

固液混相開水路流れの水力特性に関する研究(4)

今本 博健・大年 邦雄

STUDY ON THE CHARACTERISTICS OF OPEN CHANNEL FLOW WITH SUSPENDED LOAD (4)

By *Hirotake* IMAMOTO and *Kunio* OHTOSHI

Synopsis

One of the most interesting and complicated problems in fluvial hydraulics is the effect of suspended sediment on flow properties. Although some theoretical and experimental researches on the mechanism of interaction between solid particles and fluid have been carried out, many uncertain characteristics of flow remain to be clarified. This paper deals with the velocity distribution of free surface shear flow with suspended sand particles and the effect of secondary flow on the velocity and concentration distributions.

Main results obtained by the experimental investigation are as follows; 1) Velocity distribution of flows with and without suspended sand particles, under the uniform and steady condition, agrees to Coles's velocity distribution equation which takes account of the deviation from log-law. 2) Some parameters which are contained in Coles's equation vary according to the concentration of suspended sediment. 3) Rouse's equation agrees very well to the concentration distribution even when secondary flow exists in the flow.

1. 序 論

近年、固液混相流に関する研究が活発に行なわれるようになり、乱れ特性をも含めてその水力特性が次第に明らかにされつつある。とくに板倉ら¹⁾は、従来気象学の分野で用いられてきた Monin-Obukov length を浮遊砂流のエネルギー式における特性長として拡張適用し、浮遊砂流の流速分布が対数-直線則 (log-linear law) で表わされることを導くとともに、濃度分布式をも同時に提案している。また、林ら²⁾は、板倉らの理論を中立浮遊粒子流に拡張している。

Vanoni³⁾に始まる一連の実験的研究⁴⁻⁷⁾、室田⁸⁾に始まる我国での一連の理論的研究⁹⁻¹¹⁾および最近の研究¹²⁾は、いずれも清水流の流速分布にはほぼ全水深(粘性底層を除く)にわたり対数則が適用でき、固体粒子を浮遊することによって流速勾配が変化し分布形状も変化するという解釈で共通している。しかし、このような解釈は乱流境界層の領域区分に関する Bradshaw¹²⁾などの研究とは必ずしも一致せず、また、著者らが清水流の流速分布特性に関して行なった実験結果とも異なり、再検討の余地があると考えられる。

本研究は、上述した知見に基づき、開水路浮遊砂流の流速分布特性に関して詳細な実験的検討を加えたものである。また、流砂輸送機構、物質の拡散および河床形態等に及ぼす影響が大きいと思われる縦渦を取上げ、流速分布および浮遊砂濃度分布特性との関連について検討を行なっている。

2. 実験装置および水力条件の選定

本実験に使用した水路は、長さ 13 m、幅 40 cm、深さ 20 cm の循環式滑面直線水路であるが、浮遊砂流を対象とする場合には、水路上流端で給砂し下流端で回収する方式により清水のみが循環するようになっている。

Table 1 Hydraulic conditions for experiments.

Case No.	$Q(l/s)$	$H(cm)$	I_b	R_e	F_r	$k(cm)$	$C_m(\%)$	$U_f(cm/s)$	$d_m(cm)$		
1	3.98	2.35	1/400	1.02×10^4	0.88	0	0	2.40	—		
2	5.19	3.12	1/475.7	1.50×10^4	0.75	0	0	2.54	—		
3	2.11	3.54	1/402.6	9.90×10^3	0.51	0	0	2.94	—		
4	12.04	4.01	1/200	2.81×10^4	1.20	0	0.112	4.43	0.0130		
5	4.38	1.29	1/50	9.97×10^3	2.39	0	0~0.192	5.03	0.0130		
6	(a)	1.73	1/50	1.43×10^4	2.39	0	0.294	5.83	0.0068		
	(b)	6.84					1.74	0.230	5.83	0.0130	
	(c)	1.76					0.238	5.87	0.0236		
7	(a)	2.31	1/125	1.66×10^4	1.51	0	0.219	4.26	0.0068		
	(b)	6.63					2.37	1.45	0.198	4.31	0.0130
	(c)	2.48					1.36	0.193	4.41	0.0236	
8	4.61	1.82	1/50	1.00×10^4	1.51	0.24	0~0.153	5.96	0.0130		
9	(a)	2.76	1/84.1	1.50×10^4	1.13	0.39	0.206	5.99	0.0068		
	(b)	6.82					2.71	0.168	5.94	0.0130	
	(c)	2.63					0.150	5.88	0.0236		
A	8.24	4.20	1/175	1.65×10^4	0.77	0.39	0	4.85	—		
B		3.70		1.83×10^4	0.93		0.135	4.55	0.0130		

