

# 粒子の浮遊限界と浮遊砂量に関する研究

芦田 和男・岡部 健士・藤田 正治

## THRESHOLD CONDITION OF PARTICLE SUSPENSION AND THE CONCENTRATION OF SUSPENDED SEDIMENTS AT A REFERENCE LEVEL

By Kazuo ASHIDA, Takeshi OKABE and Masaharu FUJITA

### Synopsis

Mechanism of suspension of silt and fine sands is investigated by experimental and theoretical approaches.

The criterion for the threshold condition of the suspension of the particle on the smooth and rough bed is obtained by the experiment. This criterion is analytically formulated on the basis of the characteristics of turbulent intensity near the bottom. By using the results, the authors develop the equation to calculate the suspended sediment concentration at a reference level which is essential for the calculation of the suspended sediment transportation.

### 1. 緒 言

裸地や河道堆積地から流出する土砂の成分には、細砂やシルトが比較的多く、これらの微細砂はほとんど浮遊砂として流送される。このように、河道を浮遊形態で流下する砂れきに占める細砂やシルトの割合は大きく、流出土砂量の算定などにおいて、これらの土砂の浮遊限界や浮遊砂量の推定式を確立することが重要な課題の一つとなっている。

従来、浮遊砂がある程度存在するようになる限界を与える条件式として、底面付近の鉛直方向の乱れ強度  $v'$  が摩擦速度  $u_*$  とほぼ等しいということから、次式が考えられている。

$$u_{*s} \approx w_s \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $u_{*s}$  は浮遊限界摩擦速度である。しかし、細砂やシルトに関しても (1) 式が適用できるかについては、現在のところ明らかにされていない。このために、つぎに述べるような2つのことが問題になっている。ひとつは、粒子の運動形態の遷移に関して、他のひとつは浮遊砂量の予測式についてである。(1) 式を全ての粒子に対して適用すると、掃流限界と浮遊限界が等しくなる粒径  $d_c (\approx 100\mu)$  を境にして、 $d > d_c$  の粒子では静止  $\rightleftharpoons$  掃流  $\rightleftharpoons$  浮遊、 $d < d_c$  では静止  $\rightleftharpoons$  浮遊と異なる運動形態の遷移が生じることになる。細砂やシルト、とくに  $d < d_c$  の土砂が上述のような遷移をするかについては明らかにされておらず、浮遊限界を明確にして砂れきがどのように遷移するかについて検討する必要がある。

つぎに、浮遊砂量の予測においては、算定の境界条件となる底面濃度を精度よく推定することが肝要である。Lane・Kalinske<sup>1)</sup>、Einstein<sup>2)</sup>、道上<sup>3)</sup>、平野<sup>4)</sup>、岸・板倉<sup>5)</sup>らはそれぞれのモデルで解析し底面濃度式を求めている。しかし、それらのモデルには浮遊限界が適切に考慮されておらず、とくに、浮遊限界付近での適合性はあまりよくない。そこで、浮遊限界を導入し、浮遊限界で浮遊砂量が0になるような底面濃度の推定式を考える必要がある。

以上のような問題点を解明するために、本研究ではつぎに述べるようなことを行う。第2章では、微細砂

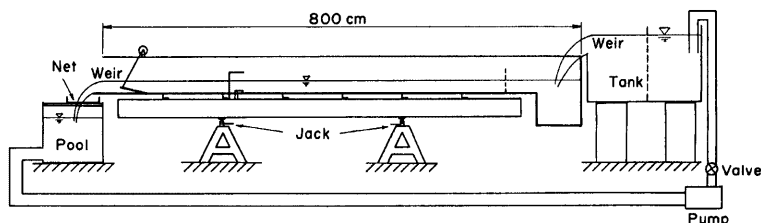


Fig. 1 Experimental flume.

として粒径  $44\sim 420\mu$  のシルトおよび細砂を用いて浮遊限界に関する詳細な実験を行い、浮遊限界を実験的に検討する。第3章では、浮遊条件式を理論的に導き、第2章の実験値との適合性をみる。第4章では、第3章で得た浮遊条件式を導入した浮遊砂底面濃度の推定式を提案し、実験値との比較検討を行う。

## 2. 微細砂の浮遊限界に関する実験

### 2.1 実験の概要

シルトから細砂領域での各種の粒径に対して、流砂の運動形態の遷移、浮遊限界ならびに浮遊砂濃度を検討するために、以下のような実験を行った。なお、浮遊限界の定量的評価は後述するように、全流砂量のうちで浮遊砂量の占める割合によって行っている。

#### (1) 実験装置

実験水路は Fig. 1 に示すとおりで、長さ 8m、幅 30cm の可変勾配水路であり、上流端から 6m のところに Fig. 2 に示すような流砂採集装置が設置されている。掃流砂採集装置は高さ 2mm で、全幅の掃流砂をサイフォン方式で採集し、浮遊砂採集装置は、水路中央 1cm 幅の浮遊砂を掃流砂採集装置の上部から水

Table 1 Experimental conditions.

Exp. No.	$d$ ( $\mu$ )	$w_s$ (cm/s)	slope	$Q$ (l/s)	$u_*$ (cm/s)	$F_r$	$R_s$	$u_*d/\nu$	$u_*d_r/\nu$	$u_*k_s/\nu$
A-I	44~74	0.504	1/685 1/695	0.20 ~2.65	1.06 ~2.13	0.45 ~0.64	2700 ~35000	0.63 ~1.26	—	—
B-I	88~105	1.018	1/695	0.25 ~2.90	1.09 ~2.29	0.48 ~0.53	3300 ~35700	1.05 ~2.21	—	—
C-I	105~125	1.422	1/685 1/436	0.32 ~2.61	1.24 ~2.50	0.45 ~0.65	4300 ~35000	1.43 ~2.88	—	—
D-I	125~149	1.680	1/436	0.20 ~2.68	1.12 ~2.57	0.62 ~0.68	2600 ~35700	1.53 ~3.52	—	—
E-I	149~177	2.153	1/436	0.25 ~3.03	1.21 ~2.69	0.60 ~0.67	3300 ~40400	1.97 ~4.38	—	—
F-I	297~420	4.200	1/185	0.22 ~2.40	1.73 ~3.49	0.67 ~0.74	2900 ~32000	6.23 ~12.6	—	—
A-II (1)	44~74	0.504	1/458	0.22 ~0.94	1.33 ~1.90	0.29 ~0.38	2900 ~31300	—	40~57	93~133
A-II (2)	44~74	0.504	1/458	0.07 ~0.75	1.02 ~1.73	0.21 ~0.41	2300 ~10000	—	31~52	51~87
E-II (1)	149~177	2.153	1/458	0.43 ~1.93	1.56 ~2.26	0.33 ~0.43	14300 ~64000	—	47~68	105~153
E-II (2)	149~177	2.153	1/458	0.40 ~1.01	1.50 ~1.88	0.36 ~0.42	5300 ~33700	—	45~56	79~98

面にわたって、装置内の弁で採水量を調節して採集するものである。また、流砂採集装置の上流 4 m の区間の河床には、平均高さ 3 mm の砂れき粗度が貼付されている。

## (2) 実験方法と実験条件

実験に用いた砂は、珪砂を  $44 \sim 420 \mu$  の篩いで篩ったもので A～F 砂の 6 種類である。A～F 砂の粒径範囲を実験条件とともに **Table 1** に示す。また、実験用砂の粒度を V-Atube による沈降速度分布で示したものが **Fig. 3** である。

