

境界要素法を適用した諏訪湖の湖流に関する数値解析

岩佐 義朗・多田 彰秀・泊 宏

NUMERICAL SIMULATION OF FLOWS IN LAKE SUWA BY MEANS OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

By *Yoshiaki IWASA, Akihide TADA and Hiroshi TOMARI*

Synopsis

This study deals with the flow currents in Lake Suwa by means of the numerical simulation technique newly developed.

Basic equations of Ekman type model are adopted and transformed into the one partial differential equation by introducing the stream function. Then the equation concerning the stream function is solved by the boundary element method.

The wind velocity is assumed SW 3.0 m/sec over Lake Suwa, in the simulation study. The results obtained will be a good realization of actual behaviors in terms of qualitative and quantitative aspects.

1. 緒 言

湖沼の水質は、流域での生活様式の多様化や産業構造の変化に伴い、近年大きな社会問題となっている。すなわち、水質改善のための諸対策が試みられているものの、一旦汚染が生じれば、その閉鎖性のために湖水の交換に長い年月を要し速効的な効果があがらないのが実状である。このような水質問題に対処するためには、生物学および化学的なアプローチとともに、物理学的なアプローチも重要なことは言うまでもない。そのため、従来より汚濁物質の拡散に関与する湖流特性の解明が、理論的解析や現地観測などの方法によってなされてきた。また、将来の水質予測を行う上でも水域の流れを知ることは必須条件である。このような中で、最近の急速な電子計算機の発達に伴って、数値シミュレーションによる湖流解析への期待は一層高まっており、それが一般的になりつつあるといっても過言ではない。

湖沼の流れを数値シミュレーションするための数学モデルおよびその数値解析法については、現在いくつか提案されている。しかし、そのいずれもが長所、短所を有しており、万能といえるものはどれ一つない。したがって、数値解析を行う場合には、対象とする湖沼の水利特性ならびに解析目的に応じて、適切な数学モデルの選択とそれにふさわしい数値解析法の組合せを考えるべきである。そのためには、各数学モデルと種々の数値解析法の組合せによる多くの研究事例が必要であり、本研究の意図もこのような点から出発している。

本研究は、以上のようなことを鑑み、浅い湖における吹送流の数値シミュレーションを対象として、構造力学の分野において普及している境界要素法を用いたエクマンタイプ・モデルによる数値計算手法の開発を行っている。まず、基礎式としてエクマンタイプ・モデルを誘導し積分方程式へ定式化するとともに、境界要素法を用いて離散化を行う。ついで、計算手法について詳細に説明を加え、諏訪湖の定常および非定常な湖流の数値シミュレーションを行っている。最後に、得られた計算結果と現地観測結果および他の数値計算手法による結果との比較、検討を通してその有効性を確認するとともに、諏訪湖の湖流特性についても考察を加えている。

2. エクマンタイプ・モデルの構成と計算手法

2.1 基礎方程式とその無次元化

諏訪湖に代表されるような浅い湖沼での流れを対象とするので、流れの基礎方程式に対してつぎの仮定を設ける。

- (i) 鉛直方向の加速度は重力のそれと比較して十分に小さい。すなわち圧力は静水圧分布とする。
- (ii) 慣性項は他の項と比較し小さいものとして無視できる。
- (iii) 水面上昇量の変化は、時間的にも空間的にも水深と比較すれば小さい。
- (iv) 水は非圧縮性であり、密度成層は存在しない。すなわち密度は一定とする。
- (v) 湖は非常に浅いので、支配的な摩擦は底面摩擦であるとして水平渦動粘性項を無視する。
- (vi) コリオリ係数および鉛直渦動粘性係数は、湖全体にわたって一定とする。

これらの仮定のもとで、流れの基礎方程式はつぎのように誘導される¹⁾。

運動方程式

$$x\text{---方向} \quad \frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + A_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \dots\dots\dots(1)$$

$$y\text{---方向} \quad \frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + A_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \dots\dots\dots(2)$$

$$z\text{---方向} \quad g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \dots\dots\dots(3)$$

$$\text{連続式} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(4)$$

ここに、 t ：時間、 x, y, z ；**Fig. 1** を参照して定められた座標であり、 x 軸は東向き、 y 軸は北向き、 z 軸は鉛直上向きを正とする。なお、 $z=0$ を基準面としている。 u, v, w ； x, y, z 方向の流速成分、 p ：圧力、 ρ ：水の密度、 A_v ：鉛直渦動粘性係数、 g ：重力加速度、 f ；コリオリ係数である。

また、このときの初期条件は、

$$t=0 \text{ で、} \quad u=v=w=0 \dots\dots\dots(5)$$

とする。境界条件については、

$$\text{湖底面 } z=-h \text{ で、} \quad u=v=w=0 \dots\dots\dots(6)$$

$$\text{水面 } z=\zeta \approx 0 \text{ で、} \quad A_v \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_x, \quad A_v \frac{\partial v}{\partial z} = \tau_y \dots\dots\dots(7)$$

である。ここに、 τ_x および τ_y は風による水面せん断応力を水の密度で除した x および y 成分、 ζ ；水位上昇量、 h ；水深である。さらに、流れが定常であるという仮定を加えるならば、(1)、(2) および (3) 式はつぎのように変形され、定常な湖流解析の基礎方程式が導かれる²⁾。

運動方程式

$$x\text{---方向} \quad -fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + A_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \dots\dots\dots(1)'$$

$$y\text{---方向} \quad fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + A_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \dots\dots\dots(2)'$$

$$z\text{---方向} \quad g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \dots\dots\dots(3)'$$

つぎに、以下に示す無次元量を導入して上述した基礎方程式の無次元化を行う。

$$t_* = ft \dots\dots\dots(8)$$

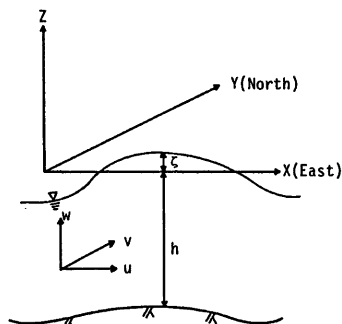


Fig. 1 Definition sketch.

$$\left. \begin{aligned} x_* &= \frac{x}{L}, \quad y_* = \frac{y}{L}, \quad z_* = \frac{z}{D}, \quad h_* = \frac{h}{D} \\ u_* &= \left(\frac{fL}{gD} \right) u, \quad v_* = \left(\frac{fL}{gD} \right) v, \quad w_* = \left(\frac{fL^2}{gD^2} \right) w, \quad p_* = \left(\frac{\rho}{\rho g D} \right) + \frac{z}{D} \\ \tau_{x*} &= \left(\frac{fL}{A_v g} \right) \tau_x, \quad \tau_{y*} = \left(\frac{fL}{A_v g} \right) \tau_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ただし, L ; 代表水平長, D ; 代表水深である。(8)および(9)式を(1)～(7)式に導入して無次元化を行い, 整理すれば,

運動方程式

$$x_*\text{-方向} \quad \frac{\partial u_*}{\partial t_*} - v_* = -\frac{\partial p_*}{\partial x_*} + \frac{1}{2m^2} \frac{\partial^2 u_*}{\partial z_*^2} \dots\dots\dots (10)$$

$$y_*\text{-方向} \quad \frac{\partial u_*}{\partial t_*} + u_* = -\frac{\partial p_*}{\partial y_*} + \frac{1}{2m^2} \frac{\partial^2 v_*}{\partial z_*^2} \dots\dots\dots (11)$$

$$z_*\text{-方向} \quad \frac{\partial p_*}{\partial z_*} = 0 \dots\dots\dots (12)$$

$$\text{連続式} \quad \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial v_*}{\partial y_*} + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

境界条件

$$\text{湖底面} \quad z_* = -h_*, \quad u_* = v_* = w_* = 0 \dots\dots\dots (14)$$

$$\text{水表面} \quad z_* = \frac{\zeta}{D} = 0, \quad \frac{\partial u_*}{\partial z_*} = \tau_{x*}, \quad \frac{\partial u_*}{\partial z_*} = \tau_{y*} \dots\dots\dots (15)$$

$$\text{初期条件} \quad t_* = 0, \quad u_* = v_* = 0 \dots\dots\dots (16)$$

となる。ここで, $\frac{1}{2m^2} = \frac{fD^2}{A_v} = \frac{1}{T_a} = E_k, T_a$; Taylor number, E_k ; Ekman number である。