流速の計測にはコニカル型ホットフィルム流速計を用い、浮遊砂濃度の計測は内径 2mm の採水器にビニールパイプを接続し、サイフォン方式で採水することによって行なっている。なお、濃度計測より得られた浮遊砂は、V-A チューブを用いて沈降分析を行なっている。

本実験では、すべて定常・等流状態の 2 次元流れを対象とし、Table 1 に示した水理条件下で計測を行なっている。また、使用した浮遊砂の諸特性は Table 2 にまとめられている。

3. 流速分布特性に関する検討

著者らは前報¹³⁾において、開水路流れにおける流速分布特性について実験的に検討し、次のような結果を報告した。

(1) 滑面流れにおいて計測した流速分布を壁法則表示すると、粘性底層上に片対数紙上で直線近似される対数則の良く適合する領域が存在するが、1本の直線では近似しえず、外部層では対数則からの逸脱がみられる。また、外部層の流速分布自身も直線近似されるようになって、全体としては2本の直線で近似可能で

Table 2 Suspended particles used for experiments.

Specific gravity γ	Mean diameter $d_m(cm)$	Sorting coefficient $S_0 = \sqrt{d_{75}/d_{25}}$	Settling velocity $v_s(cm/s)$
2.65	0.0068	1.30	0.476
	0.0130	1.27	1.237
	0.0236	1.25	3.150

ある。なお、粗面流れのものも同様な傾向を示す。

(2) (1)において、路床側の直線で近似される領域を内部対数層 (inner-log layer : 本来の対数層), 水面側を外部対数層 (outer-log layer) と呼ぶことにすると、それぞれの領域における平均流速分布式の式形は対数則と同一のものを用いることができるが、式に含まれる各種定数はそれぞれの領域で異なり、水力条件によっても変化する。

(3) 内部対数層から外部対数層への遷移は明確ではなく漸变的であるが、平均的な遷移相対水深 (y_t/H) はほぼ0.2であり、摩擦レイノルズ数 ($U_f H/\nu$) がおよそ2000以上になると若干減少する傾向がある。

固体粒子を浮遊する流れに関する従来の実験のおよび理論的研究においては、その基本となるべき清水流の全領域に対数則が適用されており、上述した内部対数層から外部対数層への遷移 (外部層における対数則からの逸脱) はあまり認識されていないようである、再検討を要すると思われる部分も少なくない。

本報では、上述の認識を基礎として、開水路浮遊砂流の流速分布について検討を加える。

3.1 流速分布形状

浮遊砂流の流速分布特性に関する検討を行なう前に、清水流の流速分布形状について簡単に検討しておく。

清水流の流速分布に関しては、半理論的な混合距離に基づくものとして Prandtl¹⁴⁾, Kármán¹⁵⁾ および Zagustin¹⁶⁾ らの流速分布式が知られており、半経験的なものとして Blasius¹⁷⁾ らの指数分布式がある。また、上述された外部層における対数則からの逸脱を考慮したものとして Coles¹⁸⁾, Willis¹⁹⁾ らのものが挙げられる。これらの各種流速分布式の実験値との適合性を検討した結果、Zagustin 式あるいは Coles 式の適合性が比較的高いことがわかったので、ここでは、これらの2式を取上げることとし、比較の意味で対数則を併示する。これらの諸式は次のように表わされる。

$$\text{log-law} : \frac{U}{U_f} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{U_f y}{\nu} + A_s \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{Zagustin} : \frac{U}{U_f} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{1 - (1 - y/H)^{3/2}}{1 + (1 - y/H)^{3/2}} + A_s + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{U_f H}{\nu} + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{4}{3} \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{Coles} : \frac{U}{U_f} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{U_f y}{\nu} + A_s + \frac{2B}{\kappa} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{H} \right) \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここに、 U は路床からの高さ y における流速、 U_f は摩擦速度、 κ はカルマン定数、 H は水深、 ν は動粘性係

