

統計的二次近似理論を適用した流出予測システムの構成

高 棹 琢馬・椎 葉 充晴・富澤 直樹

BUILDING OF A RUNOFF PREDICTION SYSTEM ON THE BASIS OF THE STATISTICAL SECOND-ORDER APPROXIMATION THEORY

By *Takuma* TAKASAO, *Michiharu* SHIIBA and *Naoki* TOMISAWA

Synopsis

This research discusses how to build a stochastic state-space runoff model from a given deterministic one by introducing some noise terms into the latter in order to compensate observation and model errors, and develops the technique for the construction of a real-time stochastic runoff prediction system by the application of the filtering and prediction theory to the stochastic model.

In order to cope with the non-linearity of the system, the statistical second-order approximation theory is applied. This theory found in Mahalanabis-Farooq's work is extended to multidimensional cases in this research. The numerical technique for the realization of the second-order approximation is developed by the use of the U-D factorization of covariance matrices and the Hermite-Gauss integration formula.

An example in which the application of our method improves prediction performance is presented.

1. 概 要

本研究は、確率ベクトルの関数の統計的二次近似理論と統計的二次近似フィルタ理論を展開し、これを応用した流出予測システムの構成を提案するものである。

統計的二次近似手法については、Sunahara¹⁾による統計的線形化フィルターの拡張に関連してMahalanabis-Farooq²⁾がすでに議論しているが、変数、関数値ともスカラー値の場合を取り扱っており、ベクトル値の場合についてはその拡張の可能性に言及するにとどめている。本研究では、変数や関数がベクトルである場合の統計的二次近似理論を一般的に展開し、統計的二次近似と統計的線形化の関係を明らかにするとともに、確率ベクトルの分散行列のUD分解とHermite-Gauss積分公式を用いた統計的二次近似の実現手法を提案する。

流出予測システムの構成手順を筆者らはFig. 1.1のように考えている。まず、基礎とする決定論的状態空間型流出モデルが与えられているとする。このモデルに観測誤差・モデル誤差に対応すると考えるノイズを導入し、確率過

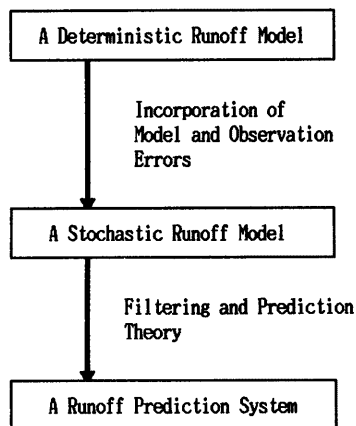


Fig. 1.1 Building of a runoff prediction system

程の状態空間型流出モデルに変換する。Fig. 1.1 の上の矢印がこのステップを表している。次に、確率過程の流出モデルにフィルタリング・予測理論を適用して流出予測システムを構成する。Fig. 1.1 の下の矢印がこの第二のステップを表している。

第一のステップでは、ノイズ項をどのようにモデル化するかが問題となる。ノイズ項のモデルについては種々議論のあるところであるが³⁾、本研究では、たとえば Jazwinski⁴⁾ によって定式化され、Bierman⁵⁾ によって動的システムのフィルタリング・予測に応用されている有色ノイズモデルをもちいる。

第二のステップでは、フィルタリング・予測のアルゴリズムの数値的安定性、モデル中の非線形関数の取扱、降雨予測システムとの結合等が問題となる。Kalman フィルターアルゴリズムをそのままディジタルコンピュータで実行すると、桁落ちのためしばしば推定値が全く信頼できないものになる。本研究では、Kalman フィルターの数値的安定性を改善した Bierman の UD フィルターアルゴリズム^{5,6)} を用いる。非線形関数に対しては統計的二次近似手法を適用する。統計的二次近似の実現にあたっては推定誤差分散行列が UD 分解されていると好都合であり、その点でも Bierman の UD フィルターアルゴリズムを用いるのが便利である。流出予測と降雨予測との結合については、既に筆者らによって議論されているが^{7),8)}、UD 分解による定式化と結合するために本研究でもあらためて議論する。

2. 統計的二次近似の理論と統計的二次近似フィルター

流出予測問題に Kalman のフィルタリング・予測理論を適用するとき最も問題となるのは非線形関数の取扱である。本研究では、非線形関数に統計的二次近似手法を適用することを提案する。

本章では、確率ベクトルのベクトル値関数の統計的二次近似理論を展開し、統計的線形化との関係を明らかにするとともに、確率ベクトルの分散行列の UD 分解と Hermite-Gauss 積分公式を用いた統計的二次近似の実現手法を提案する。また、統計的二次近似手法を用いた非線形フィルターを提示する。これらは、Mahalanabis-Farooq²⁾ の研究の拡張である。

2.1 統計的二次近似の理論

(1) 統計的二次近似の定義とその実現

N 次元の確率ベクトル X とそのスカラー値関数 $g(X)$ が与えられているとする。 $\bar{X}$ は平均値、 $\bar{P}$ は正則な分散行列 $\bar{P}$ を持ち、正規分布に従うとする。すなわち、

$$X \sim N(\bar{X}, \bar{P}) \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

とする。スカラー値 B^* , N 次行ベクトル H , N 次対称行列 A を

$$J(B^*, H, A) = E\{[g(X) - (B^* + H(X - \bar{X})) + \frac{1}{2}(X - \bar{X})^T A (X - \bar{X})]]^2\} \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

が最小となるように定め、

$$g(X) \simeq B^* + H(X - \bar{X}) + \frac{1}{2}(X - \bar{X})^T A (X - \bar{X}) \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

と近似することを関数 $g(X)$ の統計的二次近似 (statistical second-order approximation) と呼ぶことにする。ただし、上つき添字の T は転置記号、 $E\{\cdot\}$ は期待値記号である。関数 $g(X)$ がベクトル値の場合は成分ごとに統計的二次近似するものとする。

$J(B^*, H, A)$ を最小にする B^* , H , A は、 B^* , H , A の各成分で $J(B^*, H, A)$ を偏微分し 0 と等値して得られる方程式

$$B^* = E\{g(X)\} - \frac{1}{2}tr[A\bar{P}] \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

$$\bar{P}H^T = E\{(X - \bar{X})g(X)\} \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

$$\bar{P}A\bar{P}^T = E\{(X - \bar{X})(X - \bar{X})^T g(X)\} - E\{g(X)\}\bar{P} \quad \dots\dots\dots(2.6)$$

から定められる。ただし、 $\text{tr}[\cdot]$ は正方行列の対角成分の和を表す。(2.5), (2.6) 式を導くときに正規分布に対して成り立つ性質

$$E\{(X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j)(X_k - \bar{X}_k)\} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.7)$$

$$E\{(X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j)(X_k - \bar{X}_k)(X_l - \bar{X}_l)\} = \bar{P}_{ij}\bar{P}_{kl} + \bar{P}_{ik}\bar{P}_{jl} + \bar{P}_{il}\bar{P}_{kj} \quad \dots\dots\dots(2.8)$$

を用いた。ここで、 $X_i, \bar{X}_i$ はそれぞれ $X, \bar{X}$ の第 i 成分、 $\bar{P}_{ij} = \text{Cov}\{X_i, X_j\}$ (X_i と X_j の共分散) である。(2.4)～(2.6) 式の右辺の値は (2.1) 式の仮定から少なくとも理論上は算定できる。実際に (2.1) 式の仮定が成り立つことが保証されていない、単に $\bar{X}$ が X の推定値、 $\bar{P}$ が $\bar{X}$ による X の推定誤差分散行列である場合でも、(2.3) 式中の B^*, H, A を求めるための一つの近似として正規分布仮定 (2.1) を置く。

実は、 X が正規分布に従うとしても、 $g(X)$ が X の整多項式であるなど簡単な関数である場合を除いて、(2.4)～(2.6) 式右辺の期待値を解析的に求めるのは困難である。これらの期待値を計算するのに利用できる数値積分公式の一つに Hermite-Gauss 積分公式⁹⁾ がある。この公式によれば、 $\bar{D}$ を N 次正値対角行列として、 N 次確率ベクトル Z が、

$$Z \sim N(0, \bar{D}) \quad \dots\dots\dots(2.9)$$

であるとき、 N 次元実ベクトル ξ の関数 $f(\xi)$ によって定められる確率変数 $f(Z) = f(Z_1, \dots, Z_N)$ の期待値は、 $\bar{D}$ の (i, i) 成分を d_i として、

$$E\{f(Z)\} = \sum_{k_1, \dots, k_N=1}^{N_{HG}} f(\sqrt{d_1}\beta_{k_1}, \dots, \sqrt{d_N}\beta_{k_N})p_{k_1}\dots p_{k_N} \quad \dots\dots\dots(2.10)$$

によって近似的に求められる。ただし、 N_{HG} は標本点の個数、 $\beta_i, i=1, \dots, N_{HG}$ は標準正規分布に対する標本点座標値、 $p_i, i=1, \dots, N_{HG}$ はこれらの標本点に対する重みである。参考のため Table 2.1 に $N_{HG}=2\sim 7$ のときの標本点の座標値と重みを示す。

