

自由水面を考慮した開水路乱流の数値計算手法

—修正 $k-\varepsilon$ 乱流モデルによる解法—

瀬 津 家 久・中 川 博 次

NUMERICAL CALCULATION OF TURBULENT OPEN-CHANNEL FLOWS IN CONSIDERATION OF FREE-SURFACE EFFECTS —COMPUTER SIMULATION BY A MODIFIED $k-\varepsilon$ TURBULENCE MODEL—

By *Iehisa NEZU* and *Hiroji NAKAGAWA*

Synopsis

Numerical calculation techniques of turbulent shear flows are classified into two categories : one is $k-\varepsilon$ turbulence model and the other is large eddy simulation (LES). The standard $k-\varepsilon$ model has been established at present to predict turbulent structure in closed duct flows, while LES is being developed to predict coherent eddy structure in more simple duct flows. The standard $k-\varepsilon$ model cannot be, however, applied to open channel surface flows, because the turbulence near the free surface is more depressed than the closed duct flows.

In the present study a new modified $k-\varepsilon$ model is proposed to predict reasonably the turbulent structure in open channel flows with both of low and high Reynolds numbers. The numerical calculations indicate a splendid agreement with the experimental data which were obtained by making use of hot-film and Laser Doppler anemometers.

1. 概 説

近年の電子計算機の高速度化、高容量化の進展は著しく、その結果、従来不可能とされて来た乱流の数値計算がかなり可能なものとなってきた。現在の乱流の数値計算手法は次の2つに大別される。1つは、渦動粘性モデルに基づき Reynolds 方程式を解く手法であるが、従来のように渦動粘性係数を既知量として与えるものではなく、乱れの移流方程式を使って方程式系を閉じらせるものであり、この代表例に $k-\varepsilon$ 乱流モデルがある。もう1つの手法は、Large Eddy Simulation (LES と略す) であり、計算格子以上の大きな渦乱流を Navier-Stokes の式で計算し、計算格子以下の微細渦を局所等方性理論を使ってモデル化するものである。LES 法は、1970年に Deardorff が管路流で初めて計算したものであるが¹⁾、その後改良され、1982年には Moin・Kim がこの手法を用いて1970年代に発見された乱流のバースティング現象を数値的に再現することに成功し²⁾、一躍注目されるようになった。このように、LES 法は、バースティングなどの組織乱流をも計算できるから乱流計算には画期的な手法であるが、一様管路流などの非常に単純な境界条件での流れでさえスーパー・コンピュータを用いても数時間を必要とし、まだ工学的な計算レベルまでには達していないと考えられる³⁾。

一方、 $k-\varepsilon$ モデルは、1970年代に英国の Imperial College の Spalding や Launder らのグループによって開発された。彼らは、噴流、境界層流、管路流さらにはより複雑な流れにこれを適用し、比較的短時間の計算量で合理的に流れの構造や温度分布を数値予測できることを示した。そして、計算に使われるモデル係数等は標準値として現在確立されるに至っている⁴⁾。

1980年代初期には Rodi らのカールスルーエ大学水理研究所のグループによって水理学の分野に $k-\varepsilon$ モデルが適用され出した。開水路乱流への適用では自由水面の取り扱いが最大の課題である。Naot・Rodi (1982)⁶⁾ は、自由水面の存在によって鉛直方向の乱れ強度が管路流より減少するという Nakagawa・Nezu ら (1975)⁶⁾ の指摘に注目して、乱れエネルギーの再配分をモデル化し、開水路乱流の2次流を数値予測した。当時は、この計算予測値を検証する実験データは存在しなかったが、祐津ら (1985)⁷⁾ による高精度レーザ流速計を用いた実験により、少なくとも水路幅・水深比が2の場合の数値予測値は実験値とよく一致することが確認され、 $k-\varepsilon$ モデルの有効性が立証された⁸⁾。最近、Celik・Rodi (1984) は⁹⁾、Naot・Rodi の自由水面による乱れ減衰効果のモデル化をより厳密に行い、2次元等流の乱流特性を数値計算した。しかし、標準型 $k-\varepsilon$ モデルのモデル定数に加えて、さらに5個の新たな係数が必要となり、また、後述するように係数 C_μ が管路流に比べてあまりに急激に変化し⁹⁾、流体力学的に考えてこのモデルには難点が多い。

本研究は、自由水面による乱れの減衰効果を減衰係数を導入してモデル化し、また、河床近傍まで計算できるように標準型 $k-\varepsilon$ モデルを修正したものである。さらに、低レイノルズ数の場合や、非常に河床近くの粘性底層をも数値予測する必要がある場合には、Jones・Launder (1973)¹⁰⁾ の付加項を適用して本研究のモデルを拡張できることが示される。

以上の数値計算結果は、著者らが長年にわたって発表して来た実験データと非常に良好に一致することが示される。

2. 基礎方程式系

2.1 運動方程式

2次元開水路乱流場の支配方程式は、周知のように、Navier-Stokes の式を平均流と乱れ変動成分とに分離することによって得られる次の Reynolds 方程式で構成される¹¹⁾。

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g \cdot \sin \theta - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (-\bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial y} (-\bar{u}\bar{v}) + \nu \nabla^2 U \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -g \cdot \cos \theta - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (-\bar{u}\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\bar{v}^2) + \nu \nabla^2 V \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{連続式}) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 x 軸は流下方向、 y 軸は水路床に直角な鉛直上方の座標軸であり、 U 及び V はこれに対応する平均流速成分、 u 及び v は乱れ変動成分である。 P は平均圧力、 ρ は水の密度、 g は重力加速度、 ν は動粘性係数、 θ は水路勾配の角度である。式(1)、(2)の右辺第1項が流れに作用する重力項である。いま、

$$P \equiv \rho g(h-y) \cos \theta + P' \quad \dots\dots\dots (4)$$

とおくと、 P' は静水圧分布からの偏差を表わし、式(2)から重力項が消去される。ここで、 h は水深である。

式(1)、(2)に現われるレイノルズ応力 $\bar{u}^2$ 、 $\bar{v}^2$ 及び $-\bar{u}\bar{v}$ が平均流速 (U , V) と何らかの形で関係づけられないと方程式系が閉じない。この方程式系の完結問題 (Closure Problem) が乱流研究の最大の難問であり、渦動粘性モデル、混合距離モデルやさらに複雑な諸々のモデルが提案されている。

2.2 渦動粘性モデル

このモデルはもともと Boussinesq (1877) によって提案されたものであるが、近代の乱流相側則の面から再検討され、次式のようにモデル化される⁴⁾。

$$\overline{u_i u_j} = -\nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\nu_t \equiv C_\mu \cdot k^2 / \varepsilon \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$k \equiv \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} = \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 ν_t は渦動粘性係数、 k は乱れエネルギー、 ε は乱れの散逸率である。また、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり、式(5)はテンソル表示である。

従来の渦動粘性モデルは、 ν_t を既知量として与え、方程式系(1)、(2)及び(3)を閉じらせていたが、一般に ν_t を事前に予測することは困難で、このモデルが経験則の域を出なかった。一方、Townsend⁽¹²⁾ や Rotta⁽¹³⁾ 等に代表される近代の乱流理論の成果として、式(6)の妥当性が提示された。式(6)の C_μ は係数であるが、 k と ε は乱れの重要な特性値であり、この2つを新たに未知変数として乱れ特性値をも予測しようとするものかといゆる k - ε 乱流モデルである。

2.3 k 方程式及び ε 方程式

上述したように、新たに k と ε を未知変数として導入したため、式(1)～(3)を閉じらせるためにはさらに2つの独立した方程式が必要である^{*}。

(1) k 方程式

乱れエネルギー式は Navier-Stokes の式から厳密に次のように導かれる⁽¹⁴⁾。

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = G - \varepsilon - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\overline{p}u}{\rho} + \overline{k}u - \nu \frac{\partial k}{\partial x} - \nu \frac{\partial \overline{u}u_i}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\overline{p}v}{\rho} + \overline{k}v - \nu \frac{\partial k}{\partial y} - \nu \frac{\partial \overline{v}u_i}{\partial x_i} \right) \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$G \equiv -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad \dots\dots\dots(9)$$

ここで、 p は圧力変動である。 G は乱れエネルギーの発生率 (Generation or Production) であり、式(8)の第3、4項が乱れの拡散率 (Diffusion) である。拡散率は乱れ変動の3次相関ゆえ、この方程式を閉じらせるためには拡散率を2次相関で近似する必要がある。通常、式(5)と同様な仮定により、次の勾配型で相関づけられる。

$$\left(\frac{p}{\rho} + k \right) u_i - \nu \left(\frac{\partial k}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} \right) = -\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \quad \dots\dots\dots(10)$$

ここで、 σ_k は定数であり、 (ν_t/σ_k) がスカラー量 $(p/\rho + k)$ の拡散係数にほぼ相当する。式(10)は、圧力エネルギー p/ρ と運動エネルギー k の拡散を同一視するモデル化である (厳密に言えば、式(10)の左辺第2項のレイノルズ応力による粘性仕事も含む)。しかし、粘性が効く壁面のごく近傍では両者の拡散特性は顕著に相違するから⁽¹⁵⁾、式(10)が適用できなくなるものと考えられる。これを解決する1つの手法として、Jones・Launder (1973)⁽¹⁰⁾ は、粘性底層内で $k \propto y^2$ となる実験特性に注目して式(10)に次の付加項 JL_k を加えた。

$$JL_k = -C_3 \nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2 \quad \dots\dots\dots(11)$$

ここで、 C_3 は2程度のモデル定数である。

(2) ε 方程式

散逸率 ε の定義は

$$\varepsilon = \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 > 0 \quad \dots\dots\dots(12)$$

であるから、Navier-Stokes の式から ε に関する方程式を導ける⁽¹⁴⁾。しかし、これは式(8)以上に複雑であり、 ε が k と同様にスカラー量であることを考慮して、式(8)と同型の次式でモデル化される。

$$U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\varepsilon}{k} (C_1 G - C_2 \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \quad \dots\dots\dots(13)$$

^{*} この意味で、 k - ε モデルは2方程式乱流モデルに分類される。特性長さスケール L は $L = k^{3/2}/\varepsilon$ と定義でき、 ε のかわりに kL を未知変数とした k - kL モデルなどがあるが、現在では k - ε モデルが最も多く使われる。

ここで, C_1, C_2 はモデル定数であり, 右辺の第3, 4項は ε に関する拡散項で, 式(10)と同様の発想から定式化された。式(13)は, 式(8)ほど理論的根拠はなく, いわば経験式に近いが, モデル定数 C_1, C_2 及び σ_ε を適当に選ぶことによって実験データを従来の乱流モデルに比べてより合理的に予測できることが判明し, $k-\varepsilon$ モデルが定着した⁴⁾。なお, 粘性底層では k 方程式と同様に, 式(13)は適用できず, 粘性効果を表す付加項が必要となる。Jones・Launder (1973) のモデルを適用すれば, 付加項 JL_ε は次式で与えられる¹⁰⁾。

$$JL_\varepsilon = C_4 \nu_t \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2 \dots\dots\dots (14)$$

ここで, C_4 は2程度のモデル定数である。

2.4 基礎方程式系の一般形

未知変数 U, V, P', k 及び ε に関する5個の偏微分方程式(1), (2), (3), (8)及び(13)は, 以下のよう同型の方程式で形式上書ける。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi U - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi V - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = S_\phi \dots\dots\dots (15)$$