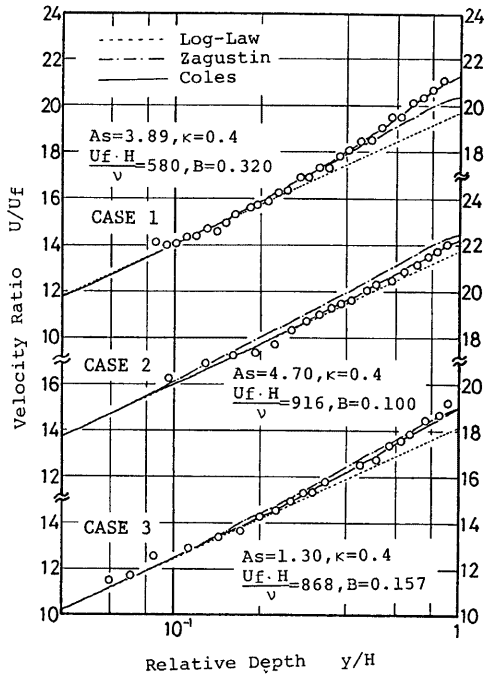


Fig. 1 Velocity distribution of clear water flow (smooth bed).

数, A_s は積分定数および B は係数である。なお, 式 (2) における積分定数は $y/H \rightarrow 0$ のとき対数則に一致するように決定している。

Fig. 1 は, 滑面上の清水流において計測した流速分布と上記の諸式と比較したものである。前述したように, 計測値は $y/H > 0.2$ の領域において対数則で表わされるものより上方に逸脱しているが, Zagustin および Coles の各分布式はそのような傾向をうまく表わしている。

カルマン定数 κ および積分定数 A_s が与えられると Zagustin 式による流速分布形は決定されるのに対し, Coles 式においてはさらに係数 B を与えねばならず, 適切な B 値を与えることによって Coles 式は Zagustin 式より計測値との適合性は高くなることがわかるが, その場合, 係数 B と水理量との関係を明らかにしておく必要がある。

次に, 浮遊砂流の流速分布形状について検討する。ここでは, 上述された Coles 式を浮遊砂流へ拡張しその適合性を調べるとともに, 近年, 板倉ら¹⁾によって提案された流速分布式を取上げて検討を加えることとする。それらの流速分布式は次のように書表わされる。

滑面上の浮遊砂流

板倉ら:

$$\frac{U}{U_f} = A_s + \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{U_f y}{\nu} + \phi_2 \frac{y}{H} \right) \dots \dots \dots (4)$$

Coles:

$$\frac{U}{U_f} = \left[A_s + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{U_f y}{\nu} \right] + \frac{2B}{\kappa} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{H} \right) \dots \dots \dots (5)$$

粗面上の浮遊砂流

$$\text{板倉ら: } \frac{U}{U_f} = A_r + \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{y}{k_s} + \phi_2 \frac{y}{H} \right) \dots \dots \dots (6)$$

$$\text{Coles: } \frac{U}{U_f} = \left[A_r + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k_s} \right] + \frac{2B}{\kappa} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{H} \right) \dots \dots \dots (7)$$

ここに, A_s および A_r は積分定数, k_s は相当砂粒粗度高, ϕ_2 は次式で定まる値である。

$$\phi_2 = \alpha H \kappa g U_f^{-3} (\gamma - 1) \nu_s C_m \dots \dots \dots (8)$$

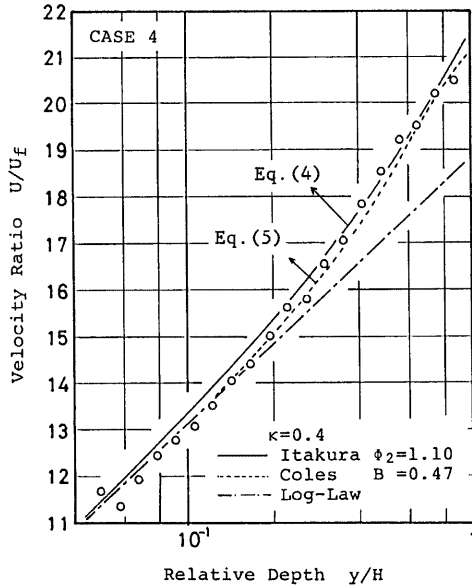


Fig. 2 Velocity distribution of sediment-laden flow (smooth bed).

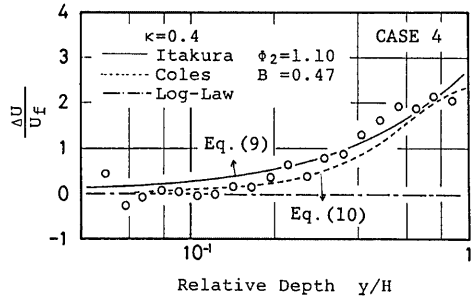


Fig. 3 Relation between the difference of velocity from log-law and relative depth (smooth bed).