同様にして定常な湖流解析の基礎方程式(1)～(3)および(4)式の無次元化を行えば,

運動方程式

$$x_*\text{-方向} \quad -v_* = -\frac{\partial p_*}{\partial x_*} + \frac{1}{2m^2} \frac{\partial^2 u_*}{\partial z_*^2} \dots\dots\dots (10)'$$

$$y_*\text{-方向} \quad u_* = -\frac{\partial p_*}{\partial y_*} + \frac{1}{2m^2} \frac{\partial^2 v_*}{\partial z_*^2} \dots\dots\dots (11)'$$

$$z_*\text{-方向} \quad \frac{\partial p_*}{\partial z_*} = 0 \dots\dots\dots (14)'$$

$$\text{連続式} \quad \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial v_*}{\partial y_*} + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = 0 \dots\dots\dots (13)'$$

が得られる。なお, 以下では簡略化のために無次元量を示す * をすべて省略して表記することにする。

さらに,

$$\tilde{u} = \int_0^\infty u e^{-st} dt, \text{ etc.} \dots\dots\dots (17)$$

で示される Laplace 変換を(10)～(15)式に適用すれば, 次式の関係が誘導される。

運動方程式

$$x\text{-方向} \quad s\tilde{u} - \tilde{v} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{2m^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} \dots\dots\dots (18)$$

$$y\text{-方向} \quad \tilde{u} + s\tilde{v} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{2m^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} \dots\dots\dots (19)$$

$$z\text{-方向} \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (20)$$

$$\text{連続式} \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (21)$$

$$\text{境界条件} \quad z = -h, \quad \tilde{u} = \tilde{v} = \tilde{w} = 0 \quad \dots\dots\dots(22)$$

$$z \neq 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = \tilde{\tau}_x, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = \tilde{\tau}_y \quad \dots\dots\dots(23)$$

(22), (23)式の境界条件のもとで (18) および (19) 式を解けば, $\tilde{u}$ および $\tilde{v}$ に関する鉛直分布が圧力こう配 $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}$ の関数として得られる。すなわち,

$$\tilde{u} = -\frac{1}{s^2+1} \left(s \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} \right) + \cos Nz \cdot (C_2 e^{Ms} - C_4 e^{-Ms}) - \sin Nz \cdot (C_1 e^{Ms} - C_3 e^{-Ms}) \quad \dots\dots\dots(24)$$

$$\tilde{v} = -\frac{1}{s^2+1} \left(-\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + s \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} \right) + \cos Nz \cdot (C_1 e^{Ms} + C_3 e^{-Ms}) + \sin Nz \cdot (C_2 e^{Ms} + C_4 e^{-Ms}) \quad \dots\dots\dots(25)$$

ただし, 上式中の C_1, C_2, C_3 および C_4 は境界条件から決定される積分定数, $R = \sqrt{1+s^2}$, $\phi = \tan^{-1} \frac{1}{s}$, $M = \sqrt{2} m \sqrt{R} \cos \frac{\phi}{2}$, $N = \sqrt{2} m \sqrt{R} \sin \frac{\phi}{2}$ である。

また, 連続式を鉛直方向に湖底面から任意の水深 z まで積分することにより, z における流速の鉛直成分 w も次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= \int_{-h}^z \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} dz = - \int_{-h}^z \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) dz \\ &= \frac{1}{s^2+1} (s \tilde{p}^2 \tilde{p})(z+h) \\ &\quad - \frac{1}{M^2+N^2} \left(\frac{\partial C_3}{\partial y} - \frac{\partial C_4}{\partial x} \right) [e^{Ms} (M \cos Nz + N \sin Nz) - e^{-Ms} (M \cos Nh - N \sin Nh)] \\ &\quad + e^{-Ms} (-M \cos Nz + N \sin Nz) + e^{Ms} (M \cos Nh + N \sin Nh)] \\ &\quad + \frac{1}{M^2+N^2} \left(\frac{\partial C_3}{\partial x} + \frac{\partial C_4}{\partial y} \right) [e^{Ms} (M \sin Nz - N \cos Nz) \\ &\quad + e^{-Ms} (M \sin Nh + N \cos Nh) + e^{-Ms} (M \sin Nz + N \cos Nz) \\ &\quad + e^{Ms} (M \sin Nh - N \cos Nh)] \\ &\quad - \frac{1}{(M^2+N^2)^2} \left(\frac{\partial \tilde{\tau}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\tau}_x}{\partial y} \right) [N \{e^{Ms} (M \cos Nz + N \sin Nz) - e^{-Ms} (M \cos Nh - N \sin Nh)\} \\ &\quad - M \{e^{Ms} (M \sin Nz - N \cos Nz) + e^{-Ms} (M \sin Nh + N \cos Nh)\}] \\ &\quad - \frac{1}{(M^2+N^2)^2} \left(\frac{\partial \tilde{\tau}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_y}{\partial y} \right) [M \{e^{Ms} (M \cos Nz + N \sin Nz) - e^{-Ms} (M \cos Nh - N \sin Nh)\} \\ &\quad + N \{e^{Ms} (M \sin Nz - N \cos Nz) + e^{-Ms} (M \sin Nh + N \cos Nh)\}] \quad \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

さらに, (24)および(25)式を湖底面から水表面まで積分し水深で除すことにより断面平均流速成分 $\bar{u}$ および $\bar{v}$ が誘導される。

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \tilde{u} dz = h_1 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + h_4 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + h_2 \tilde{\tau}_y + h_3 \tilde{\tau}_x \quad \dots\dots\dots(27)$$

$$\bar{v} = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \tilde{v} dz = -h_4 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + h_1 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + h_3 \tilde{\tau}_y - h_2 \tilde{\tau}_x \quad \dots\dots\dots(28)$$

なお, 定数 C_1, C_2, C_3, C_4 ならびに h_1, h_2, h_3 および h_4 は以下のとおりである。

$$\alpha = \cos^2 Nh \cdot (e^{-Ms} + e^{Ms})^2 + \sin^2 Nh \cdot (e^{-Ms} - e^{Ms})^2$$

$$\beta = \frac{e^{-Ms}}{M^2+N^2} (N \sin Nh - M \cos Nh), \quad \gamma = \sin Nh \cdot (e^{-Ms} - e^{Ms})$$

$$\delta = \frac{e^{-Ms}}{M^2+N^2} (M \sin Nh + N \cos Nh), \quad \varepsilon = \cos Nh \cdot (e^{-Ms} + e^{Ms})$$

$$\kappa = \frac{e^{Ms}}{M^2+N^2} (N \sin Nh + M \cos Nh), \quad \lambda = \frac{e^{Ms}}{M^2+N^2} (M \sin Nh - N \cos Nh)$$

$$C_1 = C_3 + \frac{1}{M^2+N^2} (M \tilde{\tau}_y - N \tilde{\tau}_x), \quad C_2 = -C_4 + \frac{1}{M^2+N^2} (N \tilde{\tau}_y + M \tilde{\tau}_x)$$

$$C_3 = \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{\gamma \varepsilon - \delta}{s^2+1} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\gamma + \varepsilon s}{s^2+1} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + (\beta \varepsilon - \delta \gamma) \tilde{\tau}_y + (\beta \gamma + \delta \varepsilon) \tilde{\tau}_x \right\}$$

$$\begin{aligned}
 C_4 &= \frac{1}{\alpha} \left\{ -\frac{\gamma + \varepsilon s}{s^2 + 1} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\gamma s - \varepsilon}{s^2 + 1} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + (\gamma \beta + \varepsilon \delta) \tilde{\tau}_y + (\gamma \delta - \varepsilon \beta) \tilde{\tau}_x \right\} \\
 h_1 &= \frac{1}{\alpha h (s^2 + 1)} \{ -s h \alpha + (\gamma + \varepsilon s)(\beta + \kappa) + (\gamma s + \varepsilon)(\delta + \lambda) \} \\
 h_2 &= \frac{1}{\alpha h} \left\{ \frac{\alpha}{M^2 + N^2} \left(\frac{2MN}{M^2 + N^2} + N\beta - M\delta \right) - (\gamma \beta + \varepsilon \delta)(\beta + \kappa) - (\beta \varepsilon - \delta \gamma)(\delta + \lambda) \right\} \\
 h_3 &= \frac{1}{\alpha h} \left\{ \frac{\alpha}{M^2 + N^2} \left(\frac{M^2 - N^2}{M^2 + N^2} + M\beta + N\delta \right) + (\beta \varepsilon - \delta \gamma)(\beta + \kappa) - (\beta \gamma + \delta \varepsilon)(\delta + \lambda) \right\} \\
 h_4 &= \frac{1}{\alpha h (s^2 + 1)} \{ -\alpha h + (\varepsilon - \gamma s)(\beta + \kappa) - (\gamma + \varepsilon s)(\delta + \lambda) \}
 \end{aligned}$$

