

河床砂礫の浮上率と浮遊砂量

芦田 和男・藤田 正治・向井 健

STOCHASTIC MODEL FOR CALCULATION OF SUSPENDED LOAD

By Kazuo ASHIDA, Masaharu FUJITA and Ken MUKAI

Synopsis

A stochastic model for calculating suspended load is proposed under equilibrium and non-equilibrium conditions. The rate at which bed materials are exchanged for suspended particles is discussed theoretically and experimentally by considering, in the case of nonuniform sediment, shelter effect of gravels. Using the results and the stochastic model for the motions of suspended particles, which was investigated in the previous paper, a method for calculating the profile of suspended particles is obtained. This method is applicable to calculating suspended load under both equilibrium and non-equilibrium conditions.

1. 緒 言

実河川の浮遊砂問題では、平衡浮遊砂を議論すれば十分な場合と、非平衡浮遊砂の解析が必要になる場合とがある。たとえば、河川中・下流域では、河床材料が比較的一様であり、かつ浮遊砂の飛行距離に比べて十分長い区間にわたって河道条件が一様と見なせるため、浮遊砂は平衡状態になっており、このような場では、平衡浮遊砂量の算定問題が重要であると考えられる。一方、河川上流域におけるように、河床材料が混合砂礫で構成されており、洪水時に、アーマールコート¹⁾の形成・破壊過程を伴った流砂現象が生じる場合や、ダム堆砂の過程では、河床の粒度分布が時間的・場所的に変化するのに伴って、河床砂礫の浮上率や浮遊砂の運動特性が変化するため、浮遊砂は非平衡状態となり、流砂量や河床変動の予測のためには、非平衡浮遊砂量の算定が必要となる。

従来、以上のような平衡・非平衡浮遊砂濃度分布を予測するために、拡散理論による方法と確率過程理論による方法が提案されている。前者は拡散方程式を初期条件と境界条件のもとに解くもので、後者は浮遊砂の確率過程的な運動に着目して、粒子の分散過程を解析し、河床砂礫の浮上率から濃度分布を計算するものである。ただし、従来の確率過程理論による方法では、掃流砂と浮遊砂を一体として扱って流砂の濃度分布を求めた吉川・石川の研究²⁾を除いて、浮上率が明らかでないために、濃度分布型についてのみ議論している研究が多い。拡散理論による方法は、数学的に取り扱うのが比較的容易である反面、拡散係数や河床での境界条件すなわち基準点濃度の算定法が問題となる。とくに、基準点濃度については、次の二つの問題点が残されている。一つは、基準点の高さ(掃流砂層と浮遊砂層の境界の位置)の決め方が明確でないことである。従来の基準点濃度の算定理論では、基準点を河床から水深の5%の位置としているものがあるが、その理論的根拠は乏しい。拡散理論の代表的な研究成果である Rouse 分布では計算上河床付近で濃度が無限大となるため、基準点の位置の選定の仕方によって浮遊砂量の値が大きく異なり、それが浮遊砂量の推定精度が低下する要因の一つとなっている。他の一つは非平衡状態における基準点濃度の推定法が明らかでないことである。とくに、アーマールコートの形成過程のように、時間的・場所的に河床条件が変化するような場合、基準点濃度をそれに応じて計算できるような予測式を導くことは難しい問題である。一方、確率過程理論に

よる方法では、与えられた水理条件、河床条件に対する個々の粒子の運動の重ね合わせとして濃度分布を求めないので、粒子の浮遊運動が各条件に対して的確にシミュレーションできれば、非平衡な場合についても比較的容易に適用できる。また、濃度分布が直接計算でき、拡散理論の場合のように、基準点の高さや基準点濃度の推定が不必要である。しかしながら、乱流場のモデル化に当って、一様・等方性を仮定しなければ計算が非常に複雑になることや河床砂礫の浮上率が明らかでないことなどの問題点も多く残されている。

著者らは以上の点に鑑み、確率過程理論によって、平衡・非平衡浮遊砂量の算定を行うために、粒子の浮遊機構の解明に努めそのモデル化を行ってきた^{2),3)}。本研究は、その成果に加えて、浮上率に関する検討を行い、平衡浮遊砂濃度分布を算定し、その妥当性を検証するものである。さらに、非平衡浮遊砂が問題となる場として、アーマーコートの形成過程を取り上げ、その過程における非平衡浮遊砂の解析を行ない、実験との比較から本理論の非平衡な場への適用性について検討するものである。

2. 河床砂礫の浮上率

2.1 従来の研究

河床粒子の浮上機構や浮遊砂と掃流砂の区分の不明確さのために、粒子が河床から浮遊砂として浮上する割合について、実験的にも理論的にもあまり検討されていない。しかし、浮遊砂基準点濃度の推定式を導く際に、河床からの浮上率を評価している研究がいくつかあるので、ここでは代表的な研究として、芦田・道上⁴⁾、Itakura・Kishi⁵⁾、平野⁶⁾の理論について簡単に整理する。

(a) 芦田・道上の研究

河床表面に存在する粒子の浮上速度から河床粒子と浮遊粒子の交換時間を求め、単位時間、単位面積当たり浮上する粒子の質量 q_{in} を導いている。この方法は、Lane・Kalinske⁷⁾ のモデルに、粒子の重力の効果や乱れとの追隨性を考慮したもので、 q_{in} の無次元量 \hat{q}_{in} は次式のようにである。

$$\hat{q}_{in} = K_1(s+1)\hat{u}_* \left\{ \frac{\beta_1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\xi_0^2}{\beta_1^2}\right) - \xi_0 \int_{\xi_0/\beta_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \xi^2\right) d\xi \right\} \dots\dots\dots(1)$$

ここに、 $\hat{q}_{in} = q_{in}/\rho\sqrt{gd}$ 、 $\xi_0 = \hat{w}_0/\hat{u}_*$ 、 $\hat{w}_0 = w_0/\sqrt{gd}$ 、 $\hat{u}_* = u_*/\sqrt{gd}$ 、 $s = \sigma/\rho - 1$ で、 σ 、 ρ ：粒子および流体の密度、 d ：粒径、 w_0 ：粒子の沈降速度、 u_* ：摩擦速度、 K_1 、 β_1 ：比例定数である。 K_1 は実験値との適合性から0.025、 β_1 は河床付近の乱れに関する知見と粒子の乱れに対する追隨性に関する理論から0.75としている。

(b) 板倉・岸の研究

河床粒子に作用する揚力を正規分布とおき、力積方程式から粒子の浮上速度を求め、芦田らと同様の方法で \hat{q}_{in} を次式のように求めている。

$$\hat{q}_{in} = K_2(s+1) \left[\alpha_* \frac{s}{s+1} \frac{1}{\hat{u}_*} \left\{ \frac{\tau_*}{B_*} \frac{\int_{a'}^{\infty} (\xi/\sqrt{\pi}) \exp(-\xi^2) d\xi}{\int_{a'}^{\infty} (1/\sqrt{\pi}) \exp(-\xi^2) d\xi} + \frac{\tau_*}{B_*\gamma_0} - 1 \right\} - \hat{w}_0 \right] \dots\dots\dots(2)$$