ここに、 α は係数 (≈ 7), g は重力の加速度, γ は浮遊砂の比重, v_s は沈降速度および C_m は断面平均体積濃度である。

Fig. 2 は、滑面上の浮遊砂流において計測した流速分布を式 (4) および式 (5) と比較したものであり、Fig. 3 は、前図における計測値と対数則との差 $\Delta U/U_f$ を相対水深 y/H に対して示したものである。なお、Fig. 3 における実線および破線は、それぞれ、板倉らおよび Coles の流速分布式より定まるものであり、次のように表わされる。

$$\text{板倉ら} : \Delta U/U_f = \frac{1}{\kappa} \phi_2 \frac{y}{H} \dots\dots\dots(9)$$

$$\text{Coles} : \Delta U/U_f = \frac{2B}{\kappa} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{H}\right) \dots\dots\dots(10)$$

浮遊砂流においても、清水流と同様、計測値は外部層 ($y/H > 0.1 \sim 0.2$) で対数則から逸脱しており、両分布式は式中に含まれるパラメーター ϕ_2 あるいは B によってそのような傾向を表わすことができる。ただし、 ϕ_2 は流れおよび浮遊砂の特性量を用いて式 (8) より決定され、その物理的意味が明確であるのに対して、 B は実験的に決定されるものであるため、その物理的意味が不明確である。したがって、このような観点からは式 (4) の方が優れていると考えられるが、清水流に対しては $\phi_2 = 0$ となり、式 (4) は対数則に一致する。しかし、既に述べたように、清水流の流速分布を対数則では十分に表わし得ない。すなわち、式 (4) は、清水流では対数則が成立し浮遊砂を含むことによって対数則から逸脱することを意味する点で十分であるとは言い難い。また、式 (4) では、 $\phi_2 = 1.10$ 程度であると y/H が小さな領域でも対数則から逸脱するが、計測値は $y/H < 0.1 \sim 0.2$ において対数則に十分適合している。一方、式 (5) は、係数 B のもつ物理的意味は不明確ではあるが流速分布形状を的確に表現しており、清水流および浮遊砂流に対して式中のパラメーター B と水理量との関係が明確にされるならば、流速分布式として非常に優れていると考えられる。なお、ここでは ϕ_2 の値は流速分布計測値より推定した $\phi_2 = 1.10$ を用いたが、式 (8) より算定すると $\phi_2 = 0.29$ となり、理論値と計測値にはかなりの差違があった。

3.2 流速分布を規定する各種パラメーター

清水流および浮遊砂流に対して、Coles 式の適合性の高いことが明らかになったので、以下では、Coles の流速分布を規定する各種パラメーターに及ぼす浮遊砂の効果について実験的検討を加える。

実験では、滑面および粗面上の流れにおいて浮遊砂の濃度あるいは粒径を系統的に変化させたものについて、それぞれの流速分布を計測し、次のようにして各種パラメーター値を推定した (Fig. 4 の模式図参照)。Bradshaw¹²⁾ の乱流境界層の領域区分を参考にして、 $y/H \leq 0.2$ の領域で対数則が成立するとし、式 (5)

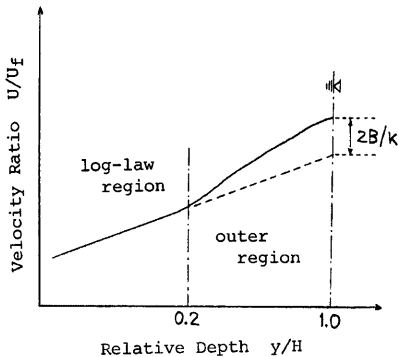


Fig. 4 Schematic illustration of velocity distribution.

Table 3 Variation of various parameters with the increase in mean concentration C_m .

Parameter	Smooth bed	Rough bed
κ	increase	decrease
A_s	increase	—
A_r	—	const.
k_s	—	decrease
B	increase	decrease
κ'	decrease	decrease

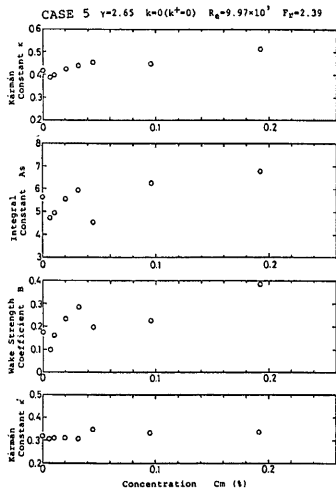


Fig. 5 Variation of various parameters with mean concentration C_m (smooth bed).