この公式を利用するために、単位上三角行列 (対角成分が1の上三角行列) $\bar{U}$ と対角行列 $\bar{D}$ で $\bar{P}$ が

$$\bar{P} = \bar{U}\bar{D}\bar{U}^T \quad \dots\dots\dots(2.11)$$

Table 2.1 Hermite-Gauss approximation of the standard gaussian distribution

$\beta_i, i=1, \dots, N_{HG}$: abscissa $p_i, i=1, \dots, N_{HG}$: probability		
N_{HG}	$\beta_i, i=1, \dots, N_{HG}$	$p_i, i=1, \dots, N_{HG}$
2	± 1.000000000000000	0.500000000000
3	± 1.732050807568877 0.0	0.166666666667 0.666666666667
4	± 2.334414218338978 ± 0.741963784331010	$0.458758547681 \times 10^{-1}$ 0.454124145232
5	± 2.856970013872806 ± 1.355626179974267 0.0	$0.112574113277 \times 10^{-1}$ 0.222075922006 0.533333333333
6	± 3.324257433552119 ± 1.889175877753711 ± 0.616706590192595	$0.255578440206 \times 10^{-2}$ $0.886157460419 \times 10^{-1}$ 0.408828469556
7	± 3.750439717725741 ± 2.366759410734541 ± 1.154405394739969 0.0	$0.548268855972 \times 10^{-3}$ $0.307571239676 \times 10^{-1}$ 0.240123178605 0.457142857143

と分解されているとする。この形の分解は UD 分解 (UD covariance factorization)⁵⁾ と呼ばれている。

この $\bar{D}$ が (2.9) 式の $\bar{D}$ と同一とすると、

$$X = \bar{X} + \bar{U}Z \quad \dots\dots\dots(2.12)$$

と考えることができるので、 $f(Z) = g(\bar{X} + \bar{U}Z)$ において公式 (2.10) を用いると $E\{g(X)\}$ が求められる。

この考え方に基いて、(2.11)、(2.12) 式を (2.4)～(2.6) 式に代入すると

$$B^* = E\{g(\bar{X} + \bar{U}Z)\} - \frac{1}{2} \text{tr}[A \bar{U} \bar{D} \bar{U}^T] \quad \dots\dots\dots(2.13)$$

$$\bar{D} \bar{U}^T H = E\{Z g(\bar{X} + \bar{U}Z)\} \quad \dots\dots\dots(2.14)$$

$$\bar{D} \bar{U}^T A \bar{U} \bar{D} = E\{Z Z^T g(\bar{X} + \bar{U}Z)\} - E\{g(\bar{X} + \bar{U}Z)\} \bar{D} \quad \dots\dots\dots(2.15)$$

が得られる。これらの右辺の期待値は公式 (2.10) を用いて求められるから、この方程式を解いて B^* , H , A を求めることができる。 $\bar{D}$ は対角行列、 $\bar{U}$ は上三角行列であるから、(2.14) 式を H について、(2.15) 式を A について解くのは容易である。本研究では、以上の方法により統計的二次近似を実行する FORTRAN 77 によるサブルーチン SOAP を用意した (サブルーチン SOAP を含め本論文で言及するサブルーチンのプログラムリストについては文献10) を参照されたい)。

フィルタリング・予測の際に、推定誤差分散行列を (2.11) 式のように UD 分解した形で保持・更新していく UD フィルターアルゴリズムが Bierman⁵⁾ によって提案されている。この UD フィルターアルゴリズムを併用すれば、統計的二次近似のためにわざわざ分散行列を UD 分解する必要もなく、しかも数値的に安定なアルゴリズムとなって非常に好都合である。本研究では、この UD フィルターアルゴリズムを統計的二次近似とともに用いることを提案する。

(2) 統計的二次近似の性質と関数値計算回数の削減

確率ベクトル X の次元を N とし、Hermite-Gauss N_{HG} 点公式を用いて関数 $g(X)$ を統計的二次近似する場合、関数値 $g(X)$ を $N_{HG}N$ 回計算する必要がある。したがって、確率ベクトル X の次元 N が大きくなると関数値計算コストは飛躍的に増大する。しかし、幸いにして統計的二次近似しようとしている関数 $g(X)$ の形によっては、関数値計算を大幅に削減することができる。これは統計的二次近似の次の性質による。

① [統計的二次近似の重合せ] 関数 $g_i(X)$, $i=1, \dots, m$ の統計的二次近似が

$$g_i(X) \simeq B_i^* + H_i(X - \bar{X}) + \frac{1}{2}(X - \bar{X})^T A_i(X - \bar{X})$$

で与えられるとき、 $\sum_{i=1}^m g_i(X)$ の統計的二次近似は、

$$\sum_{i=1}^m g_i(X) \simeq \sum_{i=1}^m \left\{ B_i^* + H_i(X - \bar{X}) + \frac{1}{2}(X - \bar{X})^T A_i(X - \bar{X}) \right\}$$

で与えられる。

② [部分ベクトルの周辺分布に関する統計的二次近似]

X の一部の成分からなる確率ベクトル V の関数 $g(V)$ を統計的二次近似するときは、 V の周辺分布だけを考慮して統計的に二次近似してよい。

性質①は、(2.4)～(2.6) 式の $g(X)$ に対する線形性による。性質②の証明は付録で与える。本研究では、MWG-S 法⁵⁾ を用いて、部分ベクトル V の分散行列の UD 分解を X の分散行列の UD 分解から直接求めるサブルーチン UDPART を用意した。したがって、 $g(V)$ の統計的二次近似を得るには、サブルーチン UDPART を用いて V の分散行列の UD 分解を求めた後、サブルーチン SOAP を使えばよい。

通常の流出モデルにあらわれる関数のほとんどは、性質①、②を用いて統計的二次近似のための関数値計算回数を大幅に削減できるタイプである。例えば、後述する4段のタンクモデル (Fig. 3.1) で、各タンク

の貯水深を状態量にとり、1段目の側方流出強度の統計的二次近似をする場合を考えよう。1段目の側方流出強度を4個の貯水深全部の関数と考え、Hermite-Gauss 3点公式を用いるとして3⁴=81回も関数値を計算する必要がある。実際は、第1段タンクの側方流出強度は第1段タンクの貯水深だけの関数であるから、第1段タンクの貯水深の周辺分布に関して統計的二次近似すれば、関数値計算回数は僅かに3回である。

Taylor 近似を利用する方法とは異なり、統計的二次近似は関数の微分を考えないので、Taylor 展開できない関数に対しても適用できる。上述したタンクモデルはその例である。

(3) 統計的二次近似と統計的線形化の関係と近似誤差の相関構造

前項まで確率ベクトル X のスカラー値関数の統計的二次近似を中心として議論してきたが、本項では、一般的に関数 $g(X)$ は m 次のベクトル値をとるものとする。

統計的二次近似の意義を明確にするため、Sunahara¹⁾ による統計的線形化をも考えよう。統計的二次近似と同様、(2.1) 式の正規分布仮定のもとで、 m 次列ベクトル B 、 $m \times N$ 次行列 H を

$$E\{[g(X) - [B + H(X - \bar{X})]]^2\} \dots\dots\dots (2.16)$$

が最小になるように定めて、

$$g(X) \simeq B + H(X - \bar{X}) \dots\dots\dots (2.17)$$

と近似することを統計的線形化 (statistical linearization) という。(2.16) 式を最小にする B, H は、

$$B = E\{g(X)\} \dots\dots\dots (2.18)$$

$$\bar{P}HT = E\{(X - \bar{X})g(X)\} \dots\dots\dots (2.19)$$

によって定められる。統計的線形化についても前項で述べた性質①、②が成り立つ。

ここで統計的線形化の誤差 e_1 を

$$e_1 = g(X) - [B + H(X - \bar{X})] \dots\dots\dots (2.20)$$

で定めると、(2.18)、(2.19) 式により、

$$E\{e_1\} = 0 \dots\dots\dots (2.21)$$

$$\text{Cov}\{e_1, X\} = 0 \dots\dots\dots (2.22)$$

$$\begin{aligned} V\{e_1\} &= V\{g(X)\} - H\bar{P}H^T \\ &= V\{g(X)\} - \text{Cov}\{g(X), X\}\bar{P}^{-1}\text{Cov}\{X, g(X)\} \dots\dots\dots (2.23) \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、 $V\{\cdot\}$ 、 $\text{Cov}\{\cdot, \cdot\}$ はそれぞれ分散行列、共分散行列を表す。すなわち、統計的線形化誤差 e_1 は期待値 0 で X とは無相関であって、その分散行列は (2.23) 式を用いて (少なくとも理論上は) 計算することができる。ただし、分散行列 $V\{g(X)\}$ は $g(X)$ に関して線形ではないから、Hermite-Gauss N_{HG} 点公式を用いてその値を求めようとすると N_{HG}^N 回関数値を計算しなければならない。この場合には関数値計算回数を削減することはできない。したがって、 X の次元 N が小さい場合は別として分散行列 $V\{g(X)\}$ したがって $V\{e_1\}$ を評価するのは不可能ではないにしても多大な計算コストを要することになる。それゆえ通常 e_1 の分散は無視される。