一方、平均流速に対してつきの(29)および(30)式で定義されるような流れ関数 $\tilde{\psi}$ が導入される。

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} \dots\dots\dots (29)$$

$$\bar{v} = -\frac{1}{h} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \dots\dots\dots (30)$$

(27), (28)式にそれぞれ(29), (30)式を代入して $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$ および $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}$ について解けば、次式を得る。

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = q_1 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} + q_2 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} + q_3 \tilde{\tau}_y - q_4 \tilde{\tau}_x \dots\dots\dots (31)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} = q_2 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} - q_1 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} - q_3 \tilde{\tau}_y - q_4 \tilde{\tau}_x \dots\dots\dots (32)$$

ここに、 $q_1 = \frac{h_1}{h(h_1^2 + h_4^2)}$, $q_2 = \frac{h_4}{h(h_1^2 + h_4^2)}$, $q_3 = \frac{h_1 h_3 + h_2 h_4}{h_1^2 + h_4^2}$, $q_4 = \frac{h_3 h_4 - h_1 h_2}{h_1^2 + h_4^2}$ である。

さらに、(31)および(32)式より $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}$ を消去すれば、最終的なエクマンタイプ・モデルの展開式が導かれる。

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial y^2} = A(x, y; s) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} + B(x, y; s) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} + C(x, y; s) \dots\dots\dots (33)$$

$$A(x, y; s) = -\frac{h}{h_1} (h_1^2 + h_4^2) \left(\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} \right)$$

$$B(x, y; s) = -\frac{h}{h_1} (h_1^2 + h_4^2) \left(\frac{\partial q_1}{\partial y} - \frac{\partial q_2}{\partial x} \right)$$

$$C(x, y; s) = -\frac{h}{h_1} (h_1^2 + h_4^2) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (q_3 \tilde{\tau}_y) - \frac{\partial}{\partial y} (q_3 \tilde{\tau}_x) + \frac{\partial}{\partial y} (q_4 \tilde{\tau}_y) + \frac{\partial}{\partial x} (q_4 \tilde{\tau}_x) \right\}$$

定常な湖流解析の基礎方程式については、Laplace 変換する必要はなく(10)'～(13)'式および境界条件より同様に u , v および w が求められる。すなわち、

$$u = -\frac{\partial \rho}{\partial y} + \cos mz \cdot (C_2' e^{mz} - C_4' e^{-mz}) - \sin mz \cdot (C_1' e^{mz} - C_3' e^{-mz}) \dots\dots\dots (24)'$$

$$v = \frac{\partial \rho}{\partial x} + \cos mz \cdot (C_1' e^{mz} + C_3' e^{-mz}) + \sin mz \cdot (C_2' e^{mz} + C_4' e^{-mz}) \dots\dots\dots (25)'$$

$$\begin{aligned}
 w = & -\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial C_3'}{\partial y} - \frac{\partial C_4'}{\partial x} \right) \{ e^{mz} (\cos mz + \sin mz) - e^{-mz} (\cos mh - \sin mh) \\
 & + e^{-mz} (-\cos mz + \sin mz) + e^{mh} (\cos mh + \sin mh) \} \\
 & + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial C_3'}{\partial x} + \frac{\partial C_4'}{\partial y} \right) \{ e^{mz} (\sin mz - \cos mz) + e^{-mz} (\sin mh + \cos mh) \\
 & + e^{-mz} (\sin mz + \cos mz) + e^{mh} (\sin mh - \cos mh) \} \\
 & - \frac{1}{2m^2} \left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \right) \{ e^{mz} \cos mz - e^{-mz} \cos mh \} \\
 & - \frac{1}{2m^2} \left(\frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial x} \right) \{ e^{mz} \sin mz + e^{-mz} \sin mh \} \dots\dots\dots (26)'
 \end{aligned}$$

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 u dz = h_1' \frac{\partial p}{\partial x} + h_4' \frac{\partial p}{\partial y} + h_2' \tau_y + h_3' \tau_x \dots\dots\dots (27)'$$

$$\bar{v} = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 v dz = -h_4' \frac{\partial p}{\partial x} + h_1' \frac{\partial p}{\partial y} + h_3' \tau_y - h_2' \tau_x \dots\dots\dots (28)'$$

ここに、積分定数 C_1' , C_2' , C_3' , C_4' ならびに定数 h_1' , h_2' , h_3' , h_4' を示せば以下のとおりである。

$$\alpha' = \cos^2 mh \cdot (e^{-mh} + e^{mh})^2 + \sin^2 mh \cdot (e^{-mh} - e^{mh})^2,$$

$$\beta' = \frac{1}{2m} e^{-mh} (\sin mh - \cos mh), \quad \gamma' = \sin mh \cdot (e^{-mh} - e^{mh}),$$

$$\delta' = \frac{1}{2m} e^{-mh} (\sin mh + \cos mh), \quad \varepsilon' = \cos mh \cdot (e^{-mh} + e^{mh}), \quad \kappa' = \frac{1}{2m} e^{mh} (\sin mh + \cos mh),$$

$$\lambda' = \frac{1}{2m} e^{mh} (\sin mh - \cos mh), \quad C_1' = C_3' + \frac{\tau_y}{2m} - \frac{\tau_x}{2m}, \quad C_2' = -C_4' + \frac{\tau_y}{2m} + \frac{\tau_x}{2m},$$

$$C_3' = \frac{1}{\alpha'} \left[-\varepsilon' \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma' \frac{\partial p}{\partial y} + \tau_y (\beta' \varepsilon' - \delta' \gamma') + \tau_x (\beta' \gamma' + \delta' \varepsilon') \right],$$

$$C_4' = \frac{1}{\alpha'} \left[-\gamma' \frac{\partial p}{\partial x} - \varepsilon' \frac{\partial p}{\partial y} + \tau_y (\beta' \gamma' + \delta' \varepsilon') - \tau_x (\beta' \varepsilon' - \delta' \gamma') \right],$$

$$h_1' = \frac{1}{\alpha' h} [\gamma' (\beta' + \kappa') + \varepsilon' (\delta' + \lambda')],$$

$$h_2' = \frac{1}{\alpha' h} \left[-\frac{\alpha' \left(\frac{1}{m} + \beta' - \delta' \right)}{2m} - (\beta' \gamma' + \delta' \varepsilon') (\beta' + \kappa') - (\beta' \varepsilon' - \delta' \gamma') (\delta' + \lambda') \right],$$

$$h_3' = \frac{1}{\alpha' h} \left[\frac{\alpha' (\beta' + \delta')}{2m} + (\beta' \varepsilon' - \delta' \gamma') (\beta' + \kappa') - (\beta' \gamma' + \delta' \varepsilon') (\delta' + \lambda') \right],$$

$$h_4' = \frac{1}{\alpha' h} [-\alpha' h + \varepsilon' (\beta' + \kappa') - \gamma' (\delta' + \lambda')]$$

また、(29)および(30)式と同様な流れ関数 ψ が導入でき、上述した(31)、(32)および(33)式に対応する式が得られる。

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial y} \dots\dots\dots (29)'$$

$$\bar{v} = -\frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x} \dots\dots\dots (30)'$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = q_1' \frac{\partial \psi}{\partial y} + q_2' \frac{\partial \psi}{\partial x} + q_4' \tau_y - q_3' \tau_x \dots\dots\dots (31)'$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = q_2' \frac{\partial \psi}{\partial y} - q_1' \frac{\partial \psi}{\partial x} - q_3' \tau_y - q_4' \tau_x \dots\dots\dots (32)'$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = A'(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial x} + B'(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y} + C'(x, y) \dots\dots\dots (33)'$$

$$A'(x, y) = -\frac{h}{h_1'^2 (h_1'^2 + h_4'^2)} \left(\frac{\partial q_1'}{\partial x} + \frac{\partial q_2'}{\partial y} \right), \quad B'(x, y) = -\frac{h}{h_1'^2 (h_1'^2 + h_4'^2)} \left(\frac{\partial q_1'}{\partial y} - \frac{\partial q_2'}{\partial x} \right)$$

$$C'(x, y) = -\frac{h}{h_1'^2 (h_1'^2 + h_4'^2)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (q_3' \tau_y) - \frac{\partial}{\partial y} (q_3' \tau_x) + \frac{\partial}{\partial y} (q_4' \tau_y) + \frac{\partial}{\partial x} (q_4' \tau_x) \right]$$

$$q_1' = \frac{h_1'}{h(h_1'^2 + h_4'^2)}, \quad q_2' = \frac{h_4'}{h(h_1'^2 + h_4'^2)}, \quad q_3' = \frac{h_1' h_3' + h_2' h_4'}{h_1'^2 + h_4'^2}, \quad q_4' = \frac{h_3' h_4' - h_1' h_2'}{h_1'^2 + h_4'^2}$$

