の破壊過程を同定した研究<sup>4)</sup>、圧密による地盤沈下や変形を予測した研究<sup>5)</sup>、バーサタイル型復元力特性を用いて非線形復元力特性の同定を行った研究<sup>6)</sup>などがある。

本研究で解析の対象としたものは長径間連続橋、沈埋トンネル、埋設管路などの多点異入力系の地盤—構造物系である。これらの系では各入力点で位相差のある地震動を受けるので、系の全域が同一の地動を受けるという仮定に基づく解析は有効ではなく、系は場所によって異なる入力を受けることを考慮した解析が行われなければならない。

本研究では、まずこの多点異入力系の受ける入力地震動をシミュレーションモデルにより逆推定した後、実際の地震記録を用いてその手法の妥当性を検証する。解析に用いた地震記録は、1980年伊豆東方沖地震であり川崎市の埋設水道管において得られたものである。

## 2. カルマンフィルタと入力地震動推定のための定式化

時系列信号は通常、何らかの雑音に乱されている。この雑音成分を分離し、信号成分だけを取り出すことはフィルタリング、フィルタリングを物理的に実現するものはフィルタと呼ばれる。また時系列推定(予測、濾波、平滑)を行うアルゴリズムそのものも広義のフィルタとして捉えることができる。

カルマンフィルタは、要約すれば、(1)信号を生成する線形システムの動特性、(2)雑音の統計的性質、(3)初期値に関する先験情報、及び時々刻々与えられる観測データを用いて、システムの状態の最小二乗推定値を逐次的に与えるオンラインデータ処理アルゴリズムである。したがって、カルマンフィルタではウィナーフィルタとは違い、観測データを全て蓄えておく必要がなく、コンピューターで計算する場合、記憶容量が比較的小さくてすみ有利である。カルマンフィルタのアルゴリズムは(1)システム方程式の線形性(linearity)、(2)システム、及び観測雑音の白色性(whiteness)、(3)雑音のガウス性

(Gaussian), (4) 最小二乗規範 (quadratic criteria), という仮定に基づき, 線形システムに対する状態空間表現と最小分散推定の理論を組み合わせることにより, 直交射影やベイズの定理などを用いて導出される。上述した仮定は制限が強く, 一見非現実的に思われるが, この仮定に基づいたカルマンフィルタは, 推定, フィルタリング問題だけでなく, システム同定や最適制御問題などの種々の分野に応用され, 成功をおさめている<sup>7)</sup>。

ここでは, まず線形確率微分方程式から離散時間システムの状態変数表現式を導びき, カルマンフィルタとそのアルゴリズムについて述べる。次に deconvolution 手法への応用について説明し, カルマンフィルタを用いた入力地震動推定の定式化を示す。

2.1 カルマンフィルタ

あるシステムの入力変数  $u$  と出力変数  $x$  との間は, システム特有の入出力関係で特徴付けることができる。Fig. 1 は, システムの入出力関係を示したものである。これは例えば地震動が, 構造系に入力し, その出力として構造物の応答が得られる場合に等しい。一般にシステムはいくつかの要素から構成されているが, 各要素には電気回路であればオームの法則, 力学系であればニュートンの運動法則, 化学プロセスであれば質量保存則の様な基礎式がある<sup>8)</sup>。このような基礎的な関係式を用いると 1 入力 1 出力系の入出力関係は, それがどのような要素から構成されているとしても, 一般には微分方程式とその初期条件によって表わされる。いま, 信号過程が白色雑音を入力とする一階のベクトル確率微分方程式で表される場合を考える。

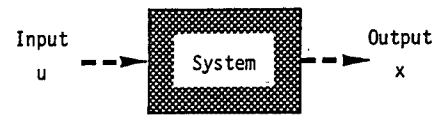


Fig. 1. Relation between input and output motion.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \dots\dots\dots (1)$$

また, 観測過程は次式で表されるものとする。

$$y(t) = Hx(t) + v(t) \dots\dots\dots (2)$$

ここに, ベクトル  $x, w, y, v$  は  $n, m, p, p$  の次元を持つ確率過程であり, 行列  $A, B, H$  は  $n \times n, n \times m, p \times n$  の次元を持つ確定量である。式 (1), (2) は連続時間システムのものであるが, 多くの場合, 実際に得られるデータは連続時間信号をサンプルすることにより得られるサンプル値データであることから, システムモデルとしては離散時間システムが用いられる場合が多い。したがって, 連続時間システムで表現された式 (1), (2) を離散時間システムに変換する。まず, 式 (1) の両辺に  $e^{-At}$  を乗ずる。

$$e^{-At}\dot{x}(t) = Ae^{-At}x(t) + Bw(t)e^{-At} \dots\dots\dots (3)$$

両辺を区間  $[t, t_0]$  で積分する。

$$[x(p)e^{-Ap}]_{t_0}^t + A \int_{t_0}^t e^{-Ap} x(p) dp = A \int_{t_0}^t e^{-Ap} x(p) dp + \int_{t_0}^t Bw(p)e^{-Ap} dp \dots\dots\dots (4)$$

$$x(t) = x(t_0)e^{A(t-t_0)} + \int_{t_0}^t Bw(p)e^{A(t-p)} dp \dots\dots\dots (5)$$

ここで  $x, w$  を次のようなステップ関数とする。

$$\begin{aligned} w(\tau) &= w(k-1)\Delta t = w(k-1) \\ x(\tau) &= x((k-1)\Delta t) = x(k-1) \\ (k-1)\Delta t &\leq \tau \leq k\Delta t \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

また  $t_0 \rightarrow (k-1)\Delta t, t \rightarrow k\Delta t$  とすると  $x$  は次式のようにになる。

$$x(k) = x(k-1)e^{A\Delta t} + \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} e^{(k\Delta t-p)} dp Bw(k-1) \dots\dots\dots (7)$$

さらに  $\tau = k\Delta t - p$  とおくと

$$x(k) = x(k-1)e^{A\Delta t} + \int_0^{\Delta t} e^{A^p} dp B w(k-1) \dots\dots\dots (8)$$