ここに、 $\tau_* = \hat{u}_*^3/s$ 、 $a' = B_*/\tau_* - 1/\gamma_0$ で、実験結果より、 $K_2 = 0.008$ 、 $\alpha_* = 0.14$ 、 $B_* = 0.143$ 、 $\gamma_0 = 0.5$ としている。

(c) 平野の研究

平野は河床付近に掃流砂層と浮遊砂層を考え、掃流砂層からの浮上率を河床付近の乱れに関する知見を使って、次式のように導いている。

$$\hat{q}_{in} = C_* (s+1) \hat{u}_* \left\{ \frac{\beta_2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\xi_0^2}{\beta_2^2}\right) - \xi_0 \int_{\xi_0/\beta_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \xi^2\right) d\xi \right\} \dots\dots\dots(3)$$

ここに、 C_* ：掃流砂層の濃度、 β_2 ：比例定数で、 $\beta_2 = 0.93$ である。

2.2 理論式

一般に、河床材料は混合砂礫で構成されているので、浮上率の理論式には礫の遮蔽効果を考慮する必要がある。従来理論では遮蔽効果は考えられていないが、以下では混合砂礫床上の粒径 d の粒子に着目して、周囲の礫による遮蔽効果を評価した浮上率の理論式を導く。

浮上率の算定法には前節で述べたように、河床粒子と浮遊粒子の交換時間から求めるものと、掃流砂層の濃度から浮上率を求めるものがある。河床付近での粒子の運動は複雑であり、どちらの考え方に従うにしてもそのモデル化は難しいが、掃流砂層の濃度の推定法が不明確であるので、前者の手法で浮上率を算定することとする。

河床粒子は揚圧力 F_{L0} の作用のもとに浮上し、浮遊砂となる。これに要する交換時間を t_e 、その確率密度関数を $f_e(t_e)$ 、単位面積当たりに存在する粒子個数を N_B とすると、 q_{us} は次式のように表わされる。

$$q_{us} = k_1 \frac{\pi}{6} \sigma d^3 N_B \int_0^{\infty} \frac{1}{t_e} f_e(t_e) dt_e \dots \dots \dots (4)$$

ここに、 k_1 : N_B 個の粒子の中の浮上可能な粒子の割合である。ただし、上式が成立するのは、 F_{L0} の継続時間 t_e が $t_e \gg t_c$ となる場合であり、それについて以下で検討する。文献3)の実験結果より t_e の無次元量 $t_e U/h$ は鉛直方向の乱れ速度の無次元量 $|w_r|/u_*$ と関連付けて $t_e U/h = \beta |w_r|/u_*$ と表わされる。ここに、 U : 平均流速、 h : 平均水深、 β : 比例係数である。 β の値は文献3)の実験結果では $\beta = 0.5$ であるが、一般的な場合について、混合距離理論と矛盾しないように β の値の推定法を考える。混合距離理論を用いると、Euler の乱れの寿命時間 t_{**} は、鉛直方向の高さ z に対して $t_{**} = \kappa z/u_*$ と表わされる。ここに、 κ : カルマン定数である。 t_e は河床からの上昇流体塊の Lagrange 的な寿命時間であるが、その平均値 t_e は上昇流体塊の平均浮上高さ z_L における t_{**} とほぼ等しいものとする。ここで、 w_r は標準偏差 u_* の正規分布に従うという従来知見から、 $|w_r|/u_* = 0.67$ となるので、以上より、 $\beta = 1.5\kappa(z_L/h) \cdot U/u_*$ となる。 z_L/h の値は水理条件や河床条件によって変化されるものと考えられるが、ここでは文献3)の実験結果である $\beta = 0.5$ ($U/u_* = 10$) より求めて、 $z_L/h = 0.08$ とする。これについては、今後検討する必要があるが、以下の解析ではこの値を用いることにする。 $|w_r|/u_* = |F_{L0}|/F_{L0}^D$ とおけるので、 $t_e U/h$ は結局次式ようになる。ただし、 κ は 0.4 とした。

$$\frac{t_e U}{h} = 0.04 \frac{U}{u_*} \frac{|F_{L0}|}{F_{L0}^D} \dots \dots \dots (5)$$

ここに、 F_{L0}^D : F_{L0} の標準偏差で、礫の遮蔽効果を考慮して $F_{L0}^D = ck^2 \rho u_*^2 d^2$ 、 c : 揚圧力係数、 k : 遮蔽係数である。
 c および k の値の推定法については後述する。

次に、 t_e は F_{L0} の作用時間 t_* に比例するものとする。 t_* に関する従来研究²⁾より、 t_e は次式のようになる。

$$\frac{t_e U}{h} = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \frac{(s+1)}{(h/d)} \cdot k_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{ck^2(u_*^2)} \frac{U^2}{F_{L0}/F_{L0}^D} - \frac{1}{(\pi/6) \cdot s \cdot (ck^2 \cdot I \cdot h/d)}} \dots \dots \dots (6)$$

ここに、 I : エネルギー勾配、 k_2 : 比例定数である。抵抗則に対数則を用い、相当粗度高 k_s を αd (α : 比例定数) とすると、粗面に対して $U/u_* = 6.0 + 5.75 \log \{h/(\alpha d)\}$ となるので $t_e U/h$ 、 $t_e U/h$ は式(5)、(6)より、 F_{L0}/F_{L0}^D 、 h/d 、 α 、 ck^2 、 I 、 s をパラメータとして計算される。

Fig.1 は $I=1/500$ 、 $s=1.65$ 、 $\alpha=2$ 、 $ck^2=2.5$ 、 $k_2=1$ の

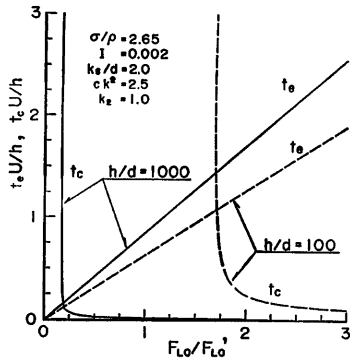


Fig. 1 Relation between transformation time into suspension of particles on bed t_e and duration time of upward flow t_c

ときの, $t_e U/h$ と $t_e' U/h$ の F_{L0}/F'_{L0} による変化を h/d をパラメータとして計算したものである。 $t_e = t_e'$ に対する F_{L0} の値を F_{L0*} とすると, $G < F_{L0} < F_{L0*}$ では $t_e > t_e'$ となり, F_{L0} の継続時間が十分でないために粒子は浮上できないが, $F_{L0} > F_{L0*}$ では $t_e < t_e'$ となり浮上することができる。ここに, G : 粒子の水中重量である。このとき, F_{L0} が十分大きくない範囲では $t_e \sim t_e'$ であり, $G < F_{L0} < F_{L0*}$ の範囲と合わせて $t_e \gg t_e'$ の条件を満たさないが, F_{L0} が G から増加すると急激に t_e が減少し $t_e \gg t_e'$ となるので, 近似的には式(4)で q_{in} を計算して差し支えない。