すなわち、(33)式および(33)'式が本研究で用いるエクマンタイプ・モデルの最終的な展開式である。

2.2 境界要素法による離散式の誘導

(33)式は、一度 s の値が与えられれば、(33)'式に帰着する。したがって積分方程式の誘導ならびに境界要素法による離散化に関しては、(33)'式を用いて説明を行うことにする。

(33)'式は、境界要素法によって直接解くことはできないが、(33)'式右辺を既知項として取り扱い反復計

算を行うことにより近似的に解くことは可能である。いま、(33)'式の右辺を b と置くと、(33)'式はつぎのように書き改められる。

$$\nabla^2 \psi = b \quad \dots\dots\dots (34)$$

上式の同次微分方程式、すなわち Laplace 方程式の基本解を ψ^* とすれば、 ψ^* は(35)式で与えられ、(36)式を満足する³⁾。

$$\psi^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$\nabla^2 \psi^* + \delta_i = 0 \quad \dots\dots\dots (36)$$

ここに、 $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, (x, y) : field point, (ξ, η) : source point, δ_i : Dirac のデルタ関数である。

{(34)式 $\times\psi^*$ -(36)式 $\times\psi$ } を求めて計算対象領域 Ω で積分を行うと、

$$\int_{\Omega} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) d\Omega - \int_{\Omega} b \psi^* d\Omega = \int_{\Omega} \psi \delta_i d\Omega \quad \dots\dots\dots (37)$$

が得られる。さらに、Green の定理を用いて変形すると、次式が誘導される。

$$\int_{\Gamma} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega} b \psi^* d\Omega = c_i \psi_i \quad \dots\dots\dots (38)$$

なお、 Γ : 計算対象領域 Ω の境界、 $\mathbf{n} = (l, m)$: 境界上での外向き単位法線ベクトル、 $\frac{\partial \psi}{\partial n}$: 関数 ψ に関する法線方向の微分係数である。

(38)式右辺の係数 c_i に関しては、source point の位置によってつぎのような場合分けがなされる。

(i) i 点 (source point) が計算対象領域内に存在する場合、 $c_i = 1$ が成立し、(38)式は次式のようにになる。

$$\int_{\Gamma} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega} b \psi^* d\Omega = \psi_i \quad \dots\dots\dots (38)'$$

(ii) i 点が境界上に存在するとき、 θ を Fig. 2 のように定義すれば、 $c_i = 1 - \frac{\theta}{2\pi}$ となる。したがって、(38)式はつぎのようにになる。

$$\oint_{\Gamma} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma - \oint_{\Gamma} \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega} b \psi^* d\Omega = \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right) \psi_i \quad \dots\dots\dots (38)''$$

ここで、 $\oint_{\Gamma} F d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma'} F d\Gamma$; Cauchy の主値積分⁴⁾、 $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$ 、 Γ'' は境界上の点 i を迂回する半径 ϵ の円弧、 Γ' は計算対象領域の境界 Γ から Γ'' を除いた残りの境界を示している (Fig. 2 参照)。

つぎに積分方程式(38)の離散化に関して説明する。(38)式は境界積分と領域積分から構成されているので、まず計算対象領域の境界 Γ を M 個の境界要素に、領域 Ω を N 個の内部要素に分割近似する。すなわち、

$$\Gamma \approx \sum_{j=1}^M \Gamma_j, \quad \Omega \approx \sum_{i=1}^N \Omega_i \quad \dots\dots\dots (39)$$

と表わせる。離散化要素としては、境界要素上で未知関数が一定であることを仮定する「一定要素」、関数を一次式で内挿する「線形要素」、さらに高次式で内挿する

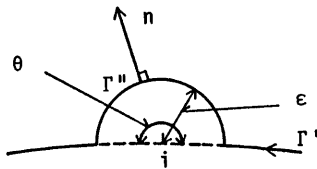


Fig. 2 The point i on the boundary Γ .

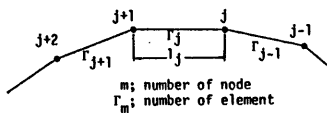


Fig. 3 Definition of the boundary elements and nodes.

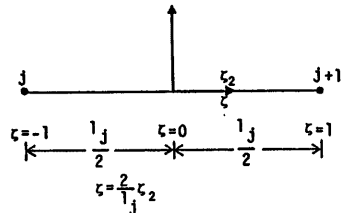


Fig. 4 Dimensionless Coordinates on the boundary element j .

「高次要素」がある。ここでは線形要素を採用するとともに、内部要素の離散化要素として三角形要素を用いる。さて、境界 Γ 上の任意の境界要素 Γ_j に注目し、Fig. 3 のようにその節点を $j, j+1$ 、要素長を l_j とするとき、Fig. 4 に示されるような無次元化座標系 ($\xi = 2\zeta/l_j$) が設定される。この座標系を用いて、要素上の任意の点 ζ における ψ および $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ の値を定義すれば、つぎのようになる。

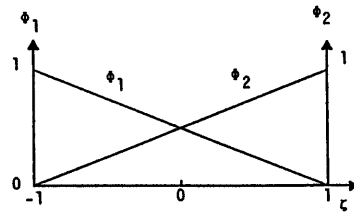


Fig. 5 The interpolation functions.

$$\left. \begin{aligned} \psi(\zeta) &= \phi_1 \psi_j + \phi_2 \psi_{j+1} \\ \frac{\partial \psi(\zeta)}{\partial n} &= \phi_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_j + \phi_2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{j+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

なお、 ϕ_1 および ϕ_2 は補間関数で、 $\phi_1 = \frac{1}{2}(1-\xi)$ 、 $\phi_2 = \frac{1}{2}(1+\xi)$ で表わされる (Fig. 5 参照)。

これらの関係式を用いることにより、(38)式は M 個の境界要素に対して離散化される。

$$\begin{aligned} c_i \psi_i + \int_{\Omega} b \psi^* d\Omega + \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_i} \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_{i-1}} \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n} d\Gamma \\ = \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_i} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_{i-1}} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

さらに、(40)式を用いることにより上式中の境界要素 Γ_j に沿った積分は、

$$\int_{\Gamma_j} \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\phi_1 \phi_2] \frac{\partial \psi^*}{\partial n} d\Gamma \left\{ \begin{matrix} \psi_j \\ \psi_{j+1} \end{matrix} \right\} = [h_{i1,j} \ h_{i2,j}] \left\{ \begin{matrix} \psi_j \\ \psi_{j+1} \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

$$\int_{\Gamma_j} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\phi_1 \phi_2] \psi^* d\Gamma \left\{ \begin{matrix} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_j \\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{j+1} \end{matrix} \right\} = [g_{i1,j} \ g_{i2,j}] \left\{ \begin{matrix} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_j \\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{j+1} \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

と表わせる。ただし、 $h_{i1,j}$ 、 $h_{i2,j}$ 、 $g_{i1,j}$ 、 $g_{i2,j}$ は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} h_{i1,j} &= \int_{\Gamma_j} \phi_1 \frac{\partial \psi^*}{\partial n} d\Gamma, \quad h_{i2,j} = \int_{\Gamma_j} \phi_2 \frac{\partial \psi^*}{\partial n} d\Gamma, \quad g_{i1,j} = \int_{\Gamma_j} \phi_1 \psi^* d\Gamma, \quad g_{i2,j} = \int_{\Gamma_j} \phi_2 \psi^* d\Gamma \\ &\dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

