

# 集中型流出モデルの構成と流出予測手法

高棹 琢馬・椎葉 充晴・宝 馨

## BUILDING OF A LUMPED RUNOFF MODEL AND ON-LINE RUNOFF PREDITION TECHNIQUES

By *Takuma* TAKASAO, *Michiharu* SHIIBA and *Kaoru* TAKARA

### Synopsis

An on-line runoff prediction scheme is presented on the basis of filtering and prediction theory developed by Kalman and others. A lumped runoff model to be the base of runoff prediction is newly developed, and, by incorporating noise terms which are products of Markov noises and state variables, the runoff model is transformed into a stochastic one. The resulting stochastic differential equations are solved by an iterative difference method with the aid of a statistical linearization technique. In order to verify our scheme, it is applied to some historical events. The rainfall prediction data which are required in the course of runoff prediction are reproduced by Monte Carlo methods.

### 1. 序 論

本研究では、新たに構成する集中型流出モデルにモデル誤差を補償する擾乱項を導入して確率過程的な流出モデルとし、これを用いた流出予測手法を示す。

決定論的流出モデルを用いて降雨予測値を流量に変換することも流出予測の一方法であるが、それでは、予測された流量と異なる観測流量が得られても何の処置もとられず、流量観測が予測に生かされない。本研究では、決定論的な流出モデルに擾乱項を導入して構成した状態空間型の確率過程的モデルを用い、流量観測によって流出系の状態推定を改良しつつ、将来の状態推移・流出流量を推定していく問題として流出予測問題を考える。

ここで基礎とする流出モデルとして、本研究では集中型の流出モデルを新たに構成する。降雨流出現象の本質的理解という点では、分布型モデルの方が集中型モデルよりすぐれているが、数理的取扱いは後者の方が容易であり、特に状態量の不確実性を考慮する必要がある流出予測では集中型の流出モデルの方が容易である。

モデル誤差を補償するために導入する擾乱項は、状態量に比例し、有色であるとする。状態量に比例させるのは、状態量が大きい時にモデル誤差も大きいと考えられるからであり、有色とするのは、モデルの不完全さが擾乱項の系列相関に反映すると考えられるからである。

こうして構成される確率過程的流出モデルは、流出現象の非線形性を反映した非線形の確率微分方程式で表現される。線形方程式で記述される確率過程の推定問題は、Kalman によって解決されているのに対し<sup>1)</sup>、非線形の確率過程の推定問題には厳密な解を与えることができない。そこでシステム方程式系を線形化して Kalman 理論を適用することが考えられる。本研究では、線形化の手法として統計的線形化 (statistical linearization)<sup>2) 3)</sup> を用い、確率微分方程式の解法として局所線形化による反復解法を用いる。

流出システムを記述する確率微分方程式の解法が与えられれば、流出予測の準備はできたことになるが、実際に流出を予測していくには降雨予測情報を入力しなければならぬ。といっても、具体的な降雨予測シ

システムの構成は本研究の及ぶ範囲ではないので、過去の降雨資料を用いて、想定した精度で降雨の“予測値”を確率的に発生させ、これを入手された降雨予測情報とみなして、流出予測の有効性を検証するという方法を探ることにする。この方法は、単に流出予測手法の検証のためだけでなく、降雨予測精度と流域特性との複合作用によって流出予測精度が決定されていく構造を数値実験によって検討する道を開くものである。

以下、本論文の構成を述べる。まず、2で新しく集中型の流出モデルを構成し、その数値解法を与える。3で、このモデルに確率的外乱を導入して確率過程的流出モデルとし、その解法と流出予測のアルゴリズムを与える。4で、降雨予測シミュレーションについて述べる。5で、以上の考え方を実流域に適用し、その結果を考察する。

## 2. 集中型流出モデルの構成

流出系の状態を表す有限個の状態量を従属変数とし時刻を独立変数とする一階連立常微分方程式と流出量を状態量で表わす関数とで記述される集中型流出モデルを本章で構成する。わが国で慣用されているタンクモデルや貯留関数法も適当に変数を選択すればこの形式に整理できるが、本章で構成するモデルは次の特徴を持っている点でこれらのモデルと異なっている。

- (1) 斜面系と河道網系に分けてモデル化する。
- (2) 斜面系では、損失、直接流出、間接流出の各機構の部分モデルを持ち、その相互関係を考慮する。
- (3) 河道網系では、河道網を流下・合流していく過程を統合的に表現する。

以下、まず2.1でモデル構造を述べ、2.2で斜面系、2.3で河道網系について解説を加え、2.4でその数値解法を与える。実流域への適用例は5で与える。

### 2.1 モデル構造

本モデルは貯留モデルの一種である。斜面系に対して、Table 2.1 に示す6個の貯留要素を設定する。後述するように河道網系は有限個数 ( $n_c$  個) の貯水池系列で表現する。計  $n_c+6$  個の貯留要素の貯水量を流域面積あたりの貯水高で表した変数が本モデルの状態変数である (Table 2.1)。

このモデルへの入力には降雨強度  $R$ (mm/hr) と蒸発散能  $P$ (mm/hr) である。各貯留要素間の雨水の移動を Fig. 2.1 に示す。図中、矢印に付した記号は単位時間あたりのその方向の雨水の移動を表わしている。 $Q$ (mm/hr) が出力である単位面積あたりの流出強度である。Fig. 2.1 に示した雨水移動の関係から得られる各貯水高の連続式を Table 2.2 に示す。降雨強度  $R$ 、蒸発散能  $P$ 、および各貯水高を用いて表わす各雨水の流れの関数形を Table 2.3 に示している。

Table 2.1 Storage Variables.

| # slope system variable           | storage element   |
|-----------------------------------|---|
| $x_{tF}$ (mm)                     | tension water zone of the forested area   |
| $x_{fF}$ (mm)                     | free water zone of the forested area  |
| $x_{tU}$ (mm)                     | tension water zone of the unforested area   |
| $x_{fU}$ (mm)                     | free water zone of the unforested area  |
| $x_{tS}$ (mm)                     | tension water zone of the lower soil layer  |
| $x_{fS}$ (mm)                     | free water zone of the lower soil layer   |
| # channel network system variable | storage element   |
| $x_{c_j}$ (mm)                    | the $j$ th reservoir element within the reservoir cascade for the representation of the channel network system; $j=1, \dots, n_c$ ; $n_c$ is the number of reservoir elements |

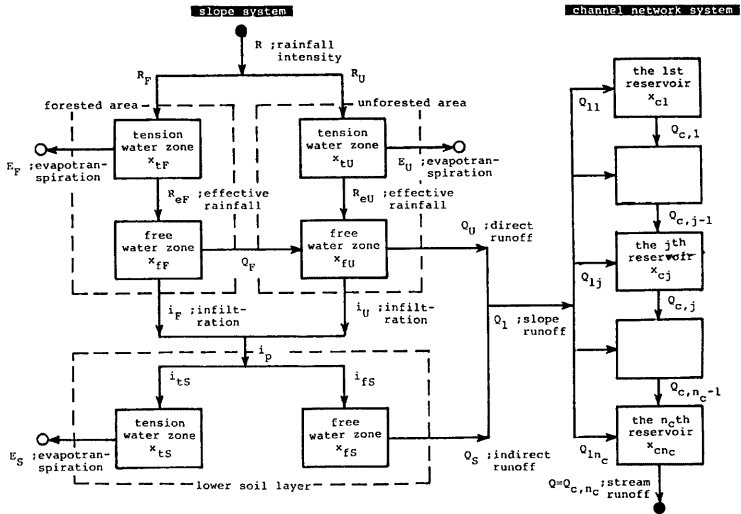


Fig. 2.1 Schematic Diagram of the Runoff Model.

2.2 斜面系モデルの解説

本モデルは、斜面系内の貯留要素間の雨水授受関係を重視して構成されたもので、各貯留要素内部の雨水の流動を追跡することはできない。大雑把に言えば、貯留要素相互の雨水の移動の式は、貯留要素内部の雨水分布を平均化ないし積分して得られたものと考えられることになる。以下、Table 2.3 に示した雨水移動強度の関数形を解説する。

(1) 蒸発散強度  $E_F, E_U, E_S$

流出要素からの蒸発散は流出量に比べて無視できるので損失要素  $x_{tF}, x_{tU}, x_{tS}$  からの蒸発散だけを考える。蒸発散量は土壌水分量にも依存することが知られているので、損失要素の貯水率と蒸発散能の積で与えられるとする。

(2) 林草地・裸地（水みちを含む）への有効降雨強度  $R_{eF}, R_{eU}$

降雨初期の雨水損失は損失要素の貯水高  $x_{tF}, x_{tU}$  の増加となるものと考えられる。荒川試験地での検討によ

Table 2.2 Continuity Equations.

|   |                       |
|---|-----------------------|
| # slope system                              |                       |
| $dx_{tF}/dt = R_F - E_F - R_{eF}$           |                       |
| $dx_{tU}/dt = R_U - E_U - R_{eU}$           |                       |
| $dx_{fF}/dt = R_{eF} - Q_F - i_F$           |                       |
| $dx_{fU}/dt = R_{eU} + Q_F - Q_U - i_U$     |                       |
| $dx_{tS}/dt = i_{tS} - E_S$                 |                       |
| $dx_{fS}/dt = i_{fS} - Q_S$                 |                       |
| # channel network system                    |                       |
| $dx_{cj}/dt = Q_{ij} + Q_{c,j-1} - Q_{c,j}$ | for $j=1, \dots, n_c$ |

Note:  $Q_{c,0} = 0$ .