一方、統計的二次近似は次式で与えられる。

$$g(X) \simeq B + H(X - \bar{X}) + \delta - E\{\delta\} \dots\dots\dots (2.24)$$

ただし

$$B = E\{g(X)\} \dots\dots\dots (2.25)$$

$$\bar{P}HT = E\{(X - \bar{X})g(X)\} \dots\dots\dots (2.26)$$

$$\bar{P}A_i\bar{P} = E\{(X - \bar{X})(X - \bar{X})^T g_i(X)\} - E\{g_i(X)\}\bar{P} \dots\dots\dots (2.27)$$

$$\delta_i = \frac{1}{2}(X - \bar{X})^T A_i (X - \bar{X}) \dots\dots\dots (2.28)$$

$$E\{\delta_i\} = \frac{1}{2} \text{tr}[A_i \bar{P}] \dots\dots\dots (2.29)$$

である。ここで、 B は m 次列ベクトル、 H は $m \times N$ 次行列、 A_i は N 次対称行列、 δ は δ_i を第 i 成

分とする m 次列ベクトルである。(2.3) 式とは異なって、(2.24) 式では二次項 δ の期待値 $E\{\delta\}$ があらわれているが、その分 (2.25) 式によって B を定めているので (2.3) 式の内容と (2.24) 式の内容とは同一である。この式形にかくと、統計的二次近似の $B+H(X-\bar{X})$ の部分が統計的線形化 (2.17) 式の右辺と同じになることに注意されたい。よって、統計的二次近似の誤差 e_2 を

$$e_2 = g(X) - [B + H(X - \bar{X}) + (\delta - E\{\delta\})] \dots\dots\dots (2.30)$$

と定めると、統計的線形化誤差 e_1 は、次式であらわされる。

$$e_1 = (\delta - E\{\delta\}) + e_2 \dots\dots\dots (2.31)$$

実は、

$$E\{e_2\} = 0, \quad \text{Cov}\{e_2, X\} = 0, \quad \text{Cov}\{\delta, X\} = 0, \quad \text{Cov}\{e_2, \delta\} = 0 \dots\dots\dots (2.32)$$

が成り立つことを示すことができる。よって特に

$$V\{e_1\} = V\{\delta\} + V\{e_2\} \geq V\{\delta\} \dots\dots\dots (2.33)$$

が成り立つ。これは統計的線形化誤差 e_1 の分散行列 $V\{e_1\}$ を二次項 δ の分散行列 $V\{\delta\}$ で近似する可能性を示すものである。

すでに述べたように統計的線形化誤差 e_1 の分散行列 $V\{e_1\}$ を求めるのは容易でないで、統計的線形化を用いるフィルタリング・予測手法では $V\{e_1\}$ を無視した取扱いをする。しかし、(2.33) 式によれば、 $V\{e_1\}$ として少なくとも $V\{\delta\}$ 分だけは見込んでおいた方がよいことが分かる。

UD 分解を用いた $E\{\delta\}$, $V\{\delta\}$ の計算式は次の通りである (サブルーチン COVSOT)¹⁰⁾。

$$E\{\delta_i\} = \frac{1}{2} \text{tr}[A_i^* \bar{D}] \dots\dots\dots (2.34)$$

$$\text{Cov}\{\delta_i, \delta_j\} = \frac{1}{2} \text{tr}[A_i^* \bar{D} A_j^* \bar{D}] \dots\dots\dots (2.35)$$

ただし

$$A_i^* = \bar{U}^T A_i \bar{U} \dots\dots\dots (2.36)$$

である。

2.2 統計的二次近似フィルタ

(1) 線形最小分散推定値と線形フィルタ

結合分布している N 次元の確率ベクトル X と L 次元の確率ベクトル Z を考え、これらの平均値と分散・共分散行列が既知であるとして、次のように表す。

$$\bar{X} = E\{X\}, \quad \bar{Z} = E\{Z\} \dots\dots\dots (2.37)$$

$$\Sigma_{XX} = V\{X\} \dots\dots\dots (2.38)$$

$$\Sigma_{XZ} = \text{Cov}\{X, Z\} \dots\dots\dots (2.39)$$

$$\Sigma_{ZZ} = V\{Z\} \dots\dots\dots (2.40)$$

このとき、 Z による X の線形最小分散推定値 (= Z の一次式による X の推定式の中で推定誤差のユークリッドノルムの期待値が最小となるものに Z の実現値を代入して得られる値) $X^*[Z]$, および $X^*[Z]$ による X の推定誤差分散行列 $P^*[Z]$ は、

$$X^*[Z] = \bar{X} - \Sigma_{XZ} \Sigma_{ZZ}^{-1} (Z - \bar{Z}) \dots\dots\dots (2.41)$$

$$P^*[Z] = \Sigma_{XX} - \Sigma_{XZ} \Sigma_{ZZ}^{-1} \Sigma_{XZ}^T \dots\dots\dots (2.42)$$

で与えられることが知られている¹¹⁾。

簡単のため、確率ベクトル X の事前情報 Z に関する線形最小分散推定値 $X^*[Z]$ を $\tilde{X}$, その推定誤差分散行列 $P^*[Z]$ を $\tilde{P}$ とかく。このとき、

$$y = HX + w \dots\dots\dots (2.43)$$

なるスカラー値 y が得られたとする。ただし、 H は N 次行ベクトル、 w は X および事前情報 Z には無相関な確率変数で、平均値 0、分散 $R > 0$ をもつとする。この y を事前情報 Z に追加して得られる、す

なわち、事後の X の線形最小分散推定値 $\tilde{X}$ 、その推定誤差分散行列 $\tilde{P}$ は、

$$\tilde{X} = \tilde{X} - K(y - H\tilde{X}) \quad \dots\dots\dots(2.44)$$

$$\tilde{P} = \tilde{P} - KH\tau\tilde{P} \quad \dots\dots\dots(2.45)$$

で求められる。ただし、 K は

$$K = \tilde{P}H^T(H\tilde{P}H^T + R)^{-1} \quad \dots\dots\dots(2.46)$$

で定められる N 次列ベクトルである。(2.44)～(2.46) 式で与えられる線形最小分散推定値と推定誤差分散行列の更新アルゴリズムは Kalman フィルターと呼ばれている。

実際に公式 (2.44)～(2.46) の通りのアルゴリズムをディジタルコンピュータで実行すると、しばしば推定値が全く信頼できないものになる。その原因は推定誤差分散行列の更新式 (2.45) 式で桁落ちがおきやすいことにある。Kalman フィルターのこの数値的不安定性を改良したアルゴリズムの一つに、Bierman⁵⁾ の UD フィルターアルゴリズムがある。これは、単位上三角行列 $\bar{U}$ と正値対角行列 $\bar{D}$ を用いて推定誤差分散行列 $\bar{P}$ を

$$\bar{P} = \bar{U}\bar{D}\bar{U}^T \quad \dots\dots\dots(2.47)$$

と分解した形で保持・更新していくフィルターである。ただし、変数の上の $\sim$ は、 $\wedge$ または $\sim$ である。UD フィルターを数式で表現した場合一見複雑であるが、そのアルゴリズムはディジタルコンピュータに適しており、FORTRAN77 によるそのサブルーチン UDFILT の使用領域や演算量は、Kalman フィルターのサブルーチン KALFIL とほとんど変わらない。

(2) 統計的二次近似フィルター

線形観測式 (2.43) にかわって、

$$y = g(X) + w \quad \dots\dots\dots(2.48)$$

で与えられるスカラー観測値 y が得られる場合を考える。ただし、 $g(X)$ は X の非線形関数とし、 w は、平均値 0、分散 $R > 0$ をもち、 X および 事前情報 Z とは独立な確率変数とする。線形観測式の場合と異なって、 y が得られた後の X の線形最小分散推定値 $\tilde{X}$ 、推定誤差分散行列 $\tilde{P}$ を厳密に求めることは不可能であるが、これらを近似的に求める非線形フィルターを考えることにする。

統計的二次近似フィルターについて述べるまえに、いくつかの非線形フィルターを簡単に紹介しておく。

(a) 線形化フィルター

関数 $g(X)$ を事前推定値 $\tilde{X}$ の回りに Taylor 展開して $(X - \tilde{X})$ の一次の項までとって近似した後、線形フィルターを適用する近似フィルターは拡張 Kalman フィルター (extended Kalman filter) と呼ばれている。Taylor 展開の代わりに、前述の統計的線形化を用いる近似フィルターは統計的線形化フィルター (statistically linearized filter) と呼ばれている。

(b) ガウス近似最小分散フィルター

統計的線形化フィルターや後述する統計的二次近似フィルターと同様に、 X が

$$X \sim N(\tilde{X}, \tilde{P}) \quad \dots\dots\dots(2.49)$$

に従うという近似的仮定をおいて、公式 (2.41)～(2.42) で Z を y と考えた式を適用することが考えられる。こうして得られる近似フィルターを本研究ではガウス近似最小分散フィルター (gaussian minimum mean square filter) と呼ぶことにする。このフィルターは統計的線形化フィルターで統計的線形化誤差の分散をも考慮するものと解釈することができる¹⁰⁾。

(c) ガウス近似二次フィルター

関数 $g(X)$ を事前推定値の回りに Taylor 展開して $(X - \tilde{X})$ の二次の項までとって近似し、その後ガウス近似最小分散フィルターを適用する近似フィルターはガウス近似二次フィルター (gaussian second-order filter) と呼ばれている。