N_B は粒径 d の粒子の露出割合を p_f とすると,

$$N_B = p_f \frac{1}{(\pi/4) d^2} \dots\dots\dots(7)$$

と表わされる。また, F_{L0} の確率密度関数 $f_{F_{L0}}$ を平均 0, 標準偏差 $F'_{L0} = ck^2 \rho u_*^2 d^2$ の正規分布とし, 式(6), (7)より式(4)を変形すると次式となる。

$$q_{in} = K p_f \cdot \frac{2}{3} \sqrt{\frac{6\sigma}{\pi}} \int_G^\infty \sqrt{F_{L0} - G} \frac{1}{\sqrt{2\pi} F'_{L0}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{F_{L0}^2}{F_{L0}'^2}\right) dF_{L0} \dots\dots\dots(8)$$

ここに, $K = k_1/k_2$, $G = (\pi/6)(\sigma - \rho)gd^3$ である。ここで, Rubey の抵抗則 $C_{D0} = 2 + 24\nu/(u_* d)$ を用いて, $G = C_{D0} \rho \omega_0^2 (\pi/8) d^2$ と表わし, $\eta = F_{L0}/F'_{L0}$ とおくと, 式(8)の無次元表示は次式のように導かれる。

$$\hat{q}_{in} = \frac{2}{3} K p_f \sqrt{\frac{6}{\pi}} (s+1) \int_{\eta_0}^\infty \hat{u}_* \sqrt{ck^2 \eta - \frac{\pi}{8} C_{D0} \omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \eta^2\right) d\eta \dots\dots\dots(9)$$

ここに, $\eta_0 = (\pi/8) \cdot C_{D0} \omega_0^2 / (ck^2)$ である。

次いで, 河床粒子の周囲の礫による遮蔽効果や揚圧力に及ぼす効果の評価法について述べる。式(9)中の k と c がそれらの効果を表わし, それぞれ河床粒子の存在高さの無次元量 a/d_r , および砂粒 Reynolds 数 $u_* d_m/\nu$ の関数となる。ここに, d_r : 遮蔽効果を及ぼす礫の粒径, a : 河床表面の粒径 d , の粗度の下部から粒子の位置までの距離, d_m : 河床の平均粒径である。これらの関係を理論的に求めることは困難であるので, 浮遊限界に対する無次元掃流力 τ_{*c} の値から, $ck^2 = (\pi/6)/(\alpha \cdot \tau_{*c})$ ($\alpha = 3$)²⁾ の関係を用いて推定する。まず, c の値は一様砂の場合 ($k=1$) の τ_{*c} の値³⁾ から求められ, $u_* d_m/\nu$ で整理すると Fig. 2 のようになる。次に, k の値は二粒混合砂を用いた場合の τ_{*c} の値⁹⁾ ($\sigma/\rho = 1.05$ のものは本研究による。) と Fig. 2 から計算され, a/d_r で整理すると Fig. 3 のようになる。したがって, d_m, d_r, a の値が河床の粒度分布から決定されると c および k の値が Fig. 2, 3 より求められる。

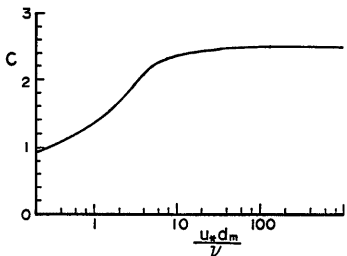


Fig. 2 Variation of coefficient of lift force c with grain size Reynolds number $u_* d_m/\nu$

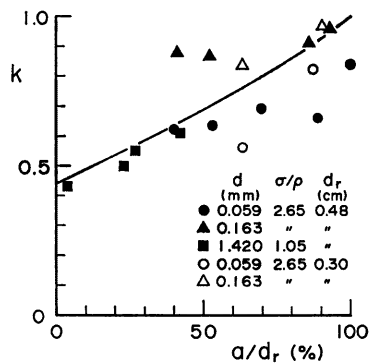


Fig. 3 Variation of coefficient of shelter effect k with the position of particles among gravels a/d_r

2.3 実験結果と理論結果の比較

式(9)の適合性を調べるために、浮上率について以下のような実験を行った。長さ 8m, 幅 30 cm の水路に、Fig. 4 に示すような給砂装置を上流から約 5m の位置に取り付け、河床に粒径 4.8mm の礫を敷き、その間隙から粒径 1.4mm, 比重 1.05 のポリスチレン粒子を供給した。実験方法は、流量と給砂量を一定とし、粒子の存在高さがその給砂量に見合って定常になった時点で、水路横方向から河床を浮上する粒子の運動を高速ビデオ撮影した。流量および給砂量の条件を変えて同様の実験を行い、 ξ_0 , a/d_r に対する浮上率をビデオ解析から求めた。

Fig. 5 は q_{su} の実験値と理論値を ξ_0 と ck^2 をパラメータとして示したもので、両者とも $p_f=1$ に換算している。実験値の ck^2 の値は、 $d_r=4.8\text{mm}$ として Fig. 2, 3 から求め、理論値は式(9)の K の値を 0.035 と

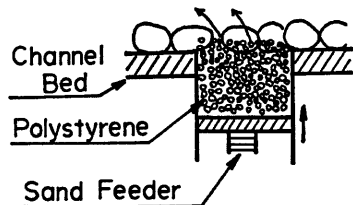


Fig. 4 Experimental apparatus for supply of particles

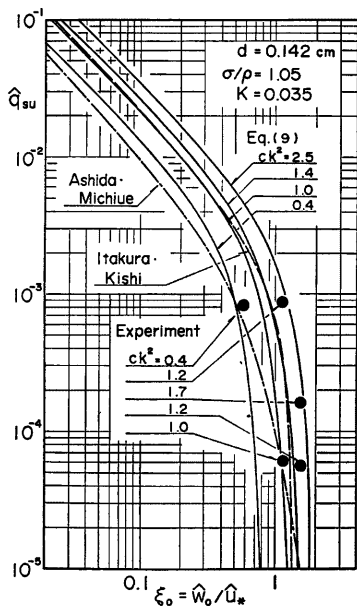


Fig. 5 Comparison between theoretical results and experimental ones concerning transformation rate into suspension of particles on bed q_{su}

として計算した。図中には、芦田・道上、板倉・岸の理論式(式(1), (2))も描かれている。 $\xi_0 < 0.5$ の条件での実験結果はないが、 $K=0.035$ のとき、理論値と実験値はほぼ適合しており、河床条件に応じて浮上率が的確に計算されている。また、一様砂を対象にした従来の理論値と本研究の一様砂の場合 ($u_* d_m / \nu > 50$ では $ck^2=2.5$) の理論値は大体一致しており、式(9)が一様砂の場合にも適用できることがわかる。

つぎに、 K の値の物理的な意味について検討する。 k_1 は河床粒子が浮上可能な状態にある確率、すなわち、隣接粒子との接線がすべて上で開くような状態にある確率 $(1/2)^n$ を表す。ここに、 n : 隣接粒子個数である。ところで、球を充填したときの粒子の接触個数 n_0 と空隙率 λ の関係は Fig. 6 のようになる¹⁰⁾。いま、 n/n_0 を接触粒子の中心が被接触粒子の上端から下端間に存在