ると<sup>3)</sup>、流域内の損失余裕空隙の場所の分布に応じて初期損失は徐々に進行すると考えられるので、有効降雨強度の降雨強度に対する割合は損失要素の貯水率の指数乗で与えられるとする。

(3) 林草地・裸地（水みちを含む）からの流出強度  $Q_F, Q_U$

裸地からの表面流出強度は貯水高  $x_{fU}$  の指数乗に比例するものとする。Manning の抵抗則による平面上の流れを考えると、この指数部は5/3になると思われるが、計算を簡単にするために指数部を2で近似する。林草地からの流出は表土層中の中間流と表土層を超えて発生する表面流とから成ると考え、これを反映するためにしきい値  $D$  を設け、林草地貯水高  $x_{fF}$  が  $D$  より小さいとき  $x_{fF}$  に比例する中間流出が生じるとし、 $x_{fF}$  が  $D$  を超えると  $x_{fF}$  の2次関数で表わされる表面流出が加わるものとする。また、林草地から直接河道に流入する部分は無視できるものとし、林草地流出はすべて水みち（すなわち裸地）に流入するものとする。

(4) 浸透強度  $i_F, i_U, i_p, i_S, j_S$

浸透能は下層の水分量の1次式 (Table 2.3 中の  $P_c$ ) でコントロールされるものとし、下層の貯水率が100%になると一定値で浸透するものとする。下層への浸透量  $i_p$  は、さらに下層損失要素貯水高  $x_{tS}$  によって、 $i_{tS}$  と  $i_{fS}$  に分配される。下層の水分移動に関するこのようなモデル化は Kitanidis ら<sup>2)</sup> が引用している NWS モデルを参考にしたものである。

(5) 地下水流出強度  $Q_S$

荒川試験地での検討<sup>4)</sup> をふまえ、地下水流出は下層貯水高  $x_{fS}$  の2乗に比例するものとする。

Table 2.3 (a) Functional Representation of flows in storage variables.

|   |
|---|
| # slope system  |
| input $R$ : rainfall intensity  |
| $P$ : potential evapotranspiration  |
| output $Q_I$ : slope runoff height per unit time  |
| $E_F = P_F x_{tF} / M_{tF}, P_F = A_F P$  |
| $E_U = P_U x_{tU} / M_{tU}, P_U = A_U P$  |
| $E_S = P_S x_{tS} / M_{tS}, P_S = (P - E_F - E_U) M_{tS} / (M_{tF} + M_{tU} + M_{tS})$              |
| $R_{eF} = R_F (x_{tF} / M_{tF})^{m_{tF}}, R_F = A_F R$  |
| $R_{eU} = R_U (x_{tU} / M_{tU})^{m_{tU}}, R_U = A_U R$  |
| $Q_F = k_F x_{fF}$ for $x_{fF} \leq D$  |
| $= k_F x_{fF} + a_F (x_{fF} - D)^2$ for $x_{fF} > D$  |
| $Q_U = a_U x_{fU}^2$  |
| $i_F = A_F i_{Fc} P_c I(x_{fF})^\dagger, P_c = 1 + c_p (1 - (x_{fS} + x_{tS}) / (M_{fS} + M_{tS}))$ |
| $i_U = A_U i_{Uc} P_c I(x_{fU})^\dagger$  |
| $i_{tS} = i_p p_{tS} (1 - x_{tS} / M_{tS}), i_p = i_F + i_U$  |
| $i_{fS} = i_p - i_{tS}$   |
| $Q_S = a_S x_{fS}^2, a_S = (A_F i_{Fc} + A_U i_{Uc}) / M_{fS}^2$                                    |
| $Q_I = Q_U + Q_S$   |
| .....   |
| # channel network system  |
| input $Q_I$ : slope runoff height per unit time   |
| output $Q$ : stream runoff height per unit time   |
| $Q_{c,j} = a_c F_j^{1-m_c} (n_c x_{c,j})^{m_c}, Q_{tj} = F_j Q_I, \text{ for } j=1, \dots, n_c$     |
| $Q = Q_{c,n_c}$   |

<sup>†</sup>  $I(x)$  is the step function defined as  $I(x)=0$  for  $x \leq 0$  and  $I(x)=1$  for  $x > 0$ .

2.3 河道網系モデルの解説

高棹ら<sup>4)</sup>は、各河道区分の流れが kinematic wave 法でモデル化される河道網の統合的近似式

$$\partial w/\partial y + \partial s/\partial t = p(y)q_t(t), 0 \leq y \leq 1 \quad \dots\dots\dots(1a)$$

$$w/p(y) = a_c(s/p(y))^{m_c} \quad \dots\dots\dots(1b)$$

$$y=0 \text{ で } w=0 \quad \dots\dots\dots(1c)$$

$$y=1 \text{ で } Q=[w]_{y=1} \quad \dots\dots\dots(1d)$$

を与えている。ただし、 $t$ (hr)は時刻、 $y$ (無次元)は位置を表わし、 $q_t(t)$ (mm/hr)は河道への流入強度、 $a_c$ 、 $m_c$ は定数、 $w$ (mm/hr)、 $s$ (mm)は従属変数である。(1d)式が流出強度  $Q$ (mm/hr)を与える。

(1a)式を  $n_c$  等分した区間  $((j-1)/n_c, j/n_c)$ 、 $j=1, \dots, n_c$  ごとに積分し、

$$F_j = \int_{(j-1)/n_c}^{j/n_c} p(y)dy \quad \dots\dots\dots(2a)$$

$$x_{c,j} = \int_{(j-1)/n_c}^{j/n_c} s dy \quad \dots\dots\dots(2b)$$

$$Q_{c,j} = [w]_{y=j/n_c} \quad \dots\dots\dots(2c)$$

$$Q_{Ij} = F_j q_t(t) \quad \dots\dots\dots(2d)$$

とおくと、

$$dx_{c,j}/dt = Q_{Ij} + Q_{c,j-1} - Q_{c,j} \quad \dots\dots\dots(3)$$

を得る。また、 $p(j/n_c)$ を  $F_j/(1/n_c)$ で近似することにより

Table 2.3 (b) Parameters in the Functional Representation of the Flows.

|   |   |
|---|---|
| # slope system                              |   |
| $A_U$ ( — )                                 | areal ratio of the unforested area; $A_F = 1 - A_U$                                   |
| $M_{tF}$ ( mm )                             | upper limit of $x_{tF}$   |
| $M_{tU}$ ( mm )                             | upper limit of $x_{tU}$   |
| $M_{tS}$ ( mm )                             | upper limit of $x_{tS}$   |
| $M_{fS}$ ( — )                              | upper limit of $x_{fS}$   |
| $m_{tF}$ ( — )                              | see the expression of $R_{eF}$ in (a)   |
| $m_{tU}$ ( — )                              | see the expression of $R_{eU}$ in (a)   |
| $D$ ( mm )                                  | see the expression of $Q_F$ in (a)  |
| $k_F$ ( 1/hr )                              | see the expression of $Q_F$ in (a)  |
| $a_F$ ( 1/mm·hr )                           | see the expression of $Q_F$ in (a)  |
| $a_U$ ( 1/mm·hr )                           | see the expression of $Q_U$ in (a)  |
| $p_{tS}$ ( — )                              | see the expression of $i_{tS}$ in (a); $p_{tS} \leq 1$                                |
| $c_p$ ( — )                                 | see the expression of $p_c$ in (a)  |
| $i_{Fc}$ ( mm/hr )                          | final infiltration capacity in the forested area                                      |
| $i_{Uc}$ ( mm/hr )                          | final infiltration capacity in the unforested area                                    |
| # channel network system                    |   |
| $m_c$ ( — )                                 | see the expression of $Q_{c,j}$ in (a)  |
| $a_c$ ( mm <sup>1-m<sub>c</sub></sup> ·hr ) | see the expression of $Q_{c,j}$ in (a)  |
| $n_c$ ( — )                                 | the number of reservoir elements for the channel network system                       |
| $F_j$ ( — )                                 | contribution ratio of the $i$ th reservoir element; $F_1 + F_2 + \dots + F_{n_c} = 1$ |

Note: all the parameters must be positive.

$$Q_{c,j} = a_c F_j^{1-m_c} (n_c x_{c,j})^{m_c} \quad \dots\dots\dots(4)$$

を得る。Table 2.2, 2.3 に示した河道網系モデルは、この(3), (4)式によるものである。

#### 2.4 数値解法

$N = n_c + 6$  とおき、Table 2.1 にあげた貯水高を表わす変数  $x_{tF}, x_{fF}, x_{tU}, x_{fU}, x_{tS}, x_{fS}, x_{c1}, \dots, x_{c n_c}$  を順に  $x_1, x_2, \dots, x_N$  と表わすことにし、列ベクトル  $\mathbf{x}$  を

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^T \quad \dots\dots\dots(5)$$

と定義する ( $(\cdot)^T$  は転置操作を表わす)。これに対応して、Table 2.3 に示した雨水移動強度の関数形を Table 2.2 の連続式に代入すると

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \dots\dots\dots(6)$$

の形のベクトル微分方程式が得られる。右辺の  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  は  $N$  次のベクトル値関数である。 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  は実は降雨強度  $R$ , 蒸発散能  $P$  にも依存するが、 $R, P$  が一定値をとると考える時間区間ごとに(6)式の積分を考えることにして、 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  の  $R, P$  への依存を陽に示さない。また、Table 2.3 (a) 中に示したステップ関数  $I(x)$  は数値計算上の取扱いが困難であるので、ある小さい正の数  $\epsilon$  を用いて、 $x < 0$  で値 0,  $0 \leq x \leq \epsilon$  で値  $x^2(3\epsilon - 2x)/\epsilon^3$ ,  $x > \epsilon$  で値 1 とする滑らかな関数  $G(x)$  で近似するものとする。