また、(41)式左辺第二項の領域積分を B_i と置くことにする。最後に、以上の関係式を(41)式に代入して整理すると、境界上のすべての節点に対して次式が成立する。

$$\sum_{j=1}^M H_{ij} \psi_j + B_i = \sum_{j=1}^M G_{ij} q_j \quad (i=1, 2, \dots, M) \dots\dots\dots (45)$$

$$H_{ij} = \begin{cases} h_{i1,j} + h_{i2,j-1} & (i \neq j) \\ h_{i1,i} + h_{i2,i-1} + c_i & (i=j) \end{cases}, \quad G_{ij} = g_{i1,j} + g_{i2,j-1}, \quad q_j = \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_j$$

さらに、(45)式をマトリックス表示すると、

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\psi} + \mathbf{B} = \mathbf{G}\mathbf{Q} \dots\dots\dots (46)$$

B_i および(44)式の定積分を求めるに際しては、領域積分に関して Hammer の積分公式が、境界積分については一次元 Gauss 積分公式が用いられている。このようにして求められた(46)式の係数行列 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{G}$ および $\mathbf{B}$ と境界条件とにより、(46)式は連立一次方程式となる。その結果、これを解くことにより境界上の未知量 (ψ または $\frac{\partial \psi}{\partial n}$) はすべて求まる。なお、詳細は後述するが、計算対象領域内の任意の点 i における関数値 ψ_i は、既知となった境界上の ψ および $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ の値を用いて(38)'式より容易に得ることができる。

本節の始めにも述べたが、一度 s が与えられれば非定常な潮流解析の基礎式(33)も、全く同様な方法で離散化が可能である。

2.3 計算手法の構成

(1) 風によるせん断応力

水面に作用する風によって生じるせん断応力成分 τ_x, τ_y については、

$$(\tau_x, \tau_y) = \frac{\rho_a}{\rho} C_f (W_x, W_y) \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \dots\dots\dots (47)$$

で与える。ただし、 W_x および W_y ；風速の x および y 方向成分 (m/sec), C_f ；水面摩擦係数, ρ_a ；空気
の密度で $1.21(\text{kg/m}^3)$ である。

また、 C_f については従来より種々の方法によって理論値、観測値が得られているが、本研究では Deacon
and Webb⁹⁾ が提案したつぎの関係式で与えている。

$$C_f = (1.00 + 0.07 \cdot U_{z=10m}) \times 10^{-3} \dots\dots\dots (48)$$

ここに、 $U_{z=10m}$ ；水面上 10 m の点の風速 (m/sec) であるが、本研究では $\sqrt{W_x^2 + W_y^2}$ で代用している。

(2) コリオリ係数

仮定¹⁰⁾で述べたように、コリオリ係数 f は湖全体にわたって一定とし、次式で与えられる。

$$f = 2\omega \sin \varphi \dots\dots\dots (49)$$

ただし、 ω ；地球の回転角速度, φ ；緯度である。なお、諏訪湖の湖心の緯度 $36^\circ 03'$ を(49)式へ代入して
コリオリ係数を計算すると、 $0.8559 \times 10^{-4}(\text{1/sec})$ となる。

(3) 鉛直渦動粘性係数

鉛直渦動粘性係数は、流れの状態によって極めて広範に変化する係数である。したがって、その評価法の
選択は重要な問題となる。特に数値シミュレーションでは、評価法の優劣が直接シミュレーション結果に影
響するからである。ここでは、全湖にわたって鉛直渦動粘性係数は一定とみなし、余越・富所⁹⁾ が表面流速
およびせん断応力の関係より誘導した推定式(50)を適用している。

$$A_v = 0.00055 \sqrt{C_f \bar{h}} \cdot U_{z=10m} \dots\dots\dots (50)$$

ここに、 $\bar{h}$ ；水深である。なお、解析に際しては $\bar{h}$ の値に諏訪湖の平均水深 4.0 m を与える。

(4) 計算法の手順

(a) 定常流；いま、計算対象領域内の任意の点 i における流れ関数の n 次近似値を ψ_i^n , $n+1$ 次
のそれを ψ_i^{n+1} と定義するならば、 ψ_i^{n+1} の値はつぎのような反復計算によって求められる。

① Fig. 6 に示される a, b, c, d の 4 点における流れ関数値 $\psi_a^n, \psi_b^n, \psi_c^n, \psi_d^n$ を (38)' 式より求めると

ともに、つぎの(51)式に従って i 点での $(\frac{\partial \psi}{\partial x})_i^n, (\frac{\partial \psi}{\partial y})_i^n$
を算出する。

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_i^n = \frac{\psi_{ib}^n - \psi_{ia}^n}{\Delta x}, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_i^n = \frac{\psi_{id}^n - \psi_{ic}^n}{\Delta y} \dots\dots\dots (51)$$

② (33)' 式は右边を既知項とみなすことにより近似的に解
くことが可能である。そこで、(33)' 式右边の $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ および
 $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ に①で求めた値を代入して右边 b を既知量と評価する。
すなわち、 $b \equiv A \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_i^n + B \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_i^n + C$ となる。これを用い
て(46)式中の $\mathbf{B}$ を計算する。

③ 係数行列 $\mathbf{H}, \mathbf{G}$ および $\mathbf{B}$ から成る(46)式に境界条件を
代入してマトリクスを解き、境界上の未知量 (ψ^{n+1} あるいは
 $(\frac{\partial \psi}{\partial n})^{n+1}$) を求める。

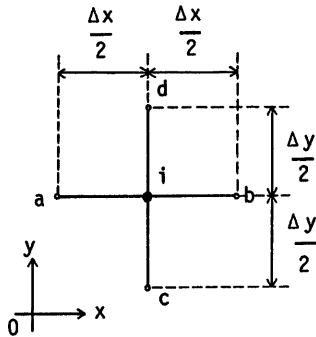


Fig. 6 Evaluation of differential coefficients' ψ .

④(38)'式と③で算出された境界上の関数値を用いて、 i 点での流れ関数値 ψ_i^{n+1} およびその配 $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_i^{n+1}$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_i^{n+1}$ を求める。なお1次近似値としては、 $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_i^1 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_i^1 = 0$ を与えている。また、反復計算の収束判定条件としては、

$$\frac{1}{M'} \sum_{i=1}^{M'} \sqrt{\left\{ \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)_i^{n+1} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)_i^n \right\}^2 + \left\{ \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right)_i^{n+1} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right)_i^n \right\}^2} < \epsilon_1 \quad \dots\dots\dots (52)$$

を用い、(52)式が満足される場合にのみ収束したものと判定して反復計算を終了している。ここに、 M' ；計算対象領域内部で $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ を求める点の総数、 $\epsilon_1 = 1.0 \times 10^{-6}$ である。

任意の点 (x, y, z) における流速成分 (u, v, w) は、反復計算の最終段階で得られた $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ および $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ を(31)'式、(32)'式へ代入してそれぞれ $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ を算出するとともに、(24)'式、(25)'式および(26)'式を用いて計算される。以上のことをフローチャートで示せば Fig. 7 のようになる。

(b)非定常流；一度 s の値を与えれば、(33)式は積分方程式に定式化され、さらに境界要素法を用いることにより $\tilde{\psi}$ あるいは $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ および $\tilde{w}$ を求めることができる。その手順は(a)で述べた計算法と同一である。しかしながら、ここで得られる $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ 等は Laplace 変換された値であるから、Laplace 逆変換を行って実時間 t の関数に必ず必要がある。本研究では、数値的逆変換法として道上ら⁷⁾が湖山池の非定常解析に適用した Schapery の近似法⁸⁾を採用する。

まず、 $u(t)$ はつぎのように表現できるものと仮定する。

$$u(t) = u_0 + \Delta u(t) \quad \dots\dots\dots (53)$$

ここに、 u_0 は定常状態における x 方向の流速であり、

$$u_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \tilde{u}(s) \quad \dots\dots\dots (54)$$

によって得られる定数である。また、 $\Delta u(t)$ は有限な Dirichlet 級数によって、

$$\Delta u(t) = \sum_{j=1}^n a_j e^{-b_j t} \quad \dots\dots\dots (55)$$

と表わせる。ただし、 a_j , b_j は定数で、 n は級数の個数である。

つぎに、(55)式で表わせる $\Delta u(t)$ を(53)式へ代入し、Laplace 変換を行うとつぎの式が誘導される。すなわち、

$$s \cdot \tilde{u}(s) = u_0 + \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{1 + \frac{b_j}{s}} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (56)$$

いま、 n と b_j の値が得られたとし、 s を何らかの方法

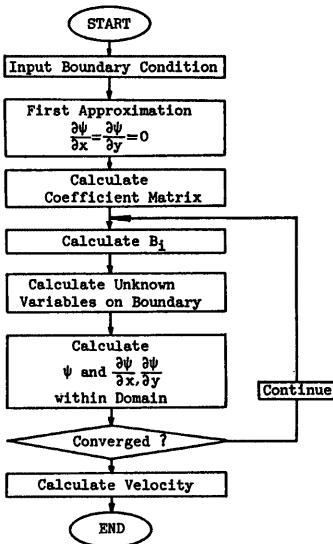


Fig. 7 Flow chart.

