状態空間法による流出予測

——kinematic wave 法を中心として——

高 棹 琢 馬・椎 葉 充 晴

FLOOD FORECASTING BY THE STATE SPACE METHOD

——Laying Stress on the Kinematic Wave Method——

By *Takuma* TAKASAO and *Michiharu* SHIIBA

Synopsis

An on-line flood runoff forecasting scheme which provides not only the estimate of runoff discharge but also the variance of estimation error is presented on the basis of filtering and prediction theorey developed by Kalman and others. Considering the difference in the way of observation of outputs, the meteorological system and the runoff system are supposed to be described by a discrete-time model and a continuous-time model, respectively. Then, when the total system is considered, the discrete- and continuous-time random variables exist together and this makes the prediction problem somewhat complex. In this paper, we cope with this situation by considering separately the time instant at which the variables may change with a discrete jump and the interval in which the variables change continuously, and by incorporating the rainfall intensity into state variables.

Though the general formulation of runoff prediction is given for the runoff system model which is described by an ordinary vector differential equation, we can use the runoff system model which is described by a partial differential equation in a similar fashion. In this context, the "stochastic" kinematic wave model which is made by introducing the noise term into the basic equation of the kinematic wave model is considered in particular and the equations which describe the evolution of the conditional expection and covariance of water depth are derived.

1. 本論文の課題

本論文の課題は，状態空間法による気象・流出システムのモデル記述と Kalman 以来のフィルタリング・予測理論の適用として，流出予測方式を定式化することである。この課題に関する筆者らの基本的考え方はすでに別の機会に発表しているが[1]，概略を述べるにとどまっており，新たに得られた知見とともに本論文で再構成する。本論文で構成する予測方式は，時々刻々得られる気象・流出システムの出力情報を考慮していく即時的な性格を持つものである。

気象システムの出力である降雨が一定時間間隔での強度の積分値の形で観測されることを考慮すると，気象システムは，その状態が有限個の量（有限次元の数ベクトル）で表わされ，離散時間で状態が推移する形のモデルで表現するのが適当である。一方，流出システムの出力である流量は一定時間間隔の各時点ごとに観測されるから，流出システムのモデルとしては，離散時間で状態が推移するモデル，連続時間で状態が推移するモデルのいずれをも考えることができる。前者のモデルを流出システムモデルに採用すると，気象・流出システム全体が離散時間で記述されることになるので，フィルタリング・予測理論を直接適用して容易に即時的流出予測方式が構成される。本論文では，後者の連続時間で状態が推移する形の流出システムモデ

ルを用いる場合を考える。この場合，さらに，流出システムの状態が有限次元の数ベクトルで表わされるとするモデルと，空間パラメータを持った量で表わされるとするモデルとが考えられる。前者のモデルでは状態方程式は連立常微分方程式で，後者のモデルでは状態方程式は偏微分方程式で表わされる。本論文の中心的課題は，流出現象の物理的構造を考慮した優れたモデルである kinematic wave 法を用いた即時的流出予測方式を構成することにある。このモデルの基礎式は偏微分方程式である。その場合，基本的問題は2つある。1つは，気象・流出システム全体として考えると離散時間で考える確率変数と連続時間で考える確率変数が混在することになることを考慮するフィルタリング・予測方式を構成すること，もう1つは，基礎式である（確率）偏微分方程式から状態量のフィルタリング・予測式を導くことである。前者の問題は，kinematic wave モデルに限らず，貯留関数法やタンクモデルのように状態方程式が常微分方程式で表わされるモデルにも共通の問題であるので，重複を避ける意味もあって，状態方程式が常微分方程式で表わされるモデルを取りあげて2章で論じる。後者の問題は，3章で論じる。

2. 状態空間法による流出予測理論

2.1 序　　論

即時的流出予測において重要なことは，次の2点である。1つは，予測流量だけでなく，予測誤差の程度をも前もって提示できるようにすることである。実際，誤差の程度が未知である予測に実用的価値は無い。もう1つは，時々刻々得られる観測情報が逐次的な形で将来予測に生かされるようにすることである。

この2点は，流出予測に限らず，不確実な要素を持つ動的システムの予測において一般に重要なことである。この2点を考慮しうる理論として，Kalman 以来発展してきているフィルタリング・予測理論がある。本論文の要点は，この理論を流出予測に適用することにある。そこで，本節では離散時間の線形の動的システムを例にあげて，この理論の概要を説明しておく。

（1） 記法と用語；

確率ベクトル Z についてその期待値を $E[Z]$ または $\hat{Z}$ と表わし，その共分散行列を $Var[Z]$ と表わす。確率ベクトル Z_1 と Z_2（いずれも列ベクトル）について，$E[(Z_1-\hat{Z}_1)(Z_2-\hat{Z}_2)^T]$ を Z_1 と Z_2 の共分散行列とよび $Cov[Z_1, Z_2]$ とかく。T は転置記号である。