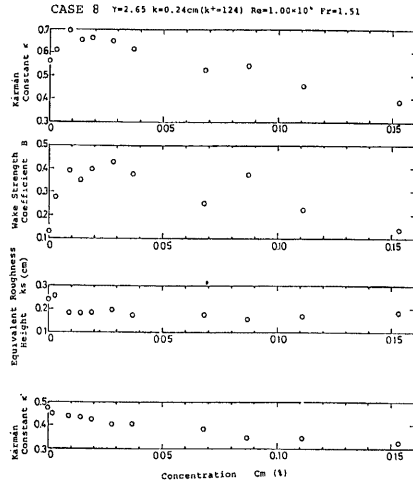


Fig. 6 Variation of various parameters with mean concentration C_m (rough bed).

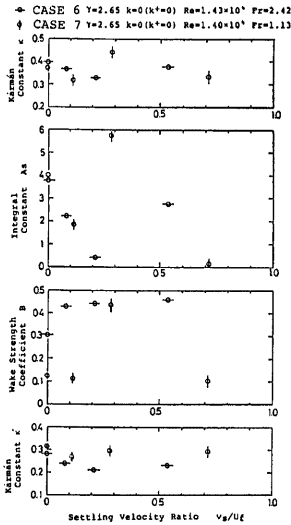


Fig. 7 Variation of various parameters with the ratio of settling and friction velocity v_s/U_f (smooth bed).

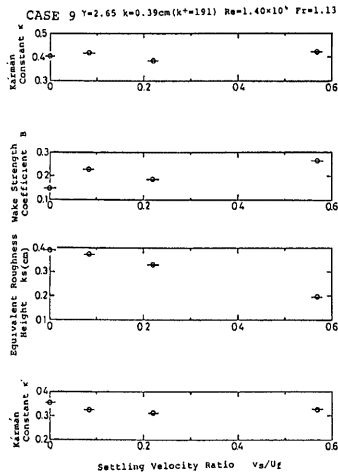


Fig. 8 Variation of various parameters with the ratio of settling and friction velocity v_s/U_f (rough bed).

あるいは式 (7) の [] の部分をその領域における計測値に適用して、 A_s , κ および k_s を算定した。このとき、粗面上の清水流では、相当砂粒粗度高 $k_s (=k_{s0})$ は路床の平均粗度高 k に等しいとして $A_r (=A_{r0})$ を算定し、浮遊砂流においても A_r は一定 ($=A_{r0}$) として取扱うことにより k_s の変化を求めた。また、水面における対数則との流速差 $\Delta U/U_f$ が $2B/\kappa$ となることにより B を算定している。

このようにして算定した各種パラメーターと浮遊砂の濃度あるいは粒径との関係を、滑面および粗面について示すと Fig. 5~Fig. 8 のようになる。なお、図に併示されている κ' は、外部層 ($y/H > 0.2$) における計測値に、前述した外部対数則を適用した場合のカルマン定数を意味している。図に示した各種パラメーター一値はかなりばらついており、浮遊砂の濃度あるいは粒径による明確な変化傾向を見出すのは困難であるが、浮遊砂の濃度効果による変化は Table 3 のようにまとめることができると思われる。

従来より、浮遊砂流におけるカルマン定数は濃度の増加とともに減少するとされているが、この場合におけるカルマン定数とは本研究における κ' に対応するものである。なお、Fig. 5 に示した粗面上の清水流で