Exp. A-I～F-I は、流砂量測定断面の上流 4 m の区間に、砂れき粗度が隠れる程度に A～F 砂を一樣に敷いたもので、砂粒レイノルズ数  $u_* d / \nu$  の値から Exp. A-I～E-I では粗面領域、Exp. F-I では粗滑遷移領域の実験である。この実験では、いずれの場合も河床波が形成されており、水深は数断面での測定値の平均値とした。

Exp. A-II-(1), (2), Exp. E-II-(1), (2) は、A 砂、E 砂を **Fig. 4 (a), (b)** に示すように砂れき粗度が突出する程度に敷いたもので、 $u_* k_s / \nu$ ,  $u_* d_r / \nu$  ( $k_s$ : 相当粗度高さ,  $d_r$ : 砂れき粗度の粒径) の値から、粗滑遷移領域から粗面領域での実験である。水深は、砂れき粗度の頂部と河床砂面との中間を平均河床として求められた。

実験は流量を段階的に増加させて、等流の条件下で、各流量のときの掃流砂および浮遊砂を採集するとともに、粒子の移動状況を観察した。ただし、Exp. A-II, Exp. E-II では粒子の移動状況の観察のみ行った。流砂の採集には、採水の吸引流速が流水の速度とできるだけ等しくなるように注意を払うとともに、採水時間を粒子の流下速度にあわせて、10 分から 2 時間とし、時間的な変動が測定値に入らないように心がけた。Exp. A-I～F-I では、前述したように河床波が形成されたが、この河床波として流送される粒子を掃流砂として計測した。

## 2.2 実験結果とその考察

土砂れき上の流れて、掃流力が増加していくと、粒子の大きさに対応するある摩擦速度のときその粒径の粒子は浮遊し始める。これが浮遊限界であって、その時の摩擦速度を  $u_{*s0}$  で表示することにする。浮遊限界においては浮遊砂量はほとんどなく実際上 0 と考えられる。しかし、従来浮遊限界と言われているものには、上の定義によっているものもあるが、必ずしも明確ではなく、全流砂の中で浮遊砂が無視

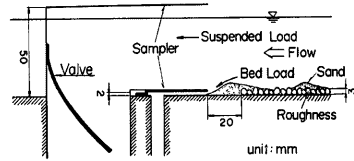


Fig. 2 Samplers for bed load and suspended load.

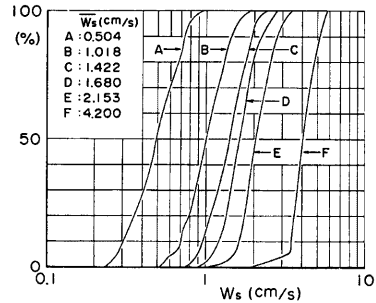


Fig. 3 Fall velocity distribution of silt and fine sands used in experiments.

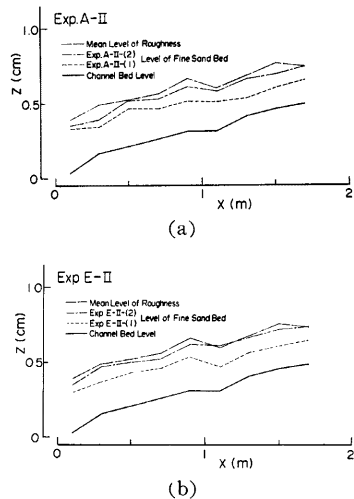
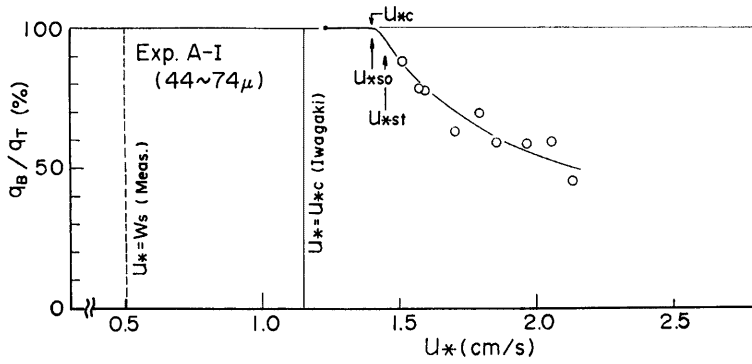
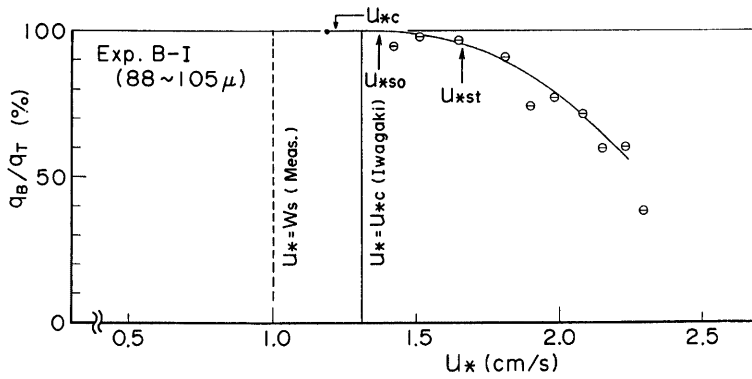


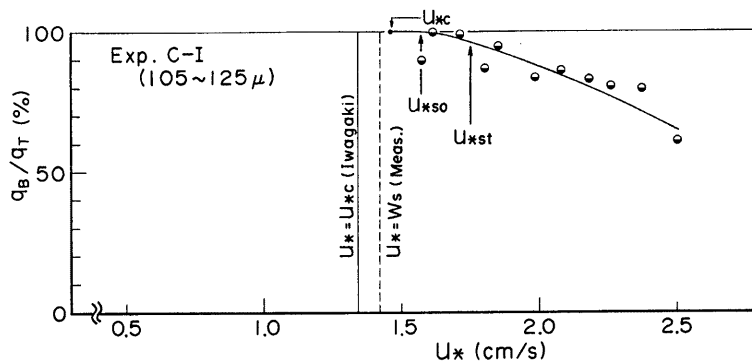
Fig. 4 (a), (b) Bed profiles.



(a)

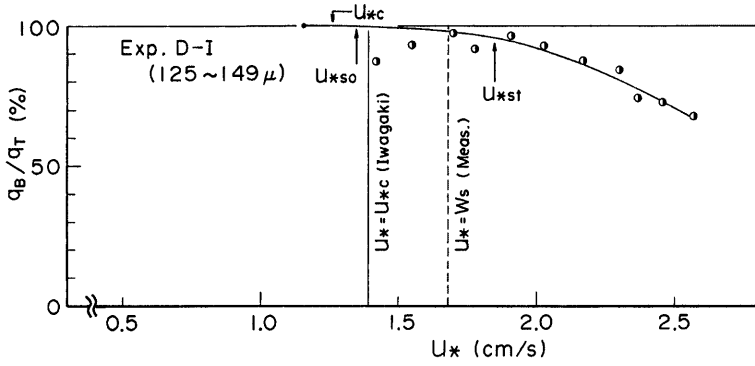


(b)