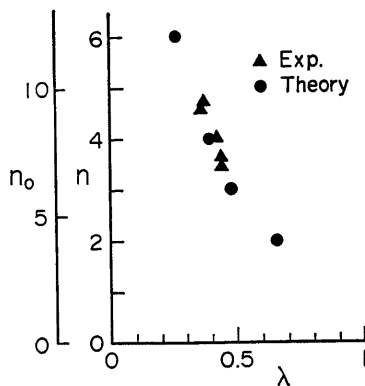


Fig. 6 Relation between the number of contacts on a particle in random packing n_0 or the number of neighbour particles of a particle on bed n and porosity λ

する確率で表わせるものとする、 $n = n_0/2$ となり、 n と λ の関係は Fig. 6 のようになる。 $\lambda = 0.4$ のとき、 $n = 4.5$ であり、 $k_2 = 1$ とすると $K = 0.044$ となる。この値は先に述べた実験定数 0.035 とほぼ一致し、 K の物理的な意味は隣接粒子との接触状況から説明できる。なお、実際の河床で浮上可能な粒子の割合を観察すると、 $k_1 = 0.03 \sim 0.06$ であった。以上の事より、本理論の妥当性が示唆され、水理条件と河床条件 (a/d , $u_* d_m/\nu$) が与えられると浮上率が式(9)から算定できる。

3. 平衡浮遊砂濃度分布とその発達過程

3.1 平衡浮遊砂濃度分布

前報²⁾ で論じた浮遊砂の運動特性と前章の浮上率の予測式から、平衡浮遊砂濃度分布を算定し、本理論の適用性について検討する。いま、Fig. 7 に示すような座標系で、原点より上流で固定床、下流で一様砂の移動床とし、河床の平衡性を維持するため、解析の簡便さを図るために、原点から掃流砂の供給を行う。流れは二次元等流とし、移動床部では十分乱流が発達しているものとする。

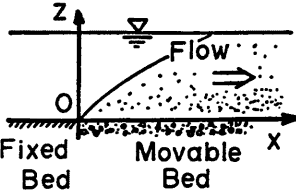


Fig. 7 Definition sketch

以上のような河床条件では、 $x = \hat{X}$ における浮遊砂濃度分布は、河床からの砂礫の浮上率 q_{in} と河床を離脱した砂礫が t 時間後に存在する高さの確率密度関数 $f(z, t)$ を用いて次式で表わされる。

$$C(\hat{X}, z) = \int_0^{\hat{x}} \frac{1}{s+1} q_{in} \cdot f(z, t) dt \dots\dots\dots(10)$$

ここに、 $\hat{x} = x/d$, $\hat{X} = X/d$, $z = z/d$, $t = \tau/\sqrt{d/g}$, $\hat{t}_x = \hat{X}/\hat{u}_p(\hat{t}_x)$, $\hat{u}_p(\hat{t}_x) = u_p(\tau_x)/\sqrt{gd}$ で、 $u_p(\tau_x)$: 離脱後 τ_x 時間経過するまでの x 方向の粒子の平均移動速度である。

$f(z, t)$ は著者らの研究³⁾ で σ/ρ , τ_* , $\hat{h} (= h/d)$, $\hat{U} (= U/\sqrt{gd})$, c , k および離脱過程における乱れの継続時間 $\hat{i}_c (= i_c/\sqrt{d/g})$ と浮遊過程における乱れの平均継続時間 $\hat{i}_{in} (= i_{in}/\sqrt{d/g})$ を与えると計算できる。このうち、 \hat{i}_c と \hat{i}_{in} の決め方が明確でないので、この点について検討する。 \hat{i}_c と \hat{i}_{in} は文献³⁾ の実験結果より、 $\beta = \hat{i}_c (u_* / w_f) \cdot (\hat{U} / \hat{h})$, $b = \hat{i}_{in} \cdot (\hat{U} / \hat{h})$ と表わされる。式(5)を得たのと同様の考え方に従うと、 β と b は次式のようになる。

$$\beta = 0.04 \hat{U} / \hat{u}_* \dots\dots\dots(11)$$

$$b = 0.6 \cdot \eta_r \cdot \hat{U} / \hat{u}_* \dots\dots\dots(12)$$

ここに、 $\eta_r = z_r/h$ で、 z_r : 浮遊砂の平均飛行高さである。 η_r の値は水理条件や河床条件によって変化するが、 w_0/u_* の値が小さく浮遊砂量が多いときは、 $\eta_r = 0.5$ となり w_0/u_* が増加するにつれて η_r は 0.5 から減少するものと考えられる。しかし、 η_r と w_0/u_* の一般的な関係を得ることは難しいので、以下の解析では $\eta_r \leq 0.5$ の値を粒子の鉛直方向の分散の割合に応じて適当に与えることにする。

$\hat{u}_p(\hat{t}_x)$ は粒子の通ってきた平均存在高さ \hat{z}_{pm} における流速に等しいとして次式から求められる。

$$\frac{\hat{u}_p(\hat{t}_x)}{\hat{u}_*} = 8.5 + 5.75 \log \frac{\hat{z}_{pm}}{\hat{k}_2} \dots\dots\dots(13)$$

ここに、 $\hat{k}_2 = k_2/d$ で k_2 : 相当粗度高である。また、離脱後 \hat{t}_x 時間経過したときの粒子の平均高さを \hat{z}_{pmx} とし、それが平均的に $\hat{z}_{p0} = \min(\hat{h}, \hat{z}_{pmx} + w_0 \hat{t}_x)$ の位置から沈降してくるものとする、 \hat{z}_{pm} は次式で算定される。

$$\hat{z}_{pm} = (\hat{z}_{pmx} + \hat{z}_{p0})/2 \dots\dots\dots(14)$$

ここに、 $\hat{z}_{pmx} = \int_0^{\hat{k}} \hat{z} f(\hat{z}, \hat{t}_x) d\hat{z} / \int_0^{\hat{k}} f(\hat{z}, \hat{t}_x) d\hat{z}$ である。

以上より、式(10)は式(9)を用いて計算され、 $\tau_x \rightarrow \infty$ ($X \rightarrow \infty$) とすれば平衡浮遊砂濃度分布が求められる。Fig. 8 は芦田・道上の濃度分布の実測値¹¹⁾(ただし、 $z/h=0.05$ の濃度は芦田・道上の基準点濃度の推定式⁴⁾から求めた。)と式(10)で計算した理論値を比較したものである。ただし、 $\eta_s=0.5$ とした。理論値は実験値とよく適合しており、本理論の妥当性が示される。図中の破線は Rouse の濃度分布則と芦田・道上の基準点濃度の推定式から求めた理論曲線である。本理論値は Rouse 分布とはほぼ同じ値となっているが、河床で濃度が発散しない点や基準点濃度を介さずに計算できる点が Rouse 分布と異なる。

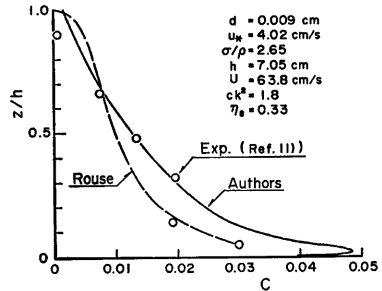


Fig. 8 Equilibrium concentration profile of suspended load

3.2 濃度分布の発達過程

平衡濃度に到達するまでの距離 X が無視し得ないときは、濃度分布の発達過程を明らかにする必要がある。そこで、以下では、式(10)で計算される濃度分布の発達過程と、 X について検討し、実河川の条件で X がどの程度になるかについて、例示的に考察する。