以下、(6)式で記述される常微分方程式の数値解法を考える。このような微分方程式の数値解法としては、Runge Kutta 法ほか種々の方法が提案されているが<sup>9)</sup>、以下で導く解法では、 $\Delta t$  時間後の  $\mathbf{x}$  の値が

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \Phi \mathbf{x}(t) + \mathbf{d} \quad \dots\dots\dots(7)$$

の形で与えられるという利点をもっている。ただし、 $\Phi, \mathbf{d}$  はそれぞれ  $N$  次正方行列、 $N$  次列ベクトルである。このような形で  $\mathbf{x}(t + \Delta t)$  が与えられるならば、 $\mathbf{x}(t)$  の変化による  $\mathbf{x}(t + \Delta t)$  の変化が容易に把握される。(7)式のような表現が得られる差分解法の1つに Euler 法があるが、これは  $\Delta t$  のオーダーの精度しか持っていない。これに対して以下に述べる解法は  $\Delta t^2$  のオーダーの精度を持っている。

まず、 $e^x$  の Pade 近似による2階の陽陰混合公式<sup>9)</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t + \Delta t) - \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{x}}(t + \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{12} \ddot{\mathbf{x}}(t + \Delta t) \\ = \mathbf{x}(t) + \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{\Delta t^2}{12} \ddot{\mathbf{x}}(t) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(8)$$

を出発点として考える。 $\mathbf{x}$  の微係数を与える関数  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  が非線形の場合、上式を  $\mathbf{x}(t + \Delta t)$  について解くことは困難であるのである。そこで、局所線形化と反復解法によってこの難点を取除く。

時刻  $t$  において、 $\dot{\mathbf{x}}$  を与える関数  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  を、行列  $A$ , ベクトル  $\mathbf{b}$  を適当にとつて、

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx A \mathbf{x} + \mathbf{b} \quad \dots\dots\dots(9)$$

と近似するものとする。係数  $A, \mathbf{b}$  は  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$  の  $\mathbf{x}(t)$  における Taylor 近似より、

$$A = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) - A \mathbf{x}(t) \quad \dots\dots\dots(10)$$

と定める。これが  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  の時刻  $t$  における局所線形化である。そうすると、(8)式右辺の  $\mathbf{x}(t)$  は

$$\mathbf{x}(t) = A^2 \mathbf{x}(t) + A \mathbf{b} \quad \dots\dots\dots(11)$$

と評価される。次に、時刻  $t + \Delta t$  での  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  の局所線形化

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx A_* \mathbf{x} + \mathbf{b}_* \quad \dots\dots\dots(12)$$

を考える。 $\mathbf{x}(t + \Delta t)$  はこれから求めようとしている値であるから、(9)式の場合と異なり、 $A_*, \mathbf{b}_*$  を求めるのに  $\mathbf{x}(t + \Delta t)$  の値を利用することはできない。そこで、第1次近似として  $A_* = A, \mathbf{b}_* = \mathbf{b}$  とおくことにすれば、(8)式左辺の  $\dot{\mathbf{x}}(t + \Delta t)$  は

$$\ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) = A_*^2 \mathbf{x}(t+\Delta t) + A_* \mathbf{b}_* \quad \dots\dots\dots(13)$$

と評価される。(9)式で  $\mathbf{x}$  を  $\mathbf{x}(t)$  とした式, (11)式, (12)式で  $\mathbf{x}$  を  $\mathbf{x}(t+\Delta t)$  とした式, および (13)式を (8)式に代入し,  $\mathbf{x}(t+\Delta t)$  について解くと

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(t+\Delta t) &= \Phi \mathbf{x}(t) + \mathbf{d}, \\ \Phi &= \left[ I - \frac{\Delta t}{2} A_* + \frac{\Delta t^2}{12} A_*^2 \right]^{-1} \left[ I + \frac{\Delta t}{2} A_* + \frac{\Delta t^2}{12} A_*^2 \right], \\ \mathbf{d} &= \left[ I - \frac{\Delta t}{2} A_* + \frac{\Delta t^2}{12} A_*^2 \right]^{-1} \left[ \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{b} + \mathbf{b}_*) + \frac{\Delta t^2}{12} (A_* \mathbf{b} - A_* \mathbf{b}_*) \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(14)$$

で与えられる。こうして得られる  $\mathbf{x}(t+\Delta t)$  を用いれば, 時刻  $t+\Delta t$  での  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  の局所線形化式(12)の係数  $A_*$ ,  $\mathbf{b}_*$  を求めるのに(9)式中の  $A$ ,  $\mathbf{b}$  を求めるのと同じ議論が適用できる。こうして求められる  $A_*$ ,  $\mathbf{b}_*$  を用いて(14)式を反復適用すれば,  $\mathbf{x}(t+\Delta t)$  のよりよい値が得られる。

なお, 差分時間間隔  $\Delta t$  は, 行列

$$C = \frac{\Delta t}{2} A_* - \frac{\Delta t^2}{12} A_*^2 \quad \dots\dots\dots(15)$$

の最大固有値  $\rho(C)$  が1より小さくなるように,  $C$  の従属ノルム  $\max_k \sum_{i=1}^N |C_{ik}|$ ,  $\max_i \sum_{k=1}^N |C_{ik}|$  の少くとも一方が1より小さくなるようにとる<sup>9)</sup>。そうでなければ,  $\Delta t$  を小さくして(例えば半分にして)再計算する。また,  $\mathbf{x}(t+\Delta t)$  と  $\mathbf{x}(t)$  の変化があまり大きくならないように  $\Delta t$  の大きさをコントロールする。

### 3. 確率過程的流出モデルの構成と流出予測

前章で構成した集中型流出モデルは決定論的モデルである。本章では, この決定論的モデルに観測誤差やモデル誤差を補償する確率的外乱項を導入して確率過程的流出モデルに変換し, これを用いて逐次的に流出を予測する手法を展開する。流出予測に必要な降雨予測値とその予測誤差の分散は降雨予測者によって与えられるとして取扱う。

#### 3.1 確率的外乱の導入

本研究で構成した集中型流出モデルは, 状態ベクトル  $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_N)'$  の動的推移を表わす状態方程式(1)と, 流出量を状態ベクトルの関数として表わす出力式(2)で記述される。

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x}, r, \rho) \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$Q = g(\mathbf{x}) \quad \dots\dots\dots(2)$$

ただし,  $r$ ,  $\rho$  はそれぞれ降雨強度, 蒸発散能,  $Q$  は流出流量である。

実際には観測誤差やモデル誤差があるから, 降雨強度  $r$  の観測値, 蒸発散能  $\rho$  の推算値を(1)式に代入しても, 得られる計算流量  $Q$  は観測流量とは一致しない。そこで, 本研究では, これらの観測誤差やモデル誤差に対応すると考える確率的外乱項をモデルに付加し, 確率過程的流出モデルを構成する。確率的外乱項をモデル中に明示することにより, 観測値と計算値の残差に対処することが可能となるのである。

議論を簡明にするために, しばらく降雨強度  $r$  と蒸発散能  $\rho$  を既知とし, これらを場に表示せずに(1)式を,

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \dots\dots\dots(1')$$

の形で考える。まず, この状態方程式(1')に確率的外乱を導入する。連続白色正規過程(Brown過程の微分)<sup>10)</sup>で外乱項を表現することも可能であるが, ここでは, 時刻  $k-1$  から時刻  $k$  まで単位時間進む間を, 連続時間で(1')式によって推移する部分と, 時刻  $k$  に瞬間的に外乱項が付加される部分とに分けて考える。時刻  $k$  に外乱項を付加する直前の時刻を  $k^-$  と表記し, 付加する外乱項を  $\mathbf{V}(k)$  とかくと, 上述の推移は,

$$k-1 \leq t \leq k^- \text{ で } d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), t=k \text{ で } \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k^-) + \mathbf{V}(k) \quad \dots\dots\dots(3)$$

と表わされる。このように離散時間で外乱項を付加する利点は、外乱項の有色性を比較的容易に組込むことができる点にある。一般に、モデルが不完全であると外乱項の有色性を考える必要があるためこの点は重要である。また、水文現象では、外乱項を状態量と無相関とするよりは、状態量が大いときほど外乱も大きいとする方が自然であると考えられるので、 $\mathbf{V}(k)$  の第  $j$  成分  $V_j(k)$  は  $\mathbf{x}(k^-)$  の第  $j$  成分  $x_j(k^-)$  と 1 次の自己回帰系列  $v_j(k)$  の積として、

$$V_j(k) = x_j(k^-)v_j(k), v_j(k) = \rho_j v_j(k-1) + e_j(k) \quad \dots\dots\dots(4)$$

で表わされるとする。ただし、 $\{e_j(k)\}$  は平均 0、分散  $\sigma_j^2$  の白色系列で、 $\rho_j$  は系列  $\{v_j(k)\}$  の自己回帰係数である。こうすると、外乱項  $\mathbf{V}(k)$  は過去の値にも関係するので、 $j=1, \dots, N$  について

$$k-1 \leq t \leq k^- \text{ で } x_{N+j}(t) = v_j(k-1), t=k \text{ で } x_{N+j}(k) = v_j(k) \quad \dots\dots\dots(5)$$