以上代表的な非線形フィルターを紹介した。本研究で用いる統計的二次近似フィルター (statistically app-

roximated second-order filter) は次の二つの解釈が可能である¹⁰⁾。

- ① 関数 $g(X)$ を (2.49) 式の仮定のもとに統計的二次近似し、その後ガウス近似最小分散フィルターを適用したフィルター
- ② 関数 $g(X)$ を (2.49) 式の仮定のもとに統計的二次近似し、二次項を観測誤差 w に追加して線形フィルターを適用したフィルター

ここでは②の解釈にしたがって統計的二次近似フィルターを考える。(2.24) 式の形で統計的二次近似を考えると、非線形観測式 (2.48) 式は、

$$y = B + H(X - \tilde{X}) + w_{new} \quad \dots\dots\dots (2.50)$$

と近似される。ただし、 w_{new} は、

$$w_{new} = \delta - E\{\delta\} + w \quad \dots\dots\dots (2.51)$$

で定める確率変数で、2.1の(3)の議論によって X とは無相関で、その平均値は0、分散は $V\{\delta\} + R$ で与えられる。よって $y - \{B - HX + E\{\delta\}\}$, w_{new} を (2.43) 式の y, w と考えて線形フィルター (UD フィルター) を適用すればよい。

統計的二次近似フィルターの性能をテストするために観測式

$$y_i = X^3 + w_i, w_i \sim N(0, 1) \quad \dots\dots\dots (2.52)$$

によって、確率変数 X の観測値 y_i が逐次得られる場合を考える。観測値が得られる前の X の事前確率分布が $N(1, 1)$ であるとし、 $X, w_i, i=1, \dots$ をランダムに発生させ、各非線形フィルターによって、 y_i の値が得られるごとに X の値を推定していく実験を500回行った。

Fig. 2.1 はこうして得られた推定誤差の二乗平均の平方根を示したものである。EKF (拡張 Kalman フィルター) よりも GSOF (ガウス近似二次フィルター) が、SLF (統計的線形化フィルター) よりも SASOF (統計的二次近似フィルター) の方が推定精度がよく、線形化フィルターよりも二次フィルターの方が精度が良いこと、さらに、EKF よりも SLF の方が、GSOF よりも SASOF の方が推定精度が良く、Taylor 展開を利用するフィルターよりも統計的近似を利用するフィルターの方が推定精度が良いことが分かる。特にこの例では、SASOF は推定精度で GMMSF (ガウス近似最小分散フィルター) に比肩するほどである。

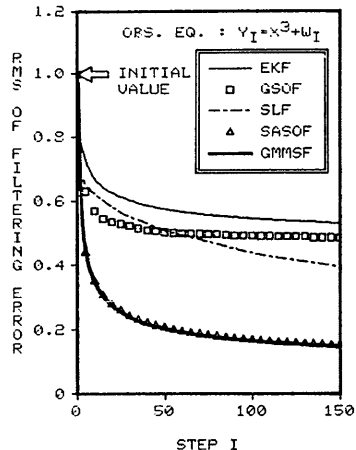


Fig. 2.1 Root mean squares of the filtering errors for five nonlinear filters

3. 確率過程的状態空間型流出モデルの構成

3.1 決定論的状態空間型流出モデル

すでに開発されている流出モデルのほとんどは、状態ベクトル x を適当に定義することにより次の形の決定論的状態空間型モデルと考えることができる。

状態方程式：

$$dx_i(t)/dt = f_i(x(t), c, r(t)), i=1, \dots, N_x \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

出力方程式：

$$q(t) = g(x(t), c) \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

ただし、 $x(t)$ は時刻 t の状態ベクトル、 N_x はその次元、 $x_i(t)$ は $x(t)$ の第 i 成分、 $r(t)$ は入力である面積平均降雨強度、 $q(t)$ は出力である流出量、 c は未知パラメタベクトル、 $f_i, i=1, \dots, N_x, g$ はスカラー値関数である。

例えば、Fig. 3.1 に示すようなタンクモデルでは、タンクの貯水深のベクトル $(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T$ を状態ベクトルとして次のように表される。

状態方程式：

$$\begin{aligned} dx_1(t)/dt &= r(t) - \beta_1 x_1(t) \\ &\quad - S(\alpha_{11}, \alpha_{12}, h_{11}, h_{12}, x_1(t)), \\ dx_i(t)/dt &= \beta_{i-1} x_{i-1}(t) - \beta_i x_i(t) \\ &\quad - S(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, h_{i1}, h_{i2}, x_i(t)), \\ i &= 2, 3, 4 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.3)$$

出力方程式：

$$q(t) = \sum_{i=1}^4 S(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, h_{i1}, h_{i2}, x_i(t)) \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

ただし、これらの右辺の関数 $S(\alpha_1, \alpha_2, h_1, h_2, x)$ は

$$S(\alpha_1, \alpha_2, h_1, h_2, x) = \begin{cases} = 0, & x < h_1 \\ = \alpha_1(x - h_1), & h_1 < x < h_2 \\ = \alpha_1(x - h_1) + \alpha_2(x - h_2), & x > h_2 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3.5)$$

と定義するものであり、 α_{ij} は流出孔の比例定数、 β_i は浸透孔の比例定数、 h_{ij} は流出孔の高さ、 A_f は流域面積である。この例に示されるように、流出モデルでは、(3.1) 式右辺の関数 f_i 、(3.2) 式右辺の関数 g は $x(t)$ 、 c 、 $r(t)$ に関して非線形な項を含んでいることが多い。また、こうした非線形項は $x(t)$ 、 c 、 $r(t)$ のすべてに関係するのではなく、その一部の変数にのみ関係していることが多い。後者の特徴は統計的二次近似の際に計算量を削減するのに好都合である。

3.2 観測誤差・モデル誤差の考慮

(3.1)、(3.2) 式の形の流出モデルが与えられているとする。こととき、パラメタベクトル c の値、状態ベクトル x の初期値を適当に選び、ティーセン法や等雨量線法等によって算定した面積平均雨量強度を $r(t)$ に代入して流出量 $q(t)$ を計算しても、それが観測流量に一致することはほとんどない。その理由として次の事項が考えられる。

- ① 面積平均降雨強度の算定誤差がある。
- ② 流出量の観測誤差がある。
- ③ 降雨強度の空間的分布の影響があるのに面積的に平均化するために誤差が生じる。
- ④ 流出モデルの構造が適切でない。例えば、本来分布系である流出系を集中系でモデル化していること。モデル化に当って考慮していない部分系の影響があること。採用した f_i, g の関数形が適切でない等。
- ⑤ 未知パラメタベクトル c 以外の既知としたパラメタの同定が不十分である。

最初に①の面積平均降雨強度の算定誤差を考える。入力である面積平均降雨強度そのものは観測されない。観測されるのはいくつかの地点のある時間間隔内の累加雨量である。面積平均雨量がこれらの値から例えばティーセン法によって計算され、さらにその時間間隔内では一定強度をとるとして、時間間隔で割った値 u で面積平均降雨強度 r が推定される。ここで入力に対する解釈を変更する。入力は面積平均降雨強度 r ではなく、上述した推定値 u であると考え。言い換えると、面積平均降雨強度 r を流出流量 q に変換する

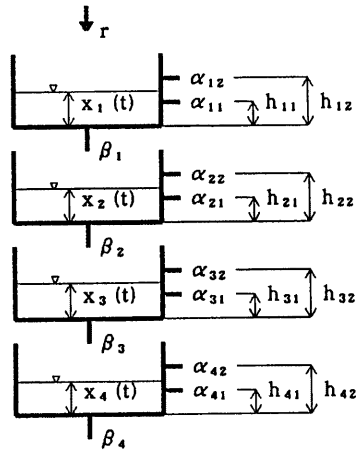


Fig. 3.1 Tank model as an instance of state space runoff model

ものとしてではなく、その推定値 u を流出流量 q に変換するものとして流出モデルを考える。この解釈にたつてこれまでの記述で r とかいたところを u とかく。新しい解釈の利点は、入力 u の観測誤差を考える必要が形式上なくなったことである。また、入力 u はある時間間隔ごとに一定値をとることになる。簡単のため時間間隔を単位時間として、これを次式で表す。

$$u(t) = u_k, \quad k-1 < t < k \quad \dots\dots\dots (3.6)$$

一方、出力である流出量もまた一定時間間隔ごとに観測されるのが普通である。簡単のためこの時間間隔も単位時間とし、時刻 k の流出量 $q(k)$ の観測値を y_k と表すと、

$$y_k = q(k) + w_k \quad \dots\dots\dots (3.7)$$

となる。観測誤差 w_k は $q(k)$ とは独立で平均 0、分散 $R > 0$ を持つとする。これで②の流出量の観測誤差が考慮される。

次に、③～⑤のモデル誤差を考えるために、(3.1)、(3.2) 式にノイズ項を付加する。(3.1)、(3.2) 式に付加するノイズ項の確率モデルとして最も簡単なものは、平均 0 の正規白色過程モデルである。しかし、それは、元の流出モデルがすでにシステムの推移を十分に表現していて、過去とは独立のノイズがあるだけという理想的な想定をしていることを意味する。現実の流出モデルにこのような理想的な想定をすることには無理があると思われる。