Fig. 9 は $\sigma/\rho=2.65$, $I=1/500$ (エネルギー勾配), $k_s/d=2.0$, $ck^2=2.0$, $\eta_s=0.5$, $\tau_* = 1.55$ に対する $z/h=0.25, 0.5, 0.75$ の各地点の濃度の発達過程を示したもので、濃度はそれぞれの高さの平衡濃度で規格化されている。この図から、河床に近い程、濃度は平衡状態に早く近づくことがわかる。これについては実験より検証する必要があるが、Yalin らの実験¹²⁾でも同様の傾向が見られており、ほぼ妥当な結果であると思われる。また、この条件では、 $d=0.01\text{cm}$ の粒子の場合、原点から約 20m の地点で濃度分布が平衡に達しているが、この平衡到達距離 X について次に考察する。

X は浮遊砂の最大飛行距離 X_L に一致する。 X_L は厳密には ∞ であるが、ここでは、河床を離脱した粒子

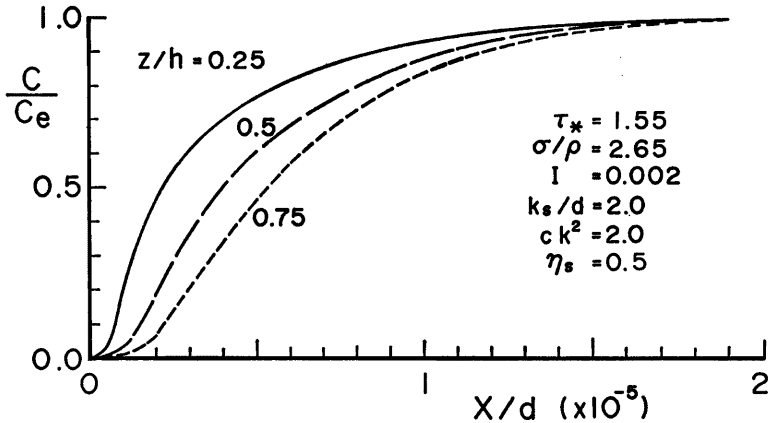


Fig. 9 Example of variation of dimensionless concentration at $z/h=0.25, 0.50$ and 0.75 with dimensionless longitudinal distance X/d

が浮遊状態にある確率 P_i が 0.01, すなわち, $P_i = \int_0^{\hat{h}} f(z, t) dz = 0.01$ となる距離を X_L と定義する。Fig. 10 は, $\sigma/\rho = 2.65$, $I = 1/500$, $k_s/d = 2.0$, $ck^2 = 2.0$, $\eta_s = 0.5$ の条件に対して, $X_s (= X_s/d)$ の τ_* による変化を示したものである。図中には, $P_i = 0.5$ に対応する飛行距離 X_{Lm} (平均飛行距離) の計算結果も示している。この図より, 実河川の洪水時のように, $\tau_* > 10$ の条件では, $X_s > 10^6$ となり, $d = 0.01\text{cm}$ の粒子の場合, $X_s > 100\text{m}$ となる。したがって, 河川上流域でアーマーコートが伝播し, 河床材料が流下方向に変化している場合, 以上のような条件下では, X_s が数百 m かそれ以上になるものと考えられ, そのような場における非平衡浮遊砂量の算定が重要な問題となる。次章で, これに関して検討する。

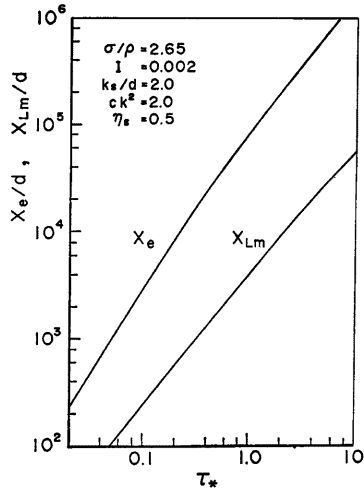


Fig. 10 Variation of the dimensionless longitudinal distance X_i/d at which concentration grow equilibrium vales with dimensionless shear stress τ_*

4. アーマーコートの形成過程に伴う非平衡浮遊砂量

4.1 非平衡浮遊砂量式

流れの場は前章と同様であるが, 移動床部は混合砂礫で構成されているものとし, その中の最大粒径の礫は移動しないいわゆる parallel degradation の状態を対象とする。移動床上の粒径 d_i の粒子 i に着目して, その粒子の浮遊砂量の算定法について考える。

本章の解析が3章のものとは異なる点は, 各地点の浮上率および各地点から離脱した粒子の存在高さの確率分布が時刻 t の関数となり, 濃度が場所と時間の関数となることである。時刻 t , 地点 x から浮上した粒子が時刻 T に地点 X に存在するものとする, 時刻 T , 地点 X における粒子 i による浮遊砂濃度分布 C_i は次式で表示される。

$$C_i(X, z, T) = \int_0^{\tau_{maxi}} \frac{1}{\sigma} q_{ii}(x, t) \cdot f_i(x, z, \tau, t) d\tau \dots\dots\dots(15)$$

ただし, $\tau = T - t$, $X = x + u_{pi}(\tau) \cdot \tau$, $\tau_{maxi} = \min(T, X/u_{pi}(\tau_{maxi}))$ である。ここに, $q_{ii}(x, t)$: 時刻 t , 地点 x における粒子 i の浮上率, $f_i(x, z, \tau, t)$: 時刻 t に地点 x から離脱した粒子 i が τ 時間後存在する高さの確率分布である。ここで, $u_{pi}(\tau)$ は式(13), (14)から計算できるが, 簡単のために平均流速 U と関連付けて,

$$u_{pi}(\tau) \equiv \bar{u}_p = k_u U \quad (k_u: \text{比例定数}) \dots\dots\dots(16)$$

とおく。式(16)より, 式(15)は変数変換して次式のように変形される。

$$C_i(X, z, T) = \int_{x_{min}}^x \frac{1}{\sigma} q_{ii}(x, T - \frac{X-x}{\bar{u}_p}) \frac{f_i(x, z, \frac{X-x}{\bar{u}_p}, T - \frac{X-x}{\bar{u}_p})}{\bar{u}_p} dx \dots\dots\dots(17)$$

ただし, $X_{min} = \max(0, X - \bar{u}_p T)$ である。

時刻 T , 地点 X における粒子 i の浮遊砂量 q_{ii} は,

$$q_{ii}(X, T) = \int_0^{\hat{h}} C_i(X, z, T) \bar{u}_p dz \dots\dots\dots(18)$$

で表われ, 河床を離脱した粒子 i が, τ 時間後浮遊状態にある確率 $p_{ii}(x, \tau, t)$ は,

$$p_{ii}(x, \tau, t) = \int_0^h f_i(x, z, \tau, t) dz \dots\dots\dots(19)$$

となるので、式(18)は式(17)、(19)より次式のようなになる。

$$q_{ii}(X, T) = \int_{x_{min}}^x \frac{1}{\sigma} q_{iui}(x, T - \frac{X-x}{\bar{u}_p}) p_{ii}(x, \frac{X-x}{\bar{u}_p}, T - \frac{X-x}{\bar{u}_p}) dx \dots\dots\dots(20)$$