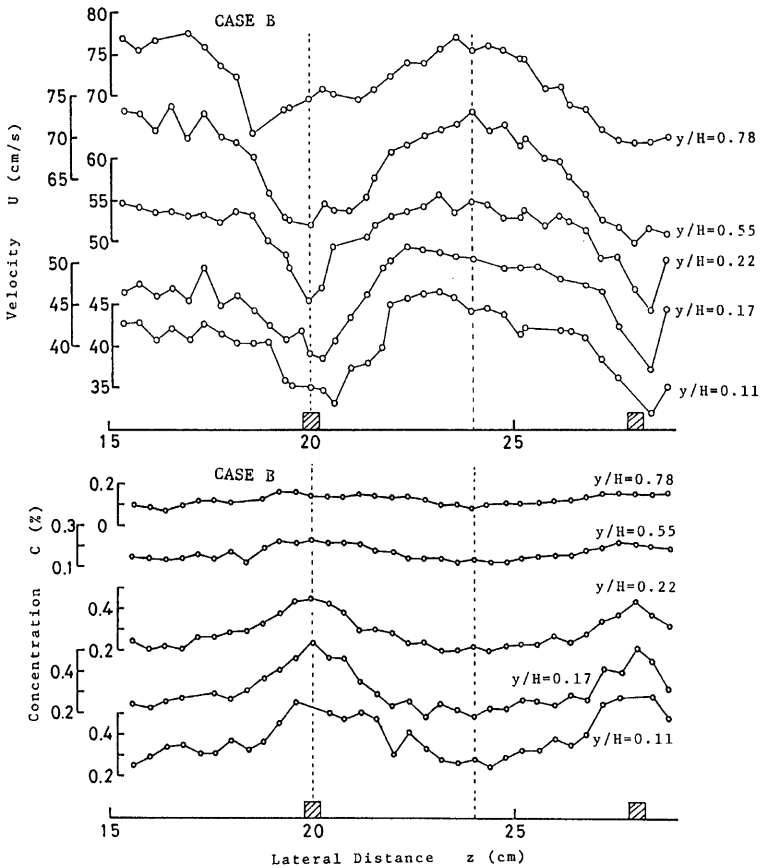


Fig. 9 Lateral distribution of velocity and concentration.

の κ の値は0.4よりかなり大きな値となっており、粗面流れにおける仮想路床面の取り方に問題があったのではないかと考えられる。

4. 流速分布および濃度分布に及ぼす縦渦の影響

砂粒子を浮遊した流れを観察すると、流下方向に平行で横断方向にほぼ等間隔に配列された砂粒の縦筋が路床近傍に形成される様子が認められる。この縦筋はレイノルズ数の十分大きな開水路流れに普遍的に存在するといわれる縦渦に起因して形成されるものと考えられる。しかし、平坦河床の場合、この縦渦は空間的に不安定であるうえに平均的な強度も弱いため、縦渦を検出するのは非常に困難である。このため、本研究では、安定な縦渦を形成するために平坦な均一粗面上に4mm角の縦棧を横断方向に等間隔(8cm)に配列し、清水流および浮遊砂流の水力特性に及ぼす縦渦の影響について実験的に検討した。水力条件は Table 1 に示されており、CaseA は清水流、CaseB は同一流れに砂粒を混入した浮遊砂流である。

4.1 流速および濃度の横断分布

流れの中に安定な縦渦が存在するとき、主流流速は横断方向にかなり規則的な波状分布を呈することが知られている。Fig. 9 の CaseB における流速の横断分布も各計測高さで規則的な波状分布を示しており、安定した縦渦の存在していることがわかる。また、同図に示した浮遊砂濃度の横断分布も、流速と同様、規則的な波状分布を示し、高流速部と低濃度部、低流速部と高濃度部とが対応している。これらの結果より、平均的には、低速高濃度部の $z=20\text{cm}$ を湧昇部、高速低濃度部の $z=24\text{cm}$ を下降部とする縦渦が形成されているとみなすことができる。

以下では、上述の湧昇部および下降部における各種水理量の鉛直分布を比較検討する。

4.2 湧昇部および下降部における水理量の比較

Fig. 10 は、湧昇部と下降部における流速分布を CaseA および CaseB について示したものである。Case A, B を比較すると、従来より指摘されているように、浮遊砂を含むことにより外部層の流速勾配が急になる

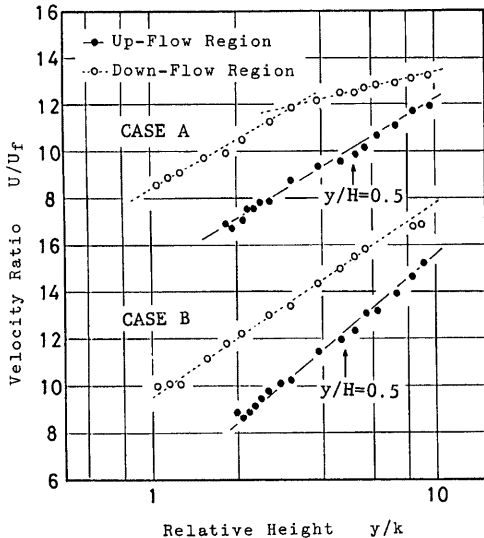


Fig. 10 Velocity distribution at up and down flow regions.