ここで

$$G = \int_0^{\Delta t} e^{A^p} dp B \dots\dots\dots (9)$$

$$\Phi = e^{A\Delta t} \dots\dots\dots (10)$$

とおくと、式(8)は次式のようなになる。

$$x(k) = \Phi x(k-1) + G w(k-1) \dots\dots\dots (11)$$

ここで改めて  $k \rightarrow t, k+1 \rightarrow t+1$  と置き換えると次式の様な線形離散時間確率システムとなる。

$$x_{t+1} = \Phi_{t+1} x_t + G_t w_t \dots\dots\dots (12)$$

$$y_t = H x_t + v_t \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 $x_t$  は時刻  $t$  における  $n$  次元状態ベクトル、 $y_t$  は時刻  $t$  における  $p$  次元状態ベクトル、 $w_t$  は  $m$  次元ガウス白色雑音、 $v_t$  は  $p$  次元ガウス白色雑音、 $\Phi_{t+1, t}$  は  $n \times n$  状態遷移マトリクス、 $G_t$  は  $n \times m$  システムノイズ係数マトリクス、 $H_t$  は  $p \times n$  観測マトリクスを表す。また  $E\{w_t w_s^T\} = Q_t \times \delta_{ts}$ 、 $E\{v_t v_s^T\} = R_t \times \delta_{ts}$  であり、 $E$  は期待値、 $\delta_{ts}$  はクロネッカのデルタである。

Table 1. Kalman filter algorithm

① Store the filter state $X(k k), P(k k)$
② Compute the predicted state $X(k+1 k) = \Phi(k+1 k) X(k k)$
③ Compute the predicted error covariance matrix $P(k+1 k) = \Phi(k+1 k) P(k k) \Phi^T(k+1 k) + \Gamma(k) Q(k+1) \Gamma^T(k)$
④ Compute the Kalman gain matrix $K(k+1) = P(k+1 k) M^T(k+1) [M(k+1) P(k+1 k) M^T(k+1) + R(k+1)]^{-1}$
⑤ Process the observation $y_{k+1}$ $X(k+1 k+1) = X(k+1 k) + K(k+1) [y_{k+1} - M(k+1) X(k+1 k)]$
⑥ Compute the new error covariance matrix $P(k+1 k+1) = [1 - K(k+1) M(k+1)] P(k+1 k)$
⑦ Set $k=k+1$ , and return to step ①.

式(12)で表される線形確率システムを時系列信号にあてはめて考える時、 $x_t$  は信号成分、 $w_t$

はシステムノイズ、 $y_t$  は状態量、 $v_t$  は観測ノイズに相当する。式(12)、(13)で与えられる離散時間確率システムに対するカルマンフィルタのアルゴリズムを Table 1 に示す。ただし本研究においては、 $P$  の対称性や非負定値性を常に維持できるように  $UD$  分解フィルタ<sup>9)</sup>を導入し、時間更新アルゴリズムにおいて、修正重みつき Gram-Schmidt 法を用いた。

2.2 deconvolution 問題への応用

いま、式(12)、(13)にならって次式で表される連続系システムを考える。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t) \dots\dots\dots (14)$$

$$y(t) = Hx(t) + v(t) \dots\dots\dots (15)$$

式(14)の両辺に、 $e^{At}$  を乗じて整理したものが

$$x_t = \Phi_{t|t-1} x_{t-1} + h_{t-1} \dots\dots\dots (16)$$

$$y_t = H x_t + v_t \dots\dots\dots (17)$$

であるから、式(16)の  $h_{t-1}$  は以下のようなになる。

$$h_{t-1} = \int_{t-1}^t \Phi(t, \tau) u(\tau) d\tau \dots\dots\dots (18)$$

一方、式(16)より次式が得られる

$$h_{t-1} = x_t - \Phi_{t|t-1} x_{t-1} \dots\dots\dots (19)$$

ここで、真値  $x_t$  は実際には未知であることを考慮して、先に述べたカルマンフィルタアルゴリズムを適

Table 2. Parameters of the one-degree-of-freedom model

	linear model	bilinear model
$m$	10.0 (t/sec <sup>2</sup> /m)	10.0 (t/sec <sup>2</sup> /m)
$k$	2000.0 (t/m)	2000.0, 1000 (t/m)
$c$	20.0 (t/sec/m)	20.0 (t/sec/m)
$\delta$		1.2 (cm)

用する。

$$x_t \rightarrow x(t|t) \quad \Phi_{t|t-1} x_{t-1} \rightarrow x(t|t-1) \dots\dots\dots (20)$$

と置き換えると、次式を得る。

$$h_{t-1} = x(t|t) - x(t|t-1) \dots\dots\dots (21)$$

式 (18) の数値積分を行い、式 (21) と等値すること

により  $u(t)$  を求めることができる。

ここで上述した手法を用いて、線形1自由度モデルとバイリニア1自由度モデルについて実際に入力波の推定を行う。なお、モデルの諸元を **Table 2** に示す。

まず、それぞれのモデルに対する定式化を行う。線形1自由度モデルの運動方程式は、周知のように次式で表わされる。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{z} \dots\dots\dots (22)$$

ここで  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$  とおく次式が成り立つ。

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 - \ddot{z} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (23)$$

状態方程式は、式 (23) を用いて以下のように表わせる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\ddot{z} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (24)$$

次にバイリニア1自由度モデルの運動方程式は次式で表される。

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + Q(x) &= -m\ddot{z} \\ m\ddot{x} + c\dot{x} + (\alpha x + \beta) &= -m\ddot{z} \dots\dots\dots (25) \\ Q(x) &= \alpha x + \beta \end{aligned}$$

ここで、線形の場合と同様に  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$  と置くと状態方程式は以下の様になる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\alpha}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{\beta}{m} - \ddot{z} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (26)$$

また、観測方程式は応答変位を観測波形とすると次式で表される。

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + R \dots\dots\dots (27)$$

先に述べた様に、これらの連続システム量を離散化し、上述の deconvolution 手法を応用して入力波の推定を行う。この際、状態遷移マトリクスを次式の様に近似した。

$$\Phi = e^{A\Delta t} = I + \Delta t[A] + \Delta t^2 \frac{[A]^2}{2} \dots\dots\dots (28)$$

**Fig. 2** には線形モデルの入力加速度、それに対するモデルの応答、この応答変位とモデルの動特性を用いて推定された入力加速度、**Fig. 3**はバイリニアモデルの履歴ループ、応答変位、入力加速度、推定された

入力加速度を示している。ここに設定した入力加速度は、実際の強震記録より得られた加速度波形で1940年のImperial Valley地震の際にEl Centroで観測された記録のNS成分である。なお、応答計算にあたっては、Newmark

の $\beta$ 法を

用い $\beta=1/6$ 、刻み時間0.02秒とし、カルマンフィルタアルゴリズムにおいて、システムノイズ $Q_t (=q [I])$ 、観測ノイズ $R_t (=r [I])$ はそれぞれ $1.0 \times 10^3$ 、 $1.0 \times 10^{-5}$ とした。