式(20)は式(9)や著者らの研究³³⁾などから計算できるが、そのためには、河床変動や粒度分布の変化の解析を行って、水理条件や河床条件の時間的・場所的变化を明らかにしなければならない。

4.2 浮遊砂を考慮したアーマーコートの形成過程のモデル

(1) 流砂および粒度分布の連続式

アーマーコートの形成時では、砂礫の混合層の厚さ δ は最大粒径 d_{max} 程度である。そこで、掃流砂、浮遊砂による砂礫の交換を $\delta = d_{max}$ 内で、Fig. 11 に示すように考える。空隙率に変化しないものとする、流砂および河床砂礫の粒度分布の連続式は次のようになる。

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial q_B}{\partial x} + \frac{q_{su} - q_{sd}}{1-\lambda} = 0$$

(流砂の連続式) $\dots\dots\dots(21)$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{1}{\delta} \left\{ -\frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial q_{Bi}}{\partial x} - \frac{1}{1-\lambda} (q_{si} - q_{sd}) - \frac{\partial z}{\partial t} p_{oi} \right\} \quad (\text{粒度分布の連続式}) \dots\dots\dots(22)$$

ここに、 $q_B = \sum_i q_{Bi}$, $q_{su} = \sum_i q_{sui}$, $q_{sd} = \sum_i q_{sdi}$, q_{Bi} , q_{sui} および q_{sdi} ：粒径階 i の粒子の掃流砂量、浮上率、沈降率 (単位面積、単位時間当たり沈降する粒子の量)、 p_i , p_{oi} ：粒径階 i の粒子の河床表面における粒度割合とその初期値 (混合層より下部での値)、 λ ：空隙率である。なお、上述の粒子の交換モデル¹³⁾は、掃流砂を対象とした平野のモデルと同様であるが、浮遊砂を考慮している点が平野のモデルと異なる。

(2) 掃流砂量式、浮上率および沈降率

掃流砂量は次式に示す芦田・道上式¹⁴⁾を用いて計算する。

$$\frac{q_{Bi}}{p_i u_* d_i} = 17 \tau_{*ci} \left(1 - \frac{\tau_{*ci}}{\tau_{*cm}} \right) \left(1 - \sqrt{\frac{\tau_{*ci}}{\tau_{*cm}}} \right) \dots\dots\dots(23)$$

ここに、 d_i ：粒径階 i の平均粒径、 τ_{*ci} ： d_i に対する無次元せん断応力、 τ_{*cm} ：粒径階 i の無次元限界掃流力である。 τ_{*ci} は Egiazaroff の 粒径別限界掃流力の式¹⁵⁾と芦田・道上によるその修正式¹⁴⁾を用いて次式で算定する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d_i}{d_m} \geq 0.4; & \quad \frac{\tau_{*ci}}{\tau_{*cm}} = \left\{ \frac{\log_{10} 19}{\log_{10} (19 d_i / d_m)} \right\}^2 \\ \frac{d_i}{d_m} < 0.4; & \quad \frac{\tau_{*ci}}{\tau_{*cm}} = 0.85 \frac{d_m}{d_i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

ここに、 d_m ：河床表面の平均粒径、 τ_{*cm} ： d_m に対する無次元限界掃流力である。

q_{sui} は式(9)より次式で計算される。

$$q_{sui}(X, T) / \rho \sqrt{g d_i} = \frac{2}{3} K p_i \sqrt{\frac{6}{\pi} (s+1)} \int_{\gamma_{oi}}^{\infty} \frac{u_*}{\sqrt{g d_i}} \sqrt{ck_i^2 \eta - \frac{\pi}{8} C_{D_{oi}} \xi_{oi}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \eta^2\right) d\eta \dots\dots(25)$$

ここに、 $\gamma_{oi} = (\pi/8) \cdot C_{D_{oi}} \xi_{oi}^2 / (ck_i^2)$, $C_{D_{oi}} = 2 + 24\nu / (w_{oi} d_i)$, $\xi_{oi} = w_{oi} / u_*$ で、 w_{oi} ：粒径階 i の粒子の平均沈降速度、 k_i ：粒径階 i の粒子に対する遮蔽係数である。

q_{sdi} は式(20)と $p_{ii}(x, \tau, t)$ を用いて次式で表示される。

$$q_{sdi}(X, T) = \int_{x_{min}}^x \frac{1}{\sigma} q_{sui}(x, T - \frac{X-x}{\bar{u}_p}) \cdot \frac{d}{dx} p_{ii}(x, \frac{X-x}{\bar{u}_p}, T - \frac{X-x}{\bar{u}_p}) dx \dots\dots\dots(26)$$

(3) $p_{ii}(x, \tau, t)$ の近似解

p_{ii} は文献³⁾より解析できるが、複雑な計算を必要とするので、次に示すような近似法を考える。 $t_{im}(=$

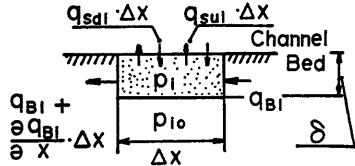


Fig. 11 A model for exchange of bed material

$b \cdot h/U$ 時間ごとにステップを区切り, ステップ間の粒子の運動を $w_f - w_{0i}$ で近似する。 w_f の確率分布を平均 0, 標準偏差 u_{*k} の正規分布とすると, ステップ n 後に z_{pn} に存在する粒子 i がステップ $(n+1)$ 後に存在する高さ z_{pn+1} の確率分布は次式で表わされる。

$$g_i(z_{pn+1}|z_{pn}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} u_{*k} t_{sm}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z_{pn} - z_{pn+1} + w_{0i} t_{sm}}{u_{*k} t_{sm}}\right)^2\right\} \dots\dots\dots (7)$$

ステップ 1 後の粒子の位置 z_{p1} に文献3)の手法によって求められる z_{p1} の平均値を用いると, ステップ n 後の粒子 i の存在高さの確率分布は, 次の漸化式から計算できる。

$$\left. \begin{aligned} f_{ni}(z_{pn}) &= \int_0^{z_{pn}} f_{n-1i}(z_{pn-1}) g_i(z_{pn}|z_{pn-1}) dz_{pn-1} \\ f_{1i}(z_{p1}) &= \delta(z_{p1} - \bar{z}_{p1}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここに, δ : デルタ関数である。この手法は Yalin ら¹⁶⁾のモデルと同様であるが, \bar{z}_{p1} を粒子の浮遊機構から求めている点が彼らのものと異なる。式(8)より, ステップ n 後, 粒子 i が浮遊状態にある確率は $p_{ni} = \int_0^{z_{pn}} f_{ni}(z_{pn}) dz_{pn}$ であり, 時刻 t において地点 x に存在する粒子 i がステップ n の運動過程にあるとすれば, p_{ni} は次式で計算される。

$$p_{ni}(x, \tau, t) = \frac{(t - T_{n-1})p_{n-1i} + (T_n - t)p_{ni}}{t_{sm}} \dots\dots\dots (9)$$