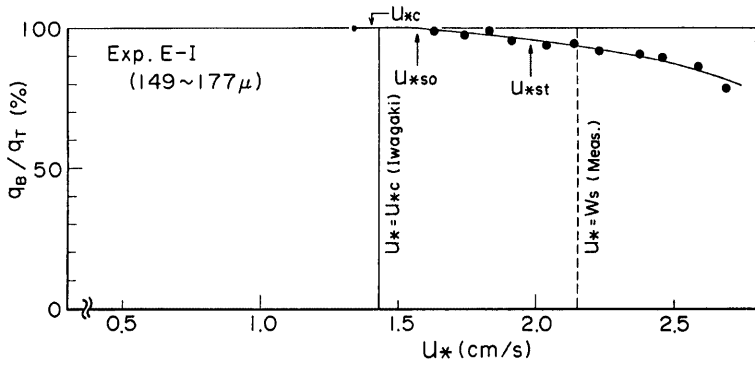


(c)

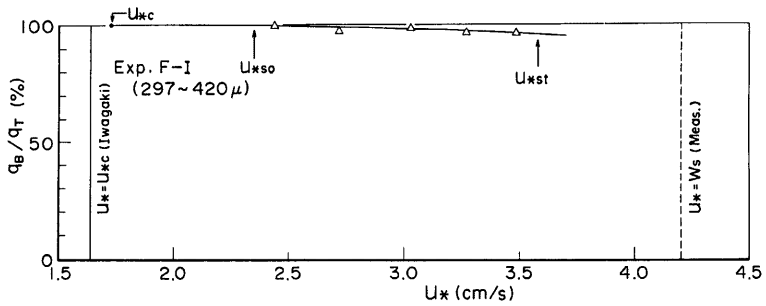
Fig. 5 (a)-(c) Variation of  $q_B/q_T$  with  $u_*$ .



(d)



(e)



(f)

Fig. 5 (d)-(f) Variation of  $q_B/q_T$  with  $u_*$ .

し得なくなる状態をさしている場合もある。例えば、「浮遊限界の摩擦速度は粒子の沈降速度にほぼ等しい。」という事が従来指摘されているが、その摩擦速度では、全流砂の中に浮遊砂がある程度存在するようであり、著者らの実験結果によると、全流砂量  $q_T$  に占める浮遊砂量  $q_s$  の割合がほぼ4%位の状態に相当する。この摩擦速度は浮遊砂の影響が無視し得なくなる限界を与えるもので實際上重要であるので、これを  $u_{*st}$  として以下の議論においてしばしば用いるが、浮遊限界摩擦速度というのは  $u_{*s0}$  を指すことにする。

以下、各種の粒径の粒子を対象として、掃流力を増加させた場合、粒子の移動形態がどのように遷移するかを実験結果により検討し、浮遊限界の摩擦速度  $u_{*s0}$  や浮遊砂の影響が無視できなくなる限界の摩擦速度  $u_{*st}$  の大きさや (1) 式がどのような状態に対応しているかなどの問題を明らかにしよう。なお、これらの特性は、微細粒子が河床を構成している場合と粗粒子の間隙中に微細粒子が存在する場合ではかなり異なるので、それぞれについて検討を行った。

#### (1) 微細粒子が河床を構成している場合

Exp. A-I ~ F-I に対して、全流砂量に対する掃流砂量の割合  $q_B/q_T$  が  $u_*$  によってどのように変化するかを示したものが Fig. 5 (a)~(f) である。図中の曲線の開始点 (・) は粒子がころがり始める点を表す。また掃流限界の実験値  $u_{*c}$  は岩垣<sup>6)</sup> の考え方に従って、粒子が時々ころがる状態と全面的に移動する状態との中間的な状態として求めたものであるが、Fig. 5 に示すように岩垣<sup>6)</sup> の式から求めた値とはほぼ一致する。 $u_*$  とともに、 $q_s/q_T$  は増加していくが、この値が0および4%の所を  $u_{*s0}$  および  $u_{*st}$  として図中に示している。また、参考のために  $u_* = w_s$  の値も示している。

実験用砂は比較的均一ではあるが、沈降速度で見ると Fig. 3 に示すようにある程度の分布を持っている。そこで、もし河床砂の中で小さい粒子が先に浮遊するという現象が生じているとすれば、浮遊限界の議論でこの事を考慮しなければならない。そこで、Fig. 6 に Exp. A-I の  $u_* = 1.59, 1.70$  cm/s のときの浮遊砂と河床砂の沈降速度の比較を行った。両者はほぼ一致し、上述のような事はとくに考慮する必要がないものと考えられる。

Fig. 7 に、各粒径に対する  $u_{*s0}$ ,  $u_{*st}$ ,  $u_{*c}$  の実験値および White, S. J<sup>8)</sup> の限界掃流力に関する実験結果を参考にしてひかれた  $u_{*c}$  の曲線、実測の沈降速度  $w_s$  の内挿曲線が示されている。これから次の事が言える。

(i) 従来提案されている浮遊限界の条件式  $u_* \approx w_s$  は、粒径  $d$  が  $d_c$  に近い値  $d = 0.015$  cm 付近より大きい場合には、 $u_* = u_{*st}$  の値にほぼ対応する。しかし、 $d < 0.015$  cm の範囲において、 $u_{*st} > w_s$  となり、 $d$  が小さくなるほど両者の開きは大きくなる。

(ii)  $u_{*s0}$  は、 $d < 0.015$  cm において、 $u_{*c}$  を若干上まわった値であり、 $u_{*s0} \approx u_{*c}$  と見なすことができる。

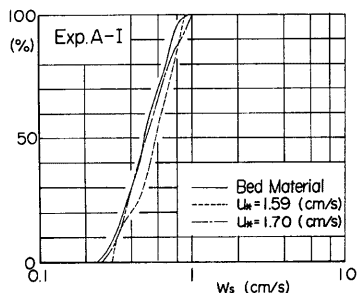


Fig. 6. Fall velocity distribution of suspended sediment and bed material.

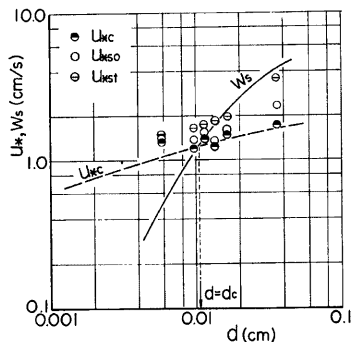


Fig. 7  $u_{*st}$ ,  $u_{*s0}$  and  $u_{*c}$  for each sand.

しかし、 $d > 0.015\text{cm}$  において、 $u_{*s0} > u_{*c}$  となり  $d$  が大きくなるにつれ両者の開きは大きくなる。

(iii)  $d < d_c$  においては、 $u_{*st}$  と  $u_{*s0}$  とはほぼ一致する。これは粒子が浮遊し始めると、摩擦速度のわずかな増加で浮遊砂が急激に増加することを意味する。一方、 $d > d_c$  において粒径が大きくなるほど、 $u_{*s0}$  と  $u_{*st}$  との開きは大きくなる。