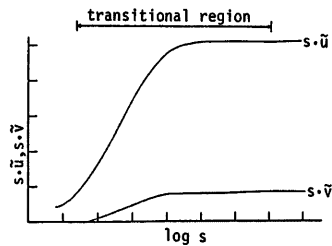


Fig. 8 The relations between $s\tilde{u}$, $s\tilde{v}$ and $\log s$.

で n 個選ぶならば, (56)式は a_j に関する n 個の連立方程式となる。さらに, Schapery に倣って定数 b_j および Laplace 変換のパラメータ s_j を取る。すなわち, b_j を変換パラメータ s_j に等しく取るとともに ($b_j = s_j$), s_j は等比級数で表わす ($s_{j+1}/s_j = r$, r は一定値)。なおこのとき, 誤差が最小になると言われている。級数の個数 n と s_j の決定方法に関しては, Fig. 8 に示されるように縦軸に $s \cdot \tilde{u}(s)$ を, 横軸に s の対数をとってプロットし, $s \cdot \tilde{u}(s)$ の変化領域において s の値を n 個選択して試行錯誤的に決定すればよい。以上の手順に従って決定された n および s_j を用いれば, 次式のような連立一次方程式が導かれる。

$$\begin{aligned}
 \frac{a_1}{1 + \frac{s_1}{s_1}} + \frac{a_2}{1 + \frac{s_2}{s_1}} + \cdots + \frac{a_n}{1 + \frac{s_n}{s_1}} &= s_1 \cdot \tilde{u}(s_1) - u_0 \\
 \frac{a_1}{1 + \frac{s_1}{s_2}} + \frac{a_2}{1 + \frac{s_2}{s_2}} + \cdots + \frac{a_n}{1 + \frac{s_n}{s_2}} &= s_2 \cdot \tilde{u}(s_2) - u_0 \cdots \cdots (57) \\
 \vdots &\vdots \\
 \frac{a_1}{1 + \frac{s_1}{s_n}} + \frac{a_2}{1 + \frac{s_2}{s_n}} + \cdots + \frac{a_n}{1 + \frac{s_n}{s_n}} &= s_n \cdot \tilde{u}(s_n) - u_0
 \end{aligned}$$

(57)式を解くことにより, a_j ($j=1, 2, \dots, n$) が求められる。最後に, (53)および(55)式を用いることによって任意の時間 t における x 方向の流速成分 $u(t)$ が, また $v(t)$ および $w(t)$ についても同様にして求められる。

3. 数値シミュレーションの結果と考察

3.1 計算条件

諏訪湖の現地観測⁹⁾ より以下のことが明らかになっている。

- (i) 湖内の水温分布は, 年間を通じてほとんどの期間一層状態である。
- (ii) 静振による流れは, 吹送流成分と比較すれば極めて小さい。すなわち, 吹送流が卓越している。
- (iii) 風は, 一年を通じて北から東北東および南西から西の風向が卓越し, 風力はほぼ 2~3 m/sec である。

なお, それによって生じられる流れは緩やかである。したがって, 諏訪湖にエクマンタイプ・モデルを適用し湖流の数値シミュレーションを行うことも實際上可能であろう。

(1) 境界条件

(33)および(33)'式に対する境界条件は, Fig. 9 に示すように湖岸部と流出入部に分けてつぎのように与えられる。

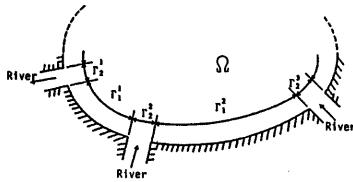


Fig. 9 Boundary condition.

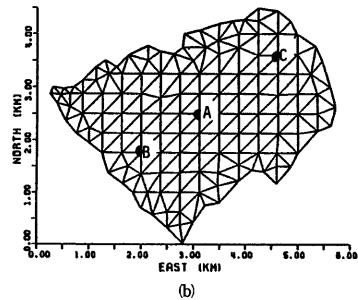
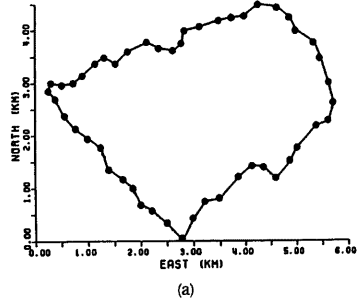


Fig. 10 Boundary element discretisation and internal cell division for Lake Suwa.
 (a) Boundary nodes.
 (b) Internal cells

湖岸 Γ_1 において, 基本境界条件 $\psi = c_0 (= \text{const.})$ (57)

流出入部 Γ_2 において, 自然境界条件 $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ (58)

ここでは, 諏訪湖における河川等の流出入量はたいへん小さいと仮定し無視する。すなわち, すべての湖岸で基本境界条件 $\psi = 0$ を与え, Dirichlet 問題として取り扱う。

(2) 離散化要素

Fig. 10(a) に示すように, 計算対象領域の境界上に節点を設け境界要素に分割する。ここでは, 節点数および境界要素数ともに49個としている。また, **Fig. 10(b)** は領域を231個の三角形内部要素に分割したもので, 富所⁹⁾ が有限要素法を適用して行った定常流解析の場合と同一のメッシュを用いている。なお, $D = 6.5 \text{ m}$, $L = 3600 \text{ m}$ を採用している。

(3) 風力および風向

上述した観測結果⁽¹⁾に基づき南西の風 3 m/sec を風の条件として与える。なお, 非定常流解析では, この風が一樣に吹き続けるものとする。

(4) 初期条件

$t=0$ で無風状態とし, 湖は静止しているものと仮定する。

(5) Laplace 変換のパラメータ s およびその偶数 n

n の個数については, 多いほど逆変換の精度が良好になるけれども, 計算の経済性から考えれば少ないほ

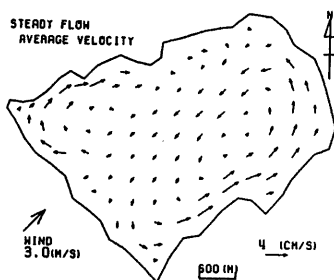


Fig. 11 Horizontal average velocities.

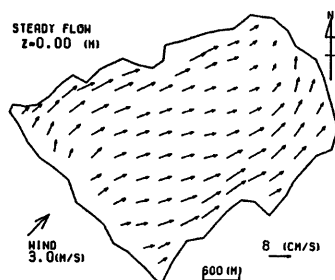


Fig. 12 Horizontal surface velocities by method ① (Ekman type model, BEM).

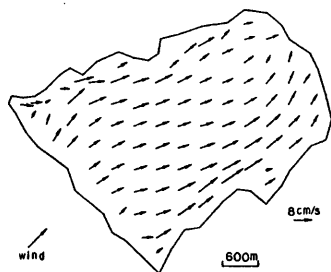


Fig. 13 Horizontal surface velocities by method ② (Ekman type model, FEM).

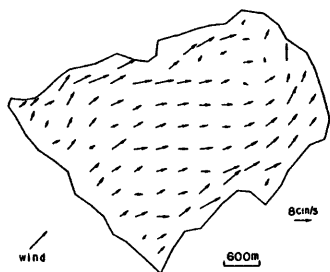


Fig. 14 Horizontal surface velocities by method ③ (Model of expanded function, FEM).

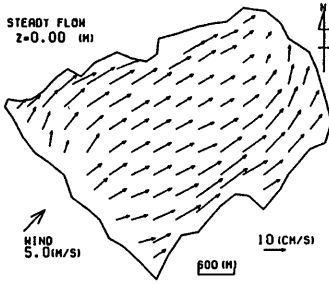


Fig. 15 Horizontal surface velocities by method ① (Wind: SW 5.0m/sec).