ここに, T_i : ステップ i の終了時刻である。

ところで, f_{ni} の値はアーマールコート¹⁷⁾の発達とともに変化するが, parallel degradation では水理条件がそれ程変化しないことと, 粒子が一旦河床を離脱すれば, 粒子の運動に河床条件はあまり影響しないことから, ここでは, f_{ni} は $t=0$ (通水開始時) の値を用いることにする。**Fig. 12** は後述の実験条件に対して, 文献3)による p_{ni} の計算値と式(9)の近似解を比較したもので, 両者はよく一致しており, この方法で p_{ni} が十分近似計算できることがわかる。

(4) p_i と c, k_i の関係

浮上率 q_{smi} の計算には, c および k_i の値が必要になるが, それらは河床表面の粒子 i の粒度割合 p_i から, 河床の平均粒径 d_m や粒子 i の存在高さ a_i/d_r を求めて, **Fig. 2, 3** より推定される。ここに, a_i : 粒子 i に対する a である。ここで, a_i/d_r と p_i の関係が問題であるので, それについて検討する。まず, 簡単な場合として, 粗砂 ($i=1$) と細砂 ($i=2$) の二粒径混合砂を考える。この場合 $d_r = d_1$ であり, 粗砂と細砂の河床表面 (厚さ d_r の層) に存在する体積が p_1 と p_2 から計算できるので, その体積比から a_2 の値が求められる。**Fig. 13** は p_2 と $\Delta = d_1 - a_2$ の関係を上述の考え方によって計算した結果を示したもので, 次節で述べる実験に対するシミュレーションではこの関係を用いている。次に, 連続的な粒度分布の場合についても, この方法を応用して, a_i/d_r の値を求めることができる。すなわち, 混合砂を $d > d_i$ の粒子と $d \leq d_i$ の粒子の二種類に分け, 両者の平均粒径

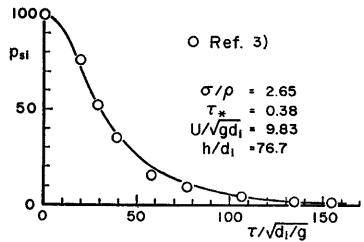


Fig. 12 Comparison between p_{ni} calculated by ref. 3) and ones by its approximate method

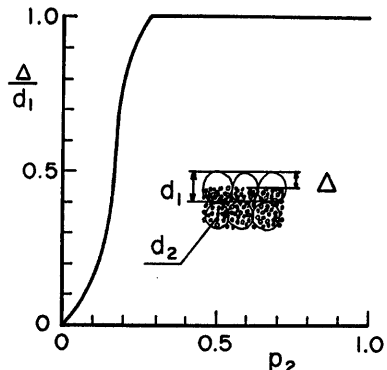


Fig. 13 Relation between the mixing rate of sand on bed p_2 and the position of it among gravels Δ

と粒度割合, d_{1i} , p_{1i} および d_{2i} , p_{2i} から, 上述の解析より $d \leq d_i$ の粒子の存在高さ a_{2i} を求める。ここで $a_i = a_{2i}$, $d_r = d_i$ と考えられるので, 以上より, a_i/d_r の値が算定される。しかし, これについての妥当性は今後検証する必要がある。

以上より, 擬似等流 ($\partial z/\partial x = u_*^2/g_h$) の仮定のもとに, 抵抗則に対数則 $U/u_* = 6.0 + 5.75 \log(h/k_s)$ を用いると, 流砂量や河床位, 粒度分布の時間的, 場所的変化が解析される。

4.3 実験結果と理論結果の比較

(1) 実験条件と方法

実験は幅 30cm, 長さ 8m, 勾配 0.008 の水路を用いて行った。実験用砂は, 平均粒径 $d_1 = 2.66\text{mm}$ の A 砂と $d_2 = 0.18\text{mm}$ の B 砂を約 7 : 4 の割合で混合した M 砂であり, その粒度分布を Fig. 14 に示す。M 砂を 5.5m の区間に敷き, 単位幅流量 57cm/sec, 初期摩擦速度 3.3cm/sec の条件で通水し, 河床位, 水位, 浮遊砂量, 下流端全流砂量, 河床の粒度分布などの測定を行った。この条件では B 砂のみが流送され, アーマーコートが形成される。浮遊砂の採集には, 流下方向に 4 箇所設置された直径 0.75 cm のサイフォンを用い, Rouse の濃度分布則と対数則を使って浮遊砂量を換算した。なお, 実験では移動床部の上・下流では固定床とし, 上流からの給砂は行っていない。

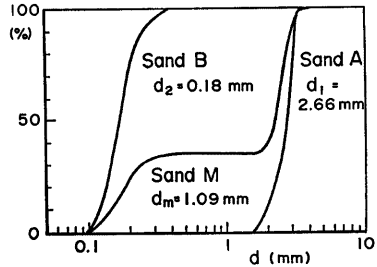


Fig. 14 Grain-size distribution of the sands used in the experiment

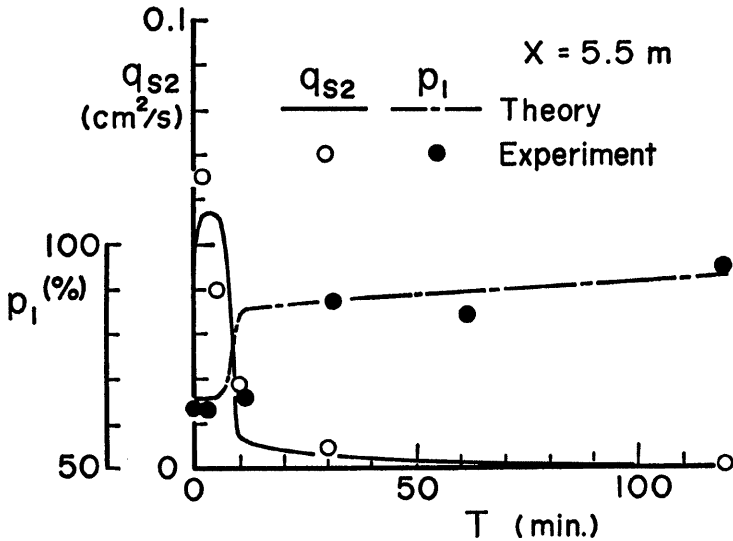


Fig. 15 Comparison between theoretical results and experimental ones concerning the mixing rate of gravel on bed p_1 and suspended load of sand q_{s2} at $X=5.5\text{m}$

(2) 実験結果

Fig. 15 は $X=5.5$ m (移動床部の下流端) における粗砂の割合 p_1 と浮遊砂量 q_{s2} の時間変化を示したものである。この図から、通水を開始してから約10分後にアーマールコートが伝播しており、浮遊砂量や河床表面の細砂の割合が急激に減少していることがわかる。アーマールコートが伝播してくると、上流域での浮上率が減少し、このように浮遊砂量が急激に減少する。Fig. 16 は q_{s2} の縦断分布の時間変化を示したものである。実験値が少ないことや通水開始時等流状態になるまでに上流の細砂が若干流送されたことおよび水路長が短いために、浮遊砂量が平衡状態になっている領域がはっきりしないが、時間の経過とともに、非平衡浮遊砂の領域が下流へ広がっている様子がわかる。