ある情報 Y が与えられたときの確率ベクトル Z の条件つき確率分布を $\Psi(Z|Y)$ と表わす。条件つき確率分布 $\Psi(Z|Y)$ を持つ確率ベクトル Z を元の確率ベクトル Z と特に区別して明示するときは，$Z|Y$ と表わす。$Z|Y$ の期待値ベクトル，$Z|Y$ の共分散行列，$Z_1|Y$ と $Z_2|Y$ の共分散行列をそれぞれ，$E[Z|Y]$，$Var[Z|Y]$，$Cov[Z_1, Z_2|Y]$ と表わす。

動的システムを取扱う場合，情報は時間 t の関数である場合が多い。確率ベクトル過程 $\{Z(t)\}$ に対して，条件つき確率分布 $\Psi(Z(t)|Y(t))$ を求めることを $Z(t)$ のフィルタリング，$\tau>t$ に対して条件つき確率分布 $\Psi(Z(\tau)|Y(t))$ を求めることを $Z(\tau)$ の時刻 t における予測という（条件つき確率分布による定義）。実際問題としては，条件つき確率分布まで求めることは多くの場合不可能であって，条件つき期待値ベクトル，条件つき共分散行列を近似的に求めることで満足せざるを得ない。以下，特に，

$$\hat{Z}(\tau|Y(t))=E[Z(\tau)|Y(t)]$$
$$P_Z(\tau|Y(t))=Var\ [Z(\tau)|Y(t)]$$
$$P_{Z_1Z_2}(\tau|Y(t))=Cov\ [Z_1(\tau), Z_2(\tau)|Y(t)]$$

という記法を用いる。ただし，$\{Z(t)\}$, $\{Z_1(t)\}$, $\{Z_2(t)\}$ は確率ベクトル過程であり，いずれも右辺を左辺のようにかくのである。

また，期待値ベクトル m, 共分散行列 Σ を持つ正規分布を $N(m, \Sigma)$ で表わす。ある確率分布が正規分布にしたがうことがわかっていれば，その期待値ベクトルと共分散行列を求めると分布が確定することに注意しよう。

（2） 離散時間線形動的システムのフィルタリングと予測；

フィルタリング・予測理論を離散時間線形動的システムを例にあげて概説しよう。

いま，ある動的システムについて，時刻 $t_k(k=0, 1, \ldots, t_0<t_1<\cdots)$ 以後の動的挙動を決定するのに十分な過去に関する情報，すなわち"状態量"が n 次列ベクトル $h(t_k)$ ("状態ベクトル"と呼ばれる）で表わされるとして，その動的推移は，"状態方程式"

$$h(t_{k+1})=\Phi(t_{k+1}, t_k)h(t_k)+b_k+v_k,\ k=0, 1, \cdots\cdots \quad (1)$$

によって記述され，"出力方程式"

$$y(t_{k+1})=H_{k+1}h(t_{k+1})+c_{k+1}+w_{k+1},\ k=0, 1, \cdots\cdots \quad (2)$$

によって時刻 t_{k+1} に出力 $y(t_{k+1})$ を発生するものとする。出力 $y(t_{k+1})$ の値は時刻 t_{k+1} に知られるとする。$y(t_{k+1})$ は $h(t_{k+1})$ をある意味で"観測"しているともみなせるので，(2) 式を"観測方程式"ともいう。

ただし，(1)，(2) 中の $\Psi(t_{k+1}, t_k), H_{k+1}$ は既知の $n\times n$ 次，$m\times n$ 次行列，b_k, c_k は既知の n 次，m 次列ベクトルであり，$h(t_0), v_k, w_{k+1}$ は n 次，n 次，m 次の確率ベクトルであって，

$$h(t_0)\sim N(\bar{h}_0, \Sigma_0),\ v_k\sim N(0, V_k),\ w_{k+1}\sim N(0, W_{k+1}) \cdots\cdots \quad (3)$$

であり，$\{v_k, k=0, 1, \ldots\}$, $\{w_{k+1}, k=0, 1, \ldots\}$ は互いに独立でかつ $h(t_0)$ とも独立な白色系列とする。

このような動的システムに対して，時刻 t までの観測情報の集合を $Y(t)$ と表わすと，$t<t_1$ では $Y(t)=\phi$（空集合）であり，ある $k>0$ に対して，$t_k\leqslant t<t_{k+1}$ である t に対しては，$Y(t)=\{y(t_1), \ldots, y(t_k)\}$ である。

そうすると，条件つき確率分布 $\Psi(h(t_k)\,|\,Y(t_k)), \Psi(h(t_l)\,|\,Y(t_k))$ $(l>k)$ を求めることがそれぞれ，状態ベクトルのフィルタリング，予測であり，条件つき確率分布 $\Psi(y(t_l)\,|\,Y(t_k))$ $(l>k)$ を求めることが出力の予測である。(1)～(3) 式で記述される本例のようなシステムでは，これらの条件つき確率分布は全て正規分布であって，その条件つき期待値ベクトル・条件つき共分散行列を求めることと，対応するフィルタリング・予測とは同等である。以下，これらの条件つき期待値ベクトル・条件つき共分散行列を求める手順を述べよう。