浮遊限界についての理論的考察は第3章で行うことにして、ここでは Fig. 7 の関係についての定性的な説明を加える。

粒子は鉛直方向の瞬間的な強い乱れをうけ、 $v_{max} > w_s(v_{max}$ ; 鉛直方向の変動速度の最大値) という条件のとき浮遊すると考えられる。鉛直方向の変動速度  $v$  の確率分布は禰津<sup>9)</sup> によれば Fig. 8 (a), (b) のようになり、 $v_{max} = \alpha v'$  ( $\alpha \approx 3$ ) 程度の鉛直方向変動速度が起ころう。一方、 $v'/u_*$  は  $y^+ = u_* y/\nu$  ( $y$ ; 鉛直方向の高さ) の普遍関数となり、禰津<sup>10)</sup> によれば Fig. 9 のようになる。図中には Grass による実測値も示されている。この図より、 $y^+ \geq 50$  では  $v' \approx u_*$  となるが、微細砂が河床を構成して滑面を形成しているような場合には、粒径高さでの  $v'$  は  $u_*$  に比べてかなり小さい。したがって、 $u_* \leq u_{*c}$  においては、 $v_{max} < w_s$  となり浮遊しない。しかし、 $u_* > u_{*c}$  となり粒子が動き始めると、掃流運動で河床から離脱し、粒子の位置があがるとともに作用する乱れも強くなる。そして、 $u_*$  が  $u_{*s0}$  ( $> u_{*c}$ ) になると  $v_{max} > w_s$  の条件を満たすため浮遊し始める。すなわち、 $d < d_c$  の微細粒子の場合においても、滑面の場合には、掃流力が限界掃流力を上まわって粒子の移動がおこなない限り浮遊は生じない。かつ掃流状態になると比較的すみやかに浮遊が生じる。一方、 $d > d_c$  において粒径が大きくなると粗面となり、粒径高さでの  $v'$  は  $u_*$  にほぼ等しく、 $u_* = w_s$  の条件は浮遊砂がかなり存在する状態に対応することになる。また、 $u_{*c} < w_s/\alpha$  となるため、粒子は  $u_{*c} < u_{*s0} < w_s$  の条件で浮遊し始める。

これらの定量的な問題については第3章で述べる。

## (2) 粗粒子の間隙中に微細粒子が存在する場合

微細粒子が河床を構成している場合には、粒子が粘性底層内に入っており浮遊しにくい状態にあるが、粗粒子の間隙中に存在する微細粒子の浮遊に関しては、粗粒子の存在により底面付近でも乱れは強く、(1) で述べたものと異なる結果が予想される。Fig. 10 は、Exp. A-I, E-I, A-II-(1), (2), E-II-(1), (2) について、砂粒レイノルズ数に対する  $u_{*s0}$  と粒子がころがり始めるときの摩擦速度  $u_{*i}$  (注:  $u_{*c}$  ではない) の変化を示したものである。砂粒レイノルズ数は、Exp. A-I, E-I では  $u_* d/\nu$ 、A-II, E-II では  $u_* d_s/\nu$  として

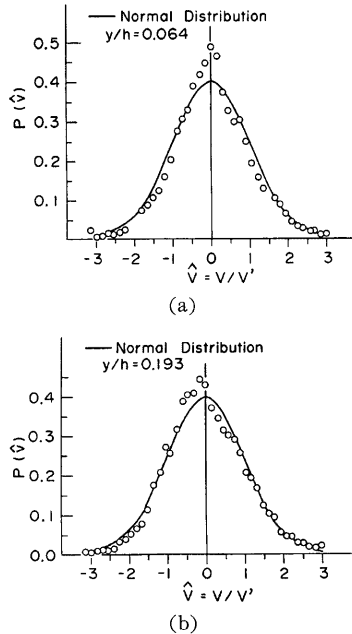


Fig. 8. (a), (b) Probability density distributions of  $v$ . [after Nezu<sup>9)</sup>]

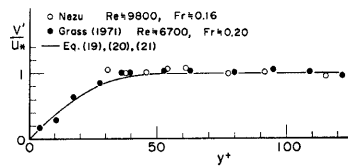
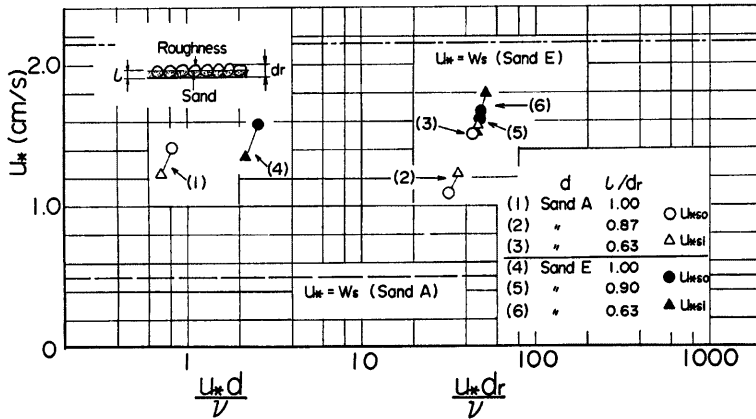


Fig. 9 Relation between  $v'/u_*$  and  $y^+ (= u_* y / \nu)$ . [after Nezu<sup>10)</sup>]

Fig. 10 Variation of  $u_{*s0}$  and  $u_{*f}$  with  $u_*d/\nu$  or  $u_*d_r/\nu$ .

いる。また、図中の(1)~(6)は各実験を表わし、それぞれの実験に用いた粒子および微細粒子の堆積厚の砂れき粗度に対する割合  $l/d_r$  (図中の模式図を参照) を同図に示す。この図から、次のようなことが考察される。

(i) 微細粒子が河床を構成している場合 ( $l/d_r=1$ )、A砂 (44~74 $\mu$ )、E砂 (149~177 $\mu$ ) とともに静止⇌掃流⇌浮遊と遷移しているが、微細粒子の間隙に存在する場合、A砂では  $l/d_r=0.63, 0.87$ 、E砂では  $l/d_r=0.63$  のとき、静止⇌浮遊と遷移している。また、E砂で  $l/d_r=0.90$  のときは、静止⇌掃流⇌浮遊と遷移している。このように、粒子の運動形態の遷移は、微細砂のみが河床を構成しているか、粗粒子の中に微細砂が存在しているか、また後者の場合、微細砂の存在高さがどれくらいであるかによって異なる。

(ii) 浮遊限界摩擦速度  $u_{*s0}$  も(i)と同様に、微細砂が河床に存在する状況によって異なる。すなわち、 $u_{*s0}$  は  $l/d_r$  が小さい時、粗粒子の遮蔽効果により浮遊しにくく大きいが、 $l/d_r$  が大きくなると減少し、さらに大きくなると粗粒子の乱れに及ぼす影響が小さくなり、今度は逆に増加し始め、 $l/d_r$  がある値のとき、 $u_{*s0}$  は最小となる。ただし、E砂では、本実験条件に対して  $u_{*s0}$  はほぼ一定であった。

このように、微細砂が粗粒子の間隙に存在するような場合では、 $u_{*s0}$  や運動形態の遷移に関しては、粗粒子の乱れに及ぼす効果と遮蔽効果の相互関係が影響し、また、その相互関係は  $l/d_r$  の値により変わるため、上述のような結果になったと思われる。

### 3. 微細砂の浮遊限界に関する理論

#### 3.1 浮遊条件式

##### (1) 粒子の浮遊機構

2章で述べたように、微細砂の浮遊限界は、微細砂が河床を構成しているか、また、粗粒子の間にどの程度微細砂が敷かれているかなどによって異なると考えられる。したがって、浮遊限界に関する理論を展開するまえに、河床条件を明示しておく必要があるが、本章では、Exp. A-1~F-1のように微細砂が河床を構成し粗度要素がかくされている場合、すなわち滑面の条件を対象にする。このような条件のもとでは、Fig. 7で明らかにされたように、微細砂でも掃流状態にならないければ浮遊しない。このことから、粒子の浮遊機構を次のように考える。

(i)  $u_* < u_{*c}$  : 粒子は掃流されず、また粘性底層内にあるため浮遊もしない。

(ii)  $u_{*c} < u_* < u_{*s0}$  : 粒子は掃流され始め、圧力変動に伴う揚力  $F_L$  によって、掃流状態の離脱高さ  $y_0$  ま