実際に入力した波形と推定された入力波形とを比較してみると、ほぼ良好な結果が得られている。ただ、目視でも解る様に線形モデル、バイリニアモデルとも推定された波形は実際の入力に比べていくらか滑らかな波形となっており高周波成分が除去されていることがわかる。これは観測方程式に含まれる観測ノイズの項により、カルマンフィルタアルゴリズムの中でノイズの除去が行われ、これが加速度波形において顕著に現れたためである。また、線形モデルとバイリニアモデルの同定波形を比較すると、

バイリニアモデルでは2秒付近、5秒から6秒付近、9秒付近で実際の入力波形の振幅より大きな値があるのがわかる。これは、バイリニアモデルの入力波推定に関しては、弾性領域における遷移マトリクスと塑性領域における遷移マトリクスの2通りが存在し、その境界で遷移マトリクスが急激に変化することにより、観測値の取入れによっても修正できない推定値が生じたためと考えられる。また、カルマンフィルタアルゴリズムにおいて設定せねばならない先験情報としては、遷移マトリクスの他にシステムノイズ $Q_t (=q [I])$ 、観測ノイズ $R_t (=r [I])$ 、状態量及び推定誤差共分散マトリクスの初期値 $(x_{0,0}, P_0 (=p [I]))$ がある。ここでは $x_{0,0}$ をゼロベクトル、 $p$ は $1.0 \times 10^3$ から10.0、 $q$ は $1.0 \times 10^5$ から10.0、 $r$ は $1.0 \times 10^{-2}$ から $1.0 \times 10^{-7}$ まで変化させて推定を試みたが、得られた波形に大きな差異は認められずほぼ同一の波形とみなせた。これより、1質点モデルについてはこれら $q, r, p$ の値は地震及び観測に関する

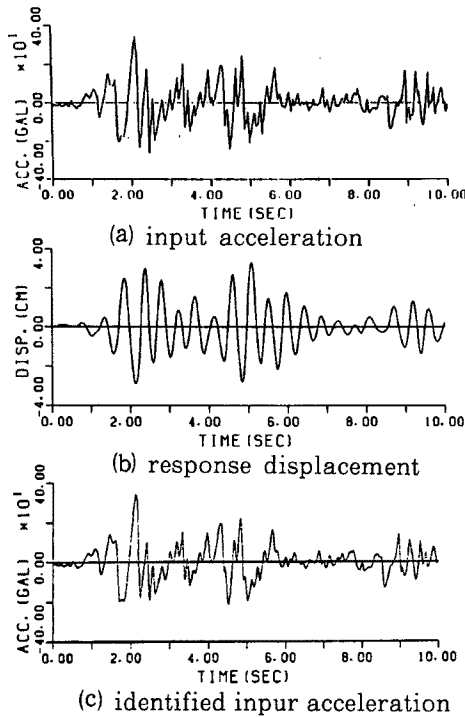


Fig. 2. Linear one-degree-of-freedom system.

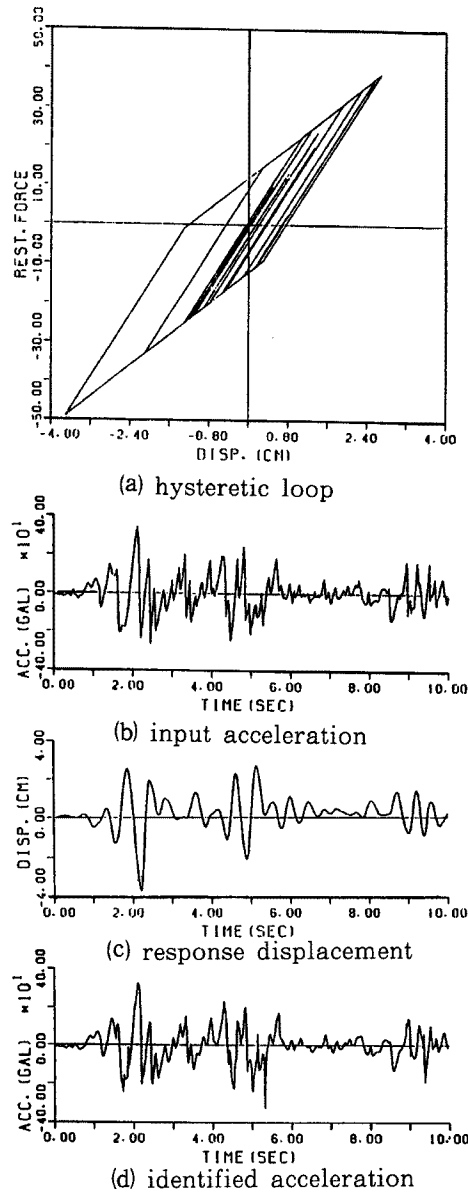


Fig. 3. Bilinear one-degree-of-freedom system.

先験的情報の範囲内では推定波形に影響を及ぼさないことがわかる。

### 3. シミュレーションによる入力地震動の同定

まえがきにおいても述べた様に、対象とする系が場所によって異なる地動を受ける場合、系の全域が同一の地動を受けるとの仮定に基づいた解析は有効ではない。本章では、多点異入力系の地盤—構造物系モデルに第2章で述べた手法を適用し、その妥当性に検討を加える。まず、多点異入力モデルの運動方程式について述べ、第2章の定式化をその運動方程式に適用して入力波の推定を行う。その際、観測波形が全ての点で観測されている場合と一部でしか観測されていない場合について入力地震動推定の可能性について確かめる。

#### 3.1 多点異入力系モデルの定式化<sup>10)</sup>

多点異入力系の地盤—構造物系が Fig. 4 に示されるような離散系の力学モデルで表されるものとする。このとき、構造物の質量は  $m_j$  ( $j = 1, \dots, n$ )、減衰係数は  $c_j$ 、ばね剛性は  $k_j$  であり、質点は線形のばね  $s_j$  と逸散を表すダッシュポット  $d_j$  を通じて地動  $z_j$  を受ける。このとき、質点  $j$  の絶対変位を  $u_j$  とすると、この質点  $j$  に関する運動方程式は次式で表される。

$$m_j \ddot{u}_j + c_{j-1}(\dot{u}_j - \dot{u}_{j-1}) - c_j(\dot{u}_{j+1} - \dot{u}_j) + k_{j-1}(u_j - u_{j-1}) - k_j(u_{j+1} - u_j) + s_j(u_j - z_j) + d_j(\dot{u}_j - \dot{z}_j) = 0 \quad (29)$$

上式をマトリクス表示すると次式のようになる。

$$[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} - [D] \{\dot{z}\} - [S] \{z\} = [0] \quad (30)$$