まず，$Y(t_0)=\phi$ であから，(3) 式より

$$\hat{h}(t_0\,|\,Y(t_0))=\bar{h}_0,\ P_h(t_0\,|\,Y(t_0))=\Sigma_0 \cdots\cdots \quad (4)$$

である。以下，逐次的に議論することにして，ある $t_k(k\geqslant 0)$ で $\hat{h}(t_k\,|\,Y(t_k))$, $P_h(t_k\,|\,Y(t_k))$ が得られていると仮定しよう。

まず，予測について考えよう。付録の [1] の議論を適用することにより，(1) 式から，$l=k+1, k+2, \ldots$ について，

$$\hat{h}(t_l\,|\,Y(t_k))=\Phi(t_l, t_{l-1})\hat{h}(t_{l-1}\,|\,Y(t_k))+b_{l-1},$$

$$P_h(t_l\,|\,Y(t_k))=\Phi(t_l, t_{l-1})P_h(t_{l-1}\,|\,Y(t_k))\Psi(t_l, t_{l-1})^T+V_{l-1} \cdots\cdots \quad (5)$$

を得る。また，再び付録の [1] の議論を適用することにより，(2) 式から，$t_l>t_k$ について

$$\hat{y}(t_l\,|\,Y(t_k))=H_l\hat{h}(t_l\,|\,Y(t_k))+c_l$$

$$P_y(t_l\,|\,Y(t_k))=H_lP_h(t_l\,|\,Y(t_k))H_i^T+W_l$$

を得る。

次に，時刻 t_{k+1} で出力 $y(t_{k+1})$ が得られたとして，$\hat{h}(t_{k+1}Y(t_{k+1}))$, $P_h(t_{k+1}\,|\,Y(t_{k+1}))$ を求めること，すなわちフィルタリングを考えよう。$Y(t_{k+1})$ は $Y(t_k)$ に $y(t_{k+1})$ を追加したものであることに注意し，付録の [4] の議論を適用して，

$$\tilde{y}_{k+1}=y(t_{k+1})-\{H_{k+1}\hat{h}(t_{k+1}\,|\,Y(t_k))+c_{k+1}\}$$

$$K_{k+1}=P_h(t_{k+1}\,|\,Y(t_k))H_{k+1}^T(H_{k+1}P_h(t_{k+1}\,|\,Y(t_k))H_{k+1}^T+W_{k+1})^{-1}$$

とおくことにより，$\hat{h}(t_{k+1}\,|\,Y(t_{k+1}))$, $P_h(t_{k+1}\,|\,Y(t_{k+1}))$ は，

$$\hat{h}(t_{k+1}\,|\,Y(t_{k+1}))=\hat{h}(t_{k+1}\,|\,Y(t_k))+K_{k+1}\tilde{y}_{k+1},$$

$$P_h(t_{k+1}\,|\,Y(t_{k+1}))=(I-K_{k+1}H_{k+1})P_h(t_{k+1}\,|\,Y(t_k))(I-K_{k+1}H_{k+1})^T+K_{k+1}W_{k+1}K_{k+1}^T$$

として求められる。I は単位行列である。

以上により，時々刻々，出力情報 $y(t_k)$ が入手されると $\hat{h}(t_k\,|\,Y(t_{k-1}))$, $P_h(t_k\,|\,Y(t_{k-1}))$ から，情報 $Y(t_{k-1})$ を直接用いることなく，$\hat{h}(t_k\,|\,Y(t_k))$, $P_h(t_k\,|\,Y(t_k))$ が求められ（フィルタリング），$l=k+1$,

$k+2, \ldots$ について，$\hat{h}(t_l|Y(t_k))$, $P_h(t_l|Y(t_k))$, $\hat{y}(t_l|Y(t_k))$ が求められる（予測)。

以上の条件つき確率分布による定式化は Jazwinski[2] にならったが，そのフィルタリング・予測のアルゴリズムは Kalman[3] が最初に導いたものであり（ただし，Kalman の理論では，上記の条件つき期待値，条件つき共分散行列を条件つき線形最小2乗推定，推定誤差の共分散行列と読みかえる。正規分布ではこれらは一致する)，その利点は，推定値（この場合は期待値）だけでなく，推定誤差の共分散行列をも与えるようになっていること，また，過去の情報の全てを用いるのでなく，ただその時刻の観測情報を処理するだけで過去の全ての情報を用いた推定になるように逐次式を構成している点にある。後者は，記憶しておくべき情報量，毎時刻の演算量を一定にするという点で，即時的処理に適している。

流出現象に関与するシステムは，以上述べたような簡単な離散時間の動的システムではないので，その特性に応じてフィルタリング・予測式を構成する必要がある。以下の各節でこの課題を考える。

2.2 気象・流出システムの状態空間法によるモデル化

我が国河川のように出水が急激であって，降雨から流出流量への変換の遅れ時間が短い場合には，過去の降雨だけを用いて，避難・水防活動に役立つ程度の将来の流量を予測するのは難しく，降雨を発生させるシステム（以後気象システムとよぶ）をも考慮に入れて流出予測を考えていく必要がある。すなわち，気象システムと流出システムの2つの部分システムからなる全体システムを考えていく必要がある。