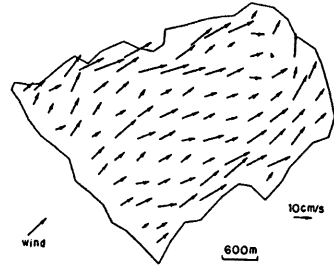
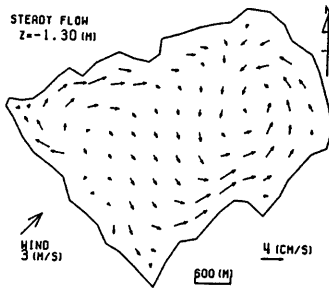
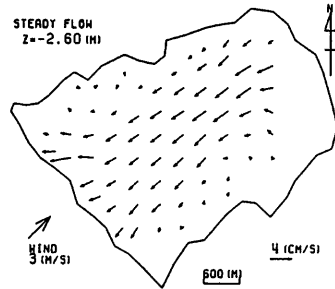


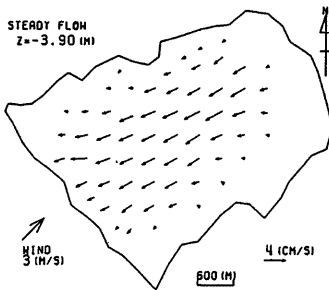
Fig. 16 Horizontal surface velocities by method ③ (Wind: SW 5.0 m/sec).



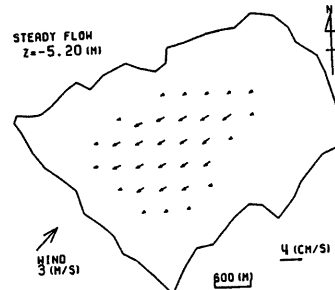
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 17 Horizontal velocities by BEM. (a) $z = -1.3\text{m}$, (b) $z = -2.6\text{m}$, (c) $z = -3.9\text{m}$, (d) $z = -5.2\text{m}$

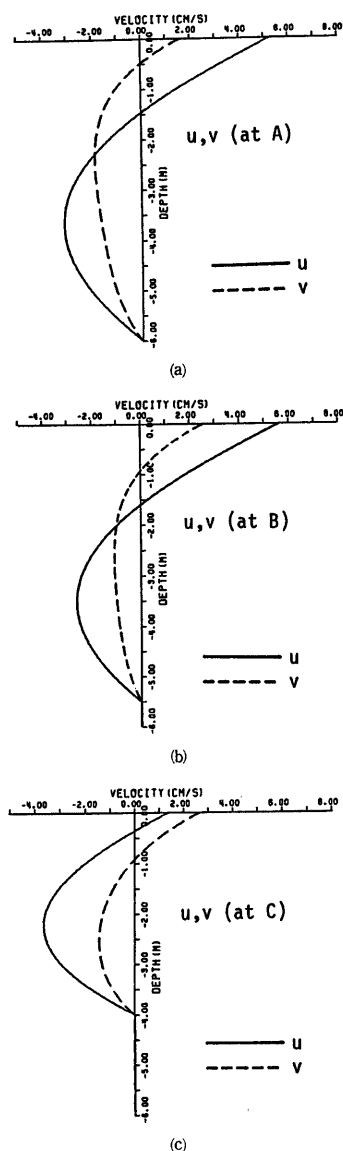


Fig. 18 Velocity distributions.

- (a) point-A
(b) point-B
(c) point-C

ど好ましい。ここでは、従来の研究^{1,7,10)}を参考にして、 $r=3.162$, $s_1=0.1 \times 10^{-4}$, $n=16$ とした。

以上の計算条件のうち、(4)および(5)は非定常解析のみに用いられる条件である。

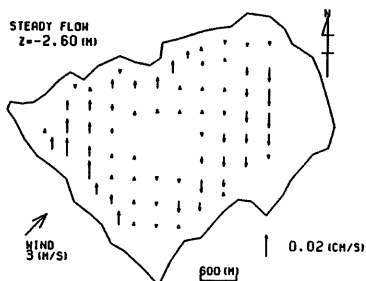
3.2 定常流の数値シミュレーション

浮子の漂流観測結果⁹⁾に基づけば、諏訪湖の湖流特性として表面流速の大きさは風速の2~3%であること、またその向きは風下よりやや時計まわりにずれていること、水底付近では風向に対して逆流が生じ諏訪湖ほどの浅い湖でも鉛直環流が存在していることが明らかにされている。

Fig. 11 および Fig. 12 は、それぞれ上述の条件のもとで計算された平均流速ベクトル図および表面流速ベクトル図である。後者より湖中央部A点 (Fig. 10(b) 参照) における表面流速の計算値は、5.53 cm/s となり風速のほぼ2%弱であること、その向きは東北東を向いていることが確認される。したがって、現地観測結果から見れば、ここでの数値計算手法はおおむね妥当であると判断される。

つぎに、同一の条件のもとで、①本研究で行った境界要素法を用いたエクマンタイプ・モデル、②富所による有限要素法を用いたエクマンタイプ・モデルおよび③慣性項を考慮した有限要素法による関数展開モデルによる計算結果⁹⁾について比較した。Fig. 13, Fig. 14 は、それぞれ②および③の方法によって計算された表面流速ベクトル図である。Fig. 12~Fig. 14 の結果は、局所的に若干異なるものの、ほぼ定量的にも定性的にも一致しているといえる。

Fig. 15 および Fig. 16 は、前節で説明した風の条件とは若干異っており、南西の風 5 m/sec を与え、上述の①および③の解析法を用いて計算された表面流速

Fig. 19 Vertical velocities on $z = -2.6$ m.

ベクトル図である。両者の一致性は、良好でない。これは、風速が大きくなり流れの非線形性が強くなったためと思われる。

さらに、南西の風 3.0 m/sec の条件のもとで、水面下 1.3, 2.6, 3.9, 5.2 m における流速ベクトル図を示したものが Fig. 17(a)~(d) である。これらの図および Fig. 12 から明らかなように、深くなるにつれて流れの向きは時計まわりに変化しており、水底近くでは風向とほぼ逆向きになっている。また、Fig. 10(b) に示す A, B, C の 3 点で u および v の鉛直分布を示せば、Fig. 18(a), (b), (c) のようになる。これらから、湖全体として水面下 2.0~2.5 m 付近を境に上層と下層での流れの向きが逆転していることが予想される。

最後に Fig. 19 は、水面下 2.6 m における鉛直流速 w の分布を示した図である。湖の西岸近くで上昇流が、東岸近くで下降流が生じており諏訪湖ほどの浅い湖でも鉛直環流の存在が確認される。なお、鉛直環流の流れの方向は、東北東と西南西を結ぶ方向で風の方向（南西から北東）よりやや時計まわりにずれており、コリオリ力の影響によるものと考えられる。

以上のことより、本研究で開発した数値計算手法は、諏訪湖の卓越風である南西 3 m/sec 程度の場合にはほぼ妥当な結果をもたらすことが明らかになった。しかしながら、非線形性の流れが強くなるとエクマンタイプ・モデルの適用限界を越えるから、その実用性は低下するものと考えられる。

3.3 非定常流の数値シミュレーション

Fig. 20 は、湖中央部 A 点における水表面および水面下 3.9 m の深さでの u および v の時間的変化を示したものである。風が吹き始めると流速成分はしだいに大きくなるが、 $t=8.0$ hour を過ぎるころにはその変化も落ちつき、前節では計算された定常解析の結果（以下、定常解と呼ぶ）に漸近していく様子が確認される。Fig. 21(a), (b) は、A 点における流速成分 u および v の鉛直分布を $t=0.5, 1.0, 2.0, 4.0$ および 8.0 hour についてそれぞれプロットしたものである。 u, v の鉛直分布についても、時間とともに定常解に近づいていくのが認められる。

次に、流速ベクトルの時間的変化を湖全体として把握するために、各時刻の表面流速ベクトルを Fig. 22 に示している。これらより、 $t=0.5$ hour で 3 cm/sec の大きさを有し、風と同じく北東に向かう流速ベクトルは、時間の経過に従ってその大きさを増大するとともに、その方向も風の向きよりしだいに時計まわりに変化していく傾向にある。また、Fig. 22(d) は $t=24$ hour の時の表面流速ベクトル図であり、Fig. 12 に示された定常解と良く一致している。同様に、Fig. 23 は水面下 3.9 m での $t=8.0$ hour における流速ベクトル図である。風とは逆向きの流れが計算されているとともに、Fig. 17(c) に示す定常解にほとんど漸近している。

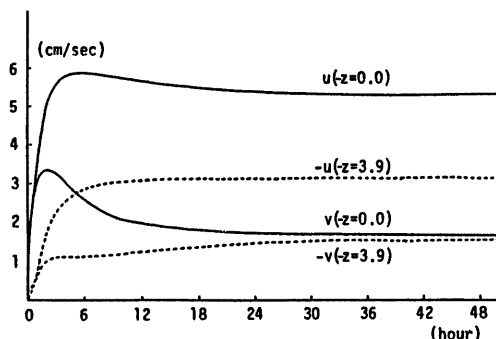


Fig. 20 Temporal variation of horizontal velocities at point A.