ϕ は移流される変数であり, S_ϕ はこれに対応する外力項, Γ は有効粘性係数であり, 以下のように書き下せる。

$$\text{連続式: } \phi=1, \quad S_\phi=0 \dots\dots\dots (16)$$

$$U \text{ 方程式: } \phi=U, \quad \Gamma=\nu_t+\nu$$

$$S_u = g \left(\sin \theta - \frac{dh}{dx} \cos \theta \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P'}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial V}{\partial x} \right) \left. \vphantom{\frac{\partial}{\partial x}} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

$$V \text{ 方程式: } \phi=V, \quad \Gamma=\nu_t+\nu$$

$$S_v = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P'}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial V}{\partial y} \right) \left. \vphantom{\frac{\partial}{\partial y}} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

$$k \text{ 方程式: } \phi=k, \quad \Gamma=\nu_t/\sigma_k \left. \vphantom{\frac{\partial}{\partial x}} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

$$S_k = G - \varepsilon + JL_k$$

$$\varepsilon \text{ 方程式: } \phi=\varepsilon, \quad \Gamma=\nu_t/\sigma_\varepsilon \left. \vphantom{\frac{\partial}{\partial x}} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

$$S_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{k} (C_1 G - C_2 \varepsilon) + JL_\varepsilon$$

また, 乱れ発生率 G は式(5)と(9)から次式となる。

$$G = \nu_t \left\{ 2 \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots (21)$$

3. 標準型 $k-\varepsilon$ モデル

3.1 モデル定数

Imperial College のグループによる精力的な研究により, 噴流, 境界層流, 管路流などに式(15)が適用され, 式(19)及び(20)に現われるモデル定数はほぼ普遍値として次のように確定された⁴⁾。

$$\sigma_k=1.0, \quad \sigma_\varepsilon=1.3, \quad C_1=1.44, \quad C_2=1.92 \dots\dots\dots (22)$$

また, $k-\varepsilon$ モデル (拡張された渦動粘性モデルともいえる) では式(6)の係数 C_μ が最も重要となる。レイノルズ数 Re が十分に大きいとき, C_μ は一定値と見なされ, 次式で与えられる⁴⁾。

$$C_\mu=0.09 \dots\dots\dots (23)$$

3.2 境界条件

(1) 壁面条件 (壁関数)

前述したように, 式(10)などの勾配型拡散表示は $y=0$ の壁面までは適用できない。そこで, 標準型 $k-\varepsilon$

モデルでは $y^+ \equiv yU_* / \nu$ (ここで, U_* は摩擦速度) が50以上で乱れの発生率 G と散逸率 ε とがほぼ等しくなり, 平均流速は対数則分布に従うという乱れの相似特性を取り入れ, 次の壁面条件を与える (これを壁関数という)。すなわち, 壁面に最も近い, 計算の第1格子点を y_p とすると (以下, y_p に対応する値に添字 p をつける),

$$\textcircled{1} \text{ 平均流速 } \quad \frac{U_p}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y_p^+ + A \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで, 開水路乱流では $\kappa=0.41$, $A=5.3$ で与えられる¹⁵⁾。

$$\textcircled{2} \quad y_p^+ \geq 50 \text{ のとき } G = \varepsilon \quad \dots\dots\dots (25)$$

より次式が得られる。

$$\frac{k_p}{U_*^2} = \frac{1}{\sqrt{C_\mu}} = 3.33 \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$\varepsilon_p = \frac{U_*^3}{\kappa y_p} \quad \dots\dots\dots (27)$$

(2) 対称条件

管路流の中央軸 ($y=h$) では流れが対称となることから, 次の対称条件が課せられる。

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=h} = 0, \quad \left. \frac{\partial k}{\partial y} \right|_{y=h} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right|_{y=h} = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

3.3 標準型 $k-\varepsilon$ モデルの適用限界

式(15)を差分化し, 3.1のモデル定数及び3.2の境界条件を用いると, 管路流の乱流特性が計算でき, それらに関する差分スキームはすでに公表されている^{*)}。しかし, 標準型 $k-\varepsilon$ モデルには次のような適用限界がある。

- ① レイノルズ数 Re が十分大きい場合, すなわち第1格子点 $y_p^+ \geq 50$ の場合に限定される。
- ② 乱れエネルギーは壁面近傍で実験条件に無関係に $k_p/U_*^2 = 3.33$ と一定値になるが, 実験値はこれより大きい場合が多い。
- ③ 開水路乱流の場合, 式(28)の対称条件は使えない。
- ④ 式(5)は等方性乱流を前提としているから, 非等方性の結果生じる現象すなわち2次流を計算することはできない。

①及び②の適用限界は, 特にレイノルズ数が小さい場合には致命的な欠陥となり, 標準型 $k-\varepsilon$ モデルは適用できなくなる。2.で述べたように, この場合には Jones・Launder の付加項式(11)及び(14)を外力項 S_ϕ に加えればよい。しかし, 開水路乱流での式(11)及び(14)の妥当性やその際のモデル係数 C_3, C_4 は現在まったく不明であり, これを検討することが本研究の目的の1つである。

③は自由水面をもつ開水路乱流を数値計算する際の本質的な欠陥であり, 水理学の分野に $k-\varepsilon$ モデルを適用するとき最も重要な課題となる。Celik・Rodi (1984)⁹⁾ は, $u_i u_j$ の移流方程式 (これを応力方程式モデルという) に $G=\varepsilon$ の平衡関係を仮定して, これを代数式に帰着させ, 次式を導いた。

$$\frac{\overline{v^2}}{k} = \frac{2}{3} \frac{R_1 - 1 + (G/\varepsilon)(R_2 - 2R_3 R_4 f)}{R_1 + (G/\varepsilon) - 1 + 2R_3 f} \quad \dots\dots\dots (29)$$

*) $k-\varepsilon$ モデルの開発の初期では, 式(15)を Δx に関して前進型差分におきかえ, さらには静水圧分布を仮定し (式(4)の $P' \equiv 0$ とおく), 式(18)を方程式系から落した。このスキームでは段落ち剥離流などの局所流を合理的に計算できない。その後, SIMPLE 法 (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) が開発され¹⁶⁾, これをコントロールボリューム法に取り入れた TEACH コードが提案され¹⁷⁾, 標準型のアルゴリズムとなっている。なお, これに関する解説が武本ら (1984)¹⁸⁾ によって行われている。

$$C_\mu = 0.09 \cdot \frac{1 + \frac{3}{2} \frac{R_2 R_4 f}{1 - R_2}}{1 + \frac{3}{2} \frac{R_2}{R_1 f}} \cdot \frac{1 - \frac{2 R_2 R_4 f (G/\varepsilon)}{R_1 - 1 + R_2 (G/\varepsilon)}}{1 + \frac{2 R_2 f}{R_1 - 1 + G/\varepsilon}} \quad (30)$$

R_1, R_2, R_3, R_4 はモデル定数であり, Gibson ら (1978) が提示した値, すなわち $R_1=1.8, R_2=0.6, R_3=0.5, R_4=0.3$ を用いた。また, f は Celik・Rodi の壁関数 (wall function) である。自由水面近傍で鉛直方向の乱れ強度 $\overline{v^2}$ が減少するように, すなわち Nakagawa・Nezu ら (1975)⁶⁾ の実験値に合致するように f が決定された。式(29)は, 乱れエネルギーの配分 $\overline{u^2}, \overline{v^2}, \overline{w^2}$ を決める一手法であるが, 標準型 $k-\varepsilon$ モデルのモデル定数すなわち式(22)に加えて, 新たに $R_1 \sim R_4$ 及び f の5個のモデル定数が必要となる。このように, Celik・Rodi のモデルはモデル定数が多い上に, 式(29)と(30)の水理学的意味付けが希薄であり, 一般的方法とはいえない。本研究は, 自由水面による乱れの減衰効果をより水理学的に把えて, 新しい乱流モデルを構築するものである。

最後の④の適用限界は, 3次元乱流すなわち2次元流を数値予測するとき重要となる。非等方性の $k-\varepsilon$ モデルはすでにいくつか提案されているが²⁰⁾, まだ確定的なモデルはなく, 今後開発すべき重要な課題と考えられる。

4. 修正 $k-\varepsilon$ モデル

4.1 本モデルの開発理念

3.3で述べたように, 標準型 $k-\varepsilon$ モデルを開水路乱流に直接適用することには多くの難点がある。本研究は, このモデルの難点を解消し, すなわち $k-\varepsilon$ モデルを開水路乱流にも適用可能なように修正するものである。しかし, 標準型 $k-\varepsilon$ モデルが熱輸送をも含めた流体機械工学等の分野で現われる複雑な流れをかなり合理的に予測し得ることや, すでに工学的な計算手法として広く使われ出した実績を考慮すると¹⁷⁾, 標準型 $k-\varepsilon$ モデルをむやみに反古すべきではなく, むしろこのモデルを開水路にも適用可能なように拡張すべきである。本研究で開発された拡張モデルの骨子は次の点である。

① $k-\varepsilon$ モデルで最も重要な係数 C_μ に粘性効果を考慮して第1格子点 y^+ を20まで適用可能なように拡張すること。

② 自由水面による乱れの減衰効果を考慮した水面条件を開発すること。

③ 低レイノルズ数の場合や, 粘性底層まで数値計算が可能のように拡張すること。

以下では, 順にこのモデルの考え方と定式化を提示する。

4.2 渦動粘性のモデル係数 C_μ

$k-\varepsilon$ モデルが式(6)の渦動粘性表示に立脚している以上, このモデル係数 C_μ の与え方が最も重要な点となる。標準型では式(23)の一定値で与えた。しかし, $k-\varepsilon$ モデルを壁面近傍まで拡張・適用するには, van Driest (1956)²¹⁾ が混合距離モデル (2.3の脚注の意味では, 0-方程式モデルといえる) に導入した粘性による減衰関数 (damping function) と同様のものを考慮する必要がある。van Driest 型の減衰関数は次式で与えられる。

$$C_\mu = 0.09(1 - D_1 \cdot \exp(-R_t/D_2)) \quad (31)$$

一方, Jones・Launder (1973)¹⁰⁾ は経験的に次式を与えた。

$$C_\mu = 0.09 \cdot \exp\left(-\frac{D_3}{R_t + D_4}\right) \quad (32)$$

ここで, $D_1 \sim D_4$ はモデル定数であり, 実験値との比較によって決定される。Jones らの値は $D_3=125, D_4=50$ である。また, $R_t \equiv k^2/(\nu \varepsilon)$ は乱れのレイノルズ数である。van Driest の原論文の減衰関数は R_t のかわりに y^+ が使われ, これを用いた検討もされている²²⁾。しかし, y^+ だと格子点の与え方で C_μ が決定されてしまい, また, 再付着点を伴う剝離流には適用が困難となるから²³⁾, 本研究では $k-\varepsilon$ という乱れ特性を最も

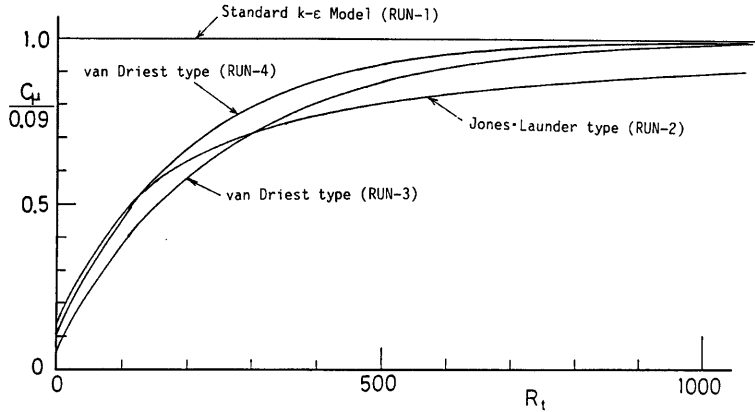


Fig. 1 Coefficient C_μ of eddy viscosity against turbulence Reynolds number, R_t .