これらの2つの部分システムは，次のような特徴をもっている。第1に，これらの部分システムを入出力システムとみなすと，気象システムの出力である降雨が，同時に流出システムの入力となっている点で，かつその点でのみ両部分システムは関連を持っている。第2に，気象システムの出力である降雨は，通常ある定められた時間間隔内の降雨強度の積分値の形で観測されるのに対し，流出システムの出力である流量は，通常ある定められた時間間隔をもった時点ごとに観測される。すなわち，出力の観測の形式が異っている。

このような特徴に注意しながら，本節では，気象・流出システムを状態空間型のモデルで表現することを考える。

まず，流出システムについて考えると，たとえば，次のようなモデル

$$dh(t)/dt = f(t, h(t), r(t)) + v(t),\ t \geqslant t_0 \qquad (1)$$

$$Q(t_{k+1}) = g(t_{k+1}, h(t_{k+1})) + w_{k+1},\ k=0, 1, \ldots,\ t_0 < t_1 < t_2, \qquad (2)$$

を考えることができる。ただし，$h(t)$ は時刻 t での流出システムの有限次（n 次とする）状態ベクトル，$r(t)$ は時刻 t の降雨強度，$Q(t_{k+1})$ は流量観測時刻 $t_{k+1}(k=0, 1, \ldots, t_0 < t_1 < \cdots)$ での流出流量，$\{v(t), t \geqslant t_0\}$ は $h(t_0)$ とは独立で，

$$E[v(t)] = 0,\ Var\,[v(t)dt] = V(t)dt\ (dt > 0) \qquad (3)$$

（$v(t)$ は既知）である n 次白色正規確率ベクトル過程とする。また，$\{w_{k+1}, k=0, 1, \ldots\}$ は，$\{v(t), t \geqslant t_0\}$，$h(t_0)$ とは独立で，

$$E[w_{k+1}] = 0,\ Var[w_{k+1}] = W_{k+1} \qquad (4)$$

（W_{k+1} は既知）である白色正規確率変数系列，f は n 次ベクトル値の，g はスカラー値の既知の関数である。

1個または複数個の貯水池の結合で表わされる貯留型の流出モデルは，これらの貯水池の貯水量を状態量とし，貯留量の連続式に攪乱項を付加すれば，(1) 式の形の状態方程式が得られ，貯留量と流出量の関係式に攪乱項を付加すれば，(2) 式の形の出力式（観測式）が得られる。ここで加えられる攪乱項は，関数 f, g に含まれるパラメータの同定誤差も含めた意味でのモデル誤差と解釈する。必ずしもこのような貯水池結合モデルでなくても，状態ベクトルを適当に選ぶことによって，非常に多くの流出モデルがこの形に整理されるので，本章ではこの形の流出モデルを代表的にとりあげる。次章で特に考察する kinematic wave モデルでは，このように有限次元の数ベクトルでその状態を表わすことはできないが（空間座標について離散化して，(1)，(2) 式の型にすることはできる)，以下の議論の基本的考え方は同一である。

次に，気象システムの状態空間型モデルについて考えよう。気象システムの出力である降雨は，前述したようにある時間間隔内の強度の積分値の形で観測される。このような積分形式の観測によるフィルタリング

は理論的に困難な点を含んでいるので，本論文では，気象システムは離散時間で考えて，次のようにモデル化されるものとする。

$$S_{k+1}=\phi(t_k, S_k)+\alpha_k,\ k=0, 1, \cdots\cdots \quad (5)$$

$$r(t)=r_{k+1}=\psi(t_k, S_{k+1})+\beta_k,\ k=0, 1,\ldots,\ t_k<t\leq t_{k+1} \cdots\cdots \quad (6)$$

ただし，$t_0<t_1<\cdots$ は (1)，(2) 式中のそれと共通の時刻の系列，S_k は期間 $t_{k-1}<t\leqq t_k$ での気象システムの有限次 (P 次) 状態ベクトル，$r(t)$ は (1) 式中のそれと同じ降雨強度, ϕ は p 次ベクトル値の, ψ はスカラー値の既知関数，$\{\alpha_k, k=0, 1,\cdots\}$ は S_0 とは独立な

$$\alpha_k\sim N(0, \wedge_k),\ E[\alpha_k\alpha_j^T]=0(k\neq j) \cdots\cdots \quad (7)$$

($\wedge_k$ は既知) である p 次の白色正規確率ベクトル系列，$\{\beta_k, k=0, 1,\cdots\}$ は $\{\alpha_k, k=0, 1,\cdots\}$ とは独立な

$$\beta_k\sim N(0, P_k),\ E[\beta_k\beta_j^T]=0\ (k\neq j) \cdots\cdots \quad (8)$$