ここに、 $[M]$  は  $m_j$  よりなる対角マトリクスであり、 $[C]$  は  $c_j$  および  $d_j$  からなるバンドマトリクス、 $[K]$  は  $k_j$  及び  $s_j$  からなるバンドマトリクス、 $[D]$ 、 $[S]$  はそれぞれ  $d_j$ 、 $s_j$  のみよりなる対角マトリクスである。いま、 $z_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) が系に静的に作用したときの変位を  $u_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) とすれば、式 (30) より次式が成り立つ。

$$[K] \{\bar{u}\} - [S] \{z\} = [0] \quad (31)$$

上式で定義される  $\{\bar{u}\}$  を用いると  $\{u(t)\}$  は次式で表される。

$$\{u(t)\} = \{\bar{u}\} + \{y(t)\} \quad (32)$$

ここに、 $y(t)$  は各質点のそれぞれの入力点に対する相対変位である。式 (32) を式 (30) に代入し、式 (31) の関係を用いれば次式を得る。

$$[M] \{\bar{u}\} + [M] \{\dot{y}\} + [C] \{\dot{\bar{u}}\} + [C] \{\dot{y}\} + [K] \{y\} = [D] \{\dot{z}\} \quad (33)$$

一方、式 (31) より

$$\{\bar{u}\} = [K]^{-1} [S] \{z\} \quad (34)$$

これから、これを式 (33) に用いれば次式を得る。

$$[M] \{\dot{y}\} + [C] \{\dot{y}\} + [K] \{y\} = -[M] [K]^{-1} [S] \{z\} + \{[D] - [C] [K]^{-1} [S]\} \{\dot{z}\} \quad (35)$$

ここで全ての固定端が同一の地動を受ける場合には  $[K]^{-1} [S] = [I]$  となり、全体が同一の入力を受けるときの相対変位  $\{y\}$  に関する周知の式となる。

$$[M] \{\dot{y}\} + [C] \{\dot{y}\} + [K] \{y\} = -[M] \{1\} \dot{z}_0 \quad (36)$$

以上より、各入力点において系の受ける地動が異なる時刻歴であっても系の応答を知ることができる。式 (30)、(35) を比較すると、式 (30) では入力地動が変位、速度となっているのに対し、式 (35) では

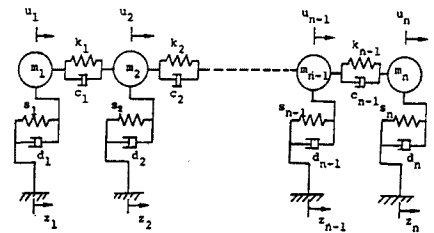


Fig. 4. Model of multi-input system.

速度，加速度となっている。入力 の 推定 に あ た っ て は，観測された系の応答変位の基準を地盤に対する相対変位にするか，または絶対変位にするかによって，式 (30)，(35) を使い分けねばならない。本章においては式 (35) の相対変位の式を用いることにする。ここでこの式 (35) を 2.2 で述べた定式化に適用する。

$$\begin{aligned} y &\rightarrow x_1 \\ \dot{y} &\rightarrow x_2 \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

と お く と，状態方程式は次式の様になる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \\ &+ \left\{ \begin{array}{c} [0] \\ -[K]^{-1}[S] \{z\} + [M]^{-1}[[D] - [C][K]^{-1}[S]] \{z\} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

ここで右辺第 2 項を以下のように置き換える。

$$f = \left\{ \begin{array}{c} [0] \\ -[K]^{-1}[S] \{z\} + [M]^{-1}[[D] - [C][K]^{-1}[S]] \{z\} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

結局この  $\{f\}$  がシステムに対する入力として求まることになり，式 (39) を解くことによって入力加速度と入力速度を求めることができる。

3.2 シミュレーションによる入力地震動の同定

ここでは，前節で述べた定式化を用いて多点異入力系モデルの入力地震動の推定を行う。モデルは Fig. 4 に示すモデルにおいて  $n=4$  とした場合に相当する 4 質点モデルである。モデルの諸元は Table 3 に示した。解析に先だってまず入力地震動の設定を行う。

(1) 入力地震動の設定

シミュレーションに用いる入力地震動は実際の強震記録に位相遅れを考慮したものとする。また，波動

Table 3. Structural parameters of the four-degree-of-freedom system

	mass 1	mass 2	mass 3	mass 4
mass : $m_i$ (t/sec <sup>2</sup> /m)	6	4	8	10
damping : $d_i$ (t/sec/m)	4	2	4	6
spring : $s_i$ (t/m)	4000	2000	4000	6000
damping : $c_i$ (t/sec/m)		3	3	3
spring : $k_i$ (t/m)		2000	2000	2000
L : (m)		100	100	100

に一般性をもたせるため分散性のある波を考える。いま，地震波が地点 A から距離  $L$  だけ離れた地点 B に伝播する場合を考える。地点 A で得られる時刻歴の加速度波形をフーリエ変換とすると周波数  $f_k$  に対する振幅  $a_{kA}$ ，位相  $\phi_{kA}$  が得られる。ここに添字  $k$  は離散化された  $k$  番目の周波数，添字  $A$  は地点を表す。分散性



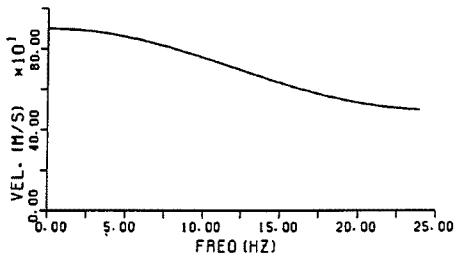


Fig. 5. Dispersion curve.

のある地震波の伝播速度は周波数に依存するので、この速度を  $V(f_k)$  とすると、地震波が地点  $A$  より地点  $B$  に伝わる時間は  $T(f_k) = L/V(f_k)$  となる。よって地点  $B$  における位相遅れは  $\phi = 2\pi f_k T(f_k)$  となり、地震波の振幅に減衰がないものとすれば地点  $B$  における地震波の周波数  $f_k$  に対する振幅  $a_{kB}$  は  $a_{kB} = a_{kA}$ 、位相  $\phi_{kB}$  は  $\phi_{kB} = \phi_{kA} - \phi$  となる。これをフーリエ逆変換することにより地点  $B$  における地震波を求めることができる。

本章では、Fig. 2(a)に示されている1940年のImperial Valley地震においてEl Centroで記録された加速度波形のNS成分を用い、この波形の位相に上述のような操作を加えてモデルに対する入力とした。解析に用いた入力地震波がFig. 5に示されるような分散曲線を持つとし、入力地震波が入力点1から入力点4に向けて進むと仮定する。質点1の入力加速度の時刻歴をFig. 6(a)に示す。上述の手法で質点2, 3, 4の入力加速度を求めたものがFig. 6(b)(c)(d)である。ただし、式(35)によればこのモデルに対する入力は加速度のみではなく速度も必要となる。したがって、ここでは入力加速度に対して周波数領域で積分を行い入力速度とした。Fig. 7(a)(b)(c)(d)はモデルの応答