最も簡単な正規白色過程モデルよりも少し一般性を持つモデルは有色ノイズモデル (coloured noise model) である。これは、指数関数的相関をもつ確率過程モデル (exponentially correlated process model) と呼ばれ、例えば、Jazwinski⁴⁾ によって定式化されており、Bierman⁵⁾ によって動的システムのフィルタリング問題に導入されている。本研究では、この有色ノイズモデルを用いモデル誤差に対応するノイズを表すことにする。

まず、各成分が独立に有色ノイズモデルで表される N_p 次のシステムノイズベクトル $p(t)$ を考える。すなわち、 $p(t)$ の第 i 成分 $p_i(t)$ は、

$$dp_i(t)/dt = -(1/\tau_i)p_i(t) + v_{pi}(t) \quad \dots\dots\dots (3.8)$$

に従うものとする。ただし、 $\tau_i > 0$ は時定数、 $v_{pi}(t)$ は平均 0 で

$$E\{v_{pi}(t)v_{pj}(s)\} = (2/\tau_i)\sigma_{pi}^2\delta(t-s) \quad \dots\dots\dots (3.9)$$

を満たす連続白色正規過程である。ここで $\delta(t)$ は Dirac のデルタ関数、 σ_{pi}^2 は $p_i(t)$ の定常時分散である。

(3.1)、(3.2) 式に付加するノイズ項はこのシステムノイズベクトル $p(t)$ にそれぞれ一定のベクトル G_{xi} 、 G_q を乗じたものとする。

以上をまとめると、元の決定論的状態空間型流出モデル (3.1)、(3.2) 式に対し、

状態方程式：

$$dx_i(t)/dt = f_i(x(t), c, r(t)) + G_{xi}p_i(t), \quad i=1, \dots, N_x, \quad k-1 < t < k \quad \dots\dots\dots (3.10)$$

$$dp_i(t)/dt = -(1/\tau_i)p_i(t) + v_{pi}(t), \quad i=1, \dots, N_p, \quad \dots\dots\dots (3.11)$$

出力方程式：

$$q(t) = g(x(t), c) + G_q p(t) \quad \dots\dots\dots (3.12)$$

観測方程式：

$$y_k = q(k) + w_k \quad \dots\dots\dots (3.13)$$

で記述される確率過程的状態空間型流出モデルを考えることになる。この確率過程的状態空間型流出モデルでは、 $N = N_x + N_p + N_c$ 次元ベクトル

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \\ c \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.14)$$

が状態ベクトルである。ただし、 N_c は未知のパラメタベクトル c の次元である。(3.12) 式により出力で

ある流出量は状態ベクトル $X(t)$ の関数であるから、初期推定および (3.13) 式による流出量の観測値 y_k を利用して状態ベクトル $X(t)$ を逐次推定・予測していくことが流出予測の基本である。

(3.10)～(3.13) 式で新たに導入したノイズ項のパラメータは、例えば最尤法によって決定することができる。

4. 流出予測システムの構成

本章では、(3.10)～(3.13) 式で記述される確率過程の状態空間型流出モデルに、2. で展開した統計的二次近似手法を適用した実時間流出予測方式を提案する。

もちろん、貯留関数モデルのように遅滞時間が導入されている場合は別として、一般に、流出予測には入力である降雨（本研究では算定されたまたは算定される予定の面積平均降雨強度、3. の議論を参照）の予測が必要である。そこで、本研究では、降雨予測システムの存在を仮定し、各時刻 k で、将来の M 単位時間後までの入力

$$\underline{u}_k = \begin{bmatrix} u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+M} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.1)$$

の推定値

$$\underline{\hat{u}}_k = \begin{bmatrix} \hat{u}_{k+1} \\ \vdots \\ \hat{u}_{k+M} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.2)$$

とその分散行列

$$V(\underline{u}_k - \underline{\hat{u}}_k) = R_{\underline{u}_k} \dots\dots\dots (4.3)$$

がこの降雨予測システムによって供給されるとする。以下この前提にたつて流出予測問題を考える。

4.1 流出予測システムの初期化とフィルタリング

流出予測を開始するために、まず、初期時刻 k での状態ベクトル $X(k)$ ((3.14) 式参照) について、

$\tilde{X}(k)$: 流出量 $Q(k)$ の観測値 y_k が得られる前の $X(k)$ の推定値

$\tilde{Q}(k), \tilde{D}(k)$: $\tilde{X}(k)$ による $X(k)$ の推定誤差分散行列の UD 分解

が与えられているとする。このとき、

$\hat{X}(k)$: 流出量 $Q(k)$ の観測値 y_k が得られた後の $X(k)$ の推定値

$\hat{Q}(k), \hat{D}(k)$: $\hat{X}(k)$ による $X(k)$ の推定誤差分散行列の UD 分解

を求めること (= フィルタリングまたは観測更新) を考える。観測値 y_k は (3.12), (3.13) 式から

$$y_k = g(x(k), c) + G_q p(k) + w_k \dots\dots\dots (4.4)$$

と表される。この観測更新の手順を要約して以下に示す。

- ① $X(k)$ の部分ベクトル $\begin{bmatrix} x(k) \\ c \end{bmatrix}$ の $\begin{bmatrix} \tilde{x}(k) \\ \tilde{z}(k) \end{bmatrix}$ による推定誤差 $\begin{bmatrix} x(k) - \tilde{x}(k) \\ c - \tilde{z}(k) \end{bmatrix}$ の分散行列の UD 分解を求める (サブルーチン UDPART)。

- ② 統計的二次近似によって

$$g(x(k), c) \cong B^* + [H_x H_c] \begin{bmatrix} x(k) - \tilde{x}(k) \\ c - \tilde{z}(k) \end{bmatrix} + \delta \dots\dots\dots (4.5)$$

ただし

$$\delta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x(k) - \tilde{x}(k) \\ c - \tilde{z}(k) \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} x(k) - \tilde{x}(k) \\ c - \tilde{z}(k) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.6)$$

と近似する (サブルーチン SOAP)。

③ 二次項 δ の期待値 $E\{\delta\}$ 、分散 $V\{\delta\}$ を求める (サブルーチン COVSOT)。

④ 以上の近似を用いると、(4.4) 式は

$$y_k - [B + H_x \hat{x}(k) + H_c \hat{z}(k) + E\{\delta\}] = [H_x G_q H_c] \begin{bmatrix} x(k) \\ \rho(k) \\ c \end{bmatrix} + w_{new} \dots\dots\dots (4.7)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} w_{new} &= \delta - E\{\delta\} + w_k, \\ E\{w_{new}\} &= 0, \\ V\{w_{new}\} &= V\{\delta\} + R, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.8)$$

とかけるから、(4.7) 式左辺を観測値、 $[H_x G_q H_c]$ を $X(k)$ の係数ベクトル、 w_{new} を観測誤差として線形フィルターを適用し (サブルーチン UDFILT)、 $\hat{X}(k)$ 、 $\hat{U}(k)$ 、 $\hat{D}(k)$ を求める。観測値 y_k が得られない時は

$$\left. \begin{aligned} \hat{X}(k) &= \tilde{X}(k), \\ \hat{U}(k) &= \tilde{U}(k), \quad \hat{D}(k) = \tilde{D}(k), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.9)$$

とする。

もちろんステップ③の統計的二次近似では2.1の(2)で述べた性質を利用して関数値計算回数を削減するのが良い。これは、以下に述べる予測の場合も同様である。

4.2 状態ベクトル・流出量の予測

次に、時刻 k での流量観測値 y_k を用いた観測更新の後、すなわち、 $\hat{X}(k)$ 、 $\hat{U}(k)$ 、 $\hat{D}(k)$ が得られた時点、 M 単位時間後までの流出量 $q(k+j)$ 、 $j=1, \dots, M$ 、を予測することを考える。

(1) 降雨予測情報の考慮——状態ベクトルの拡大

すでに (4.1)～(4.3) 式に示したように、現在時刻 k で、 M 単位時間後までの降雨予測値 $\hat{u}_k$ 、その予測誤差分散行列 R_{u_k} が与えられるとする。この情報を流出予測システムに組み込むために、 R_{u_k} を

$$R_{u_k} = S_{u_k} S_{u_k}^T \dots\dots\dots (4.10)$$

と分解する。ただし、 S_{u_k} はランク m の $M \times m$ 次行列である (m 、 S_{u_k} を求めるにはサブルーチン LOWCHO を利用すればよい)。

この S_{u_k} を用いて、未知確率ベクトル e_k を

$$e_k = (S_{u_k}^T S_{u_k})^{-1} S_{u_k}^T (\hat{u}_k - \hat{u}_k) \dots\dots\dots (4.11)$$

と定義する。 u_k の予測値が $\hat{u}_k$ であるから、 e_k の推定値は0、分散行列は

$$E\{e_k e_k^T\} = (S_{u_k}^T S_{u_k})^{-1} S_{u_k}^T R_{u_k} S_{u_k} (S_{u_k}^T S_{u_k})^{-T} = I_m \dots\dots\dots (4.12)$$

となる。ここに、 I_m は m 次単位行列である。入力降雨は逆に e_k を用いて次のように表される。

$$u_k = \hat{u}_k + S_{u_k} e_k, \quad e_k \sim N(0, I_m) \dots\dots\dots (4.13)$$