(P_k は既知) である白色正規確率変数系列とする。このような形の気象システムモデルとしては，たとえば，自己回帰モデルがある。あるいは，筆者らが用いた次のようなランダムウォークモデルもこの型である[4]。

$$S_{k+1}=S_k+\alpha_k,\ r(t)=r_{k+1}=S_{k+1}+\beta_k,\ t_k<t\leqq t_{k+1}$$

さて, (6) 式は, 時刻 t_k から時刻 t_{k+1} までの間は降雨強度を一定とすることを意味しており, 全体として降雨強度の時間変動は階段状であると仮定することになっている。これに応じて，時刻 t_k から時刻 t_{k+1} までの間の降雨にする情報は, 実際にはその間の強度の積分値の形で入手されるのであるが，これを時間間隔 $(t_{k+1}-t_k)$ で割った降雨強度 r_{k+1} の形で時刻 t_{k+1} に入手されるとみなすことにする。また, 以後の記述を容易にするため, 時刻 t の気象システムの状態ベクトルを $S(t)$ と表わすことにする。そうすると, 仮定により,

$$t_{k+1}<t\leqq t_k \text{ で } S(t)=S_k,\ k=0, 1, \cdots\cdots \quad (9)$$

である (不等号に注意)。

このようなモデル構成では，気象・流出システムの状態ベクトルの推移と観測の様子は次のようである (**Fig. 1** 参照。同図では簡単のため気象システム，流出システムの状態量をスカラーと仮定している)。まず，気象・流出システムの初期状態ベクトル $S(t_0)$, $h(t_0)$ が与えられているとしよう。そうすると，気象システムの状態ベクトルは，時刻 t_0 から時刻 t_0+(時刻 t_0 より無限小時間後) の間に，(5) 式にしたがって $S(t_0)=S_0$ から $S(t_0+)=S_1$ に推移する。そして，$t_0<t\leqq t_1$ での降雨強度 $r(t)=r_1$ が, (6) 式にしたがって発生させられる。この時点では r_1 は確率変量である。流出システムの状態ベクトルは，$h(t_0)$ を初期値，降雨強度 $r(t)=r_1$ を入力とし, 攪乱項 $v(t)$ の刺激を受けつつ, (1) 式にしたがって推移する。時刻 t_1 になると r_1 の値が観測される。(9) 式より，$S(t_1)=S(t_0+)=S_1$ であるから，この観測は $S(t_1)$ に関する１つの情報を与える。また，時刻 t_1 には，$h(t_1)$ から (2) 式によって流量 $Q(t_1)$ が発生させられ，かつ直ちに観測されて $h(t_1)$ に関する１つの情報が与えられる。以後同様にして，$S(t_1)$，$h(t_1)$ から $S(t_2)$，$h(t_2)$

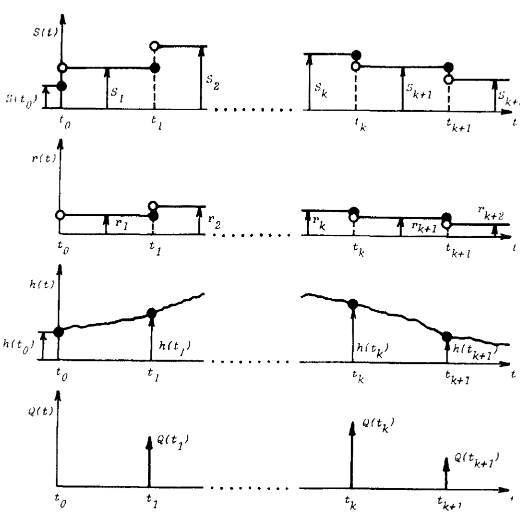

Fig. 1. Change of state variables and outputs.

へと推移していき，各時刻 $t_{k+1}, k=0, 1, \dots$ で r_{k+1}, $y(t_{k+1})$ が観測されて，言いかえると，$S(t_{k+1}), h(t_{k+1})$ に関する情報が得られていく。

以下の2つの節で，このようにして推移していく気象・流出システムのフィルタリング・予測について考察する。

以後の記述を容易にするために，時刻 t までの観測情報の集合を $Y(t)$ と表わす。仮定により，

$$\left.\begin{array}{l} t \leqslant t_0 \text{ では } Y(t)=\phi \\ t_k \leqslant t < t_{k+1} (k>0) \text{ では } Y(t)=\{r_1, Q(t_1), \dots, r_k, Q(t_k)\} \end{array}\right\} \cdots\cdots (10)$$

である。

2.3 気象・流出システムの予測

予測を考える場合には，全体システムを考える必要があるので，全体システムの時刻 t での状態ベクトル $X(t)$ を次のように定めよう。

$$X(t)=\begin{bmatrix} h(t) \\ S(t) \end{bmatrix}, \ t \geqslant t_k \cdots\cdots (1)$$

ただし，$h(t)$ は流出システムの状態ベクトルで n 次，$S(t)$ は気象システムの状態ベクトルで p 次である。よって，$X(t)$ は $n+p$ 次の列ベクトルである。t_k は現在時刻である。