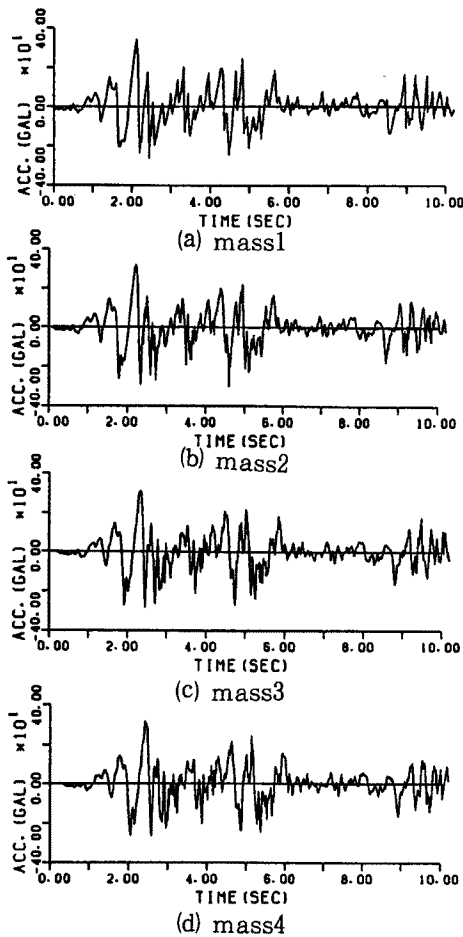


Fig. 6. Input accelerations of four-degree-of-freedom system.

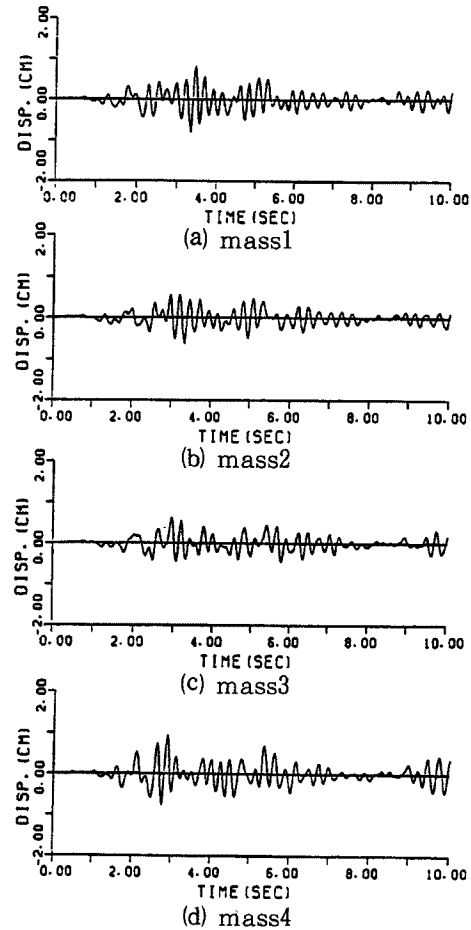


Fig. 7. Response displacement of four-degree-of-freedom system.

を示したものである。応答計算にあたってはNewmarkの $\beta$ 法を用い、 $\beta$ は $1/6$ 、刻み時間は $0.02$ 秒とした。

(2) 全ての質点で観測波形が得られている場合

4つの質点の応答変位を全て用い、各入力点に実際に入力した波を逆推定する。このとき、観測方程式は次式で与えられる。

$$\{y\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \{x\} + R \dots\dots\dots (40)$$

式(38)、(40)の状態方程式と観測方程式を用いて入力加速度の推定を行う。ここで、先験情報としてシステムノイズ $q$ 、観測ノイズ $r$ をそれぞれ $1.0 \times 10^3$ 、 $1.0 \times 10^{-5}$ とした。また、アルゴリズムによって推定されるのは式(39)の $\{f\}$ であるので、最終的にはこの微分方程式を解くことにより入力地動 $\{z\}$ を求めた。Fig. 8に、式(38)、(40)を用いて推定された入力加速度および速度波形を示す。加速度波形は、1質

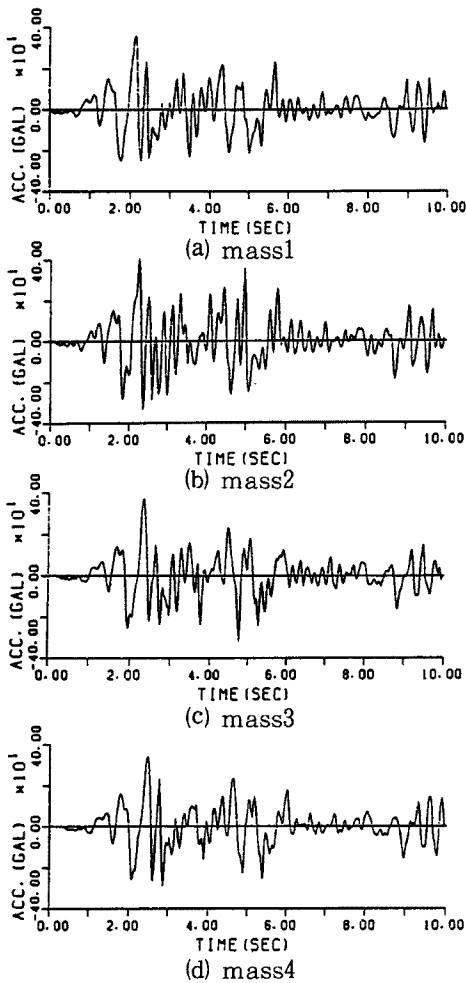


Fig. 8. Identified input accelerations.

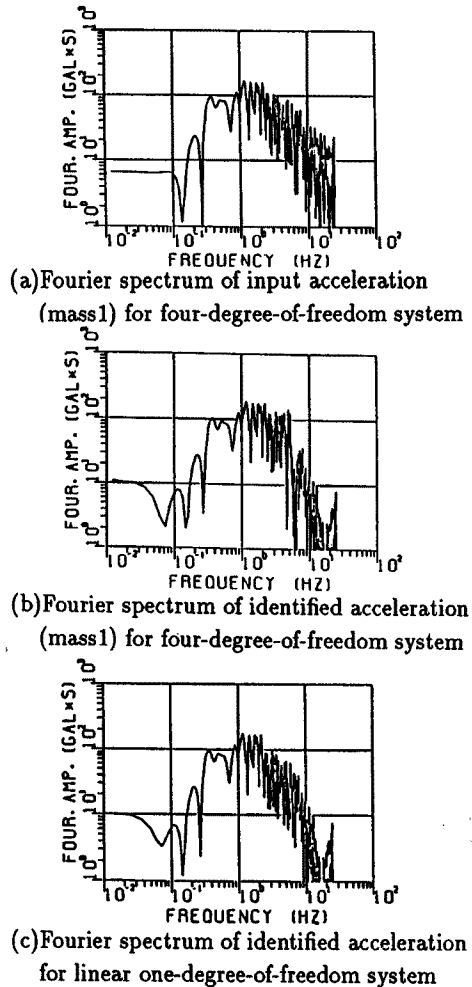


Fig. 9. Comparison of Fourier spectrum.