現在時刻 k を固定し将来予測を考えているときには e_k は時間不変で値が未知な確率ベクトルであり、基本的性格は未知パラメタベクトル c と異なるところはない。そこで c -ベクトルを拡大して

$$c' = \begin{bmatrix} c \\ e_k \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.14)$$

とおき、これに対応して

$$X'(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ e_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \rho(t) \\ c' \end{bmatrix}, \quad t \geq k \dots\dots\dots (4.15)$$

とおくことにする。また、 $k+j-1 < t < k+j$ 、 $j=1, \dots, M$ 、で関数 F_i を

$$F_i(x(t), c', t) \equiv f_i(x(t), c, \hat{u}_{k+j} + S_{u_k} e_k) \dots\dots\dots (4.16)$$

と定める。 $S_{u kj}$ は $S_{u k}$ の第 j 行である。このとき、拡大された状態ベクトル $X'(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \\ c' \end{bmatrix}$ の $t \geq k$ で

の推移は、次のように表現される (c' は変化しない)。

$$dx_i(t)/dt = F_{xi}(x(t), c', t) + G_{xi}p(t), \quad i=1, \dots, N_x \quad (4.17)$$

$$dp_i(t)/dt = -(1/\tau_i)p_i(t) + v_{pi}(t), \quad i=1, \dots, N_p \quad (4.18)$$

拡大された状態ベクトル $X'(k)$ の推定値 $\hat{X}'(k)$, 推定誤差分散行列の UD 分解 $\hat{U}'(k), \hat{D}'(k)$ は、元の $\hat{U}(k), \hat{D}(k)$ を用いて、次のように定める。

$$\left. \begin{aligned} \hat{X}'(k) &= \begin{bmatrix} \hat{X}(k) \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hat{U}'(k) &= \begin{bmatrix} \hat{U}(k) & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \\ \hat{D}'(k) &= \begin{bmatrix} \hat{D}(k) & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.19)$$

(2) 拡大された状態ベクトルの予測

拡大された状態ベクトル $X'(t)$ の $t > k$ での推定値, 推定誤差分散行列の推移を考える。 $X'(t)$ の推移式は (4.17), (4.18) 式で与えられることに注意する。

本項では、簡単のため、 $X'(t)$ を $X(t), c'$ を $c, \hat{X}'(t), \hat{U}'(t), \hat{D}'(t)$ を $\hat{X}(t), \hat{U}(t), \hat{D}(t)$ とかく。すなわち、上つきの ' を省略する。時刻 k から時刻 $k+M$ までの間を後で用いる差分公式が安定になるように分割した分点 $k=t_0 < t_1 < \dots < t_j < t_{j+1} < \dots$ をとる。次の項で流量を予測するときのために、これらの分点は時刻 $k+i, i=1, \dots, M$ を含むようにとる。

ここで、 $j > 0$ に対して

$\tilde{X}(t_j)$: $X(t_j)$ の予測値。詳しく言えば、現在時刻 k までの観測情報による $X(t_j)$ の最小分散推定値。

$\tilde{U}(t_j), \tilde{D}(t_j)$: $\tilde{X}(t_j)$ による $X(t_j)$ の予測誤差分散行列の UD 分解

と表すことにする。また、便宜上、

$$\left. \begin{aligned} \tilde{X}(t_0) &= \hat{X}(t_0), \\ \tilde{U}(t_0) &= \hat{U}(t_0), \quad \tilde{D}(t_0) = \hat{D}(t_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.20)$$

とおく。

問題は、 $\tilde{X}(t_j), \tilde{U}(t_j), \tilde{D}(t_j)$ を更新して、 $\tilde{X}(t_{j+1}), \tilde{U}(t_{j+1}), \tilde{D}(t_{j+1})$ を求めることである。そのために、まず、統計的二次近似と差分化によって、時刻 t_j から時刻 t_{j+1} の間の $X(t)$ の推移が、

$$\begin{bmatrix} x(t_{j+1}) \\ p(t_{j+1}) \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{xj} & V_{pj} & V_{cj} \\ 0 & M_{pj} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_j) \\ p(t_j) \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{0j} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{gj}v_{xj} \\ v_{pj} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

と表されることを示す。この第二行は、(4.18) 式を時刻 t_j から時刻 t_{j+1} まで積分して得られる。すなわち

$$p_i(t_{j+1}) = m_{ij}p_i(t_j) + v_{pij} \quad (4.22)$$

ただし、

$$m_{ij} = \exp(-(t_{j+1} - t_j)/\tau_i)$$

$$v_{pij} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \exp(-(t_{j+1} - \eta)/\tau_i) v_{pi}(\eta) d\eta$$

が得られる。 m_{ij} を (i, i) 成分とする対角行列を M_{pj} , v_{pij} を第 i 成分とする列ベクトルを v_{pj} とかいてベクトル形式で表したものが (4.21) 式の第二行である。 v_{pj} は平均値 0 を持ち、 (i, i) 成分が $(1 - m_{ij}^2)\sigma_{pi}^2$ である対角行列を分散行列とする。(4.21) 式の第三行は明らかである。第一行を導く手順を述べよう。

- ① $X(t_j)$ の部分ベクトル $\begin{bmatrix} x(t_j) \\ c \end{bmatrix}$ の $\begin{bmatrix} \tilde{x}(t_j) \\ z(t_j) \end{bmatrix}$ による推定誤差の分散行列の UD 分解を求める (サブルーチン UDPART)。

- ② 統計的二次近似によって, 各 $i=1, \dots, N_x$ について,

$$F_i(x(t_j), c, t_j) \approx B_i^* + [H_{xi} H_{ci}] \begin{bmatrix} x(t_j) - \tilde{x}(t_j) \\ c - z(t_j) \end{bmatrix} + \delta_i \quad (4.23)$$

と近似する。ただし, 統計的二次近似の二次項 δ_i は, 係数行列を A_i とかくと,

$$\delta_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x(t_j) - \tilde{x}(t_j) \\ c - z(t_j) \end{bmatrix}^T A_i \begin{bmatrix} x(t_j) - \tilde{x}(t_j) \\ c - z(t_j) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

と表される (サブルーチン SOAP)。

- ③ (4.24) 式によって第 i 成分が定められるベクトル δ の期待値 $E\{\delta\}$ と分散行列 $V\{\delta\}$ を求める (サブルーチン COVSOT)。

- ④ $V\{\delta\} = S_\delta S_\delta^T$ となる $N_x \times m$ 次行列 S_δ, m を求める (サブルーチン LOWCHO)。

- ⑤ 以上をまとめて, 近似式

$$F(x(t_j), c, t_j) + G_x p(t_j) \approx [F_{xj} F_{pj} F_{cj}] \begin{bmatrix} x(t_j) \\ p(t_j) \\ c \end{bmatrix} + F_{0j} + F_{gj} v_{xj} \quad (4.25)$$

が得られる。ただし, 左辺の F は F_i を第 i 成分とするベクトル, G_x は G_{xi} を第 i 行とする $N_x \times N_p$ 次行列であり,

$$F_{xj} = \begin{bmatrix} H_{j1} \\ \vdots \\ H_{jN_x} \end{bmatrix}, F_{cj} = \begin{bmatrix} H_{c1} \\ \vdots \\ H_{cN_x} \end{bmatrix}, F_{pj} = G_{xj},$$

$$F_{0j} = \begin{bmatrix} B^*_{j1} \\ \vdots \\ B^*_{jN_x} \end{bmatrix} - F_{xj} \tilde{x}(t_j) - F_{cj} \tilde{p}(t_j) + E\{\delta\}$$

$$F_{gj} = S_\delta, v_{xj} = (S_\delta^T S_\delta)^{-1} S_\delta^T (\delta - E\{\delta\})$$

と置いている v_{xj} は $X(t_j)$ とは無相関で期待値 0 を持ち, 分散行列は単位行列である。

- ⑥ 微分方程式

$$dx(t)/dt = F(x(t), c, t) + G_x p(t)$$

の右辺を (4.25) 式で近似し, Pade 近似による差分公式^{12,13)}を適用して, 次式が得られる (サブルーチン DISCRE)。

$$x(t_{j+1}) = V_{xj} x(t_j) + V_{pj} p(t_j) + V_{cj} c + V_{0j} + V_{gj} v_{xj} \quad (4.26)$$

こうして (4.21) 式の形の推移式が導かれた。(4.21) 式の推移式は Bierman⁹⁾ が扱った推移式と類似しており, Bierman と同様のアルゴリズムで $\tilde{X}(t_{j+1}), \tilde{U}(t_{j+1}), \tilde{D}(t_{j+1})$ を求めることができる (サブルーチン UDMAP)。

(3) 流出量の予測

前項の方法によって, 拡大された状態ベクトル $X'(t)$ の将来時刻 $t=k+1, \dots, k+M$ での予測値 $\tilde{X}'(t)$ とその予測誤差分散行列の UD 分解 $\tilde{O}'(t), \tilde{D}'(t)$ が求められ, 流出量 $q(t)$ が

$$q(t) = g(x(t), c) + G_q p(t) \quad (4.27)$$

で与えられることに注意する。すでに述べた観測更新の場合と同様にして, (4.27) 式右辺第一項を統計的に二次近似すると, 近似式

$$g(x(t), c) \approx B^* + [H_x H_c] \begin{bmatrix} x(t) - \tilde{x}(t) \\ c - z(t) \end{bmatrix} + \delta \quad (4.28)$$