で離脱する。しかし、その位置での鉛直方向の最大変動速度  $v_{max}$  と粒子の沈降速度  $w_s$  の関係が  $v_{max} < w_s$  であり、粒子は再着床する。

(iii)  $u_{*s0} < u_{*c}$ ; 粒子は (ii) と同様に  $y_0$  まで離脱する。さらに、 $y_0$  の位置で  $v_{max} > w_s$  となり、粒子は浮遊する。

以上のような浮遊機構を考えると、浮遊限界は次のように表わされる。

$$v_{max}(y_0) = w_s \quad \dots\dots\dots (2)$$

したがって、浮遊限界を理論的に明らかにする問題は、粒子の掃流状態の離脱高さ  $y_0$  と鉛直方向の最大変動速度  $v_{max}$  の鉛直方向の分布を求めることに帰着する。

## (2) 粒子の掃流状態の離脱高さ

(1)の浮遊機構に従って、掃流状態にある粒子が、河床面で圧力変動に伴う揚力  $F_L$  を受け、初速  $V_0$  で鉛直方向に飛び出すと考える。座標系は **Fig. 11** に示すとおりとする。

乱流中の粒子の運動方程式は次式のようなである。

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} d^3 \sigma \frac{d^2 y}{dt^2} = & 3\pi \mu d \left( v - \frac{dy}{dt} \right) + \frac{1}{2} \frac{\pi}{6} d^3 \rho \left( \frac{dv}{dt} - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \\ & + \frac{\pi}{6} d^3 \rho \frac{dv}{dt} - \frac{\pi}{6} d^3 (\sigma - \rho) g \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $y$ ：粒子の位置、 $\sigma$ ：粒子密度、 $\mu$ ：粘性係数である。左辺は粒子を加速するための力、右辺第1項は粒子に働く抗力 (Stokes の抵抗則)、第2項は仮想質量を加速するための力、第3項は圧力勾配によって生じる力、第4項はポテンシャル場による外力である。(3) 式で Basset 項は省略されている。

ここで対象としている流れの場は滑面であり、Buffer 層以下では乱れは小さく、掃流状態の離脱高さは、離脱速度の初期値  $V_0$  によってのみ規定されるものとする、(3) 式は次式のようなになる。

$$-\frac{d^2 y}{dt^2} + a \frac{dy}{dt} + b = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに、

$$a = \frac{18\mu}{d^2 \left( \sigma + \frac{\rho}{2} \right)} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$b = \frac{\sigma - \rho}{\sigma + \frac{\rho}{2}} g \quad \dots\dots\dots (6)$$

(4)式の初期条件は次式で与えられる。

$$t=0; \quad y=d, \quad dy/dt=V_0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

(7)式の飛び出し速度  $V_0$  は次の力積方程式から求められる。

$$\sigma(\pi/6) d^3 V_0 = (F_L - G) \Delta t \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $F_L$ ：圧力変動に伴う揚力、 $G$ ：粒子の水中重量、 $\Delta t$ ：揚力の作用時間である。

揚力は粘性底層外で生じる鉛直方向の変動速度に起因するとして、次式のように表わされるものとする。

$$F_L = \frac{1}{2} C_L' \rho v^2 \frac{\pi}{4} d^2 \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $C_L'$ ： $F_L$  と  $v$  を結びつける係数である。

粒子の水中重量は、

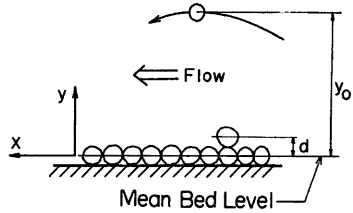


Fig. 11 Coordinate system and symbols.

$$G = \frac{\pi}{6} d^3 (\sigma - \rho) g \quad \dots\dots\dots(10)$$

であるので, (8), (9), (10) 式より次式を得る。

$$\sigma \frac{\pi}{6} d^3 V_0 = \left\{ \frac{1}{2} C_L' \rho v^2 \frac{\pi}{4} d^2 - \frac{\pi}{6} d^3 (\sigma - \rho) g \right\} \Delta t \quad \dots\dots\dots(11)$$

また, 砂れきが掃流状態にならなければ浮遊せず, しかも両者の限界はかなり近い事実から, 近似的に  $v = v_c$  (掃流限界のときの  $v$ ) のとき,  $V_0 = 0$  と見なしてもさしつかえないものと思われる。すると,  $v = v_c$  において, (11) 式は次のようになる。

$$0 = \left\{ \frac{1}{2} C_L' \rho v_c^2 \frac{\pi}{4} d^2 - \frac{\pi}{6} d^3 (\sigma - \rho) g \right\} \Delta t \quad \dots\dots\dots(12)$$

(11), (12) 式より,  $V_0$  は次式となる。

$$V_0 = \frac{3}{4} C_L' \frac{\rho}{\sigma} \frac{v^2 - v_c^2}{d} \Delta t \quad \dots\dots\dots(13)$$

さらに,

$$v = \gamma u_* \quad (\gamma: \text{係数}) \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$v_c = \gamma u_{*c} \quad \dots\dots\dots(15)$$

とおき,  $\Delta t$  に関しては,

$$\Delta t = d / w_s$$

と仮定すると,  $V_0$  は次式のように導かれる。

$$V_0 = K_v \frac{u_*^2 - u_{*c}^2}{w_s} \quad \dots\dots\dots(16)$$

ここに,

$$K_v = \frac{3}{4} C_L' \frac{\rho}{\sigma} \gamma^2 \quad \dots\dots\dots(17)$$

(16) 式を用いて, (4) 式を (7) 式の条件で解くと, 粒子の離脱高さの最大値として次式を得る。

$$y_0 = \frac{s_1 s_2 g d^4}{18^2 \nu^2} \left[ 18 \frac{\nu K_v}{d} \frac{\tau_* - \tau_{*c}}{w_s} - \ln \left\{ 18 \frac{\nu K_v}{d} \frac{\tau_* - \tau_{*c}}{w_s} + 1 \right\} \right] + d \quad \dots\dots\dots(18)$$

ここに,  $s_1 = \sigma / \rho + 1/2$ ,  $s_2 = \sigma / \rho - 1$ ,  $\nu$ : 動粘性係数,  $\tau_*$ ,  $\tau_{*c}$ : 掃流力および限界掃流力の無次元表示である。

(3) 鉛直方向の最大変動速度の鉛直分布

滑面での鉛直方向の乱れ強度  $v'$  の鉛直方向の分布は, 2.2 で述べたように, Grass, 禰津によれば **Fig. 9** のようである。中川ら<sup>11)</sup> は, この図の関係を bursting 現象を考えたモデル化により理論的に得ているが, ここでは, 同図に示す放物線との適合性をみて, 次式のように近似できるものとする。

$$\frac{v'}{u_*} = \beta(y^+) \quad \dots\dots\dots(19)$$

ここに,

$$\beta(y^+) = \begin{cases} -\frac{1}{2500} (y^+ - 50)^2 + 1 & y^+ \leq 50 \\ 1 & y^+ > 50 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(20)$$

$$\dots\dots\dots(21)$$

つぎに, 鉛直方向の変動速度  $v$  の最大値について検討する。 $v$  の確率分布は, 禰津の研究成果によれば **Fig. 8** のようになる。この図より,  $v$  の確率分布型はガウス分布が負の方へ少しひずんだ型をしているが, ほぼガウス分布であると見なせる。しかし, この測定値は  $y/h \leq 0.064$  ( $h$ : 水深) の高さのものであり, 本研究で対象としているような河床面近傍で, **Fig. 8** のような分布をしているかどうかについては問題がある