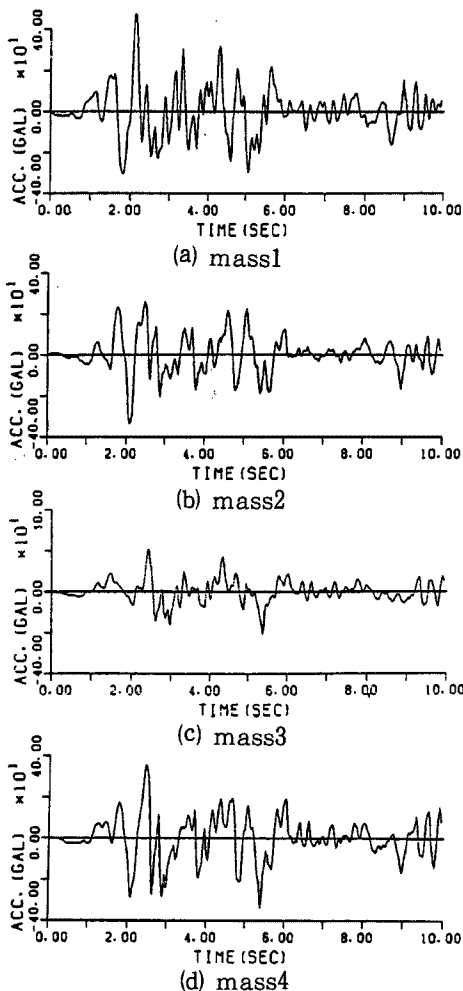


Fig. 10. Identified accelerations for lacked observation base.  
(Observed records are obtained on mass1 and mass4 only)

とした。Fig. 10の加速度波形をみると、観測の得られている質点の入力波形の推定は可能であるが、観測の得られていない質点は振幅が小さめに推定されている。質点2, 3に対する入力の推定精度が悪くなる原因は、観測更新アルゴリズムにおいて観測値の不足により状態値の修正が不十分となるからである。

#### 4. 実地震波を用いた入力地震動の同定

ここでは、シミュレーションモデルに対して用いた手法を、実際に得られた地震記録に適用する。地中埋設管を3.2で用いた4質点モデルでモデル化し、埋設管に近接した地震記録を管体の応答波形と見なし、埋設管の実際の入力地震動を推定する。またモデル化に際してはモデルのパラメータを状態変数に組み込み、カルマンフィルタアルゴリズムを用いてパラメータを推定することを試みた。

##### 4.1 埋設管路のモデル<sup>11)</sup>

点モデルの時と同様に高周波成分が多少欠如している。Fig. 9(a)(b)(c)はFig. 6(a), Fig. 8(a), Fig. 2(c)に示される加速度波形のフーリエスペクトルである。Fig. 9より、高周波成分に着目した場合、多点異入力モデルは1自由度モデルと比較して推定精度が悪くなっていることがわかる。この原因としてシステムノイズの設定の影響が考えられる。1自由度系モデルでは1入力につき1個のシステムノイズを与えているのに対し、多点異入力モデルでは異なるいくつかの入力に対して全て同じ値のシステムノイズを与えている。これが推定精度に影響を与えているものと考えられる。カルマンフィルタのアルゴリズムにしたがえば、それぞれの入力に対するシステムノイズは先験情報として与えねばならず、自由度が多くなる程、各入力に対する最適なシステムノイズを与えることが困難となる。しかし、最大加速度の時刻、地震動の開始時刻と入力地震動の位相遅れの様子は良く推定できている。また、 $P_{010}$ ,  $q$ ,  $r$ を適当に変化させ推定を試みたが、得られる波形はほとんど同様であり、これらのパラメータは1自由度モデルの場合と同様に推定結果には大きな影響を及ぼさないことがわかった。

(3) 一部の質点でしか観測波形が得られていない場合  
ここでは、質点2, 3の応答が未知である場合を考える。この場合、式(40)の観測方程式は適用できず、観測方程式は質点1と質点4の応答変位を用いて次式ようになる。

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} x + R \quad \cdots \cdots (41)$$

式(38)の状態方程式と上式を用いて、モデルに対する入力を推定したものがFig. 10に示してある。推定にあたっては $P_{010}$ ,  $q$ ,  $r$ をそれぞれ100.0,  $1.0 \times 10^3$ ,  $1.0 \times 10^{-5}$

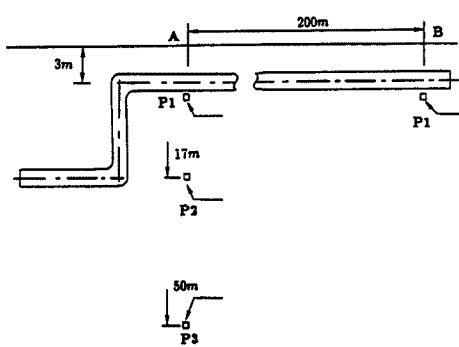


Fig. 11. Buried pipeline in the ground.

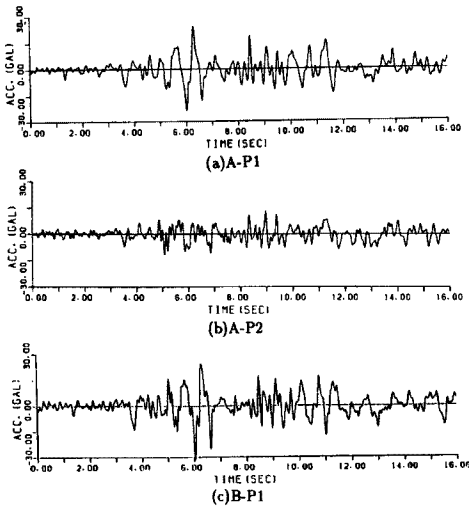


Fig. 12. Observed records at each point near the pipeline.