と定義し、状態ベクトル  $\mathbf{x}(t)$  を  $2N$  次元に拡張すれば、(3)、(4)式はまとめて、

$$k-1 \leq t \leq k^- \text{ で } d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), t=k \text{ で } \mathbf{x}(k) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(k^-), \mathbf{e}(k)) \quad \dots\dots\dots(6)$$

の形に表わされる。ただし、ここでは、 $\mathbf{f}$  は、 $f_{N+j}=0, j=1, \dots, N$  を追加して  $2N$  次元に拡張したもので、 $\mathbf{u}$  は(3)、(4)式から導かれるベクトル値関数である。(6)式が、降雨強度  $r$ 、蒸発散能  $\rho$  を既知としたときの確率過程的流出モデルの状態方程式である。

ここまで、降雨強度  $r$ 、蒸発散能  $\rho$  は既知と仮定して議論した。蒸発散能  $\rho$  の推算誤差、降雨強度  $r$  の観測誤差を確率的外乱項の中に含めて考えることにすると、過去の降雨に対しては上述の議論をそのまま適用できるが、将来の降雨に対しては議論を修正する必要がある。そこで、降雨強度は各単位時間内で一定値  $r_k$  をとるものとし、

$$k-1 \leq t \leq k^- \text{ で } x_{2N+1}(t) = r_k \quad \dots\dots\dots(7)$$

と定義して状態ベクトル  $\mathbf{x}(t)$  を  $(2N+1)$  次元に拡張する。これに対応して、 $f_{2N+1}=0$  として  $\mathbf{f}$  も  $(2N+1)$  次元に拡張すれば、 $k-1 \leq t \leq k^-$  の部分では(6)の第 1 式と同じ形の状態方程式が得られる。さらに、降雨強度  $r_k$  は降雨予測者によって予測され、予測値  $\hat{r}_k$  と予測誤差分散  $R_k$  が与えられるものとし、

$$e_{2N+1}(k) = r_{k+1} - \hat{r}_{k+1}, u_{2N+1}(\mathbf{x}(k^-), \mathbf{e}(k)) = \hat{r}_{k+1} + e_{2N+1}(k) \quad \dots\dots\dots(8)$$

とおき、降雨の予測誤差  $e_{2N+1}(k)$  の白色性を仮定すると、 $t=k$  で(6)の第 2 式と同じ形の状態方程式が得られる。

次に、出力式(2)に確率的外乱項を導入する。流量は単位時間ごとに観測されるものとし、時刻  $k$  の観測流量を  $y(k)$ 、観測誤差を  $w(k)$  とすると

$$y(k) = Q(k) + w(k) = g(\mathbf{x}(k)) + w(k) \quad \dots\dots\dots(9)$$

である。ここでも観測誤差  $w(k)$  は流量  $Q(k)$  に依存するとした方が自然であるので、 $W(k)$  は  $Q(k)$  と、平均 0、分散  $\gamma^2$  の白色ノイズ  $w(k)$  の積でモデル化されるとし、

$$y(k) = g(\mathbf{x}(k))(1 + w(k)) \quad \dots\dots\dots(10)$$

とする。

以上、状態方程式として(6)式を、観測(出力)方程式として(10)式を導いた。

### 3.2 状態ベクトルの平均値・共分散の推移式と流出予測

確率過程的流出モデルでは、状態ベクトルの確率的推移式が与えられる。ある時刻の状態ベクトルの確率分布が与えられているときに、この推移式を用いて将来の状態ベクトルの確率分布を求めることを状態ベクトルの予測といい、出力式を介して将来の流量の確率分布を求めることを流出予測という。本項では、これらの予測方法を述べる。



最初に状態ベクトルの予測を考える。ところが本研究のように(6)式中の関数  $f, u$  が非線形であるときには状態ベクトルの確率分布の推移を厳密に求めることは不可能であるので、状態ベクトル  $\mathbf{x}(t)$  は近似的に正規分布にしたがうものと仮定し、関数  $f, u$  を局所的に線形化することによって、状態ベクトル  $\mathbf{x}(t)$  の平均値  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  と共分散  $\mathbf{P}(t)$  の推移を求めていくことにする。

非線形関数の線形化には、平均値回りに Taylor 展開して1次の微分項までとる方法も考えられるが、本研究では、統計的線形化手法を用いる<sup>1)2)</sup>。これは、統計学における重回帰式と同じ形式で非線形関数を近似するもので、確率変数  $X_1, \dots, X_n$  の非線形関数  $\phi(X_1, \dots, X_n)$  を

$$\phi(X_1, \dots, X_n) \approx a_1 X_1 + \dots + a_n X_n + b \quad \dots\dots\dots (11)$$

と近似する手法である。ただし、係数  $a_1, \dots, a_n, b$  は

$$\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} a_j = \sigma_{\phi i}, \quad i=1, \dots, n, \quad b = E[\phi] - \sum_{j=1}^n a_j E[X_j] \quad \dots\dots\dots (12)$$

から決定される定数である。ここに、 $\sigma_{ij}$  は  $X_i, X_j$  の共分散、 $\sigma_{\phi i}$  は  $\phi(X_1, \dots, X_n)$  と  $X_i$  の共分散、 $E[\cdot]$  は期待値記号である。(12)式を解くことは比較的容易であり、問題はむしろ  $\sigma_{\phi i}, E[\phi]$  を求めることにある。本研究では付録に述べる方法を用いてこれらの値を求める。

上述の統計的線形化手法を用いることにして、まず連続時間で推移する部分  $k-1 \leq t \leq k^-$  を考える。2.4で述べた非線形微分方程式の局所線形化・反復解法において、局所線形化を統計的線形化によることにすれば、この解法は非線形確率微分方程式の解法として用いることができる。そうすると積分時間間隔を  $\Delta t$  として、状態ベクトルの推移は、2.4(14)式と同様に、

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \Phi \mathbf{x}(t) + \mathbf{d} \quad \dots\dots\dots (13)$$

の形で表わされるから、平均値  $\bar{\mathbf{x}}(t)$ 、共分散  $\mathbf{P}(t)$  の推移は、

$$\bar{\mathbf{x}}(t + \Delta t) = \Phi \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{d}, \quad \mathbf{P}(t + \Delta t) = \Phi \mathbf{P}(t) \Phi^t \quad \dots\dots\dots (14)$$

で与えられる。

次に、時刻  $k^-$  から時刻  $k$  に瞬間的に外乱が加えられる部分を考える。ここでも関数  $u$  に対して統計的線形化手法を適用すれば、線形化による係数行列を  $U, G, \Gamma$  として、

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(k^-), \mathbf{e}(k)) \approx U \mathbf{x}(k^-) + G \mathbf{e}(k) + \Gamma \quad \dots\dots\dots (15)$$

と近似できるから、状態ベクトルの平均値と共分散の推移は、

$$\bar{\mathbf{x}}(k) = U \bar{\mathbf{x}}(k^-) + \Gamma, \quad \mathbf{P}(k) = U \mathbf{P}(k^-) U^t + G D_e G^t \quad \dots\dots\dots (16)$$

とすと求められる。ただし、 $D_e$  は  $e_j(k)$  の分散を  $(j, j)$  要素とする対角行列である。

状態ベクトル  $\mathbf{x}(k-1)$  の平均値と共分散が与えられれば、(14)、(16)式によって状態ベクトル  $\mathbf{x}(k)$  の平均値と共分散が求められることになる。この手順を繰返し用いれば、任意の将来時刻  $\tau$  での状態ベクトル  $\mathbf{x}(\tau)$  の平均値  $\bar{\mathbf{x}}(\tau)$  と共分散  $\mathbf{P}(\tau)$  が得られるので、流出流量  $Q(\tau) = g(\mathbf{x}(\tau))$  の平均値と分散をも求めることができる。しかし、実際に得られる流量はその観測値  $y(\tau)$  であるから、 $y(\tau)$  の平均値と分散を求めることにする。これが流出流量の予測である。 $y(\tau)$  は、3.1の(10)式で  $k = \tau$  とおいて得られるから、これを統計的に線形化すると、

$$y(\tau) = \mathbf{h} \mathbf{x}(\tau) + a \omega(\tau) + b \quad \dots\dots\dots (17)$$

の形に表わされる。ただし、 $\mathbf{h}$  は行ベクトル、 $a, b$  はスカラーである。 $y(\tau)$  の期待値  $E[y(\tau)]$ 、分散  $V[y(\tau)]$  はこの式から、

$$E[y(\tau)] = \mathbf{h} \bar{\mathbf{x}}(\tau) + b, \quad V[y(\tau)] = \mathbf{h} \mathbf{P}(\tau) \mathbf{h}^t + a^2 \gamma^2 \quad \dots\dots\dots (18)$$

として得られる。ただし、 $\gamma^2$  は  $\omega(\tau)$  の分散である。

3.3 降雨・流量の観測による推定値の修正

本節では、時刻  $(k-1)$  までの観測情報による状態ベクトル  $\mathbf{x}(k-1)$  (降雨強度を状態量に含めない  $2N$  次元のもの) の平均値  $\hat{\mathbf{x}}(k-1)$  と共分散  $\mathbf{P}(k-1)$  が求められているとして議論を進める。時刻  $k$  になって時刻  $k-1$  から時刻  $k$  までの降雨強度の観測値  $r_k$  と時刻  $k$  の流出量の観測値  $y(k)$  が得られたとしよう。これらの情報を追加して、状態ベクトル  $\mathbf{x}(k)$  の (条件つき) 平均値・共分散を求めることを考える。