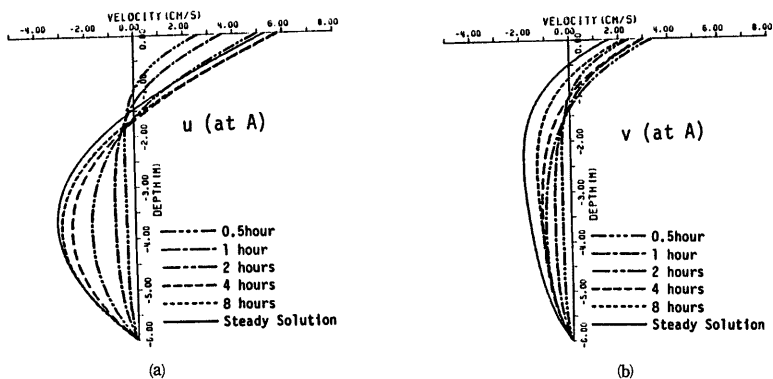


Fig. 21 Temporal variation of velocity distribution at point A.
(a) Distribution of u (b) Distribution of v

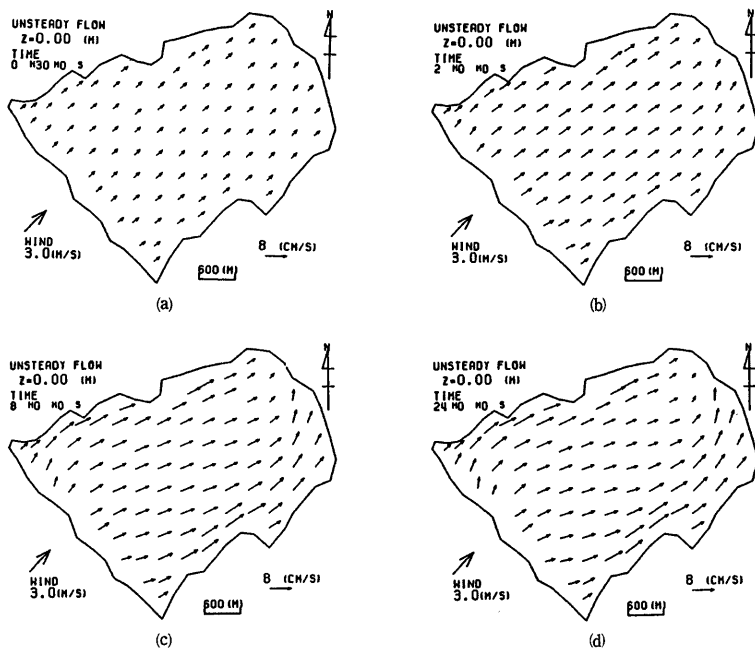


Fig. 22 Transition of horizontal velocity.
(a) 0.5 hr (b) 2.0 hrs
(c) 8.0 hrs (d) 24.0 hrs

以上より、風が吹き始めると表面での流れは風と同じ向きに、深い部分では風の向きと逆向きに流れ始め、鉛直循環流が発生していることを示唆している。また、表面流速は時間の経過とともに大きくなり、その向きは時計まわりにずれている。これは、コリオリ力の効果が現われたためと思われる。最後に、ここで開発した非定常流に関する数値計算手法は、前節で計算された定常解析の結果の再現も可能であり、有効性の高い計算法であるといえよう。

4. 結 言

本研究は、浅い湖における吹送流の数値シミュレーションに対して、境界要素法を用いたエクマンタイプ・モデルによる数値計算手法の開発を目的としたもので、その有効性を明らかにするために諏訪湖に適用し、観測値および他の計算手法による計算結果と比較、検討を行った。得られた結果を要約すれば以下のようなものである。

開発された定常流の数値計算手法は、諏訪湖で卓越する風速 (2~3 m/sec) のもとであれば、現地観測値や他の計算手法による計算結果と良好な一致を示し、その有効性は高いものと判断される。すなわち、表面流速ベクトルはコリオリ力の影響を受けて風の向きよりやや時計まわりにずれること、その大きさは風速の2~3%の値であること、水底付近の流れは風とほぼ逆向きになっていること等の再現が可能となった。

非定常流の数値シミュレーションによって求められた流速ベクトルは、時間の経過とともに定常流の数値シミュレーションで得られた解に著しく漸近し、定常状態の再現が十分に可能となった。

吹送流以外の流れが卓越する場合や非線形項を無視できないほど風速が大きい場合等には、エクマンタイプ・モデルの適用限界を越えるものと判断され、ここで開発した数値計算手法の有効性は低下するものと思われる。

境界要素法を用いることによって未知量の数は大幅に減少したが、反復計算のたびに数値積分を行わねばならず、期待したほどの計算時間の短縮は望めなかった。

今後の課題としては、水面上昇量を考慮に入れるとともに、風を時間的・空間的に変化させたより複雑な条件のもとで数値シミュレーションを行い、計算手法の有効性について検討する必要がある。

最後に本研究を進めるにあたり、その緒において御協力いただいた山野一弥氏(現大阪市)、ならびに計算・作図に多大の援助をいただいた大学院生福本育央氏に謝意を表します。また、諏訪湖の地形データ等を提供して頂くなどいろいろと御協力して下さった信州大学工学部富所五郎先生に厚く御礼申し上げます。なお、ここでの計算はすべて京都大学大型計算機センター M-382 によったことを附記する。

参 考 文 献

- 1) Young, F. D. L. and J. A. Liggett: Transient Finite Element Shallow Lakes Circulation, Proc. ASCE, Vol. 103, HY2, 1977, pp. 109-121.
- 2) Liggett, J. A. and C. Hadjithodorou: Circulation in Shallow Homogeneous Lakes, Proc. ASCE, Vol. 95, HY2, 1969, pp. 609-620.
- 3) Banerjee, P. K. and R. Butterfield: Boundary Element Methods in Engineering Science, McGRAW-HILL, 1981, pp. 38-77.
- 4) 鷺巣 慎, 深井一郎: 境界要素法による電磁界開放領域問題の解析, 電子通信学会論文誌, Vol. J64-B, No. 12, 1981, pp. 1359-1365.

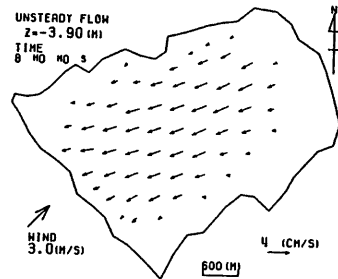


Fig. 23 Horizontal velocity by BEM ($z = -3.9$ m, $t = 8.0$ hrs.).

- 5) Deacon, E. L. and E. K. Webb: Interchange of Properties between Sea and Air, Interscience, 1962, pp. 43-87.
- 6) 余越正一郎, 富所五郎: 風による諏訪湖の流動特性, 土木学会論文報告集, 第276号, 1978, pp. 53-63.
- 7) 道上正規, 鈴木幸一, 桧谷 治: 閉鎖水域における流動特性について, 第28回水理講演会論文集, 1984, pp. 283-288.
- 8) R. A. Schapery: Approximate Methods of Transform Inversion for Viscoelastic Stress Analysis, Proc. 4th U. S. National Congress of Applied Mechanics, Vol. 2, 1962, pp. 1075-1085.
- 9) 富所五郎: 閉鎖水域における風成流の水理に関する基礎的研究, 京都大学学位論文, 1984, pp. 76-135.
- 10) 小林三男, 荒木正夫, 富所五郎: 数値 Laplace 変換を用いた非定常拡散解析, 第25回海岸工学講演会講演集, 1978, pp. 504-507.