よく表わしたレイノルズ数 R_t を採用する。

当然, R_t が十分大きくなると, 式(31), (32)はともに $C_\mu \rightarrow 0.09$ となり, 標準型に収束する。また, Celik・Rodi の式(30)も一種の減衰関数を考慮した表示法といえる。

Fig. 1 は, $D_1 \sim D_4$ を与えた式(31)及び(32)を示すものである。式(31)は $R_t \leq 200$ で式(32)とほぼ同程度になるが, $R_t > 200$ では式(32)に比べて標準型により速く収束し, 粘性の効果がなくなる。詳しい計算手法は後述するが, Figs. 2, 3 及び 4 は, Run 1 ($C_\mu = 0.09$ の標準型), Run 2 ($D_3 = 120, D_4 = 60$), Run 3 ($D_1 = 0.95, D_2 = 250$) 及び Run 4 ($D_1 = 0.90, D_2 = 200$) の計算結果である。第1格子点 y_p は $y_p^+ = 20$ に選んだ。

まず, Fig. 2 は, 平均流速 $U^+ \equiv U/U_*$ を $y^+ \equiv yU_*/\nu$ に対して図示したものである。図には, 式(24)の対数則分布, 粘性による減衰関数を考慮した van Driest 曲線²¹⁾及び外部領域 ($y/h \geq 0.15$) でも適用される次の Log-Wake 則¹⁵⁾をそれぞれ併示した。

$$\frac{U}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + A + \frac{2\pi}{\kappa} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{h}\right) \dots \dots \dots (33)$$

ここで, π は Coles 係数であり, 図には $\pi = 0.2$ の曲線を載せてある。平均流速 U^+ に関してはどの Run でもそう大差はないが, 標準型 (Run 1) は当然 y_p^+ で対数則分布に従い, 粘性が効く buffer 層には適用できない。実測値とよく一致する式(33)の Log-Wake 則には Run 3 が最もよく合致するようである。

次に, Fig. 3 は, 乱れエネルギー k の分布である。計算結果には, 後述する自由水面による乱れの減衰効果が考慮されている。図中の実線は, 祢津 (1977)²⁴⁾ による乱れ強度に関する半理論曲線であり, 次式で表示される。

$$\frac{k}{U_*^2} = 4.78 \exp(-2y/h) \dots \dots \dots (34)$$

式(34)は, $y^+ > 100$ あるいは $y/h \geq 0.15$ の外部領域で成立する。計算値と式(34)を比較すると, 標準型 (Run 1) では境界条件が式(26)であるから, 式(34)の半理論曲線 (実験値とよく一致する) から河床側で最も大きくずれる。他の Run を比較すると, やはり Run 3 の一致が最もよい。

最後の, Fig. 4 は, 散逸率 ε の分布を $\varepsilon h/U_*^3$ の無次元形で示した。図中の実線は祢津 (1977)¹¹⁾による半理論曲線であり, 式(34)と平均渦径の分布特性から次のように求められている。

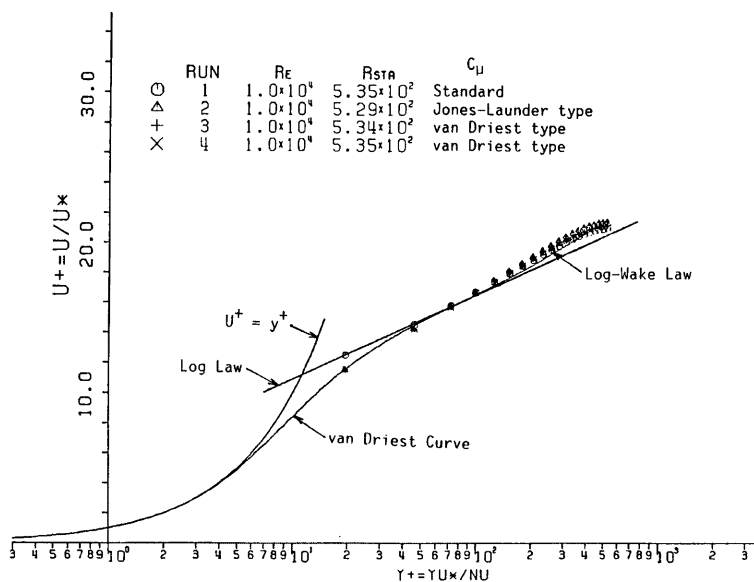


Fig. 2 Effect of C_μ on mean velocity distribution.
(Standard $k-\epsilon$ model and modified $k-\epsilon$ model)

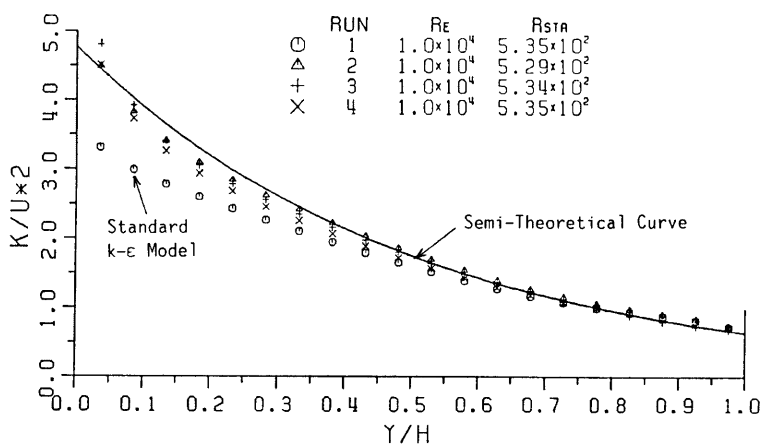
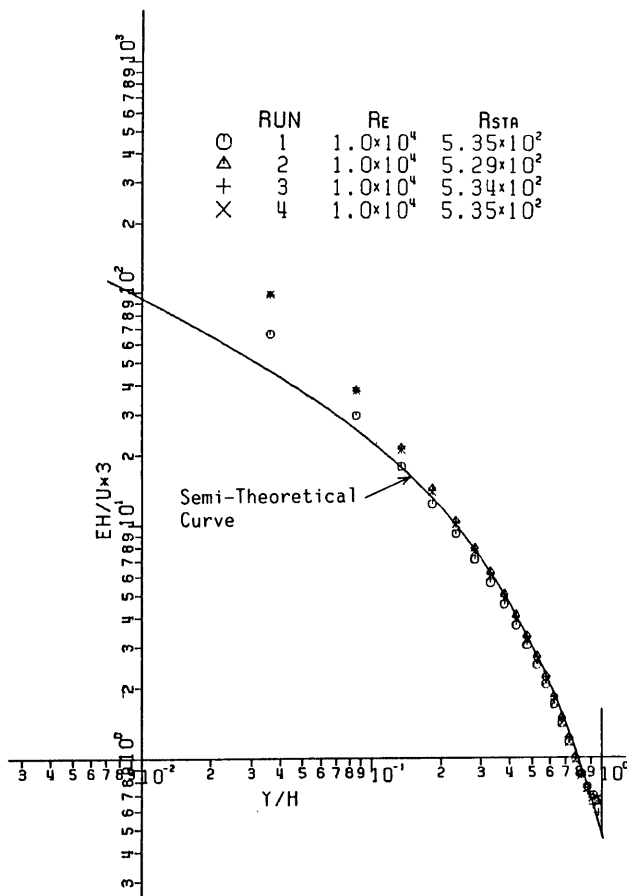


Fig. 3 Effect of C_μ on turbulent energy, k/U_*^2 .


 Fig. 4 Effect of C_p on energy dissipation, $\varepsilon h/U_*^3$.

$$\frac{\varepsilon h}{U_*^3} = 9.76 \frac{\exp(-3y/h)}{\sqrt{y/h}} \dots\dots\dots (35)$$

式(35)も $y/h \geq 0.15$ が適用範囲である。式(35)と計算値との一致は Run 3 が最もよいことが再確認され、特に、 $y/h > 0.9$ の自由水面近くでこの一致は注目に値する。

以上の検討により、係数 C_p は式(31)を用い、 $D_1=0.95$ 及び $D_2=250$ の場合が最もよく実験値や理論曲線と一致することが判明した。以下ではこの値を用いることにする。

4.3 自由水面による乱れの減衰効果のモデル化

(1) モデルの定式化

管路流では式(28)の境界条件が論理的に考えて妥当である。一方、自由水面を有する開水路では式(28)の妥当性は不問であり、実際、式(28)を使うと実測値を説明し得ないことが指摘されている⁴⁾。これが、

Celik・Rodi (1984)⁹⁾ の研究の動機となったが、式(29)、(30)で示したように応力方程式モデルの代数化は複雑すぎて、物理的考察が容易でない。本研究は、自由水面の存在によって乱れエネルギーが管路流より減衰するという特性に注目して以下のように定式化を行う。

管路流の中央軸上の乱れエネルギーを k_0 とし、これと同一の水理条件下での開水路流の自由面上での

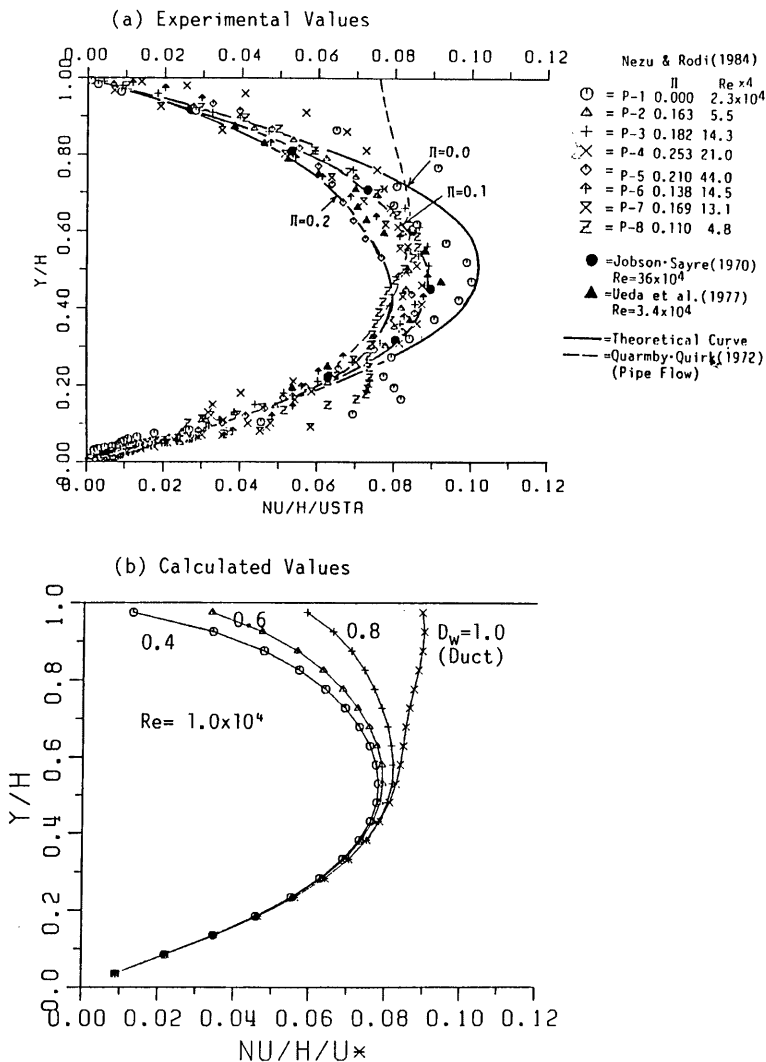


Fig. 5 Effect of free-surface damping coefficient D_w on eddy viscosity distribution, $\nu_t/(hU_*)$.