追加された観測値のうち、まず、降雨強度の観測値  $r_k$  だけを先に用いる。すなわち、状態ベクトルを  $2N$  次元とし、前節で述べた方法により、 $\hat{\mathbf{x}}(k-1)$  の平均値  $\hat{\mathbf{x}}(k-1)$ 、共分散  $\mathbf{P}(k-1)$  から、状態ベクトル  $\mathbf{x}(k)$  の平均値と共分散を求めて、これを  $\hat{\mathbf{x}}(k)$ 、 $\hat{\mathbf{P}}(k)$  と表わす。次に、観測流量  $y(k)$  を用いて状態ベクトル  $\mathbf{x}(k)$  の平均値と共分散の値を修正する。

一般に、正規確率ベクトル  $\mathbf{x}$  の平均値と共分散が  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{P}}$  で与えられているときに、観測値

$$y = \mathbf{h}\mathbf{x} + w \quad \dots\dots\dots(19)$$

が得られたときの  $\mathbf{x}$  の条件つき平均、共分散  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{P}}$  は Kalman フィルターによって求められる。ただし、 $\mathbf{h}$  は行ベクトル、 $w$  は平均 0、分散  $\sigma^2$  の  $\mathbf{x}$  とは独立な観測誤差である。Kalman<sup>1)</sup> によると、これらの条件つき平均  $\hat{\mathbf{x}}$ 、共分散  $\hat{\mathbf{P}}$  は、Kalman ゲイン

$$K = \mathbf{P}\mathbf{h}'(\mathbf{h}\mathbf{P}\mathbf{h}' + \sigma^2)^{-1} \quad \dots\dots\dots(20)$$

を用いて

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} + K(y - \mathbf{h}\hat{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}} - K\mathbf{h}\hat{\mathbf{P}} \quad \dots\dots\dots(21)$$

として求められる。

今の場合、観測流量  $y(k)$  は 3.1(10)式のような非線形関数であるから、統計的線形化手法を適用すれば、

$$y(k) = \mathbf{h}\mathbf{x}(k) + a w(k) + b \quad \dots\dots\dots(22)$$

の形に表わされる。ただし、 $\mathbf{h}$  は  $2N$  次元の行ベクトル、 $a, b$  はスカラーである。 $y(k) - b$  を観測値と考えれば、これは(19)式と同形の式であるから、(20)、(21)式を適用すれば、観測流量  $y(k)$  を用いた  $\mathbf{x}(k)$  の条件つき平均値、共分散  $\hat{\mathbf{x}}(k)$ 、 $\mathbf{P}(k)$  が求められることになる。

3.4 流出予測のアルゴリズム

以上3節にわたって展開した流出予測の処理の流れを Fig. 3.1 に示す。同図では、降雨強度を状態ベクトルに組み入れたときの状態ベクトルの平均値と共分散をゴチックで  $\mathbf{x}, \mathbf{P}$  と表わし、 $2N$  次元の状態ベクトルの平均値と共分散  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{P}}$  と区別している。また、同図は、時刻  $k-1$  までの観測情報を用いた状態ベクトル

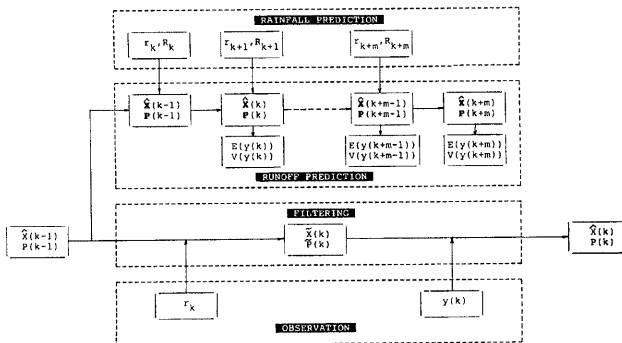


Fig. 3.1 Runoff Prediction Algorithm.

ル  $\mathbf{x}(k-1)$  の平均値  $\bar{\mathbf{x}}(k-1)$ 、共分散  $P(k-1)$  が求められている時点から、単位時間進む間の処理の流れを示すものである。

まず、時刻  $k-1$  に、時刻  $k-1$  から時刻  $k$  までの降雨強度の予測値  $\hat{r}_k$  と予測誤差分散  $\hat{R}_k$  が与えられると、

$$\begin{aligned} \hat{x}_{2N+1}(k-1) &= \hat{r}_k, & P_{2N+1, 2N+1}(k-1) &= R_k, \\ P_{i, 2N+1}(k-1) &= P_{2N+1, i}(k-1) = 0, & i &= 1, \dots, 2N \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (23)$$

とにおいて次元拡大した  $\hat{\mathbf{x}}(k-1)$ 、 $\mathbf{P}(k-1)$  を設定する。拡大された状態ベクトルに対し、3.2 で述べた方法により、 $\hat{\mathbf{x}}(k)$ 、 $\mathbf{P}(k)$  を求め、これから 3.2 (18) 式を用いて、 $y(k)$  の平均値と分散を求める。次に、時刻  $k$  から時刻  $k+1$  までの降雨強度の予測値  $\hat{r}_{k+1}$ 、予測誤差分散  $R_{k+1}$ 、 $k$  を  $k+1$  と変更した (23) 式を用いて、 $\hat{\mathbf{x}}(k)$ 、 $\hat{\mathbf{P}}(k)$  を再定義する。以下同様にして、必要とされる時間先までの流出量の平均値と共分散を求める。これが流出予測のブロックである。

次に、時刻  $k$  になって、時刻  $k-1$  から時刻  $k$  までの降雨強度  $r_k$  が得られると、これを用いて  $\bar{\mathbf{x}}(k-1)$ 、 $P(k-1)$  から  $\bar{\mathbf{x}}(k)$ 、 $\bar{P}(k)$  を求める。さらに、時刻  $k$  の流量  $y(k)$  が得られると、 $\bar{\mathbf{x}}(k)$ 、 $\bar{P}(k)$  から  $\hat{\mathbf{x}}(k)$ 、 $P(k)$  を求める。これがフィルタリングのブロックである。

#### 4. 降雨予測シミュレーション

前章では、流出予測に必要な降雨予測値とその予測誤差分散は“降雨予測者”によって与えられるとして、流出予測のアルゴリズムを構成した。もちろん、実流域へこの流出予測方式を適用するには、この降雨予測者は現実のものでなければならない。

AMeDAS や雨量レーダの配備に伴い、降雨予測問題の解決は急速に現実化しつつあるが、少なくとも現段階では確立された降雨予測方式は存在しないので、本論文で述べた流出予測方式を現実の降雨予測方式と結合させて、その適否を検討することはできない。そこで、本研究では、過去の降雨系列から逆に“降雨予測値”を指定された精度で発生させることを考え、これを降雨予測シミュレーションとよぶ。

##### 4.1 降雨予測シミュレーションの方法

本研究では、過去の降雨出水記録を用いて流出予測方式の有効性を検討することを前提として、降雨記録から逆に降雨“予測値”を指定された精度で再現する降雨予測シミュレータを設定する。

降雨予測シミュレータは、 $\tau$  時間後の降雨強度  $r(\tau)$  を、予測誤差の平均値が 0、分散が指定された値  $R(\tau)$  になるように予測した値  $\hat{r}(\tau)$  を求めて、 $(\hat{r}(\tau), R(\tau))$  を流出予測者に渡す。降雨予測シミュレータは、 $r(\tau)$  の実現値を使って  $\hat{r}(\tau)$  を再現するのであるが、その値はもちろん流出予測者には知らせない。以下、 $r(\tau)$  から  $\hat{r}(\tau)$  を再現する方法を述べる。

上述の条件から

$$E[\hat{r}(\tau) - r(\tau)] = 0, \quad E[(\hat{r}(\tau) - r(\tau))^2] = R(\tau) \quad \dots\dots\dots (1)$$

である。降雨予測シミュレータに対しては、 $r(\tau)$  は既知の値であり、 $\hat{r}(\tau)$  が再現するべき変数、すなわち確率変数である。(1) 式を満たす  $\hat{r}(\tau)$  の確率分布は種々考えられるが、 $\hat{r}(\tau) \geq 0$  であるべきこと、 $\hat{r}(\tau) = 0$  をも有限の確率でとれるようにすることを考慮して、平均値  $m(\tau)$ 、分散  $\sigma^2(\tau)$  をもつ正規確率分布で、負値をとる部分を 0 におきなおした確率分布を考える。ただし、この結果、 $\hat{r}(\tau)$  が (1) 式を満たすように  $m(\tau)$ 、 $\sigma^2(\tau)$  を決定するものとする。

$m(\tau)$ 、 $\sigma^2(\tau)$  は次のようにして決定する。 $\nu = m(\tau)/\sigma(\tau)$  とおくと

$$r(\tau)/R(\tau) = k(\nu)/\sqrt{m(\nu)} \quad \dots\dots\dots (2)$$

であることに注意する。ただし、

$$\left. \begin{aligned}
 k(\nu) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\nu^2/2} + \nu(\phi(\nu) + 1/2) \\
 m(\nu) &= \frac{\nu - 2k(\nu)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\nu^2/2} + (\nu^2 - 2\nu k(\nu) + 1)\phi(\nu) + \frac{1}{2}(\nu - k(\nu))^2 + k^2(\nu)/2 + 1/2 \\
 \phi(\nu) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\nu e^{-t^2/2} dt
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

とおいた。与えられた  $r(\tau)$ ,  $R(\tau)$  の値に対して、(2)式を満たす  $\nu$  を Newton 法によって求め、

$$\sigma(\tau) = r(\tau)/k(\nu), \quad m(\tau) = r(\tau)\nu/k(\nu) \quad \dots\dots\dots(4)$$