解析の対象とした埋設管路は川崎市川崎区に位置し、内径 1800 mm, 肉厚 19 mm の水道用鋼管である。Fig. 11 に示すように管路一般部は G. L. - 3 m に埋設され、一部は立坑を介して G. L. - 17 m に埋設されている。また立坑より 1 m の位置に、ベローズ型の伸縮可という管が設置されている。また地盤の状況は表層がシルト、細砂の互層であり G. L. - 24 m までは N 値 10 以下の軟弱地盤である。その下に N 値 20 ~ 40 の細砂層が続き、G. L. - 44 m 付近より硬質粘土が G. L. - 49 m より破礫が現れる。G. L. - 49 m 以深は N 値 50 以上になる。また加速度計は、Fig. 11 のいくつかの地点に設けられているが本章で用いた加速度記録は A の P1, P2 及び B の P1 において得られた管軸方向のものである。また A の P1, B の P1 の加速度計は埋設管と近接しており、これを埋設管の挙動と見なすことにする。

ここで、Fig. 11 で示される地盤—構造物系を Fig. 4 の 4 質点多点異入力モデルと対応させる。まず、埋設管 A から B までの部分をばねで連結された 4 つの質点に置き換える。次に地盤の G. L. - 17 m 以深を Fig. 4 における地盤に、また G. L. - 17 m より G. L. - 3 m までの間の地盤を質点と基礎とを結ぶ 4 本のばねと仮定して、Fig. 4 に示されるようなモデルに置き換えた。

次にモデルのパラメータを決定する。モデルのパラメータを同定する手法としては、カルマンフィルタ理論に基づき入出力波形から状態変数に組み込んだ構造パラメータを同定する方法<sup>23)</sup>を用いる。この手法によるパラメータの同定では、モデルに対する入力とその応答が必要である。

このモデルにおいて既知である情報は、A 点の P1, P2 と B 点の P1 の 3 つのみであるのでパラメータの同定において次の様な仮定をおく。

- 1) A 点での P1 の波形は、管体の応答と考える。
- 2) A 点での P2 の波形は、管体への入力波と考える。
- 3) P1, P2 の波形をそれぞれ 1 自由度系の出力および入力とみなし、管体—地盤間の剛性  $s/m$  と減衰  $d/m$  を求める。

同定に用いた入出力波形は、1980 年伊豆東方沖地震の際に得られたもので、管軸方向 (NE 66) 成分を対象とした。これらの加速度記録を Fig. 12 (a)(b)(c) に示した。この様な仮定の下で、パラメータ同定を行う。このモデルの運動方程式は、以下ようになる。

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{s}{m}x = -\ddot{z}_0 \dots\dots\dots (42)$$

ここに  $m, d, s$  は 1 自由度系の質量、減衰、剛性であり  $z_0$  は入力加速度である。同定すべきパラメータは  $d/m, s/m$  であり、これを次式のように状態変数に組み込む。

$$\{X\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \dots\dots\dots (43)$$

ただし

$$x_1 = x$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \dot{x} \\ x_3 &= \frac{s}{m} \dots\dots\dots (44) \\ x_4 &= \frac{d}{m} \end{aligned}$$

状態方程式は式 (42), (43) を用いると次式のようになる。

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_2 \\ -\frac{c}{m}x_2 - \frac{s}{m}x_1 - \ddot{z}_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (45)$$

また、観測値は変位波形を用いることにするが、式 (42) より相対変位を用いなければならない。そこで A-P1, A-P2 において得られた加速度波形を 2 回積分して変位波形を求め、その差をとって相対変位波形とした。しかし、この波形には基線のずれが見られ観測波形として妥当ではないので、2 秒ごとに波形の平均をとりこれをスプライン関数で近似、補間して原波形から引くことにより補正を行った。観測方程式は次式で表される。

$$y = \{1 \ 0 \ 0 \ 0\} \{X\} + R \dots\dots\dots (46)$$

また、遷移マトリクス  $\Phi$  については、拡張カルマンフィルタに対応する以下の式より求めた。

$$\begin{aligned} \{X\} &= \{f\} \\ [A] &= \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

$$[\Phi] = I + \Delta t \cdot A + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot A^2$$

4 質点モデルの場合は質点間の減衰と剛性に関する情報も必要となるが、上述の 1 質点系の同定法ではこの

Table 4. Model parameters

$s/m$ (1/sec <sup>2</sup> )	$d/m$ (1/sec)	$k/m$ (1/sec <sup>2</sup> )	$c/m$ (1/sec)
218	27	3000	300

の値は求まらないので、文献<sup>12)13)</sup>を参考に適当な値を選定した。このようにして求めたモデルの諸元を示したものが Table 4 である。

Table 4 の様に決定されたパラメータが実際の系を忠実にモデル化できているかどうかを検討するために、ここでは A-P2 において実際の地震記録が得られているので、同定されたモデルパラメータを用いて管体の応答から逆推定したものとを比較することにより同定されたモデルのパラメータの妥当性を判断する。

#### 4.2 実地震波を用いた入力地震動の推定

本節では、シミュレーションモデルに対して用いた方法を前節のモデルに対して適用する。いまこのモデルにおいて既知である記録は、質点 1, 質点 4 の応答である A-P1, B-P1 で得られた加速度記録、質点 1 に対する入力である A-P2 の加速度記録である。これは 3.2 (3) で述べた 1 部の観測点でしか観測波形が得られていない場合に相当する。また、観測されたものは絶対加速度であるので、式 (30) に示した運動方程式を用いて定式化を行う。状態方程式は次式の様になる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[s] & -[M]^{-1}[d] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} [0] \\ [M]^{-1}[d]\{z\} + [M]^{-1}[s]\{z\} \end{Bmatrix} \dots\dots (48)$$

ここでアルゴリズムから直接得られるものは次式で表される  $\{f\}$  である。

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} [0] \\ [M]^{-1}[d]\{z\} + [M]^{-1}[s]\{z\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (49)$$

したがって、式 (49) の微分方程式を解くことにより入力変位、入力速度を求めることができる。また、観測方程式は次式で表される。

$$\{y\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \{x\} + R \dots\dots\dots (50)$$

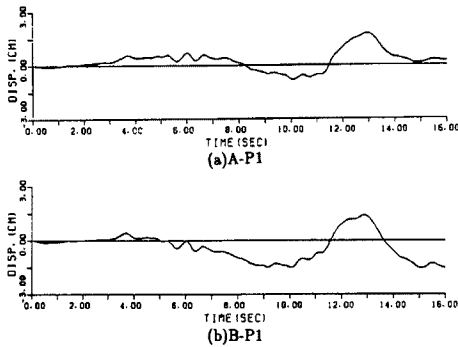


Fig. 13. Response displacement.