乱れエネルギーを k_w とする（以下、管路流は a 、開水路流は w の添字をつける）。自由水面による乱れの減衰効果により、次式が成立する。

$$k_w = D_w \cdot k_a \quad \dots\dots\dots (36)$$

D_w は減衰係数である。 D_w を理論的に決定することは困難であるが、

$$D_w = \frac{k_w}{k_a} = \left(\frac{u'_w}{u'_a} \right)^2 \left\{ \frac{1 + (v'_w/u'_w)^2 + (w'_w/u'_w)^2}{1 + (v'_a/u'_a)^2 + (w'_a/u'_a)^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (37)$$

であり、管路の中央軸上では等方性すなわち $u'_a \simeq v'_a \simeq w'_a$ を仮定し、開水路の自由面上では $u'_w \simeq u'_a \simeq w'_w$ 及び $v'_w \rightarrow 0$ を仮定すれば、

$$D_w \rightarrow \frac{2}{3} \quad \dots\dots\dots (38)$$

となる。本研究では、 $D_w = 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ と変化させ、最適な減衰係数を予測する。

次に、 k_w の減衰により、平均流速 U_w の境界条件も変化する。レイノルズ応力 $-\overline{uv}$ は式(1)に従う、すなわち直線分布せねばならないから、乱れの減衰効果を受けない。したがって、次式が成立する。

$$-(\overline{uv})_a = -(\overline{uv})_w \text{ から、}$$

$$\left(\frac{dU}{dy} \right)_w = \frac{1}{\nu_t} (-\overline{uv})_a \quad \dots\dots\dots (39)$$

実際の計算に当っては、自由水面に最も近い格子点を y_w にとり、式(36)、(39)を境界条件にすればよい。なお、 ε_w に乱れの減衰効果がどのように及ぶか現在不明であり、本研究では ε_w に関しては式(28)と同様に対称条件 $\partial \varepsilon / \partial y|_{y_w} = 0$ を使うことにする。

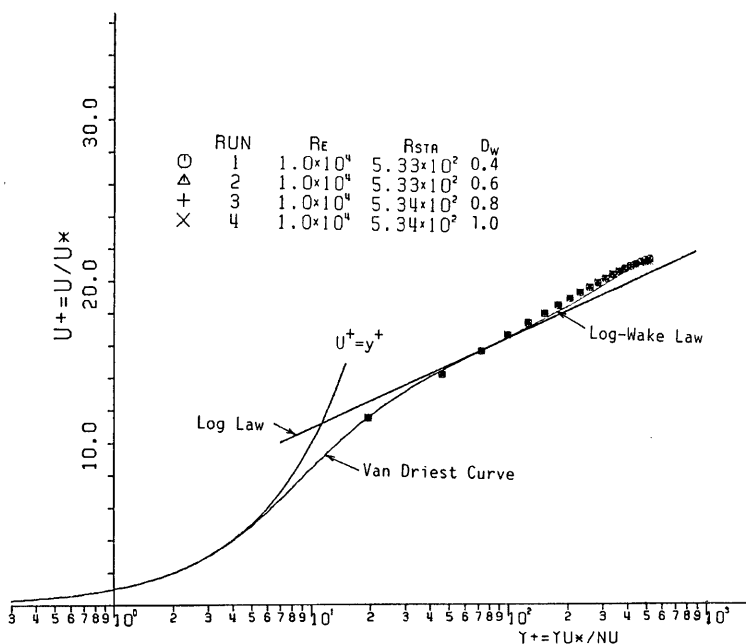
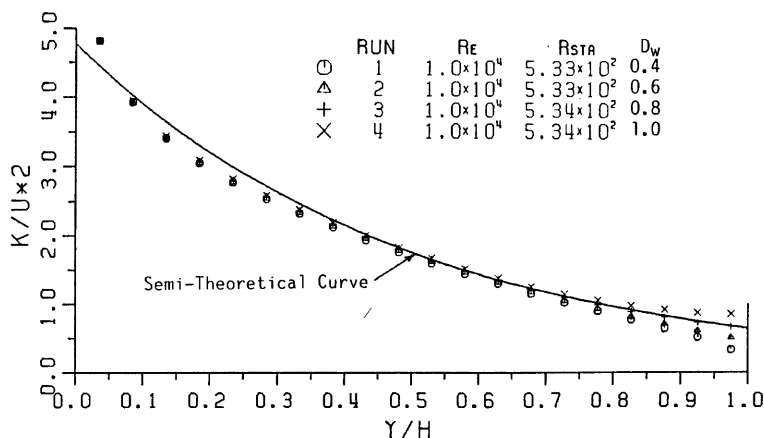


Fig. 6 Effect of free-surface damping coefficient D_w on mean velocity distribution.

Fig. 7 Effect of free-surface damping coefficient D_w on turbulent energy.

(2) 実験的検証

Fig. 5 は、自由水面による乱れの減衰効果を検討するために、減衰係数 D_w を0.4から1.0まで変化させた場合の渦動粘性係数 ν_t を $\nu_t/(hU_*)$ の無次元で示すものであり、図の(a)が高精度レーザ流速計による Nezu・Rodi (1986)¹⁵⁾ 等の実験値、図の(b)が計算値である。管路流では対称軸 $y/h=1$ において Quarmby・Quirk (1972)²⁸⁾ の実験値に見られるように、 $\nu_t/(hU_*)$ はほぼ一定値となる。乱れの減衰がない、すなわち $D_w=1.0$ の場合の計算値はこの管路流の実験値とよく一致している。一方、開水路乱流では自由水面に近づくとき $\nu_t/(hU_*)$ が減少することが大きな特徴であり、これは減衰係数 D_w を導入することでうまく説明できる。自由水面近くの ν_t の実験値は、実測された平均流速 U を数値微分しているため、それほど精度はよくないが¹⁶⁾、本研究の乱流モデルと比較すると $D_w=0.4\sim0.8$ の値に収まっているようである。

Fig. 6 は、平均流速分布である。 D_w が変化してもそれほど大差はないが、 D_w が小さいほど自由水面近くで対数則からのずれは大きくなる。式(33)の Log・Wake 則分布とは $D_w=0.8$ の計算結果が最もよく一致するようである。

Fig. 7 は、乱れエネルギー k に及ぼす減衰係数 D_w の影響を示すものである。図中の実線は式(34)の半理論曲線である。図から明らかに、 $D_w=0.8$ の場合が式(34)と最も良好に一致することがわかる。

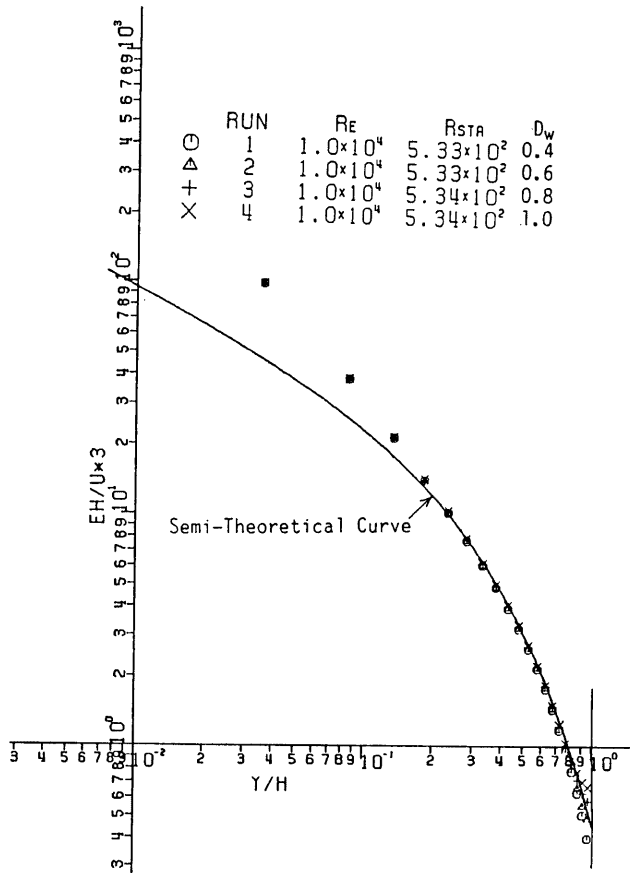
Fig. 8 は、乱れの散逸率 $\varepsilon h/U_*^3$ の分布である。図中の実線は式(35)の半理論曲線である。自由水面近くでの計算値と式(35)との一致は、やはり $D_w=0.8$ の場合が最もよい。

以上の、自由水面による乱れの減衰効果を詳細に検討した結果、減衰係数 D_w は $D_w=0.8$ が最も適当であると結論された。 $D_w=0.8$ は、 $v_w' \rightarrow 0$ とした限界値 $D_w=0.67$ より大きく、水理学的に考えても妥当な値といえる。以下では $D_w=0.8$ とおき、開水路乱流を数値計算した。

4.4 粘性底層内のモデル化

(1) Jones・Launder の付加項

粘性底層内 ($y^+ \leq 30$) を含む流れ全体を数値予測することは基礎水理学・流体力学では特に興味がある。これは、 $y^+ \leq 30$ ではバースティング現象が存在し^{29,30)}、乱れの構造が非平衡となる領域であり、乱流特性値が急激に変化するからである¹¹⁾。この場合、Jones・Launder の付加項、式(11)及び(14)を考慮して計算を行えばよい。計算結果は後の6.で示されるが、モデル定数 C_3, C_4 よりもこの場合でさえ係数 C_μ の値が最


 Fig. 8 Effect of free-surface damping coefficient D_w on energy dissipation.