とおくと、 $m(\tau)$ ,  $\sigma(\tau)$  が求められる。

$m(\tau)$ ,  $\sigma(\tau)$  が決定されると、平均値  $m(\tau)$ 、分散  $\sigma^2(\tau)$  をもつ正規乱数を発生させ、負値のときは 0 とおきなおしたものを  $r(\tau)$  の予測値  $\hat{r}(\tau)$  とする。

本研究では、特に、降雨予測誤差分散  $R(\tau)$  を、変動係数の 2 乗が予測時間  $\tau$  に比例するように

$$R(\tau) = a\rho^2\tau r^2(\tau) \quad \dots\dots\dots(5)$$

とする。 $a\rho^2$  は比例定数である。

**4.2 降雨予測シミュレーションの意義**

前節で述べた降雨予測シミュレーションは次の利点を有する。

第 1 に、降雨予測誤差の分布に対する想定、すなわち平均値が 0 で、分散が既知のある値をとるという想定と、実際の予測誤差の分布が一致するという点である。降雨予測誤差分布に対する想定との誤りは流出予測誤差分布に対する想定との誤りを導くことになるので、流出予測方式の適否を検討するとき、この点は重要である。

第 2 に、降雨予測精度を制御できるので、流出予測精度に降雨予測精度が及ぼす影響を調べることができる。これは、所要の流出予測精度を得るために必要とされる降雨予測精度を求めることを可能にするから、降雨観測・予測システム設計の基礎情報を与えるのに役立つ。

**5. 実流域への適用と考察**

**5.1 対象流域の概要と水文資料**

対象流域として由良川上流大野ダム流域を選ぶ。流域面積は 342 km<sup>2</sup>、最長河道距離は 128 km、河道勾配は 0.0107 である。流域の大部分は山地で森林面積が多く、溜葉樹林がその過半を占めている。地質は主として秩父古成層である。

本研究で用いる降雨・流量資料は、1970、1971年の大野ダム地点の毎時雨量、大野ダム毎時流入量である。1970年の主な出水は 6 月 14 日～18 日に、1971年の主な出水は 8 月 30 日～9 月 4 日に生起している。1970年の資料をモデル同定に用い、1971年の資料を予測検証に用いる。

**5.2 モデルパラメタの同定**

(1) 集中型流出モデルのパラメタ同定

まず、2 で展開した集中型流出モデルのパラメタを同定する。同定に用いる期間は、1970年 6 月 10 日～30 日の間である。

入力である降雨強度は毎時の観測降雨量が各時間内で一定強度で降ったものとして与え、蒸発散能は、北緯 35° での可照時間を用いて Thornthwaite 式<sup>8)</sup> により推算する (Table 5.1)。2.4 で導入したステップ関数の近似式  $G(x)$  のパラメタ  $\epsilon$  は 1 mm とする。

Table 2.3 (b) にあげたパラメタのうち、最終浸透能  $i_{pc}$ ,  $i_{uc}$  はいずれも石原らによって由良川で得られている値を採用する<sup>9)</sup>。  $m_c$  は上田が九州諸河川で求めた値を用いる<sup>9)</sup>。河道網系の集中化に際して導入される貯水池個数  $n_c$  と集中化誤差との関係については未だ検討すべき点が残されているが、ここでは 3 に固

Table 5.1 Potential Evapotranspiration by the Thornthwaite Method.

| Month | Mean Monthly Temp. c | Daytime Hrs hr/mon | Monthly Potential Evapotranspiration mm/hr |
|-------|----------------------|--------------------|--|
| 1     | 3.5                  | 311.4              | 0.0091                                     |
| 2     | 2.0                  | 303.9              | 0.0044                                     |
| 3     | 6.0                  | 369.3              | 0.0229                                     |
| 4     | 10.0                 | 390.2              | 0.0513                                     |
| 5     | 15.0                 | 432.0              | 0.0976                                     |
| 6     | 20.0                 | 432.5              | 0.1514                                     |
| 7     | 23.0                 | 440.4              | 0.1812                                     |
| 8     | 26.0                 | 416.0              | 0.2044                                     |
| 9     | 20.5                 | 371.4              | 0.1345                                     |
| 10    | 15.0                 | 349.8              | 0.0791                                     |
| 11    | 10.0                 | 309.6              | 0.0409                                     |
| 12    | 5.0                  | 303.8              | 0.0147                                     |

Table 5.2 Parameter Values and Initial State.

| (a) Fixed Parameters        |                     | (b) Optimized Parameters |                 |
|-----------------------------|---------------------|--------------------------|-----------------|
| $i_{Fc}, i_{Uc}$            | 0.23 mm/hr          | $A_U$                    | 0.00559         |
| $m_c$                       | 1.45                | $M_{tF}$                 | 75.3 mm         |
| $F_1, F_2, F_3$             | 0.346, 0.365, 0.289 | $M_{tU}$                 | 18.9 mm         |
|                             |                     | $M_{tS}$                 | 34.1 mm         |
|                             |                     | $M_{fS}$                 | 106. mm         |
| (c) Optimized Initial State |                     | $m_{tF}, m_{tU}$         | 1               |
| $x_{tF}$                    | 3.43 mm             | $D$                      | 11.4 mm         |
| $x_{fF}$                    | 0.135 mm            | $k_F$                    | 0.0254 1/hr     |
| $x_{tU}$                    | 3.70 mm             | $a_F, a_U$               | 0.713 1/(mm·hr) |
| $x_{fU}$                    | 1.56 mm             | $p_{tS}$                 | 0.399           |
| $x_{tS}$                    | 3.56 mm             | $c_p$                    | 1.25            |
| $x_{fS}$                    | 44.6 mm             |                          |                 |
| $x_{c1}$                    | 0.467 mm            |                          |                 |
| $x_{c2}$                    | 0.781 mm            |                          |                 |
| $x_{c3}$                    | 0.919 mm            |                          |                 |

定した。対応する  $F_1, \dots, F_3$  の値は地形図より得られる流域分割をもとに決定した。これらの値を **Table 5.2 (a)** に示す。

残りのパラメタおよび状態量の初期値は、計算流量と観測流量の残差平方和を小さくするという方針で、京大大型計算機センターライブラリーのコンプレックス法を用いて探索するとともに、流出再現図による視覚判断をも援用して決定した。これらの値を **Table 5.2 (b), (c)** に示す。

以下のパラメタ、初期値を用いた流出量の再現図を **Fig. 5.1** に示す。再現精度は良好であるが、 $A_U$  や  $D$  の値は筆者らが当初予想した値よりも極端に小さい値になってしまっている。これは、これらの値の探索の下限値を大きくすることによって修正されるものと思われるので、今後の検討課題としたい。

## (2) 確率過程的流出モデルのパラメタ同定

3で構成した確率過程的流出モデルは、その構成の基礎とした集中型流出モデルに含まれているパラメタと、付加された確率的外乱に関するパラメタをパラメタとしてもっている。これらのパラメタを同時に最適化することは困難であるので、集中型流出モデルに含まれるパラメタは、それを決定論的モデルとして扱ったときのパラメタ値をそのまま用いて固定し、確率的外乱のパラメタを試行錯誤によって求めることにした。

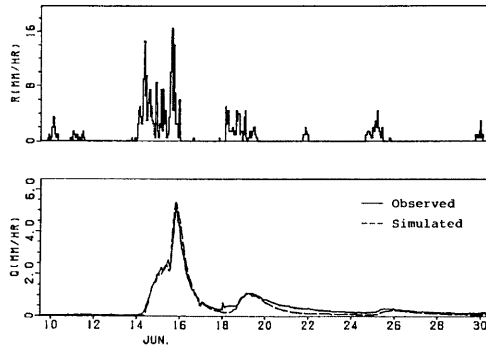


Fig. 5.1 Observed and Simulated Hydrographs.  
(from 1970.6.10.0 till 1970.6.30.24)

ただし、流量観測誤差に導入された3(10)式中の外乱  $w(k)$  の分散  $\gamma^2$  は、1970年7月26日0時～29日0時と、10月20日0時～25日0時までの無降雨期間で、5時間移動平均によって真値が推定しようとして求めた分散の平均値0.015を採用して固定する。また、状態方程式中に導入した3(4)式中の外乱  $v_j(k)$  の自己回帰係数  $\rho_j$ 、 $e_j(k)$  の分散  $\sigma_j^2$  は  $j$  によらず一定値  $\rho$ 、 $\sigma^2$  をとるものとする。

以上の条件のもとで、将来の降雨を既知として、1時間後の流出量を予測する。降雨を既知とするので、流出予測誤差は流出モデル自体の誤差によって生ずるものである。この流出予測誤差の統計的性質が3で述べた方法により前もって計算される値に対応するように外乱のパラメタ  $\rho$ 、 $\sigma^2$  を決定しなければならない。本研究では試算によって、 $\rho=0.5$ 、 $\sigma^2=0.005$  なる値を得た。これらの値を用いた1時間後の流出予測値、流

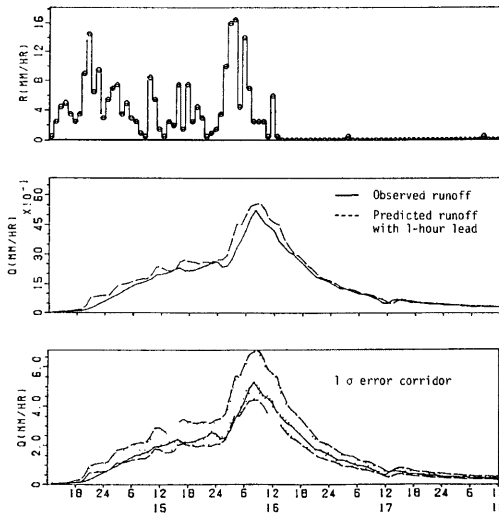


Fig. 5.2 Observed and Predicted (with 1-hour lead) runoff  
(from 1970.6.14.12 till 1970.6.18.12)