が、ここでは同様な分布をしているものと仮定する。粒子は鉛直方向の強い乱れをうけて浮遊すると考えられるので、浮遊限界については、 $v$  の最大値を用いて議論すべきである。 $v$  の最大値として、いかなる値を用いるかについては検討が必要であるが、Fig. 8 の実験値から、 $v_{max} = \alpha v' (\alpha \approx 3)$  と仮定する。ここで、 $v$  の確率分布をガウス分布とすると、 $v \geq 3v'$  となる確率は0.13%である。

以上より、 $v_{max}$  の鉛直方向の分布は次式のように表わされる。

$$v_{max} = \alpha u_* \beta (y^+) \quad (\alpha \approx 3) \quad \dots\dots\dots (22)$$

#### (4) 浮遊条件

(17) 式で与えられる係数  $K_v$  を0~40に変えて、(2), (18), (19), (20), (21), (22) 式を連立に解いて  $u_{*s0}$  を算定し、 $u_{*s0}^2/\text{sgd}$  と  $u_{*s0}d/\nu$  の関係を求めると、Fig. 12 の実線のようなになる。ただし、 $\tau_{*c}$  として

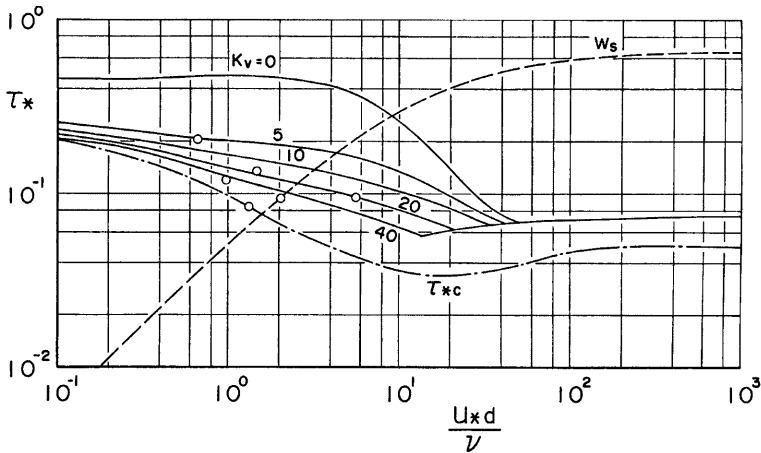


Fig. 12 Relation between  $\tau_{*s0} (= u_{*s0}^2/\text{sgd})$  and  $u_{*s0}d/\nu$ .

Fig. 7 の実験曲線、 $\sigma/\rho = 2.65$ 、 $\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ 、 $\alpha = 3$  を用いた。図中の一点鎖線は  $\tau_{*c}$  の実験曲線、破線は Rubey の沈降速度曲線を表わす。この理論は滑面を対象としており、この図の適用範囲は  $u_*d/\nu \leq 5$  である。

#### 3.2 実験結果との比較

$u_{*s0}$  の実験値を Fig. 12 に示す。この図から  $K_v = 20 \sim 40$  に対する理論値は実験値の傾向をよく表わしているが、適合性はあまりよいとはいえない。これは、 $y_0$  を与える (18) 式が  $\tau_{*c}$  の値に大きく影響されるためであると思われる。そこで、各実験ケースで得られた  $\tau_{*c}$  の実験値を用いて、 $K_v = 40$  の場合の  $u_{*s0}$  を算定し、実験値と比較したものが Fig. 13 である。各実験に対して両者はよく一致している。 $K_v$  は (17) 式で与えられる係数で  $\sigma/\rho = 2.65$ 、 $\gamma = 3$  とすると、次式のようなになる。

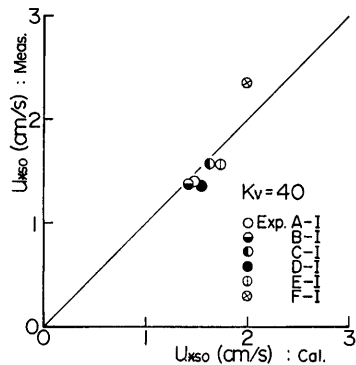


Fig. 13 Comparison between the theoretical results and the experimental ones concerning  $u_{*s0}$ .

$$K_v = 2.5C_L' \quad \dots\dots\dots(23)$$

$C_L'$  は底面での圧力変動による揚力に関する係数であるので、禰津<sup>12)</sup> による壁面での圧力変動に関する従来の研究から、そのオーダーを考える。圧力変動強度  $p'$  と底面せん断応力  $\tau_0$  の比はフルード数  $F_r$  によって変化する。本実験では  $F_r \approx 0.6$  で、このとき  $p'/\tau_0 \approx 8$  であり次式が得られる。

$$p' \approx 8\tau_0 = 8\rho u_*'^2 \approx \frac{1}{2} \rho C_L' v^2 \quad \dots\dots\dots(24)$$

(24) 式より、

$$C_L' \approx \frac{2p'}{\rho v^2} \approx \frac{2p'}{\rho u_*'^2} \approx \frac{16\rho u_*'^2}{\rho u_*'^2} = 16 \quad \dots\dots\dots(25)$$

となる。したがって  $C_L'$  は10~20程度となり、(23) 式から、

$$K_v = (25 \sim 50) \quad \dots\dots\dots(26)$$

となり、実験値と理論値の比較から得られた  $K_v = 40$  という値は、ほぼ妥当であると思われる。

つぎに、浮遊限界のときの粒子の離脱高さ  $y_0$  の計算値に関して若干検討する。粒子は、本研究で対象にしているような粒径が  $500\mu$  以下のものとする。 $y_0$  の計算値は粒径の2~4倍程度であり、 $y_0^+$  は40以下である。したがって、この事は、粒子が buffer 層まで持ち上げられ、そこから浮遊するという仮定を裏づけている。

以上のように、本章で議論した浮遊条件式は、実験値をよく説明するものであり、この理論の妥当性がうかがえる。

#### 4. 微細砂の浮遊砂底面濃度

##### 4.1 従来の研究

底面濃度の算定モデルにはいくつかあるが、Lane・Kalinske (1939), Einstein (1950), 平野 (1970), 岸・板倉 (1980) らの研究が代表的であるので、ここでは、それらについて簡単にまとめて整理する。

##### (a) Lane・Kalinske<sup>1)</sup> の研究

鉛直方向の速度変動  $v$  の密度分布を  $f(v)$ 、沈降速度  $w_s$  なる砂粒が河床砂れき中に占める割合(%)を  $\Delta F(w_s)$  とおき、砂粒が河床から飛び出す割合が  $\Delta F(w_s) \int_{w_s}^{\infty} v f(v) dv$  に比例し、これが河床に沈降する割合  $C_B w_s$  に等しいと考えて  $C_B$  を算定し、米国諸河川の実測結果と比較して次式を得た。

$$C_B = 5.55 \Delta F(w_s) \left[ \frac{1}{2} \frac{u_*'}{w_s} \exp \left\{ - \left( \frac{w_s}{u_*'} \right)^2 \right\} \right]^{1.61} \text{ (ppm)} \quad \dots\dots\dots(27)$$