ことが湧昇部および下降部の両測線について認められる。また、CaseBの浮遊砂流では、高濃度の湧昇部の方が下降部よりも流速勾配は大きくなっている。

Fig. 11 は、浮遊砂濃度の鉛直分布を示したものであるが、同一高さにおける浮遊砂濃度は湧昇部の方が下降部より40~50%程度大きいことがわかる。また、Fig. 12 に示した両測線での粒径別濃度分布は Rouse 式に比較的良好に適合しており、縦渦の存在する場においてさえも Rouse 式が適合することは興味深い。なお、Fig. 12 の計測値に Rouse 式を用いて指数 $Z(=v_s/(\beta\kappa U_f))$ を算定すると、下降部の方が若干大きくなっている。

せん断応力 τ が直線分布するとの仮定と Fig. 10 に示した流速分布計測値を用い、 $\tau = \rho \epsilon_m \frac{dU}{dy}$ より算定した渦動粘性係数 ϵ_m および $\epsilon_s \frac{dc}{dy} + v_s c = 0$ より算定した粒子拡散係数 ϵ_s を示すと Fig. 13 の

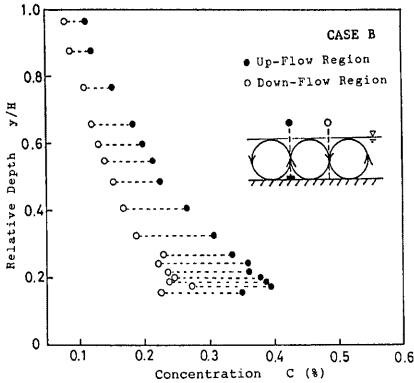


Fig. 11 Concentration distribution at up and down flow regions.

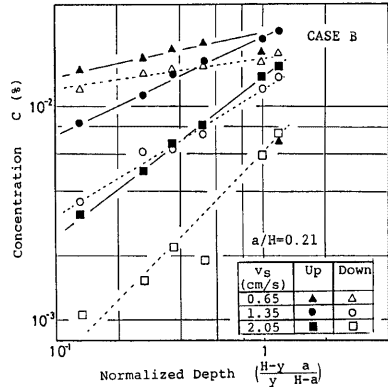


Fig. 12 Concentration distribution of each grain size.

ようになる。 ϵ_m および ϵ_s とともに放物線分布をしており、湧昇部、下降部ともレイノルズ・アナロジー $\epsilon_s = \beta \epsilon_m$ (β は比例定数) は成立しているときみなせるが、 $y/H < 0.5$ の領域では湧昇部の方が大きな ϵ_s 値を示している。Fig. 14 は、粒径別の浮遊砂濃度計測値に Rouse 式を適用して算定した β 値を示したものである。 β 値は湧昇部の方が大きく、さらに沈降・摩擦速度比 v_s/U_f の増加とともに減少する傾向を示すが、本実験の範囲内では 1 よりも大きな値である。

以上に示した湧昇部および下降部における水力特性の差違は次のように説明することができる。すなわち、粗面流れの場合には浮遊砂濃度の増加とともに外部層の流速勾配は増大することが知られているが、本実験において路床近くでは、縦渦により下降部から湧昇部に向かう流れが存在するため、湧昇部には砂粒子が集められ高濃度となる。さらに、縦渦により、湧昇部では特に路床付近で下部の低速流体塊が上昇する。したがって、それら 2 つの複合効果によって湧昇部の流速勾配は下降部のそれよりも大きくなると考えられる。また、縦渦により、湧昇部では比較的強い上向きの流れ、下降部では逆に弱い下向きの流れが生じているた

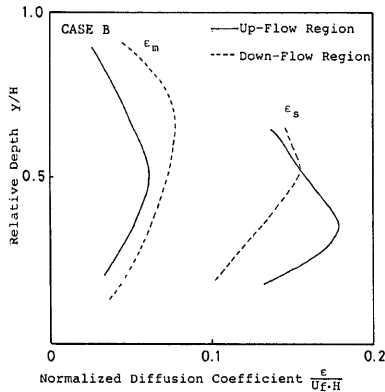


Fig. 13 Distribution of diffusion coefficient ϵ_m and ϵ_s .

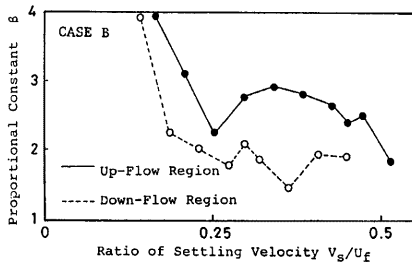


Fig. 14 Variation of proportional constant β with the ratio of settling and friction velocity v_s/U_f .