出予測値に予測誤差の標準偏差を加減してできる帯状領域（以下  $1\sigma$  予測帯とよぶ）を実測流量とを示したものが Fig. 5.2 である。同図では、実測流量のほとんどが  $1\sigma$  予測帯に入っており、 $\sigma^2$  の値はさらに小さくともよいと考えられる。上記の値は本モデルに対して非観的に見方をしていることになるが安全側にとってこの値を用いる。

### 5.3 流出予測計算

前節で求めたパラメタを用いて、翌年1971年の流出予測を試みる。期間は8月30日0時～9月4日0時の間とする。流出予測の場合は降雨予測が必要であるので、4で展開した降雨予測シミュレーション法を用いて予測降雨を与える。降雨の予測精度は、完全予測の場合（4.1(5)式中の  $a_p=0$ ）、1時間後予測で予測誤差の標準偏差が実測降雨の1/2である場合（ $a_p=0.5$ ）、実測降雨の1倍である場合（ $a_p=1$ ）の3ケースを考える。実際の降雨予測では完全予測などありえないが、他の2ケースと比較のためにとりあげる。

降雨が完全予測で与えられるとき（ $a_p=0$ ）の1時間後～3時間後流出予測の結果を Fig. 5.3～Fig. 5.5 に、降雨の予測が  $a_p=0.5$  で与えられるときの1時間後～3時間後流出予測の結果を Fig. 5.6～Fig. 5.8 に、降雨の予測精度が  $a_p=1$  で与えられるときの1時間後～3時間後流出予測の結果を Fig. 5.9～Fig. 5.11 に示す。

まず、同一予測降雨での1時間後流出予測から3時間後流出予測を比較するために、降雨の予測精度が  $a_p=0.5$  で与えられるときの流出予測図（Fig. 5.6～Fig. 5.8）を検討する。予測時間が大きくなると予測精度も悪くなるが、これに対応して  $1\sigma$  予測帯の幅も大きくなっており、ハドログラフの上昇部を除いて、実測流量のほとんどが  $1\sigma$  予測帯の中に入っている。これは、予測精度をも与える流出予測方式が有効に機能していることを示す。

次に、同一予測時間での降雨予測精度の影響を検討するため、1時間後流出予測で降雨予測精度が  $a_p=0, 0.5, 1$  のときの図（Fig. 5.3, Fig. 5.6, Fig. 5.9）をみる。これらの図より、降雨予測精度が悪くなるほど、実測流量のハドログラフの最初のピークにあたる部分が2つのピークに分かれる傾向や、ピークの

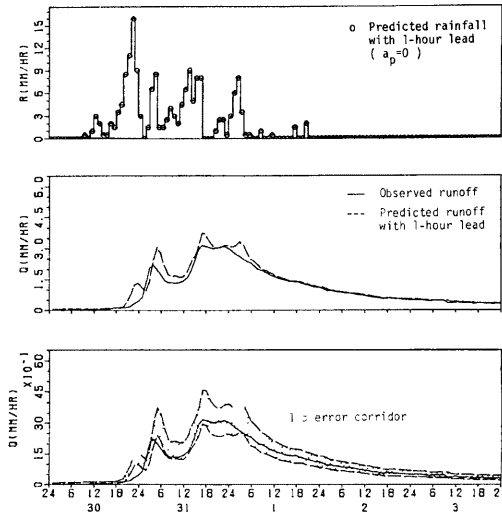


Fig. 5.3 Observed and Predicted (with 1-hour lead) Runoff with  $a_p=0$  (from 1971.8.30.0 till 1971.9.3.24)

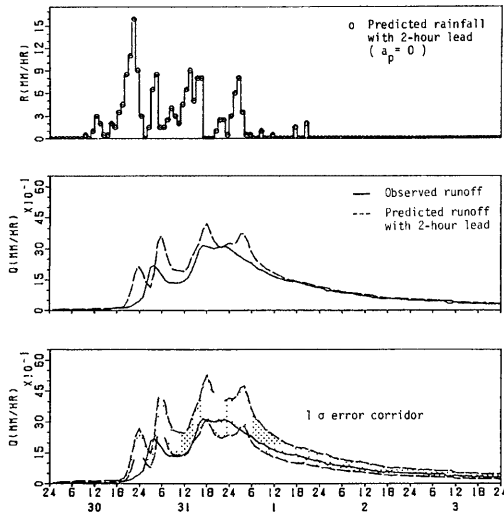


Fig. 5.4 Observed and Predicted (with 2-hour lead) Runoff with  $a_p=0$  (from 1971.8.30.0 till 1971.9.3.24)

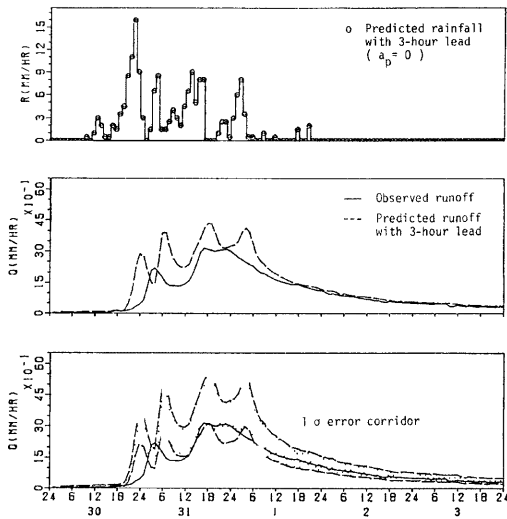


Fig. 5.5 Observed and Predicted (with 3-hour lead) Runoff with  $a_p=0$  (from 1971.8.30.0 till 1971.9.3.24)





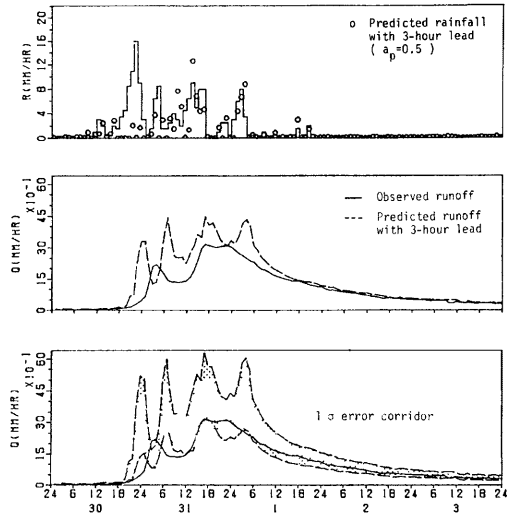


Fig. 5.8 Observed and Predicted (with 3-hour lead) Runoff with  $a_p=0.5$  (from 1971.8.30.0 till 1971.9.3.24)

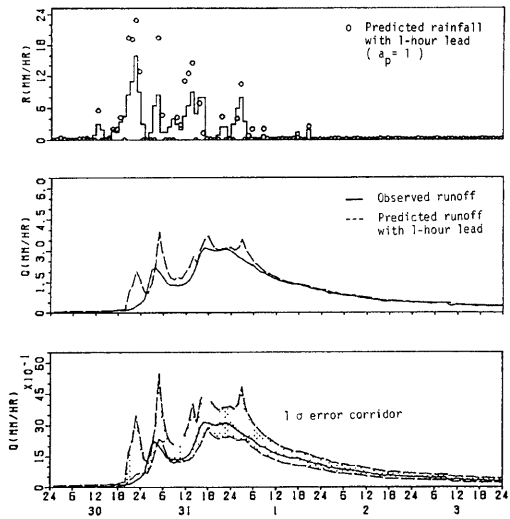


Fig. 5.9 Observed and Predicted (with 1-hour lead) Runoff with  $a_p=1$  (from 1971.8.30.0 till 1971.9.3.24)

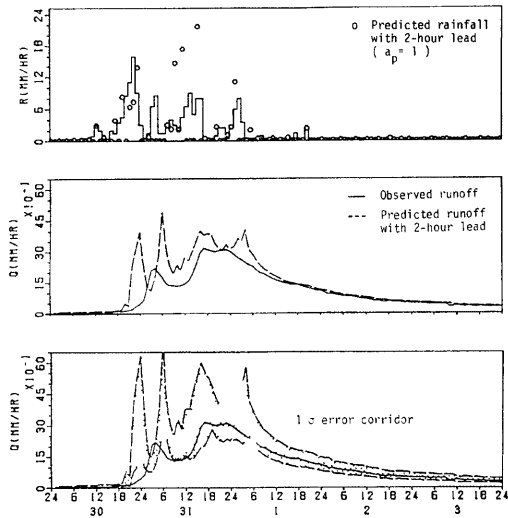


Fig. 5.10 Observed and Predicted (with 2-hour lead) Runoff with  $a_p=1$  (from 1971.8.30.0 till 1971.9.3.24)