##### (b) 道上の研究<sup>3)</sup>

粒径の高さにおける砂粒の鉛直方向の速度変動の分布を正規分布とし、重力の効果を考慮した粒子の速度を考え、Lane・Kalinske のモデルに準じて、河床付近の濃度の表示式を次式のように求めた。

$$C_B = K [g(\xi_0)/\xi_0 - G(\xi_0)] \quad \dots\dots\dots(28)$$

ただし、

$$g(\xi_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2} \xi_0^2 \right) \quad \dots\dots\dots(29)$$

$$G(\xi_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi_0}^{\infty} \exp \left( -\frac{1}{2} \xi^2 \right) d\xi \quad \dots\dots\dots(30)$$

$$\xi = w_p / \sigma_p \quad \dots\dots\dots(31)$$

$$\xi_0 = w_s / \sigma_p \quad \dots\dots\dots(32)$$

ここに、 $K$ ：比例定数、 $w_p$ ：粒子の鉛直方向の変動速度、 $\sigma_p$ ： $w_p$  の標準偏差である。 $\sigma_p$  は底面付近の乱れ

の知見や粒子の水流の乱れとの追随性を考慮して  $\sigma_p = 0.75 u_*$  とし、実験資料との適合性から  $K = 0.025$  を得ている。

(c) 岸・板倉の研究<sup>5)</sup>

粒子が河床から離脱する平均速度を、力積方程式と変動する揚力を正規分布として求め、粒子が浮上する量と河床へ沈降する量のつり合いから、次式を求めた。

$$C_B = K \left( \alpha_* \frac{\sigma - \rho}{\sigma} \frac{gd}{u_* w_s} \Omega - 1 \right) \quad \dots\dots\dots(33)$$

ここに、

$$\Omega = \frac{\tau_*}{B_*} \frac{\int_{a'}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2) d\xi}{\int_{a'}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2) d\xi} + \frac{\bar{\tau}_*}{B_* \eta_0} - 1 \quad \dots\dots\dots(34)$$

$$a' = \frac{B_*}{\tau_*} - \frac{1}{\eta_0} \quad \dots\dots\dots(35)$$

実験結果より、 $K = 0.008$ ,  $\alpha_* = 0.14$ ,  $B_* = 0.143$ ,  $\eta_0 = 0.5$  としている。この理論では、平均離脱速度  $\bar{v}_0$  が沈降速度  $w_s$  より大きいとき  $C_B$  は値をもち、 $\bar{v}_0 > w_s$  が浮遊条件として明確に導入されている。

(d) Einstein の研究<sup>2)</sup>

浮遊限界点  $a_*$  における濃度  $C_B$  が掃流砂層の平均濃度に等しいと考え、掃流層内の砂粒速度を  $u_s = 11.6 u_*$  とし、次式を得た。

$$C_B = \frac{i_B q_B}{11.6 u_* a_*} \quad \dots\dots\dots(36)$$

ここに、 $i_B$ ：与えられた粒径範囲の砂粒が掃流砂に占める割合、 $q_B$ ：単位幅掃流砂量である。

(e) 平野の研究<sup>4)</sup>

河床近傍を浮遊砂層と掃流砂層とに分け、両層の粒子の交換を考える。それぞれの層の濃度を  $C_B$ ,  $C_*$  とし、河床付近の垂直乱れ速度の確率分布を正規誤差関数として、次式を得ている。

$$\frac{C_B}{C_*} = \frac{\varphi(\sigma) - F(\sigma)}{\varphi(\sigma) + 1 - F(\sigma)} \quad \dots\dots\dots(37)$$

ここに、

$$\varphi(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) \quad \dots\dots\dots(38)$$

$$F(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sigma}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \quad \dots\dots\dots(39)$$

$$\sigma = w_s / \sqrt{v^2} \quad \dots\dots\dots(40)$$

$\sigma$  は河床付近で  $\sqrt{v^2} = 0.93 u_*$  という実験結果から

$$\sigma = \frac{w_s}{0.93 u_*} \quad \dots\dots\dots(41)$$

である。

## 4.2 浮遊砂底面濃度式

以上、従来提案されている浮遊砂底面濃度算定理論をいくつか示した。各理論には、Einstein の研究を除けば、浮遊限界が考慮されているが、その妥当性については議論されていない。浮遊砂量を精度よく算定するためには、浮遊限界を適切に評価して、それを底面濃度式に導入することが肝要であると思われるので、第3章で考察した浮遊限界の理論を用いて、底面濃度式を以下のように求める。

底面濃度を与える基準面は、第3章で述べた浮遊機構を考えると、それぞれの粒子に対して、その粒子の浮遊限界を与える高さとするのが適当であると思われる。すなわち、

$$y_b = y_s \quad \dots\dots\dots(42)$$

とおく。ここに、 $y_b$  : 浮遊砂基準高さ、 $y_s$  : 浮遊限界を与える高さである。 $y_s$  は (2), (18), (19), (20), (21), (22) 式より求められる。

つぎに、 $y = y_b$  における鉛直方向の変動速度の確率分布として、福津の研究成果である Fig. 8 より、次式のように平均 0、分散  $v'^2(y_b^+)$  の正規分布を仮定する。

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} v'(y_b^+)} \exp\left(-\frac{v^2}{2v'^2(y_b^+)}\right) \quad \dots\dots\dots(43)$$

また、 $v$  の値には上限 ( $v_{max}$ )、下限 ( $v_{min}$ ) があると思われるので、3.1 (3) と同様に、

$$v_{max} = \alpha v'(y_b^+) \quad (\alpha \div 3) \quad \dots\dots\dots(44)$$

$$v_{min} = -\alpha v'(y_b^+) \quad \dots\dots\dots(45)$$

とする。 $\alpha = 3$  とすると、 $v > v_{max}$  となる確率は 0.13% と非常に小さいので、(43) 式の定義域を  $-3v' \leq v \leq 3v'$  として実際上差し支えない。

$v'(y_b^+)$  は (19) 式より次式で求められる。

$$v'(y_b^+) = \beta(y_b^+) \cdot u_* \quad \dots\dots\dots(46)$$

基準面から浮上する粒子の量  $q_{s1}$  は、基準面に存在する粒子の個数、粒子の体積、単位時間あたり浮上する粒子の個数に比例するとし、基準面に存在する粒子の個数は、底面の単位面積あたりの粒子の露出個数に比例すると仮定する。また、粒子の浮上速度が  $v - w_s$  で表わされるものとする、

$$q_{s1} = K \frac{1}{(1/4)\pi d^2} \frac{\pi}{6} d^3 \int_{w_s}^{v_{max}} \frac{v - w_s}{d} f(v) dv \quad \dots\dots\dots(47)$$

ここに、 $K$  : 比例定数である。

一方、基準面から沈降する粒子の量  $q_{s2}$  は、

$$q_{s2} = C_B w_s \quad \dots\dots\dots(48)$$

である。平衡状態では、 $q_{s1} = q_{s2}$  であるから、(47), (48) 式より次式が得られる。

$$C_B = \frac{2}{3} K \frac{1}{w_s} \int_{w_s}^{v_{max}} (v - w_s) f(v) dv \quad \dots\dots\dots(49)$$

ここで、

$$\xi = v/v' = v/\beta(y_b^+) u_* \quad \dots\dots\dots(50)$$

$$\xi_0 = w_s/v' = w_s/\beta(y_b^+) u_* \quad \dots\dots\dots(51)$$

$$\xi_1 = v_{max}/v' = \alpha \quad \dots\dots\dots(52)$$

とおくと、(49) 式は次式のようになる。

$$C_B = \frac{2}{3} K \left( \frac{A}{\xi_0} - B \right) \quad \dots\dots\dots(53)$$

ここに、

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \exp\left(-\frac{\xi_0^2}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\xi_1^2}{2}\right) \right\} \quad \dots\dots\dots(54)$$

$$B = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi \quad \dots\dots\dots(55)$$

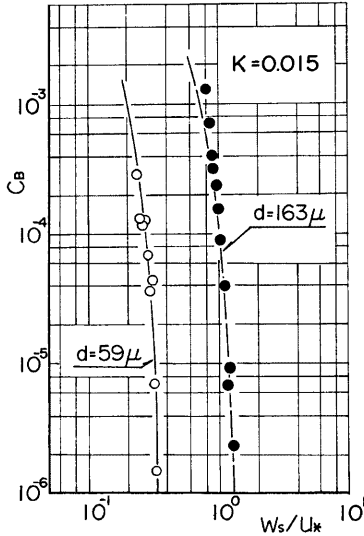


Fig. 14 Comparison between the eq. (53) and the experimental results.