そうすると，$X(t)$ の動的推移の仕方は次の2通りの場合で異なる。

まず，1つは時刻 $t_l (l \geqslant k)$ から時刻 t_l+ へ不連続な飛びをもって推移する場合で（**Fig. 1** 参照），(1) 式による $X(t)$ の定義と，**2.2** 節の (5) 式より，$X(t_l)$ から $X(t_l+)$ への推移式は

$$X(t_l+)=\begin{bmatrix} h(t_l) \\ \phi(t_l, S(t_l)) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_l \end{bmatrix} \cdots\cdots (2)$$

と表わされる（0 は n 次）。

もう1つは，$t_l < t \leqslant t_{l+1}$ の形に表わされる期間で連続的に推移する部分で，推移式は，(1) 式と，**2.2** 節の (1) 式より，

$$dX(t)/dt=\begin{bmatrix} f(t, h(t), r(t)) \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \ t_l < t \leqslant t_{l+1} \cdots\cdots (3)$$

と表わされる（0 は p 次）。

$X(t_l)(t_l > t_k)$ の予測ができれば，**2.2** 節の (2) 式によって，$Q(t_l)$ の予測ができる。よって，まず $X(t)$ $(t > t_k)$ の予測，すなわち条件つき確率分布 $\Psi(X(t) | Y(t_k))$（$Y(t_k)$）は，**2.2** 節 (10) 式で定めた時刻 t_k までの観測情報の集合）を求めることを考える。とは言っても，状態ベクトル $X(t)$ の推移式 (2)，(3) が，状態ベクトル $X(t)$ に関して線形である場合を除いて，この条件つき確率分布を厳密に求めることは不可能である。よって，以下，"局所的な線形化" によって状態ベクトル $X(t)$ の推移式を線形式で近似し，条件つき確率分布が近似的に正規分布であるとみなして，条件つき期待値ベクトル $\hat{X}(t | Y(t_k))$，条件つき共分散行列 $P_X(t | Y(t_k))$ を求めていくことにする。

まず，$\hat{X}(t_k | Y(t_k)), P_X(t_k | Y(t_k))$ が与えられる必要があるが，これは次節で述べるフィルタリングによって得られる $\hat{h}(t_k | Y(t_k)), P_h(t_k | Y(t_k)), \hat{S}(t_k | Y(t_k)), P_S(t_k | Y(t_k))$ を用いて，

$$\left.\begin{array}{l} \hat{X}(t_k | Y(t_k))=\begin{bmatrix} \hat{h}(t_k | Y(t_k)) \\ \hat{S}(t_k | Y(t_k)) \end{bmatrix}, \\ P_X(t_k | Y(t_k))=\begin{bmatrix} P_S(t_k | Y(t_k)) & 0 \\ 0^T & P_s(t_k | Y(t_k)) \end{bmatrix} \end{array}\right. \cdots\cdots (4)$$

として求められる。ただし，$P_{hs}(t_k | Y(t_k))$ を $0 (n \times p$ 次) とできる理由は次節で述べる。

さて，まず，(2) 式で表わされる離散的な推移をする部分で，$X(t)$ の条件つき期待値ベクトル，共分散行列がどのように推移するかを考えよう。(2) 式は，付録 [1] の (4) 式の形の推移式であるから，そこでの議論を適用することによって，$\hat{X}(t_l | Y(t_k))$，$P_X(t_l | Y(t_k))$ から，$\hat{X}(t_l+ | Y(t_k))$ $P_X(t_l+ | Y(t_k))$ を求めることができる。ただし，参考値 X^* としては，$X^*=\hat{X}(t_l | Y(t_k))$ を用いる。

次に，(4) 式で表わされる連続的な推移をする部分で，$X(t)$ の条件つき期待値ベクトル・共分散行列がどのように推移するか考えよう。(3) 式右辺に $r(t)$ が含まれているので，状態ベクトルを拡張して，$L(t)$ を

$$L(t)=\begin{bmatrix} X(t) \\ r(t) \end{bmatrix},\ t_l<t\leqslant t_{l+1} \cdots\cdots (5)$$

と定義する。そうすると，

$$L(t_l+)=\begin{bmatrix} X(t_l+) \\ \psi(t_l, S(t_l+)) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \beta_l \end{bmatrix}$$

という関係式が成立つ。これは，付録［1］の (4) 式と同形の式であるから，そこでの議論を適用して，$\hat{X}(t_l+|Y(t_k))$, $P_X(t_l+|Y(t_k))$ から，$\hat{L}(t_l+|Y(t_k))$, $P_L(t_l+|Y(t_k))$ を求めることができる。ただし，参考値としては，$\hat{X}(t_l+|Y(t_k))$ をとるものとする。$r(t)$ は $t_l<t\leq t_{l+1}$ で一定値をとることに注意して，(5) 式を用いて，(3) 式をかきなおすと，

$$dL(t)/dt=\begin{bmatrix} f(t, h(t), r(t)) \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v(t) \\ 0 \end{bmatrix},\ t_l<t\leqslant t_{l+1} \cdots\cdots (6)$$