も重要であることが判明した。 C_μ は4.2で示したように、式(31)を使い、 $D_1=0.95$ 及び $D_2=250$ で与えられた。広範な実験値との比較検討により、 $C_3=1.8$, $C_4=2.0$ が最も適合した。なお、Jones・Launder の与えた値は $C_3=2.0$, $C_4=2.0$ であった。

(2) 壁関数 (wall function) の拡張

上述したように、粘性底層内では乱れ特性値は急変する、例えば k や ε は最大値をもつから、この特性を数値計算するには内部領域 $\delta^+ \equiv \delta U_* / \nu \leq 100$ を非常に細かく差分化する必要がある。レイノルズ数 $R_* \equiv h U_* / \nu$ が大きくなると $\delta / h \leq 100 / R_*$ は非常に小さくなり、その結果、差分格子点数が急増し、計算量が莫大となって工学的には得策でない。これを解消するために、乱れ特性値が急減少する限界点、具体的にいえば、乱れエネルギー k が最大値を示す $y_b^+ \approx 20$ を第1格子点に選んで、 y_b^+ に壁関数を導入すればよい。本研究では標準型の壁関数 ($y_b^+ \geq 50$ で適用される) を以下のように拡張した。

① 平均流速 U_p^+ は van Driest 関数で与える²¹⁾。

② 乱れ構造は非平衡となり、式(25)は使えない。しかし、Laufer (1954)²⁶⁾ の実験値や後述する Jones・Laufer の付加項を用いて計算された結果では (Fig. 21 を参照)、次式が成立する。

$$G_p = \alpha \cdot \varepsilon_p \dots\dots\dots (40)$$

ここで、 $\alpha \geq 1$ は y_p^+ の関数であり、先述の実験値などから与えられる係数である。式(40)と van Driest 関数を用いて次式が得られる。

$$\frac{k_p}{U_*'^2} = \frac{1 - dU^+/dy^+}{\sqrt{\alpha C_\mu}} \Big|_{y_p^+} \dots\dots\dots (41)$$

$$\varepsilon_p = \frac{C_\mu k^2}{\nu} \cdot \left(\frac{dU^+}{dy^+} \right) \left(1 - \frac{dU^+}{dy^+} \right) \Big|_{y_p^+} \dots\dots\dots (42)$$

$dU^+/dy^+ \ll 1$, $\alpha = 1$ とおき、また van Driest 関数のかわりに対数則分布式(24)を適用すると、式(41)及び(42)は標準型の式(26)及び(27)にそれぞれ帰着される。Fig. 2 から Fig. 8 までのこれまでの計算結果は、 $y_p^+ = 20$ として上述の壁関数を用いて得られたものである。

5. 高レイノルズ数の開水路乱流の数値計算結果

5.1 計算手法

本研究で開発された修正 $k-\varepsilon$ モデルを使って、開水路乱流の数値計算を行った。まず、高レイノルズ数を対象とした計算を行い、この水理条件を Table 1 に示す。計算シリーズを HR と表示し、レイノルズ数 $Re \equiv h U_m / \nu$ (ここで、 U_m は断面平均流速)は2000から 10^6 まで6通り変化させた。なお、フルード数 $Fr \equiv U_m / \sqrt{g h}$ を変化させても無次元乱流値には変化はなく、本研究では $Fr = 0.43$ と一定においた。 $y_p^+ \geq 20$ になるように第1格子点を選び、4. の境界条件のもとで、TEACH コードを使って式(15)が計算された。 x 方向に $\Delta x = h$ のキザミ幅で52点、 y 方向に22点の合計1144個のスタッガード格子点をとった。初期断面 $x = 0$ の値として対数則分布を用いた。収束条件は、式(15)の外力項 S_ϕ の残差が0.1%以内になるようにくり返し計算が行われた。 $x/h \geq 20$ で各種の乱流特性値はほぼ一定の分布に収束し、本研究では $x/h = 42$

Table 1 Hydraulic conditions for numerical calculation.

(a) High Reynolds-number Series

RUN	h (cm)	U_m (cm/s)	Re $\times 10^3$	Fr	R_*	U_* (cm/s)	$\frac{U_* - U_{*LOG}}{U_*}$
HR-1	1.29	15.5	2	0.43	134	1.036	-0.9%
HR-2	2.38	21.0	5	0.43	292	1.223	-2.6%
HR-3	3.78	26.4	10	0.43	534	1.412	-2.9%
HR-4	11.06	45.2	50	0.43	2249	2.033	-2.6%
HR-5	17.56	57.0	100	0.43	4218	2.402	-2.3%
HR-6	81.52	122.7	1000	0.43	34545	4.238	-2.3%

(b) Low Reynolds-number Series

LR-1	0.51	9.7	0.5	0.43	38	0.744	-8.8%
LR-2	0.82	12.3	1	0.43	66	0.812	-11.7%
LR-3	1.29	15.5	2	0.43	122	0.943	-9.9%
LR-4	2.38	21.0	5	0.43	274	1.149	-8.5%
LR-5	3.78	26.4	10	0.43	512	1.353	-6.9%
LR-6	11.06	45.2	50	0.43	2221	2.008	-3.8%
LR-7	17.56	57.0	100	0.43	4169	2.374	0.4%

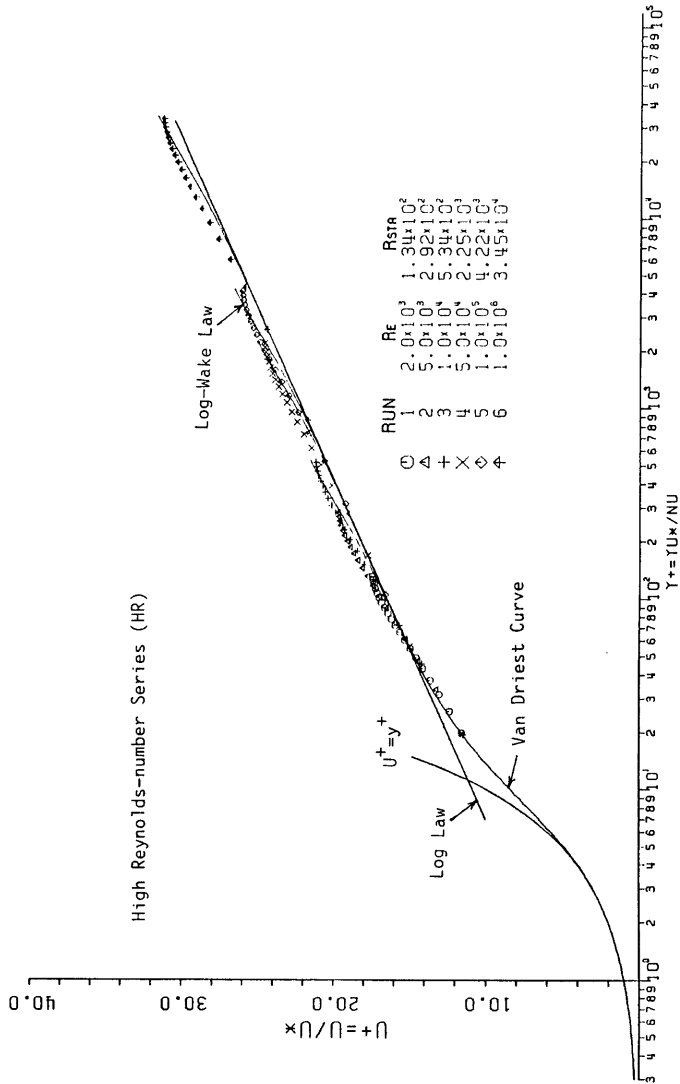


Fig. 9 Numerical results of mean velocity distributions for high Reynolds-number series (HR).

の位置を検査断面として以下の分布を表示した。鉛直方向の流速分布 V の境界条件は壁面及び自由水面でゼロである。この計算結果では、 V/U_m は 10^{-5} 程度、圧力 $P'/(ρU_m^2)$ は 10^{-4} 程度となり、両者の分布ともほぼゼロと考えてよい。

なお、計算の CPU 時間は各 Run ごと約 1 分間以内であった。

5.2 平均流速分布

Fig. 9 は、各 Run の平均流速分布の計算結果である。比較のために、Fig. 10 に、Steffler ら(1983)²⁷⁾ や Nezu・Rodi (1984)²⁸⁾ によるレーザ流速計を用いて得られた最新の実験値を示す。 $y^+ \geq 20$ で buffer 層を含め、実験値と計算値とは良好に一致している。特に、 $y/h \geq 0.15$ の外部領域では開水路乱流の平均流速は、境界層流や管路流と同様に、厳密な意味において対数則からずれ、式(33)の Log-Wake 則を適用すべきであることが最近 Nezu・Rodi (1986)¹⁵⁾ によって指摘されている。本研究の計算値はこの対数則からのずれを

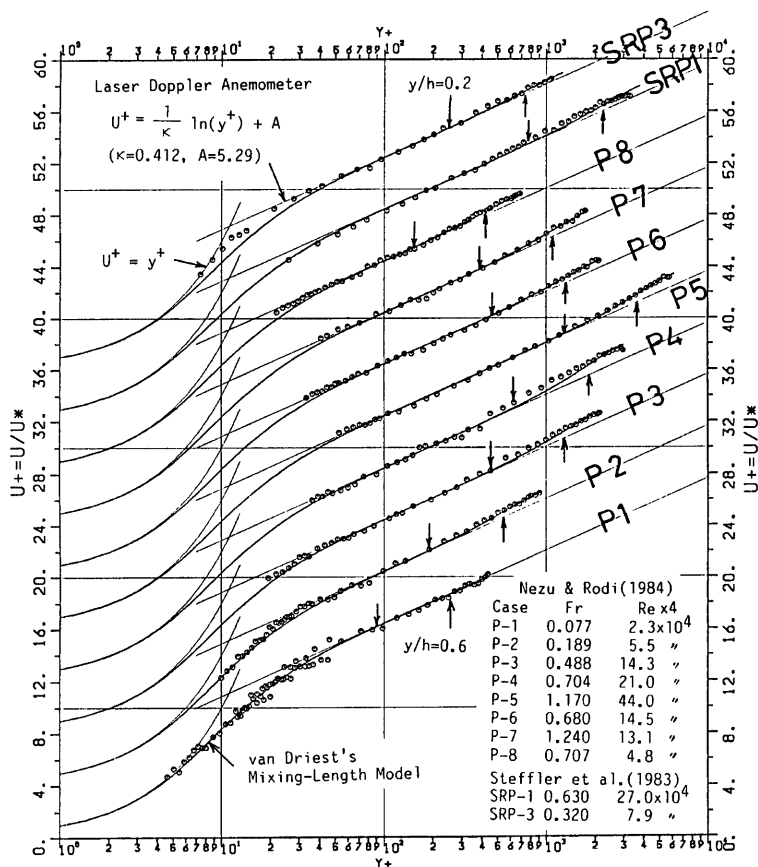


Fig. 10 Experimental data of mean velocity distributions by making use of high accurate Laser Doppler anemometers.

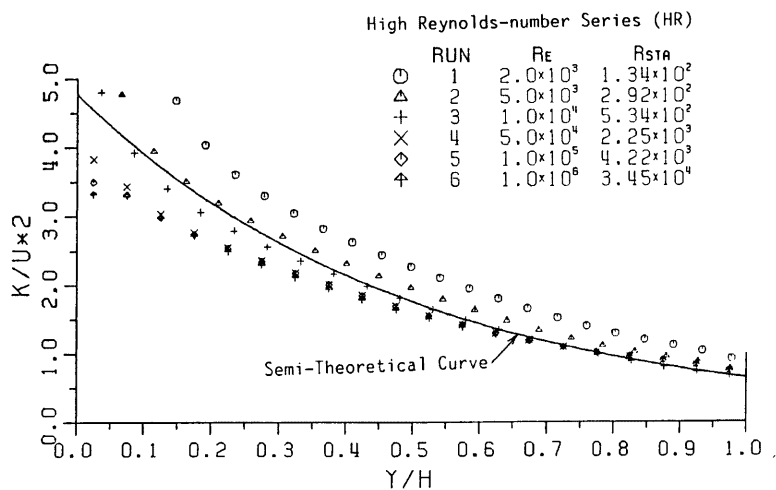
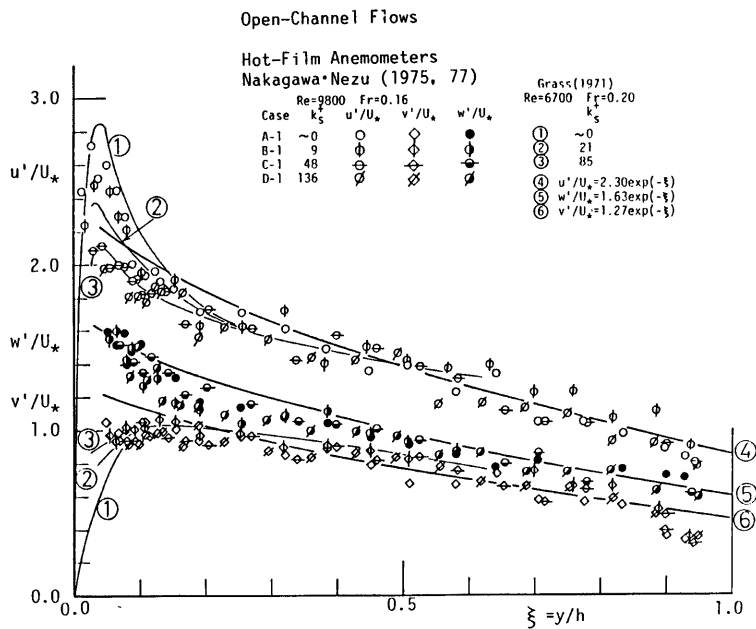


Fig. 11 Numerical results of turbulent energy for high Reynolds-number series.