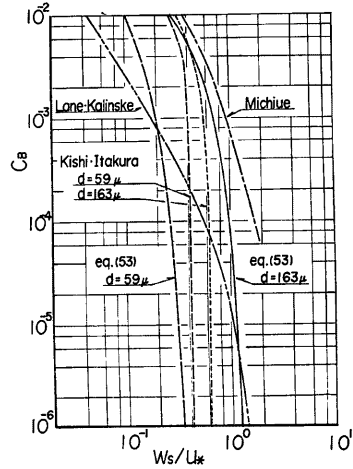


Fig. 15 Comparison of the equations for concentration at the reference level.

#### 4.3 実験結果との比較

$y_s$  は 3.1 より理論的に計算されるが、ここではこのモデルがどの程度実験値の傾向を表すかを見るために、 $u_{*s0}$ ,  $w_s$  の実測値を用いて、(2), (22) 式より求める。Fig. 14 は、Exp. A-I と E-I の実験値と、 $K=0.015$ ,  $\alpha=3$  としたときのそれぞれの実験に対する理論値を示したものである。実験値は道上<sup>13)</sup>の浮遊砂量公式を用いて、浮遊砂量から逆算して求めた。かなり大きさの異なる粒子に対して、同じ  $K$  の値で両ケースとも実験値の傾向をよく表しており、この理論の一般性が示唆される。

Fig. 15 は、4.1 で述べた Lane・Kalinske, 道上, 岸・板倉の底面濃度式と本研究で得た (53) 式の比較を行ったものである。Fig. 14 から、底面濃度は  $w_s/u_{*k}$  と  $d$  によって変化すると推察されるので、岸・板倉や著者らの行ったような、それぞれの粒子に対して浮遊限界が決まるモデルが望ましい。Fig. 14 と Fig. 15 から、岸・板倉の理論値は本実験結果とかなり相違しているようであるが、これは彼等の理論の浮遊限界の推定法が実験値を十分に説明していないことに起因する。これに対し、著者らの提案した推定法は浮遊限界を的確に評価しており、その結果、実測値とよく一致する底面濃度推定式が求められたのである。

## 5. 結 語

以上、微細砂 ( $44 \sim 420 \mu$  のシルトおよび細砂) の浮遊限界を実験的に明らかにするとともに、理論的考察を加え、実験値をよく説明しうる条件式を導いた。さらに、この条件式を用いて、浮遊砂量算定の基礎となる底面濃度算定式を提案した。本研究で得られた結果を要約すると次のようである。

- (1) 浮遊砂量が全流砂の中で無視できない程度になる限界の摩擦速度を  $u_{*st}$  とすると、 $d > d_c$  では  $u_{*st} \approx w_s$  であるが、 $d < d_c$  では  $u_{*st}$  は  $w_s$  より大きくなり、粒径が小さくなるほどその開きは大きい。
- (2) 微細粒子が河床を構成する場合、すべての粒子は静止⇔掃流⇔浮遊と遷移する。すなわち、粒子は掃流状態を経ずに、静止状態から直接浮遊することはないことが明らかにされた。この場合、浮遊限界の摩擦

速度は掃流限界のそれをごくわずか上まわった値である。一方、粗粒子の間隙中に存在する  $d < d_c$  の微細粒子は静止⇔浮遊と遷移し、流砂形態の遷移が、微細粒子が河床を構成する場合と非常に異なる。

(3) 粗粒子の間隙中に存在する微細砂の浮遊限界は、微細砂の存在の高さと粗粒子による乱れの強さに支配され、ある存在高さにおいて最も浮遊しやすい状態があらわれる。これについて、二、三のケースについて検討を行ったが、今後さらに系統的な研究を行う必要がある。

(4)  $u_{*0}$  に関して、実験結果や底面付近の乱れに関する従来の研究成果より、浮遊条件式を理論的に導いた。理論式に含まれる圧力変動に伴う揚力に関する係数  $K_0$  が 40 のとき、理論値と実験値はほぼ一致した。さらに、 $K_0$  の値を壁面での圧力変動に関する研究成果を使って評価すると 25~50 となり、この理論の妥当性が検証された。

(5) 第3章で考察した浮遊条件式を考慮して、浮遊砂底面濃度式を導いた。かなり大きさの異なる粒子に対して、理論式に含まれる比例定数を同じ値において、理論値は実験値の傾向をよく表わし、この理論の一般性が示唆された。

今後、粒子の浮遊機構に関して、詳細な実験を行い、粒子の浮上するプロセスをさらに明確にし、また粒子の衝突による河床からの離脱についても検討を行い、浮遊条件の考え方の基礎にしていきたい。

最後に、本研究を遂行するにあたり、実験や図面作成などに御協力願った京都大学防災研究所技官吉田義則氏に感謝の意を表します。

#### 参 考 文 献

- 1) Lane, E. W. and A. A. Kalinske: The Relation of Suspended to Bed Material in Rivers, Tran. AGU, 1939.
- 2) Einstein, H. A.: The Bed-Load Function for Sediment, Transportation in Open Channel Flow, U. S. Dept. Agric. Tech. Bull., No. 1026, 1950.
- 3) 道上正規: 流砂と河床変動に関する基礎的研究, 京都大学学位論文, 昭.47.10, pp. 99-101.
- 4) 平野宗夫: 浮遊砂の流入による貯水池の堆砂過程, 九州大学工学集報, 第42巻, 第6号, 1970, pp. 839-840.
- 5) 岸力・板倉忠興: Open Channel Flow with Suspended Sediments, Proc. ASCE, HY8, August, 1980, pp. 1332-1333.
- 6) 岩垣雄一: 限界掃流力に関する基礎的研究, (1) 限界掃流力の流体力学的研究, 土木学会論文集, 第41号, 昭.31.2, pp. 1~20.
- 7) 前出文献 6)
- 8) White, S. J.: Plane Bed Thresholds of Fine Grained Sediments, Nature, Vol. 228, Oct., 1970.
- 9) 瀬津家久: 開水路流の乱流構造に関する基礎的研究, 京都大学学位論文, 昭.52.7, p. 30.
- 10) 前出文献 9), p. 16.
- 11) 中川博次・瀬津家久: せん断乱流の bursting 現象とその物理モデル, 第22回水理講演論文集, 1978, pp. 29-36.
- 12) 前出文献 9), p. 20.
- 13) 前出文献 3), pp. 102-105.