が得られる。ただし, δ は二次項であって,

$$\delta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x(t) - \bar{x}(t) \\ c - \bar{z}(t) \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} x(t) - \bar{x}(t) \\ c - \bar{z}(t) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4.29)$$

と表される。この近似を用いると、流出量 $q(t)$ の予測値 $\hat{q}(t)$ と予測誤差分散 $\hat{P}_{q(t)}$ は次式で与えられる。

$$\hat{q}(t) = B^* + E\{\delta\} \quad \dots\dots\dots (4.30)$$

$$\hat{P}_{q(t)} = W D^*(t) W^T + V\{\delta\} \quad \dots\dots\dots (4.31)$$

ただし、 W は

$$W = [H_x G_q H_z 0] U^T(t)$$

で定める行ベクトルである。流出量 $q(t)$ の測定値 y_t の予測値 $\hat{y}_t$ は $\hat{q}(t)$ と同じであり、予測誤差分散 $\hat{P}_{y(t)}$ は $\hat{P}_{q(t)}$ に観測誤差分散 R を加えたものになる。

4.3 降雨観測値の入手と状態ベクトルの再予測

時刻 k から単位時間だけ経過して時刻 $k+1$ になると、降雨の観測値 u_{k+1} と、流出量の観測値 y_{k+1} が入手される。この時点での観測更新の前準備として、 u_{k+1} の値だけを用いた $X(k+1)$ の事前推定を求める必要がある。そのためには、4.2の(2)で用いた方法を繰り返せばよい。ただし、この時点では u_{k+1} が既知となっているので、状態ベクトルを拡大する必要はない。また、(4.16)式の関数 F_i は、 $k < i < k+1$ で

$$F_i(x(t), c, t) \equiv f_i(x(t), c, u_{k+1}) \quad \dots\dots\dots (4.32)$$

と定義すればよい。

こうして、 u_{k+1} の値を用いた $X(k+1)$ の事前推定が得られれば、次に流出量の観測値 y_{k+1} を用いた観測更新をすることになるが、これはすでに4.1で取り扱った問題であるから、 $k+1$ を k と考えて4.1の方法を用いることになる。これで流出予測アルゴリズムのループが完結した。

5. 実流域への適用例

5.1 流出予測モデルの構成

由良川水系土師川流域 (370 km²) に本研究で展開した方法を適用する。同流域の現行の流出モデル⁽⁴⁾は木村の貯留関数法によっている。この現行モデルを基礎にして誤差を補うノイズを付加し、次のような確率過程の状態空間型流出モデルを考える。

状態方程式：

$$dX(t)/dt = f \cdot r(t - T_L) - [(X(t)/K)^{1/P} + p(t)] \quad \dots\dots\dots (5.1)$$

$$dp(t)/dt = -(1/\tau)p(t) + v(t) \quad \dots\dots\dots (5.2)$$

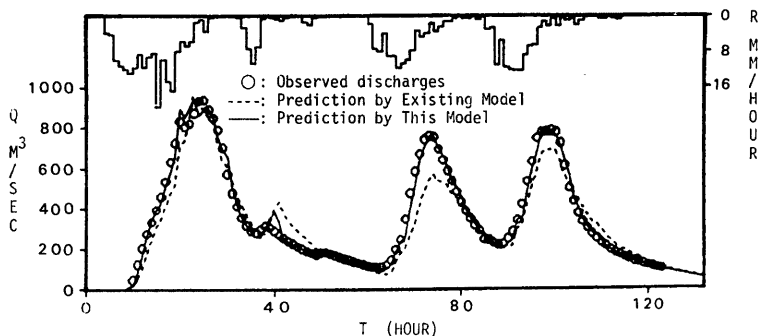


Fig. 5.1 1-hour-ahead prediction of the flood occurred in September, 1965

出力方程式：

$$q(t) = A \cdot [(X(t)/K)^{1/P} + f(t)] \quad \dots\dots\dots (5.3)$$

観測方程式：

$$y_k = q(t_k) + w_k \quad \dots\dots\dots (5.4)$$

ただし、 $r(t)$ ：時刻 t の降雨強度、 $X(t)$ ：時刻 t の流域貯留高、 $q(t)$ ：時刻 t の流出量、 y_k ：時刻 t_k の観測流量、 A ：流域面積、 K, P ：貯留関数の定数、 T_L ：遅滞時間、 f ：流入係数である。貯留関数のパラメタは現行モデルの値

$$K = 22 \text{ mm}^{1-P} \cdot \text{hr}^P, \quad P = 0.65,$$

$$A = 370 \text{ km}^2, \quad T_L = 4.0 \text{ hr},$$

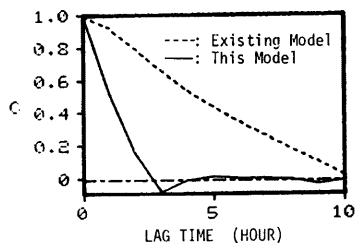


Fig. 5.2 Correlogram of 1-hour-ahead predicted residuals of the flood occurred in September, 1965

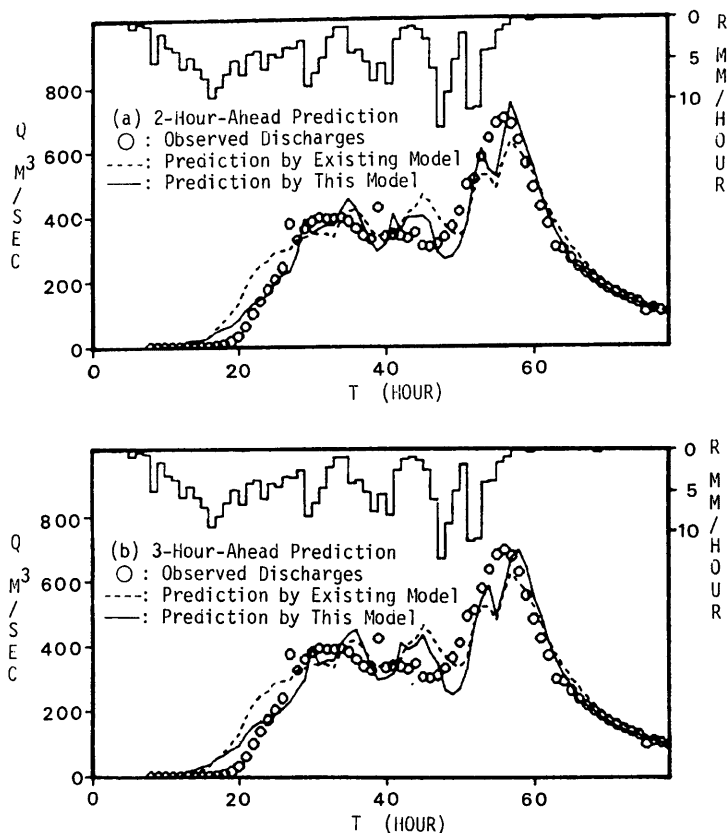


Fig. 5.3 2- and 3-hour-ahead prediction of the flood occurred in June, 1970

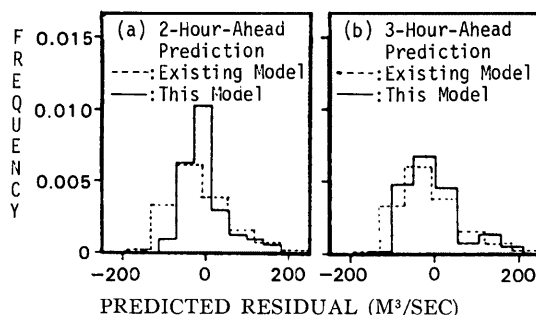


Fig. 5.4 Histogram of 2- and 3-hour-ahead predicted residuals of the flood occurred in June, 1970

$$f = \begin{cases} 0.8, & \sum r < 80.0 \text{ mm}, \\ 1.0, & \sum r \geq 80.0 \text{ mm}, \end{cases}$$

を用いた。 $(X(t), p(t))^T$ が確率状態ベクトルである。 w_k は流量観測の誤差を表すノイズで、 $N(0, R)$ に従うとする。 $v(t)$ は平均 0 で、

$$E(v(t) \cdot v(s)) = (\tau/2) \cdot \sigma^2 \cdot \delta(t-s) \quad (5.5)$$

なる連続白色正規過程である $\delta(t)$ は、Dirac のデルタ関数)。ノイズ $p(t)$ は流出高を $(X(t)/K)^{1/P}$ で表したときの誤差を補うために導入したものである。

$R = 10.0 (\text{m}^3/\text{sec})^2$ とし、1965年9月の出水データで τ, σ^2 を最尤法により同定した結果、 $\tau = 26 \text{ hr}$, $\sigma^2 = 1.4 (\text{mm/hr})^2$ を得た。この時のノイズ $p(t)$ のラグ1時間の自己相関係数は0.96である。Fig. 5.1 に、同定された値を用いて同出水の1時間先を再予測した結果を示す。Fig. 5.2 にその予測残差のコレグラムを示す。本モデルによってもなお予測残差に持続性が認められるが、現行モデルのそれを大きく改善している。