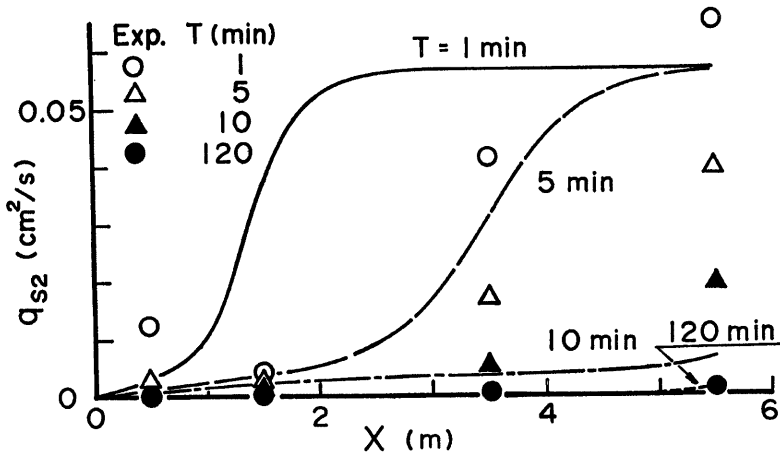


Fig. 16 Comparison between theoretical results and experimental ones concerning variation of suspended load q_{s2} with longitudinal distance X

(3) 理論値と実験値の比較

本実験条件に対して、4.1, 4.2 で検討した理論に従って、実験のシミュレーションを行った。計算は差分法で行い、流下方向の差分を $\Delta x=5$ cm, 時間差分を $\Delta t=\Delta x/\bar{u}$, とした。この Δx の値は、この条件に対する粒径 d_s の粒子の X , の約 1/5 である。計算にあたって、 $k_s/d_m=2$, $\eta_s=0.25$, $k_n=1.0$ とおいた。Fig. 15, 16 に理論結果を示す。これらの図から、理論値は、アーマールコートの形成過程を比較的良く模擬しており、それに伴って生じる非平衡浮遊砂量を実験値の傾向をよく表わしている。

以上のように、本理論は非平衡浮遊砂の問題に対しても十分適用することができると考えられ、今後、実河川の場合の非平衡浮遊砂量やアーマールコートの形成過程について、上述の解析より明らかにしてゆきたい。

5. 結 論

以上、河床砂礫の浮上率を明らかにし、浮遊砂の運動モデルに関する著者らの研究成果に基づいて、平衡浮遊砂濃度分布の算定法について検討した。さらに、非平衡浮遊砂が問題となるアーマールコートの形成過程についてモデル化し、実験結果より、本理論の非平衡浮遊砂への適用性について考察した。本研究で得られた成果を要約すると次のようである。

- (1) 河床砂礫の浮上率の推定式を、礫の遮蔽効果を考慮して導き、その妥当性を実験値から検証した。ま

た、この式に含まれる実験定数 k_1 の物理的な意味について検証した結果、 k_1 は河床粒子が浮上可能な状態にある確率を表わし、それは隣接粒子との接線がすべて上で開く確率で説明できた。

(2) 浮上率の式中に含まれる遮蔽係数 k と揚圧力係数 c を、浮遊限界に関する従来の結果より推定し、それらを礫の間隙中の粒子の位置と砂粒 Reynolds 数の関数で図示した。

(3) 浮上率の推算式と浮遊砂の運動モデルに関する著者らの研究によって、平衡浮遊砂濃度分布の算定式を提案した。この式の妥当性は実験値との比較より明らかにされた。

(4) 平衡濃度到達距離 $X_s (= X_s/d)$ を σ/ρ , I , k_1/d , ck^2 , η_s 一定の条件で τ_* をパラメータとして解析した。これより、実河川の洪水時に対する条件について X_s を例示的に計算した結果、 X_s は数百 m かそれ以上になることが明らかにされ、非平衡浮遊砂の解析の必要性が示された。

(5) アーマーコートの形成過程のモデル化を浮遊砂を考慮して行い、この過程に伴って生じる非平衡浮遊砂量の解析手法を提示した。この理論の妥当性は、二粒径混合砂を用いた実験より検証された。

本研究では、アーマーコートの形成過程について、理論的にも実験的にも二粒径混合砂の場合についてしか検討していない。今後は、連続的な粒度分布の混合砂礫の場合についても考察を加える必要がある。また、アーマーコートの破壊過程において流出する土砂量も非常に多く、この過程における浮遊砂の流出機構を明らかにして、この過程で発生する浮遊砂量の推定法についても検討してゆきたい。最後に、本研究を遂行するにあたり、実験や図面作製、資料整理に御協力いただいた、京都大学防災研究所技官吉田義則氏ならびに京都大学工学部学生藤坂賢治君に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 吉川秀夫・石川忠晴：流砂運動のモデル化とそれに基づく流砂量の算定法について、土木学会論文報告集，第269号，1978，pp. 53-64.
- 2) 芦田和男・藤田正治：粗面上の粒子の浮遊機構と浮遊限界に関する研究，京都大学防災研究所年報第26号 B-2，1983，pp. 363-377.
- 3) 芦田和男・藤田正治：粒子の浮遊運動と河床付近の流れ，京都大学防災研究所年報第27号 B-2，1984，pp. 355-367.
- 4) 芦田和男・道上正規：浮遊砂に関する研究(1)―河床付近の濃度―，京都大学防災研究所年報第13号 B，1970，pp. 233-242.
- 5) Itakura, T. and T. Kishi, : Open Channel Flow with Suspended Sediments, Proc. ASCE, HY8, August, 1980, pp. 1325-1343.
- 6) 平野宗夫：浮流砂の流入による貯水池の堆砂過程，九大工学集報，第42巻第6号，1970，pp. 836-842.
- 7) Lane, E. W. and A. A. Kalinske : The Relation of Suspended to Bed Material in Rivers, Tran. AGU, 1939.
- 8) 芦田和男・岡部健士・藤田正治：粒子の浮遊限界と浮遊砂量に関する研究，京都大学防災研究所年報，第25号 B-2，1982，pp. 401-416.
- 9) 芦田和男・岡部健士・藤田正治：粒子の浮遊限界に関する研究，第27回水理講演会論文集，1983，pp. 311-316.
- 10) 久保輝一郎・水渡英二・中川有三・早川宗八郎：粉体，丸善，1964，pp. 208-211.
- 11) 芦田和男・道上正規：浮遊砂量に関する実験的研究，京都大学防災研究所年報，第10号 B，1967，pp. 63-79.
- 12) Yalin, M. S. and G. D. Finlayson : On the Development of the Distribution of Suspended Load, Proc. of IAHR, Vol. 1, Turkey, 1973, pp. 287-294.

- 13) 平野宗夫 : Armouring をともなう河床低下について, 土木学会論文報告集, 第195号, 1971, pp. 55-65.
- 14) 芦田和男・道上正規 : 移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第206号, 1972, pp. 59-69.
- 15) Egiazaroff, I. V.: Calculation of Nonuniform Sediment Concentrations, Proc. ASCE, Vol. 91, H Y4, 1965, pp. 225-247.
- 16) Yalin, M. S. and B. M. Krishnappan : A Probabilistic Method for Determining the Distribution of Suspended Solids in Open Channels, Proc. Intl. Symp. on River Mech., Vol. 1, 1973, pp. 603-614.