 Fig. 12 Experimental data of turbulence intensities in open-channel flows by making use of hot-film anemometers^{6,24)}.

よく説明し、Fig. 9 に併示した式(33)の Log-Wake 則分布と比較的よく一致している。

しかし、単に流れの抵抗則のみを知る目的では、従来の式(24)の対数則を断面で積分して得られる次式で十分であろう。すなわち、

$$\frac{U_m}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \ln(U_* h / \nu) + \left(A - \frac{1}{\kappa}\right) \dots\dots\dots (43)$$

式(43)から求められる U_* を U_{*Log} と表示し、修正 $k-\varepsilon$ モデルから計算された U_* とを比較した結果が Table 1 に示された。HR シリーズではどの Run でも 3%以内で両者は一致し、工学的には抵抗則に関して式(43)で十分であることが確認される。

5.3 乱れエネルギー及びレイノルズ応力

Fig. 11 は、乱れエネルギー k の分布である。図中の実線は式(34)の半理論曲線である。Fig. 12 は、柵津ら (1975⁵⁾, 77²⁴⁾ によるホットフィルム流速計によって計測された滑面及び粗面上の開水路流の乱れ強度 u'/U_* , v'/U_* 及び w'/U_* であり、 $k \equiv (u'^2 + v'^2 + w'^2)/2$ とすれば計算値と比較できる。 $Re=2000$ の低レイノルズ数の計算値は式(34)式からかなりずれる。しかし、 $Re \geq 5000$ では式(34)との一致は良好である。Fig. 12 に示した実験値のパラつきを考慮すると、本計算のモデルはかなり正確なものと判断される。

Fig. 13 は、レイノルズ応力 $-\overline{uv}/U_*^2$ の分布を示すものである。 $Re \geq 5000$ では計算値は良好に直線分布しており、本モデルの妥当性が再確認される。 $Re=2000$ では、 $y_p^+ = 20$ すなわち $y_p/h = 0.15$ が第1格子点となるから、壁面近くの流速勾配を正確に計算できず、 $-\overline{uv}/U_*^2$ は直線分布から大きくずれている。

5.4 乱れの散逸率及び発生率

Fig. 14 は、乱れ散逸率 $\varepsilon h/U_*^3$ の計算値と柵津 (1977)¹¹⁾ による実験値とを比較したものである。実験値は u 変動のスペクトル分布の慣性小領域の特性すなわち Kolmogoroff の $-5/3$ 乗則から求められた¹¹⁾。 $Re=2000$ の計算値は、式(35)の半理論曲線からやはりずれるが、 $Re \geq 5000$ の高レイノルズ数では壁面近

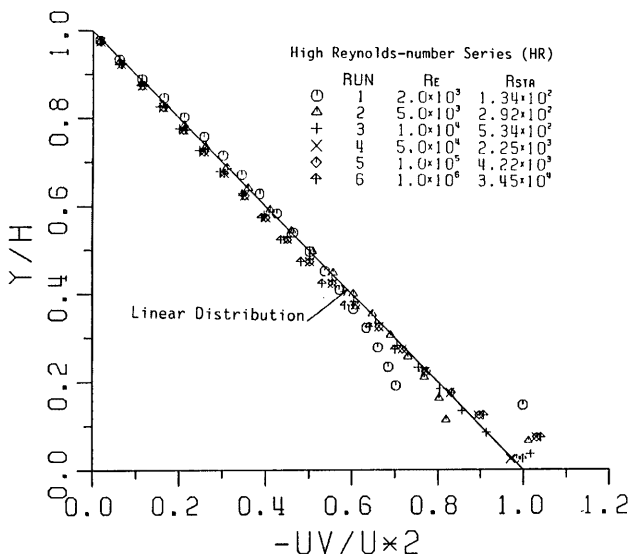


Fig. 13 Distribution of Reynolds shear stress.

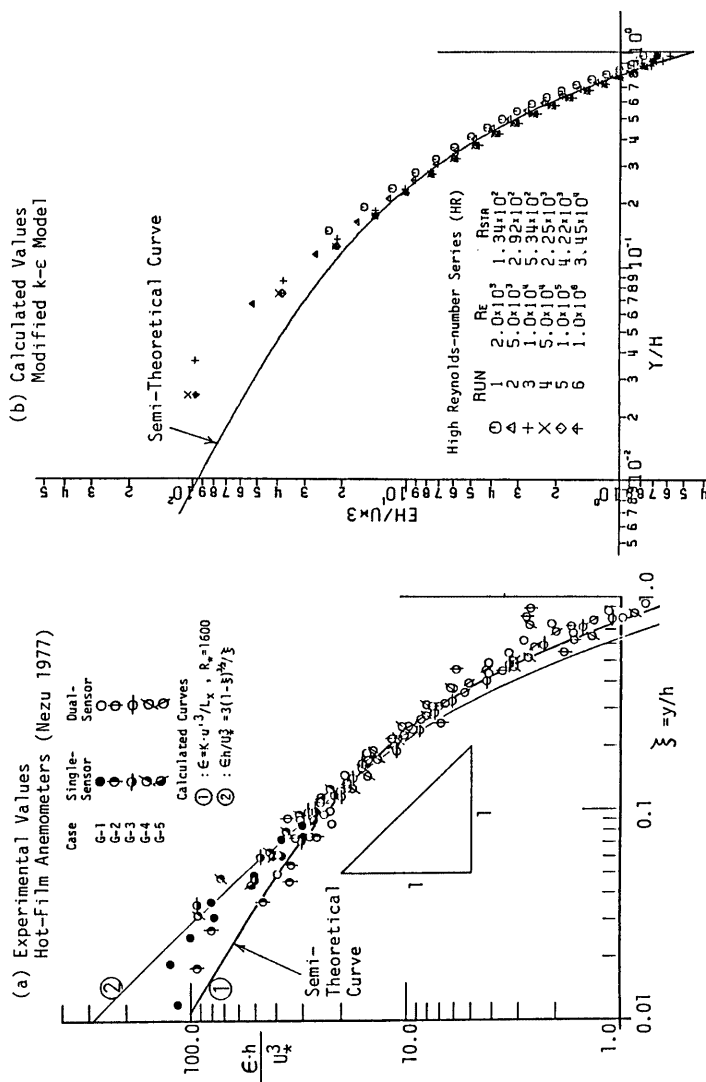


Fig. 14 Comparison of calculated values of energy dissipation with experimental ones by Nezu(1977)¹⁰⁾.

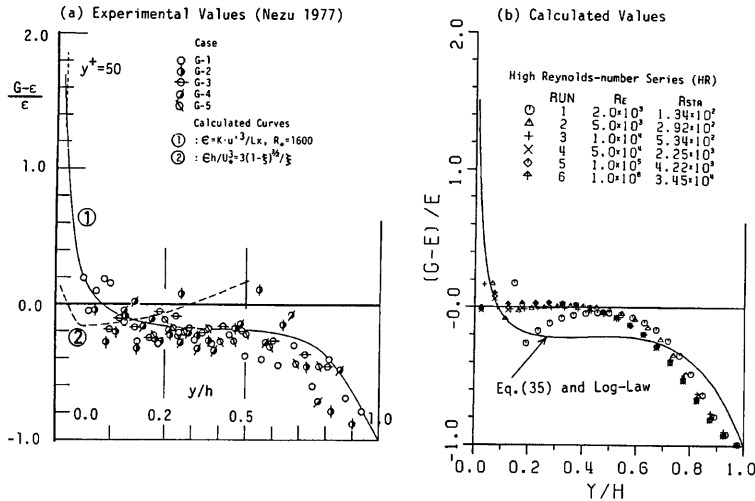


Fig. 15 Comparison of calculated values of turbulent generation-dissipation relations with experimental ones by Nezu (1977)¹¹⁾.

傍をも含めたほぼ全断面で計算値と実験値との一致は非常によく、注目に値する。

次に、乱れの発生率 G を式(21)で計算し、 $(G-\varepsilon)/\varepsilon$ の形で Fig. 15 に示した。 G の実験値は福津 (1977)¹¹⁾ が与えたホットフィルム流速計で計測された平均流速 U から差分して求められたものであり、実験精度はそれほど高くない。上述したように、 $Re=2000$ のみ例外であるが、他の Run では $0.1 \leq y/h \leq 0.6$ で $G \approx \varepsilon$ のエネルギーの平衡状態となり、Nakagawa・Nezu ら (1975)⁶⁾ がすでに提案した乱れエネルギーの平衡領域の区分関係が妥当であることが数値計算上から裏づけられた意義は大きい。

6. 低レイノルズ数の開水路乱流の数値計算結果

6.1 計算手法

計算手法は、基本的には先の5.1と同様であるが、 $y^+ \leq 100$ を細分するため、 y 方向のキザミ幅 Δy を等比級数的に増加させ、合計 $52 \times 42 = 2184$ 個のスタッガード格子を設定した。 Re を500から 10^5 まで7通りに変化させ、その水理条件を LR シリーズとして Table 1 に示した。なお、計算時間は、5.の高レイノルズ数の手法に比べて長く、CPU 時間は各 Run につき約4分間であった。

6.2 平均流速分布

Fig. 16 は、平均流速分布の計算結果である。 $y^+ \leq 10$ の粘性底層では van Driest 曲線や $U^+ = y^+$ 曲線に非常によく一致する。低レイノルズ数の開水路実験は、実験制御や計測が非常に困難であり、現在でも精度よいデータはない。ただ、Eckelmann (1974)³¹⁾ が油流を用いて動粘性係数 ν を上げ、ホットフィルム流速計で計測した結果 ($Re=2800$ と 4100) があるのみである。彼は、 $y^+ \geq 30$ の実測値は $\kappa=0.377$, $A=5.9$ の式(24)の対数則によく一致すると提案した。この実験での対数則を Fig. 16 に併示した。 $Re < 10^4$ で計算値と一致するようである。ここで問題となる点は、5.の高レイノルズ数の計算手法(壁関数手法)で計算された Fig. 9 と、低レイノルズ数の計算手法 (Jones・Launder の付加項の手法) から得られた Fig. 16 が同一の Re 数で必ずしも数値的に完全には一致しないことである。これは、両者で Δy のキザミ幅が大きく異