5.2 適用と考察

予測のリードタイムが遅滞時間 (4.0 hr) を越えなければ降雨の予測は必要でないので、前項で構成した予測モデルを用いて4時間先までの予測を行った。1970年6月の出水の2時間先及び3時間先を予測した結果を Fig. 5.3 に示す。Fig. 5.4 にはその予測残差のヒストグラムを示す。本モデルによる2時間先予測残差の平均と分散は、 $0.2 \text{ m}^3/\text{sec}$, $52.3 (\text{m}^3/\text{sec})^2$ であり、現行モデルの値 $-13.0, 72.1$ に比べてより0の近傍に集中して分布している。3, 4時間先になると、流量観測によるフィルタリングの効果が及ばず、元のモデルの影響を大きくうけるその分布は似たものとなる。

予測残差の白色性の検討も行った (予測残差が白色でなければ、モデルの再検討が必要である)。1時間先予測残差の連の検定では有意水準3%で、符号の検定では5%でも有意な自己相関は認められない。1時間先予測残差のコレグラムを Fig. 5.5 に示す。ここでも現行のモデルに比べて大きく改善され、また有意水準5%で自己相関は認められない。よって、ほぼ5%の有意水準で、予測残差の白色性を否定することはできない。

現行モデルをもとにして統計的二次近似手法を適用した結果、2時間先までは予測精度が改善されることが示

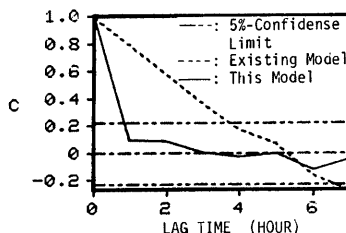


Fig. 5.5 Correlogram of 1-hour-ahead predicted residuals of the flood occurred in June, 1970

された。本適用例では、モデル誤差を補うノイズを白色とできないことも示された。予測残差はまだ完全には白色ではないが、さらにノイズ項を加えれば(ノイズ項のパラメタの同定や流出予測の計算コストは増大するが)さらに精度の高い予測結果が得られると思われる。

6. 結 論

本研究では、決定論的状態空間型流出モデルが与えられたときに、入出力の観測誤差・モデル誤差に対応すると考えるノイズ項を付加して確率過程の状態空間型流出モデルを構成する基本的考え方を述べるとともに、構成された確率過程の状態空間型流出モデルにフィルタリング・予測理論を適用して流出予測システムを構成する方法を展開した。

本研究の基本的考え方は従来の筆者らの研究と変わらないが、本研究では新たに、流出システムの非線形性への対処をより精密にする方法として統計的二次近似の理論を展開し、数値的安定性の点で優れているUD フィルター手法と結合したフィルタリング・予測理論を提示した。

実流域への適用の結果、基礎とした決定論的モデルによるよりも予測精度が大幅に向上することが示され、本方法が有用であることが確認された。

参 考 文 献

- 1) Sunahara, Y.: An Approximate Method of State Estimation for Nonlinear Dynamical Systems, Joint Automatic Control Conference, University of Colorado, 1969.
- 2) Mahalanabis, A.K. and M. Farooq: A Second-Order Method for State Estimation of Nonlinear Dynamical Systems, Int. J. Control, Vol. 14, No. 4, 1971, pp. 631-639.
- 3) 宝 馨・高棹琢馬・椎葉充晴: 洪水流出の確率予測における実際的手法, 第28回水理講演会論文集, 1984, pp. 415-422.
- 4) Jazwinski, A.H.: Stochastic Process and Filtering Theory, Academic Press, New York, 1970.
- 5) Bierman, G.J.: Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation, Academic Press, New York, 1977.
- 6) 片山徹: 応用カルマンフィルタ, 朝倉書店, 1983.
- 7) 高棹琢馬・椎葉充晴: 状態空間法による流出予測, 京都大学防災研究所年報, 第23号 B-2, 1980, pp. 211-226.
- 8) 高棹琢馬: 流出系の同定と予測, 土木学会水理委員会, 水工学シリーズ82-A-2, 1982.
- 9) Abramowitz, M. and I.A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, New York, 1972.
- 10) 高棹琢馬・椎葉充晴: 洪水流出予測の基礎理論とサブルーチンパッケージ, 昭和57・58年度科学研究費補助金(試験研究(2)) 成果報告書「洪水の短時間予知手法とその実際化に関する研究」, 1983.
- 11) Bertsekas, D.P. Dynamic Programming and Stochastic Control, Academic Press, New York, 1976.
- 12) 戸川隼人: 微分方程式の数値計算, オーム社, 1981.
- 13) Kitanidis, P.K. and R.L. Brass: Real-Time Forecasting With a Conceptual Hydrologic Model, Water Resources Research, Vol. 16, No. 6, 1980, pp. 1025-1033.
- 14) 由良川洪水予報連絡会: 由良川洪水史, 1981.

付 録

統計的二次近似の性質③の証明

2.1の(2)で述べた統計的二次近似の性質③を証明しておく。簡単のため、 N 次確率ベクトル X の一部の成分からなる確率ベクトル V は X の初めの N_V 個の成分からなるとし、残りの $N_W = N - N_V$ 個の成分からなるベクトルを W とあらわして、 $X, \bar{X}, \bar{P}$, (2.6) 式の A を

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{V} \\ \bar{W} \end{bmatrix}, \\ \bar{P} &= \begin{bmatrix} \bar{P}_{VV} & \bar{P}_{VW} \\ \bar{P}_{WV} & \bar{P}_{WW} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{VV} & A_{VW} \\ A_{WV} & A_{WW} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \text{付-(1)}$$

と分解する。 X が正規分布に従うならば、 V が与えられたときの W の条件つき確率分布も正規分布であって、その条件つき平均 $\hat{W}$, 条件つき分散行列 $\hat{P}$ は、

$$\begin{aligned} \hat{W} &= \bar{W} + \bar{P}_{WV} \bar{P}_{VV}^{-1} (V - \bar{V}) \\ \hat{P}_{WW} &= \bar{P}_{WW} - \bar{P}_{WV} \bar{P}_{VV}^{-1} \bar{P}_{VW} \end{aligned} \quad \text{付-(2)}$$

で与えられる。よって、 $K_{WV} = \bar{P}_{WV} \bar{P}_{VV}^{-1}$ とおくと

$$E\{(W - \bar{W})|V\} = K_{WV}(V - \bar{V}) \quad \text{付-(3)}$$

$$\hat{E}\{(W - \bar{W})(W - \bar{W})^T|V\} = \hat{P}_{WW} + K_{WV}(V - \bar{V})(V - \bar{V})^T K_{WV} \quad \text{付-(4)}$$

が成り立つ。分解 付-(1) のもとでは、(2.6) 式は

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \bar{P}_{VV} & \bar{P}_{VW} \\ \bar{P}_{WV} & \bar{P}_{WW} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{VV} & A_{VW} \\ A_{WV} & A_{WW} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_{VV} & \bar{P}_{VW} \\ \bar{P}_{WV} & \bar{P}_{WW} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E\{(V - \bar{V})(V - \bar{V})^T g(V)\} & E\{(V - \bar{V})(W - \bar{W})^T g(V)\} \\ E\{(W - \bar{W})(V - \bar{V})^T g(V)\} & E\{(W - \bar{W})(W - \bar{W})^T g(V)\} \end{bmatrix} \\ &\quad - E\{g(V)\} \begin{bmatrix} \bar{P}_{VV} & \bar{P}_{VW} \\ \bar{P}_{WV} & \bar{P}_{WW} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \text{付-(5)}$$

とかける。ここで、

$$\begin{aligned} E\{(V - \bar{V})(W - \bar{W})^T g(V)\} &= E\{(V - \bar{V})E\{(W - \bar{W})^T|V\}g(V)\} \\ E\{(W - \bar{W})(V - \bar{V})^T g(V)\} &= E\{E\{(W - \bar{W})|V\}(V - \bar{V})^T g(V)\} \\ E\{(W - \bar{W})(W - \bar{W})^T g(V)\} &= E\{E\{(W - \bar{W})(W - \bar{W})^T|V\}g(V)\} \end{aligned}$$

が成り立つことを注意して、公式 付-(3)、付-(4) を用いて W を 付-(5) 式から消去し、さらに行列

$$\begin{bmatrix} I_{N_V} & 0 \\ -K_{WV} & I_{N_W} \end{bmatrix}$$

を左から、その転置行列を右から、付-(5)式の両辺にかけると

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \bar{P}_{VV} & \bar{P}_{VW} \\ 0 & \bar{P}_{WW} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{VV} & A_{VW} \\ A_{WV} & A_{WW} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_{VV} & \bar{P}_{VW} \\ 0 & \bar{P}_{WW} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E\{(V - \bar{V})(V - \bar{V})^T g(V)\} - E\{g(V)\} \bar{P}_{VV} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が得られる。これから、

$$\begin{aligned} A_{WW} &= 0, \quad A_{WV} = 0, \quad A_{VW} = 0, \\ \bar{P}_{VV} A_{VV} \bar{P}_{VV} &= E\{(V - \bar{V})(V - \bar{V})^T g(V)\} - E\{g(V)\} \bar{P}_{VV} \end{aligned}$$

を得る。これで、二次項の係数行列 A について性質③が証明された。一次項の係数ベクトル H , 定数項 B^* についても同様である。