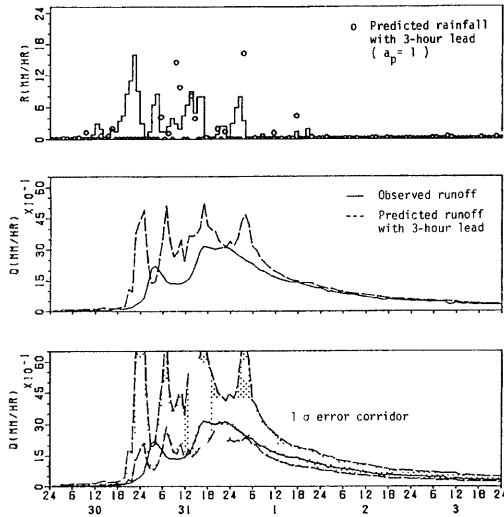


Fig. 5.11 Observed and Predicted (with 3-hour lead) Runoff with  $a_p=1$  (from 1971.8.30.0 till 1971.9.3.24)



しかしながら、次のような検討課題も残された。ここで構成した集中型流出モデルの流出再現能力が十分であることは、モデル構造の簡略化の可能性を示すものである。今後こうした方向の検討が必要である。また、本研究では、同定された集中型流出モデルのパラメタを固定し、付加した外乱項の統計的パラメタは試算によって与えたが、予測残差の統計的検討によって、たとえば、最尤法によって、これらのパラメタを同定するというより緻密な方法の適用も考慮していく必要がある。

なお、データのファイル化、計算処理等で、杉岡篤、今村宏、前田武敏の諸氏の協力を得た。記して謝意を表する。

## 参 考 文 献

- 1) Gelb, A. (Edited): Applied Optimal Estimation, The M.I.T. Press, 1974.
- 2) Kitanidis, P. K. and Bras, R. L.: Real-Time Forecasting With a Conceptual Hydrologic Model, Water Resources Research, Vol. 16, No.6, 1980, pp. 1025-1033.
- 3) 久保省吾：山間地流域における流出システムの分析と同定に関する研究，京都大学修士論文，1967.
- 4) 高棹琢馬・椎葉充晴：Kinematic Wave 法への集水効果の導入，京都大学防災研究所年報，第24号 B-2, 1981, pp. 159-170.
- 5) 戸川隼人：微分方程式の数値計算，オーム社，1981.
- 6) 牧之内三郎・鳥居達生：数値解析，オーム社，1975.
- 7) Jazwinski, A. H.: Stochastic Process and Filtering Theory, Academic Press, 1970.
- 8) 金丸昭治・高棹琢馬：水文学，朝倉書店，1975.
- 9) 上田年比古：降雨流出に関する研究，九州大学博士論文，1961.

## 附 録

### 統計的線形化の手法

#### I. 統計的線形化の定義

確率変数  $X_1, \dots, X_n$  の関数  $f(X_1, \dots, X_n)$  に対して、

$$J[a_1, \dots, a_n, b] = E[f(X_1, \dots, X_n) - a_1 X_1 - a_n X_n - b]^2 \longrightarrow \min \quad \dots\dots\dots(1)$$

となるように定数  $a_1, \dots, a_n, b$  を定め、

$$a_1 X_1 + \dots + a_n X_n + b \quad \dots\dots\dots(2)$$

を  $f(X_1, \dots, X_n)$  の統計的線形化式とよぶことにする。これは、確率変数  $f(X_1, \dots, X_n)$  の  $X_1, \dots, X_n$  に対する重回帰式であって、定数  $a_1, \dots, a_n$  は正規方程式

$$\left. \begin{aligned} P_{11}a_1 + \dots + P_{1n}a_n &= \text{cov}(X_1, f) \\ \vdots & \\ P_{n1}a_1 + \dots + P_{nn}a_n &= \text{cov}(X_n, f) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(3)$$

から求められる。ただし、 $\text{cov}$  は共分散を表わし、 $P_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)$  とおいた。これを解いて  $a_1, \dots, a_n$  が求められると、 $b$  は

$$b = E[f] - E[X_1]a_1 - \dots - E[X_n]a_n \quad \dots\dots\dots(4)$$

として求められる。

#### II. 統計的線形化の手法

前節で、統計的線形化の定義とその線形化式の係数を定める方程式(3)、(4)を示した。これらの方程式を解くのは容易であり、問題はむしろ、(3)、(4)式中の  $E[f]$ 、 $\text{cov}(X_i, f)$  を求めることである。以下では、

$\mathbf{X}=(X_1, \dots, X_n)$  は結合正規分布に従うとし、関数  $f$  が1変数の関数である場合と多変数の関数である場合  
 において  $E[f]$  や  $\text{cov}(X_i, f)$  を求める手法を述べる。

1. 1変数の関数

ここでは正規変数  $X \sim N(\bar{X}, \sigma^2)$  の関数  $f(X)$  に対して、 $E[f(X)]$ ,  $\text{cov}(X, f(X))$  を求める算式を述べる。  
 $m$  が自然数のとき

$$E[(X-\bar{X})^m] = \begin{cases} 0 & m \text{ が奇数} \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (m-1) \sigma^m & m \text{ が偶数} \end{cases} \dots\dots\dots(5)$$

であるから、 $f(X)$  が  $X$  の整多項式である場合は、これを利用して  $E[f(X)]$ ,  $\text{cov}(X, f(X))$  を求めること  
 ができる。

また、自然数  $m$  に対して

$$G_m(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x x^{m-1} e^{-x^2} dx \dots\dots\dots(6)$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned} G_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \text{erf}(x) \\ G_2(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (1 - e^{-x^2}) \\ G_m(x) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{m-2} e^{-x^2} + \frac{m-2}{2} G_{m-2}(x), \quad m \geq 3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

が成立つから、これを利用すれば、 $f(X)$  が区分的に  $X$  の整多項式である場合にも  $E[f(X)]$ ,  $\text{cov}(X, f(X))$   
 を求めることができる。

$f(X)$  が上記以外の関数であるときには、 $E[f(X)]$ ,  $\text{cov}(X, f(X))$  を求めるには数値積分によらざるを得な  
 い。 $X$  は正規分布にしたがうと仮定したので、 $E[f(X)]$ ,  
 $\text{cov}(X, f(X))$  を求めるには、

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-x^2} dx \dots\dots\dots(8)$$

の形の積分を実行することによる。数値積分法は種々提案  
 されているが、有限回数で解を求めるために、Hermite-  
 Gauss 公式を用いる。これは、

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-x^2} dx \approx \sum_{i=1}^k w_i g(x_i) \dots\dots\dots(9)$$

の形の公式である。右表に  $k=9$  のときの  $w_i, x_i$  の値を  
 示す。

| $i$ | $X_j$    | $W_j$        |
|-----|----------|--------------|
| 1   | -3.19099 | 0.0000396069 |
| 2   | -2.26658 | 0.00494362   |
| 3   | -1.46855 | 0.0884745    |
| 4   | -0.72355 | 0.432652     |
| 5   | 0.0      | 0.720235     |
| 6   | 0.72355  | 0.432652     |
| 7   | 1.46855  | 0.0884745    |
| 8   | 2.26658  | 0.00494362   |
| 9   | 3.19099  | 0.0000396069 |

2. 多変数の関数

ここでは、 $\bar{\mathbf{X}}=(X_1, \dots, X_n)^t \sim N(\mathbf{X}, P)$  の関数  $f(\mathbf{X})$  に対して、 $E[f(\mathbf{X})]$ ,  $E[X_i, f(\mathbf{X})]$  を求める算式を  
 述べる。

まず、 $f(\mathbf{X})$  が  $X_1, \dots, X_n$  の整多項式の場合を考える。この場合は、正規確率ベクトル  $\mathbf{X}$  の特性関数  
 $\phi(\boldsymbol{\theta}) (\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)^t)$  が

$$\phi(\boldsymbol{\theta}) = E[\exp(i\boldsymbol{\theta}^t \mathbf{X})] = \exp\left\{i\boldsymbol{\theta}^t \bar{\mathbf{X}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^t P \boldsymbol{\theta}\right\}, \quad i^2 = -1 \dots\dots\dots(10)$$

で与えられることを利用して、 $E[f(\mathbf{X})]$ ,  $E[X_i, f(\mathbf{X})]$  の値を求めることができる。たとえば、(10)を  $\boldsymbol{\theta}$  に  
 関して2回微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\theta)}{\partial\theta_j\partial\theta_l} &= -E[X_j X_l e^{i\theta^t \mathbf{X}}] \\ &= -P_{jl} \phi(\theta) + \left\{ i\bar{X}_j - \sum_{k=1}^n P_{jk} \theta_k \right\} \left\{ i\bar{X}_l - \sum_{k=1}^n P_{lk} \theta_k \right\} \phi(\theta) \end{aligned}$$

を得るから、 $\theta=0$  において

$$E[X_j X_l] = P_{jl} + \bar{X}_j \bar{X}_l$$

を得る。同様にして、 $X_1, \dots, X_n$  の高次式の期待値の算式が得られる。

$f(\mathbf{X})$  が  $X_1, \dots, X_n$  の整多項式でない場合は、 $E[f(\mathbf{X})]$ ,  $\text{cov}[X_i, f(\mathbf{X})]$  を求めることは容易でなく、1変数関数の場合の Hermite-Gauss の積分公式に相当するものもない。本研究の流出システムモデルに現われる非線形関数のうち、多変数関数であるものは、

$$f(\mathbf{X}) = f_1(X_1) \times \dots \times f_k(X_k) \times g(X_{k+1}, \dots, X_n)$$

のように1変数関数  $f_1(X_1), \dots, f_k(X_k)$  と整多項式である多変数関数  $g(X_{k+1}, \dots, X_n)$  との積の形であるので、本研究では、 $f_1(X_1), \dots, f_k(X_k)$  をまず線形化し、その結果得られる整多項式の多変数関数を再び線形化するという近似手法を用いることにする。