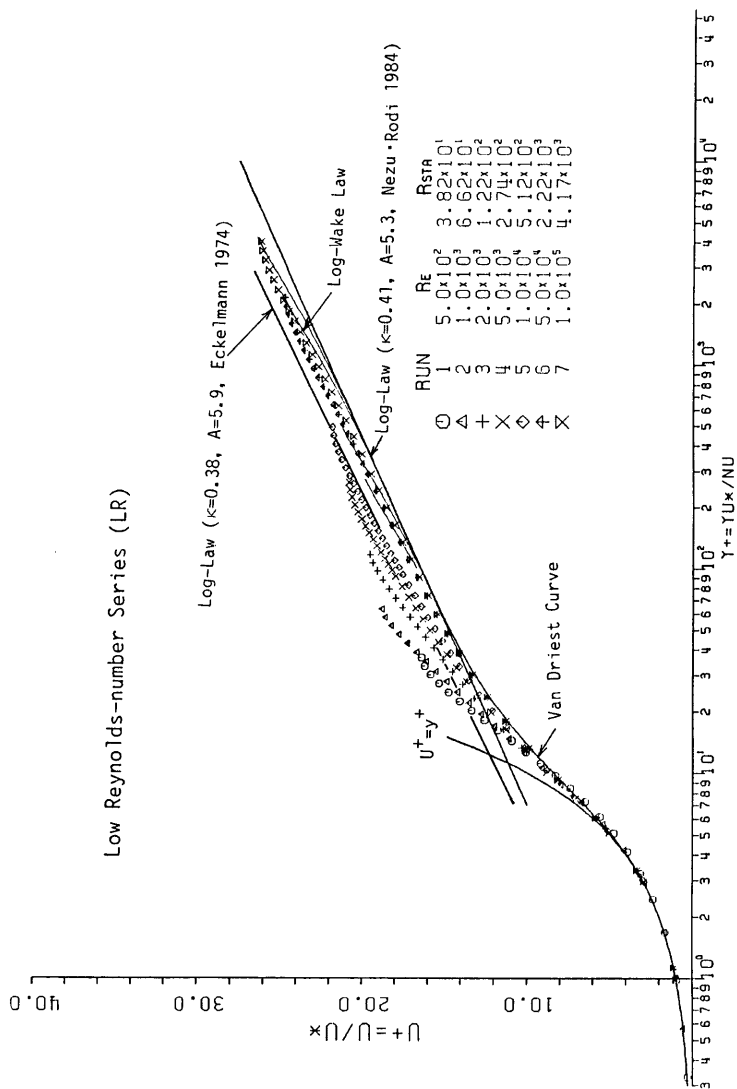


Fig. 16 Numerical results of mean velocity distributions for low Reynolds-number series (LR).

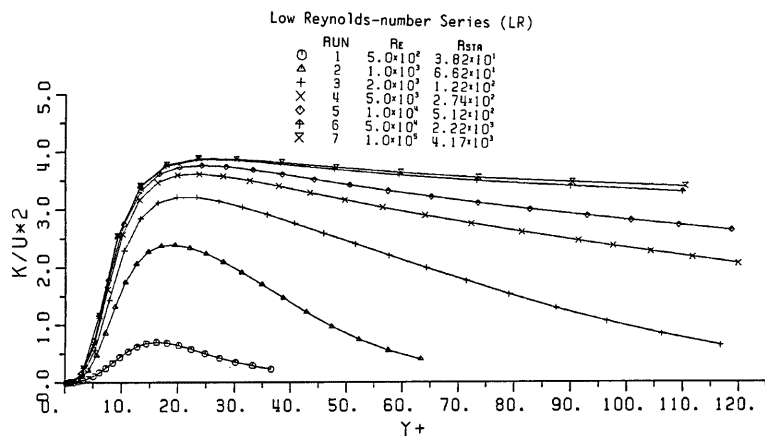


Fig. 17 Calculated distribution of turbulent energy in the wall (inner) region.

なるためと考えられ、乱流モデル自体に致命的な欠陥があるとは考えられない。今後、低レイノルズ数の実験データの入手が待たれるが、本研究で開発された低レイノルズ数手法は $Re < 5000$ では少なくとも妥当であろう。

6.3 乱れエネルギー及びレイノルズ応力

Fig. 17 は、乱れエネルギー k/U_*^2 を $y^+ \equiv yU_*/\nu$ に対して図示した内部変数表示である。最も注目すべき点は、 $y^+ \approx 20$ で k は最大値を示し、レイノルズ数 Re が大きいほど内部領域でほぼ一定値になること

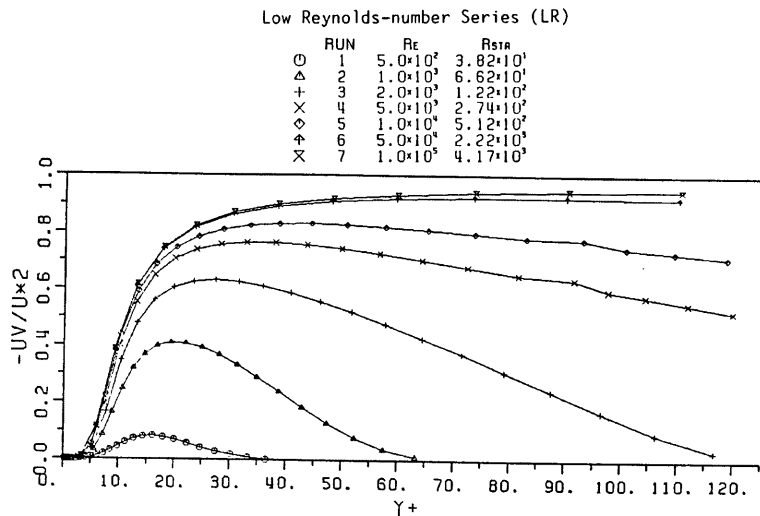


Fig. 18 Calculated distribution of Reynolds shear stress in the wall region.

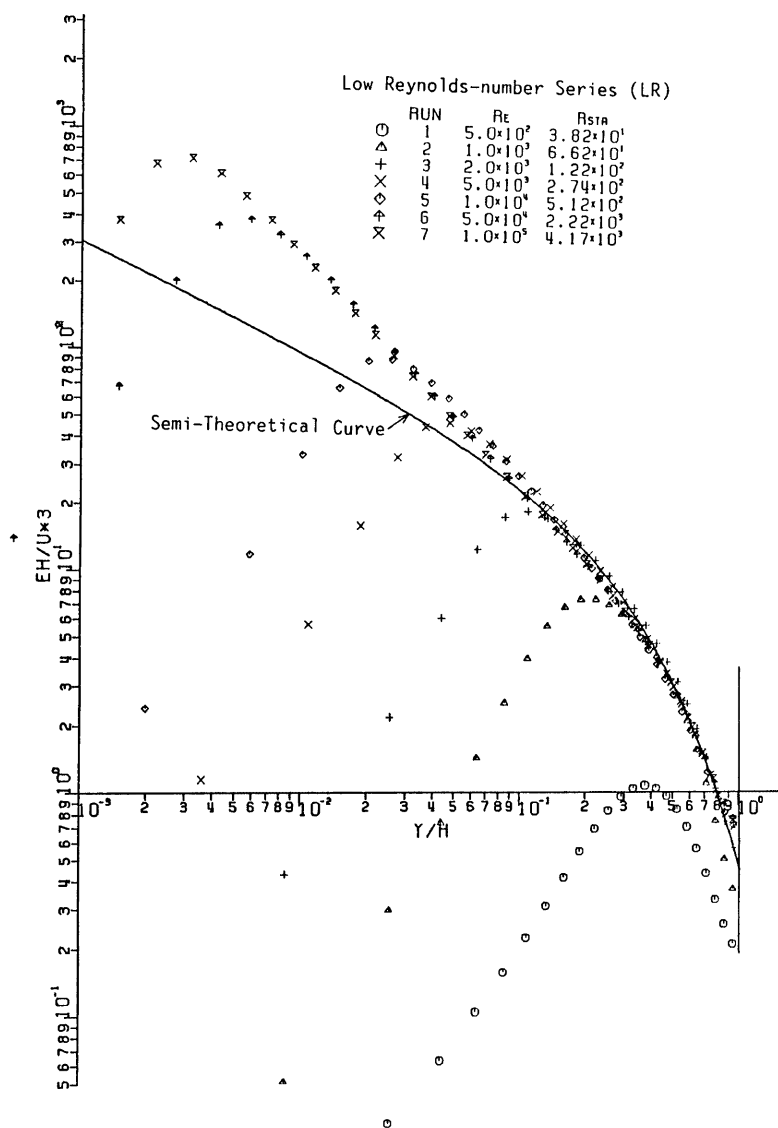


Fig. 19 Calculated distribution of energy dissipation (Outer-variable description).

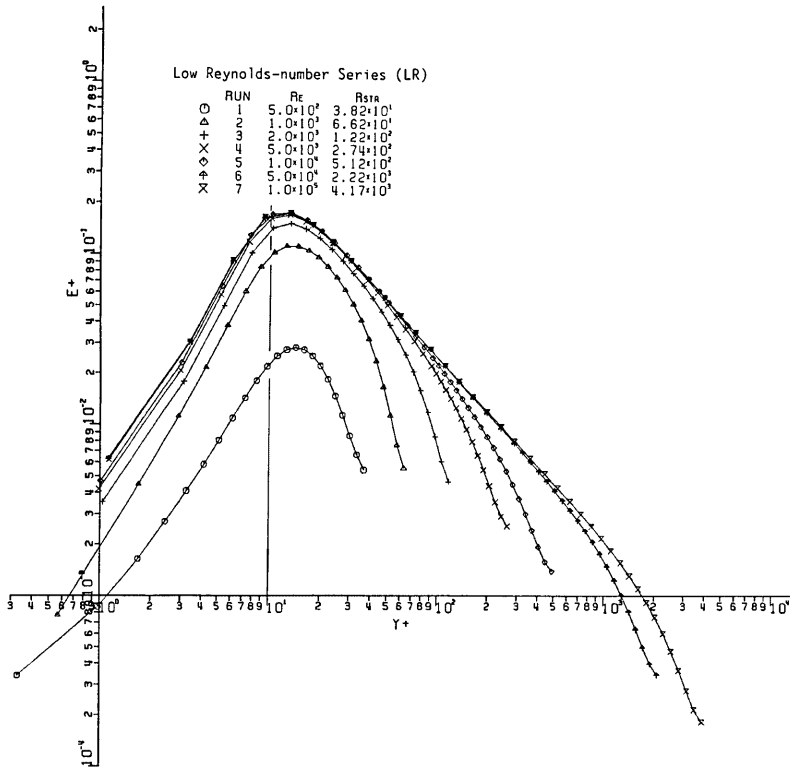


Fig. 20 Calculated distribution of energy dissipation (Inner-variable description).

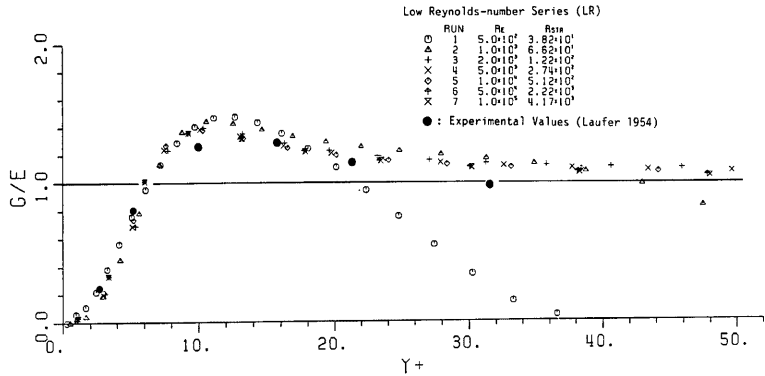


Fig. 21 Relation between turbulent generation and dissipation in the wall region.