となる。ただし，0は $p+1$ 次の零ベクトルである。右辺第1項は t と $L(t)$ とだけの関数になっていることに注意すると，この式は付録［3］の (9) 式と同形であるから，そこでの議論を適用して，$\hat{L}(t_l+|Y(t_k))$, $P_L(t_l+|Y(t_k))$ から，$\hat{L}(t_{l+1}|Y(t_k))$, $P_L(t_{l+1}|Y(t_k))$ が求められる。(5) 式による $L(t)$ の定義に注意すると，$\hat{X}(t_{l+1}|Y(t_k))$, $P_X(t_{l+1}|Y(t_k))$ は，求められた $\hat{L}(t_{l+1}|Y(t_k))$, $P_L(t_{l+1}|Y(t_k))$ の1部であることがわかる。

結局，(4) 式で与える $\hat{X}(t_k|Y(t_k))$, $P_X(t_k|Y(t_k))$ から初めることにして，$l=k, k+1, \ldots$ について，

$$\{\hat{X}(t_l|Y(t_k)), P_X(t_l|Y(t_k))\}\longrightarrow\{\hat{X}(t_l+|Y(t_k)), P_X(t_l+|Y(t_k))\}$$
$$\longrightarrow\{\hat{L}(t_l+|Y(t_k)), P_L(t_l+|Y(t_k))\}\longrightarrow\{\hat{L}(t_{l+1}|Y(t_k)), P_L(t_{l+1}|Y(t_k))\}$$
$$\longrightarrow\{\hat{X}(t_{l+1}|Y(t_k)), P_X(t_{l+1}|Y(t_k))\}$$

という順序で $\hat{X}(t_{l+1}|Y(t_k))$, $P_X(t_{l+1}Y(t_k))$ が求められる。$\hat{h}(t_{l+1}|Y(t_k))$, $P_h(t_{l+1}|Y(t_k))$ は $\hat{X}(t_{l+1}|Y(t_k))$, $P_X(t_{l+1}|Y(t_k))$ の1部として求められる。出力流量 $Q(t_{l+1})$ は，**2.2** 節の (2) 式より，$Q(t_{l+1})=g(t_{l+1}, h(t_{l+1}))+w_{l+1}$ と表わされ，これは付録［1］の (4) 式と同形であるから，そこでの議論を適用することにより，$\hat{Q}(t_{l+1}|Y(t_k))$, $P_Q(t_{l+1}|Y(t_k))$ が求まる。

2.4 気象・流出システムのフィルタリング

将来をよりよく予測するには，現在の状態をよりよく知ること，すなわちフィルタリングが必要である。本節では，**2.2** 節でモデル化された気象・流出システムのフィルタリングを考察する。

まず，気象・流出システムの初期状態 $S(t_0)$, $h(t_0)$ の確率分布は正規分布とし，それらの平均値と共分散行列はそれぞれ $\hat{S}(t_0|Y(t_0))$, $P_S(t_0|Y(t_0))$, $\hat{h}(t_0|Y(t_0))$, $P_h(t_0|Y(t_0))$ と与えられているものとする。そして，$S(t_0)|Y(t_0)$ と $h(t_0)|Y(t_0)$ とは無相関，すなわち，$P_{hs}(t_0|Y(t_0))$ は $n\times p$ 次の零行列であると仮定する。ただし，これは $S(t_0)$ と $h(t_0)$ が無関係であると仮定するものではなく，ただその条件つき期待値ベクトル $\hat{S}(t_0|Y(t_0))$, $\hat{h}(t_0|Y(t_0))$ からの偏差が無相関であると仮定するに過ぎない。

さて，以下，帰納法的に議論することにして，ある $t_k(k\geqslant 0)$ で，$\hat{S}(t_k|Y(t_k))$, $P_S(t_k|Y(t_k))$, $\hat{h}(t_k|Y(t_k))$, $P_h(t_k|Y(t_k))$が求められていて，$P_{hs}(t_k|Y(t_k))=0$ ($n\times p$ 次) であると仮定しよう。

気象システムの状態ベクトルは，**2.2** 節の (5) 式にしたがって，時刻 t_k から時刻 t_k+へ進む間に，$S(t_k)=S_k$ から $S(t_k+)=S_{k+1}$ へ推移する。これに対応して，$\hat{S}(t_k|Y(t_k))$, $P_S(t_k|Y(t_k))$ から $\hat{S}(t_k+|Y(t_k))$, $P_S(t_k+|Y(t_k))$ が求められる（これは，前節で述べた $\hat{X}(t_l+|Y(t_k))$, $P_X(t_l+|Y(t_k))$ で $l=k$ とおいたものの一部である)。S_{k+1} に対応して，**2.2** 節の (6) 式によって，期間 $t_k<t\leqslant t_{k+1}$ での降雨強度 $r(t)=r_{k+1}$ が発生させられる。これは時刻 t_{k+1} に観測される。すなわち，$S(t_{k+1})|Y(t_k)$ を