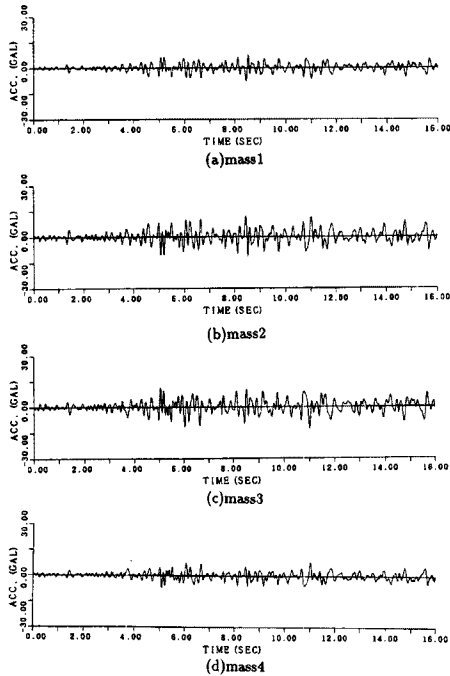


Fig. 14. Identified input accelerations.

応答変位としては、A-P1、B-P1において得られた加速度記録を2回積分したものをを用いた。この波形を示したものがFig. 13(a)(b)である。この観測波形と、前節で設定したモデルの諸元を用いて実際に入力した地震動を推定した。カルマンフィルタアルゴリズムにおいて設定せねばならない  $P_{01}$ 、 $q$ 、 $r$ の値は  $1.0 \times 10^2$ 、 $1.0 \times 10^2$ 、 $1.0 \times 10^{-5}$ とした。なお、式 (49) は Runge-Kutta の4次精度公式を用いて解き、推定加速度波形は推定された入力速度を逐次微分して加速度にした。Fig. 14(a)(b)(c)(d)に推定された4個の入力加速度を示した。A-P2で実際に観測された加速度と入力点1において推定された加速度を比較すると、推定された加速度の振幅は、実際の加速度振幅より小さくなっている。これはモデルパラメータが精度よく推定されていないことに起因すると考えられる。1自由度系モデルにより同定されたパラメータをそのまま4質点モデルに適用したこと、同定することができなかった管路ばねを適当に選定したことなどがその大きな原因である。シミュレーションによる入力波形の推定では、構造諸元は既知としていたため真値を用いることができたが、実地震波を対象とする場合はこの諸元が未知であるので構造パラメータをあらかじめ同定せねばならず、この同定結果が入力の逆推定に大きく影響を及ぼすことになる。本研究では、シミュレーションモデルにしたがって出力とシステムが既知という仮定のもとに方法論を展開したが、実際問題ではモデル化の際に構造諸元を何らかの形で与えねばならずこれをいかに正確に決定するかが重要な要因となる。

## 5. 結 論

本論文では、カルマンフィルタを用いた deconvolution 手法を用い多点異入力系の地盤-構造物系の動特性と出力波形から入力波形を導く手法を確立し、これをシミュレーションモデルと実地震記録に適用した。本研究で行ったこと及び得られた結果を以下に述べる。

(1) ノイズの影響を考慮でき、しかも時々刻々、状態が変化するシステムに対して時間領域でフィルタリングが行えるカルマンフィルタを用いて、アルゴリズムのなかで得られる予測誤差を計算することにより系に入力する波形を逆推定した。

(2) 手法の妥当性を検討するため、まず線形1自由度系に入力した地震動を対象に同定を行い良好な結果を得た。また、バイリニア型の非線形復元力特性をもつ1自由度系に本手法を応用した結果、非線形系に対しても入力波形の推定が可能であることがわかった。

(3) カルマンフィルタアルゴリズムにおける推定誤差共分散の初期値  $P_{010}$ 、システムノイズ  $q$ 、観測ノイズ  $r$  はモデル化した全ての質点で観測波形が得られている場合には、変化させても解析結果にあまり影響を及ぼさない。

(4) モデル化した全ての質点で観測波形が得られていない場合にも本手法の適用が可能であることがわかった。

(5) この手法を実地震記録に用いた結果、すべての質点に対する入力波形が得られたが、観測波形が得られた波形については実際の波形より小さな振幅の波形が得られた。これはモデルのパラメータ同定を1自由度系と仮定して行ったこと、またこれにより質点間のばねに関するパラメータを適当に与えざるを得なかったことなど、動特性の同定法に起因するものと考えられる。このことは、入力推定を行う場合には構造動特性を表すモデルパラメータの同定をあらかじめ精度良く行わなければならないことを示唆している。

## 参 考 文 献

- 1) Ott. N. and Meder. H.G.: The Kalmanfilter as a Prediction Error Filter, Geophysical Prospecting 20, 1970, pp. 549 - 560.
- 2) 星谷 勝・斉藤悦郎: 拡張カルマンフィルタを用いた同定問題の各種振動系への応用, 土木学会論文集, 第 399 号, 1983, pp. 59 - 67.
- 3) 星谷 勝・斉藤悦郎: 線形多自由度系の動特性の推定, 土木学会論文集, 第 344 号, 1984, pp. 289 - 298.
- 4) 土岐憲三・佐藤忠信・清野純史・市原和彦: カルマンフィルタを用いた断層破壊過程の同定, 京都大学防災研究所年報, 第 29 号, 1986.
- 5) 村上 章・長谷川高士: カルマンフィルタを用いた圧密沈下量の観測的予測, 農業土木学会論文集, 第 120 号, 1985.
- 6) 土岐憲三・佐藤忠信・清野純史・市原和彦: 地盤構造物系の非線形復元力の同定, 京都大学防災研究所年報, 第 31 号, 1988.
- 7) 片山 徹: 応用カルマンフィルタ, 朝倉書店, 1983.
- 8) 相良節夫・秋月影雄・中溝高好・片山徹: システム同定, 計測自動制御学会, 1980.
- 9) Bierman, G.L.: Measurement Updating Using The U-d Factorization, Automatica, Vol. 12, 1976, pp. 375 - 382.
- 10) 土岐憲三: 構造物の耐震解析, 土木学会編新体系土木工学 11, 技報堂出版.
- 11) 大石 博・関口宏二: 埋設管の地震時ひずみ発生機構に関わる二, 三の考察, 土木学会論文集,

- 第350号, 1984, pp. 227 - 236.
- 12) 宮本 宏・北条貞宗・古庄健二: 地震時における管路挙動解明のための振動実験, クボタ技報, 第1巻第2号, 1976, pp. 27 - 236.
  - 13) 高田至郎・長尾貞夫: 埋設導管の耐震性に与える継手の影響について, 第4回日本地震工学シンポジウム, 1975, pp. 679 - 689.