である。この最大値は、 $k/U_*^2 \approx 4$ であり、Laufer (1954)²⁶⁾ の実験値と同程度となるが、 $y^+ \leq 30$ の壁面にごく近くでの正確な実験データは現在でもほとんどなく、数値的に直接比較することは今後の課題であろう。第2に注目すべき点は、 Re が小さくなると、乱れエネルギーは摩擦速度すなわち壁面せん断応力に比べて小さくなり、 $Re=500$ では k/U_*^2 の最大値は0.7となって、流れは層流的になることである。平均流速分布も Fig. 16 で示したように、van Driest 曲線からずれて、むしろ $U^+=y^+$ の層流分布に近づくようである。また、Table 1 に示すように、 U_* は U_{*Log} から次第にずれてくる。開水路乱流では $Re \approx 500$ が限界レイノルズ数であると経験的にいわれているが、本計算結果はこれを裏づける重要な内容であると考えられる。

Fig. 18 は、レイノルズ応力 $-\overline{uv}/U_*^2$ の分布である。 Re が大きくなると、 $-\overline{uv} \approx U_*^2$ となる一定せん断応力層が形成されることが従来より指摘されているが、本モデルはこの特性を非常に良好に示している。やはり、 $Re=500$ になると、 $-\overline{uv}/U_*^2$ の最大値は0.083となり、粘性応力の1割弱となるから、ほぼ層流的挙動といえる。

6.4 乱れの散逸率及び発生率

Fig. 19 は、散逸率を外部変数表示すなわち $\varepsilon h/U_*^3$ を y/h に対して図示したものである。図中の実線は式(35)の半理論曲線である。Fig. 14 と同様に、この場合でも Re が大きくなると、式(35)との一致は良好であり、本モデルには矛盾する点はない。 Re が減少するにつれて $\varepsilon h/U_*^3$ の最大値は減少する特性がよくわかり、外部変数による普遍関数表示が Re が大きいとき外部領域で妥当となることが理解される。

一方、Fig. 20 は、散逸率を内部変数表示、すなわち $\varepsilon^+ \equiv \varepsilon \nu/U_*^4$ を y^+ に対して図示したものである。 ε^+ は $y^+=10 \sim 20$ で最大値を示し、 Re が大きくなると、 ε^+ は y^+ に対して普遍特性を示す。この結果は、Laufer (1954)²⁶⁾ の実験値と数値的にもよく一致するが、精度の高い実験値は現在まだ入手できず、今後両者を比較することが重要であると考ええる。

最後に、Fig. 21 は、乱れの発生率 G と散逸率 ε との比 $\alpha \equiv G/\varepsilon$ を y^+ に対して図示したものである。Laufer の実験値も併示した²⁶⁾。実験値の精度には検討を要するが、この実験値と計算値とは良好に一致し、注目に値する。

$y^+ \leq 6$ では $\varepsilon > G$ となり、粘性底層はエネルギー散逸領域になる。 $y^+ > 6$ で $G > \varepsilon$ となって、乱れが発生する機構がよくわかる。また、 $y^+ \geq 50$ では $G \approx \varepsilon$ となり、乱れは平衡状態に達することがわかり、式(25)で示された標準型の $k-\varepsilon$ モデルが適用できることが本モデルから立証された。さらに、興味ある点は、 $Re=500$ でも G/ε はほぼ同一の曲線上に乗り、乱流が層流化してもその構造自体は相似に変化するであろうことが予測され、実験値との比較検討が今後に残された研究テーマである。

7. 結 論

本研究は、現在の乱流の数値計算手法に関して2大別される $k-\varepsilon$ 乱流モデルと Large Eddy Simulation (LES) のうちで、前者の手法を詳述し、これを自由水面を有する開水路乱流の数値計算に適用できるように修正したものである。標準型 $k-\varepsilon$ モデルは1970年代に開発され、現在すでに確立されている。流体機械工学等の分野でかなり複雑な流れでさえもこのモデルからかなり合理的に予測可能となり、また LES 法より計算機費用等がはるかに安く、実際の流れ構造物の設計に活かせる工学的計算手法であることが定着した¹⁷⁾。しかし、自由水面を有する現象を取り扱う水理学への適用例はごく少なく、Rodi らのグループのものがある程度である⁴⁾。

本研究は、開水路の乱流構造を数値計算できるように標準型 $k-\varepsilon$ モデルを修正・拡張したものであり、以下の点が主に開発された内容である。

- (1) 自由水面による乱れの減衰効果をモデル化したこと。
- (2) 高レイノルズ数の場合には第1格子点 y_b^+ を20にとり、計算時間が短くなる壁関数を考案し、工学的手法にしたこと。

- (3) 低レイノルズ数の場合には $Pr^+ \leq 100$ の内部領域を細分化し, Jones・Launder の付加項を導入して $Pr^+ = 0$ から計算可能としたこと。この計算時間は(2)の手法よりかかるが, 乱流特性値が急変する内部領域の乱流構造を的確に予測でき, 基礎水理学や流体力学の発展には欠かせない手法にしたこと。

以上の乱流モデルを使って計算された結果は, 著者らが1975年以来継続して行ってきた開水路実験のデータ(研究の初期ではホットフィルム流速計を, 最近では高精度のレーザ流速計を用いて計測され, その都度, 発表して来た実験値)と比較・検討された。その結果, 両者の一致は非常に良好であり, 本研究で開水路乱流用に開発された修正 $k-\varepsilon$ モデルはかなり合理的な計算手法であるものと結論される。

本乱流モデルは, 逆流域を含む剝離流にも適用可能であり, 今後, 段落ち流れや河床波上の乱流構造さらには粗面・移動床への流れへとこのモデルを適用して行きたい。

最後に, 本研究で使われたコンピュータ・コードは前述したように Gosman ら (1985)¹⁷⁾ が開発した TEACH コードであり, これに関して有益な助言を寄せられた名古屋大学プラズマ研究所の武本行正先生に謝意を表します。なお, 数値計算は, 京都大学大型計算機センターの FACOM M-382 コンピュータを利用して行われたものである。

参 考 文 献

- 1) Deardorff, J. W.: A Numerical Study of Three-dimensional Turbulent Channel Flow at Large Reynolds Numbers, J. Fluid Mech., vol. 41, 1970, pp. 453-480.
- 2) Moin, P. and Kim, J.: Numerical Investigation of Turbulent Channel Flow, J. Fluid Mech., vol. 118, 1982, pp. 341-377.
- 3) 小林敏雄・狩野正徳: Large Eddy Simulation と二次元クエット乱流の数値解析, 生産研究, 特集 乱流の数値シミュレーション, 第38巻, 東大生産技術研究所, 1986, pp. 8-14.
- 4) Rodi, W.: Turbulence Models and Their Application in Hydraulics, Int. Assoc. Hydraulic Research, Delft, 1980.
- 5) Naot, D. and Rodi, W.: Calculation of Secondary Currents in Channel Flow, J. Hydraulics Div., ASCE, vol. 108, HY-8, 1982, pp. 948-968.
- 6) Nakagawa, H., Nezu, I. and Ueda, H.: Turbulence of Open Channel Flow over Smooth and Rough Beds, Proc. of Japan Soc. Civil Engrs., No. 241, 1975, pp. 155-168.
- 7) 禰津家久・中川博次: 開水路流れの三次元乱流構造(縦渦)とそれに及ぼす自由水面の影響に関する研究, 京大防災研究所年報第28号 B-2, 1985, pp. 499-522.
- 8) 禰津家久・中川博次: 一樣開水路および閉管路の三次元乱流構造に関する研究, 土木学会論文集, 第369号/II-5, 1986, pp. 89-98.
- 9) Celik, I. and Rodi, W.: Simulation of Free-Surface Effects in Turbulent Channel Flows, Physico-Chemical Hydrodynamics, vol. 5, 1984, pp. 217-227.
- 10) Jones, W. P. and Launder B. E.: The Calculation of Low-Reynolds-Number Phenomena with a Two-Equation Model of Turbulence, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 16, 1973, pp. 1119-1130.
- 11) 禰津家久: 開水路流の乱流構造に関する基礎的研究 京都大学学位論文, 1977.
- 12) Townsend, A. A.: The Structure of Turbulent Shear Flow (2nd Ed.), Cambridge Unit. Press, 1976.
- 13) Rotta, J. C.: Turbulente Strömungen, Teubner, 1972 (大路通雄(訳): 乱流, 岩波書店, 1975).
- 14) Hanjalic, K. and Launder, B. E.: Contribution Towards a Reynolds-Stress Closure for Low-Reynolds-Number Turbulence, J. Fluid Mech., vol. 74, 1976, pp. 593-610.
- 15) Nezu, I. and Rodi, W.: Open-Channel Flow Measurements with a Laser Doppler Anemometer,

- J. Hydraulic Eng., ASCE, Paper No. 20573, vol. 112, 1986, pp. 335-355.
- 16) Patankar, S. V.: Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Pub., 1980 (水谷・香月 (訳): コンピュータによる熱移動と流れの数値解析, 森北出版, 1985).
- 17) Gosman, A. D., Launder, B. E. and Reece, G. J.: Computer-Aided Engineering; Heat Transfer and Fluid Flow, John Wiley & Sons, 1985.
- 18) 武本行正・小松輝久: TEACHTB (2 方程式 $k-\epsilon$ モデルを用いた 2 次元等温・非等温場での乱流解析用コード), 京都大学大型計算機センター, 広報, vol. 17, 1984, pp. 29-47.
- 19) Gibson, M. M. and Launder, B. E.: Ground Effects on Pressure Fluctuations in the Atmospheric Boundary Layer, J. Fluid Mech., vol. 86, 1978, pp. 491-511.
- 20) Nakayama, A., Chow, W. L. and Sharma, D.: Calculation of Fully Developed Turbulent Flows in Ducts of Arbitrary Cross-Section, J. Fluid Mech., vol. 128, 1983, pp. 199-217.
- 21) van Driest, E. R.: On Turbulent Flow Near a Wall, J. Aeron. Sci., vol. 23, 1956, pp. 1007-1011.
- 22) Yoshizawa, A.: Review of Turbulence Modelling and Refinement of Models, 乱流の数値シミュレーション, 1-st Symp. on Numerical Simulation for Turbulence, 東大生産技術研究所, 1986, pp. 1-21.
- 23) 瀬津家久・中川博次・天野邦彦: 開水路段落ちにおける剥離流の乱流構造に関する研究, 第30回水理講演会論文集, 1986, pp. 601-606.
- 24) 瀬津家久: 開水路乱流の乱れ強度に関する研究, 土木学会論文集, 第261号, 1977, pp. 67-76.
- 25) Quarmby, A. and Quirk, R.: Measurements of the Radial and Tangential Eddy Diffusivities of Heat and Mass in Turbulent Flow in a Plain Tube, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 15, 1972, pp. 2309-2327.
- 26) Laufer, J.: The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow, NACA, TR-1174, 1954.
- 28) Steffler, P. M., Rajaratnam, N. and Peterson, A. W.: LDA Measurements of Mean Velocity and Turbulence Distribution in a Smooth Rectangular Open Channel, Water Res. Eng., Dept. of Civil Eng., Univ. of Alberta, 1983.
- 28) Nezu, I. and Rodi, W.: Water Flow Measurements using a Two-Color Laser Doppler Anemometer, 2nd Osaka Symp. on Flow Measuring-Techniques, Power Pub., 1984, pp. 59-87.
- 29) Nakagawa, H. and Nezu, I.: Prediction of the Contributions to the Reynolds Stress from The Bursting Events in Open-Channel Flows, J. Fluid Mech., vol. 80, 1977, pp. 99-128.
- 30) Nakagawa, H. and Nezu, I.: Structure of Space-Time Correlations of Bursting Phenomena in an Open-Channel Flow, J. Fluid Mech., vol. 104, 1981, pp. 1-43.
- 31) Eckelmann, H.: The structure of the Viscous Sublayer and the Adjacent Wall Region in a Turbulent Channel Flow, J. Fluid Mech., vol. 65, 1974, pp. 439-459.