め、鉛直上向きの拡散能力は湧昇部の方が下降部よりも大きくなり、湧昇部の粒子拡散係数 ϵ_s の方が見かけ上大きくなるものと解釈できる。

5. 結 論

本研究は開水路浮遊砂流の水力特性、とくに流速分布特性について実験的検討を加えたものであって、得られた成果を要約すると次の通りである。

- 1) 定常・等流状態の2次元開水路流れにおいて、清水流および浮遊砂流共に流速分布は対数則のみでは表わすことができず、外部層での対数則からの逸脱を考慮した Coles の流速分布が良好に適合する。
- 2) Coles の流速分布式を規定する各種パラメータは、浮遊砂濃度の増加とともに **Table 3** に示したような変化をする。
- 3) 流れの中に安定な縦渦が存在する場合、流速および浮遊砂濃度は横断方向に一律ではなく、高(低)流速部と低(高)濃度部とが対応する波状分布の性状を呈す。
- 4) 縦渦の存在する場においてさえも、浮遊砂濃度分布は Rouse 式に良く適合し、レイノルズ・アナロジーの仮定も成立するようである。
- 5) このとき、比例定数 β は、縦渦の湧昇部の方が下降部よりも大きく、さらに、沈降・摩擦速度比の増加とともに減少する傾向を示すが、本実験の範囲内では1よりも大きな値であった。

最後に、本研究の遂行に際し、実験およびデータ解析に協力された川本秀夫氏(現中国電力)、京都大学大学院生吉村庄平氏ならびに小久保鉄也氏に対し、深甚なる謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Itakura, T. and T. Kishi: Open channel flow with suspended sediments, Proc. ASCE, Vol. 106, 1980, pp. 1325-1343.
- 2) 林 泰造・大山好永: 中立浮遊粒子を含む開水路水流の乱流特性について, 第23回水理講演会論文集, 1979, pp. 131-138.
- 3) Vanoni, V. A.: Transportation of suspended sediment by water, Proc. ASCE, Vol. 70, 1944, pp. 67-133.
- 4) Ismail, H. M.: Turbulent transfer mechanism and suspended sediment in closed channels, Trans. ASCE, Vol. 117, 1952, pp. 409-446.
- 5) Einstein, H. A. and N. Chien: Second approximation to the solution of the suspended-load theory, Univ. Calif. Inst. Eng. Res., No. 3, 1954.
- 6) Vanoni, V. A. and G. N. Nomicos: Resistance properties of sediment-laden streams, Trans. ASCE, Vol. 126, 1961, pp. 1140-1175.
- 7) Elata, C. and A. T. Ippen: The dynamics of open channel flow with suspensions of neutrally buoyant particles, Tech. Report, No. 45, Hydrodynamics Lab., MIT, 1961.
- 8) 室田 明: 浮砂濃度と流速分布の関連について, 土木学会誌, 38巻, 11号, 1953, pp. 8-11.
- 9) 椿東一郎: 浮流流砂が流れに及ぼす影響について, 土木学会誌, 40巻, 9号, 1955, pp. 449-458.
- 10) 志村博康: 浮遊砂を有する水流の諸特性について, 土木学会論文集, 第46号, 1957, pp. 22-29.
- 11) 日野幹雄: 固体粒子を浮遊した流れの乱流構造の変化, 土木学会論文集, 第92号, 1963, pp. 11-20.
- 12) Bradshaw, P.: Turbulence, Springer-Verlag, 1976.
- 13) 今本博健・大年邦雄: 固液混相開水路流れの水力特性に関する研究(2), 京都大学防災研究所年報, 第23号 B-2, 1980, pp. 373-392.
- 14) Prandtl, L.: Bericht über Untersuchungen zur Ausgebildeter Turbulenz, Z. a. M. M., 5, 1925, pp. 62-74.

- 15) Kármán, Th. von.: Mechnische Ährlichkeit und Turbulenz, Verch. 3, Intern. Kongr. für Tech. Mech., Stockholm, I, 1930, pp. 85-93.
- 16) Zagustin, K.: Analytical solution for turbulent flow in pipes, La Houille Blanche, 1969-2, 1969, pp. 113-118.
- 17) Blasius, H.: Das Ährlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten, Forchungsheft, 131, Berlin, 1913.
- 18) Coles, D.: The law of the wake in the turbulent boundary layer, Jour. Fluid Mech., Vol. 1, part 2, 1956, pp. 191-226.
- 19) Willis, J. C.: A new mathematical model for the velocity distribution in turbulent shear flow, Jour. Hydr. Res., Vol. 10, No. 2, 1972, pp. 205-225.