$$r_{k+1}=\psi(t_k, S(t_{k+1}))+\beta_k$$

によって観測することになる。これは，付録の (4) 式の形の式であるから，付録の［4］で述べる拡張

Kalman フィルターまたは反復拡張 Kalman フィルターを適用して，$\hat{S}(t_{k+1}|Y(t_k),\ r_{k+1})$，$P_S(t_{k+1}|Y(t_k),\ r_{k+1})$ を求めることができる。r_{k+1} を知った段階では，流量情報 $Q(t_{k+1})$ は気象システムの状態ベクトル $S(t_{k+1})$ の推定に何の役にも立たないことに注意すると，$\hat{S}(t_{k+1}|Y(t_k),r_{k+1})$, $P_S(t_{k+1}|Y(t_k),r_{k+1})$ はそれぞれ $\hat{S}(t_{k+1}|Y(t_{k+1}))$, $P_S(t_{k+1}|Y(t_{k+1}))$ に等しい。一方，流出システムは，降雨強度 r_{k+1} を入力として推移するのであるが，r_{k+1} の値を知ってから流出システムの状態ベクトルの推移を考察することにしよう。そうすると，明らかに

$$\hat{h}(t_k|Y(t_k),r_{k+1})=\hat{h}(t_k|Y(t_k))$$

$$P_h(t_k|Y(t_k),r_{k+1})=P_h(t_k|Y(t_k))$$

である。**2.2** 節の（1）式で与えられる $h(t)$ の推移式において，$t_k<t\leqslant t_{k+1}$ での降雨強度 $r(t)=r_{k+1}$ は，今の場合既知であるから，付録の［3］の議論が適用できて，$\hat{h}(t_{k+1}|Y(t_k),r_{k+1})$, $P_h(t_{k+1}|Y(t_k),r_{k+1})$ を求めることができる。流量情報 $Q(t_{k+1})$ は，$h(t_{k+1})|\{Y(t_k),r_{k+1}\}$ を

$$Q(t_{k+1})=g(t_{k+1},h(t_{k+1}))+w_{k+1}$$

によって観測したものと考えられる。これは付録の（4）式の形の式であるから，付録の［4］で述べる拡張 Kalman フィルター，または反復拡張 Kalman フィルターを用いて，$\hat{h}(t_{k+1}|Y(t_k),r_{k+1},Q(t_{k+1}))=h(t_{k+1}|Y(t_{k+1}))$, $P_h(t_{k+1}|Y(t_k),r_{k+1},Q(t_{k+1}))=P_h(t_{k+1}|Y(t_{k+1}))$ を求めることができる。**2.2** 節でも注意したように，流出システムが気象システムと相関をもつのは降雨強度を通してのみであって，上述の議論のように降雨強度が既知となった段階では相関は生じない。よって，$P_{hs}(t_k|Y(t_k))$ が 0 であることにより $P_{hs}(t_{k+1}|Y(t_{k+1}))$ も 0 となる。

以上により，$\hat{S}(t_k|Y(t_k))$, $P_S(t_k|Y(t_k))$, $\hat{h}(t_k|Y(t_k))$, $P_h(t_k|Y(t_k))$, $k=0,\ 1,\dots$ が時々刻々求められること，および $P_{hs}(t_k|Y(t_k))$ が $0(n\times p$ 次）であることが示された。

2.5 結　　論

本章では，**2.2** 節で述べたような気象・流出システムの状態空間型のモデルに対し，**2.3** 節で予測理論，**2.4** 節でフィルタリング理論を適用して，即時的な流出予測方式を構成した。

このような流出予測方式を数値シミュレーションによって具体的に説明したものとしては文献 1）がある。ただし，そこでは全体システムの状態ベクトルの推移を予測する際に，不連続な推移をする部分に 2 次項までとった予測式を用いている。

以上の議論では，攪乱項の統計的パラメータ，特に共分散行列を既知としているが，実際には，これは何らかの方法で決定ないし推定すべきものである。筆者らは，観測データから，これを逐次的に求めていく方法を考察したが紙数の都合でここでは触れない。この方法の概要は文献 4）で述べている。文献 4）では，この統計的パラメータの推定方法を用いて，実流域での流出予測を試みている。

3. 確率過程的 kinematic wave モデルによる流出予測

3.1 序　　論

kinematic wave モデルは，雨水流の物理的構造を考慮した優れた流出モデルの 1 つであるが，ある初期時刻の水深分布と降雨入力を確定すると，その後の水深分布，流出流量も確定するという意味で，“決定論的” モデルである。しかし，実際の降雨―流出現象をこのような “決定論的” モデルで完全に記述することはできず，何らかの誤差が介在するものと考えるべきである。本章では，そのような誤差を複償する攪乱項を導入した “確率過程的” kinematic wave モデルを提案し，その流出予測への適用の基礎理論を提供する。

本章で提案する “確率過程的” kinematic wave モデルは，その状態量が有限次の数ベクトルでは表わされないという点で前章で扱った流出システムモデルとは異る型のモデルであるが，気象システムとの関連や，流出予測の全体的な枠組みについては前章と同様に考えてよい。すなわち，降雨強度を知った後で流出システムのフィルタリングをすることによって気象システムと流出システムのフィルタリングはその相関を考えることなく個別にできること，また，予測においては，気象システムの状態ベクトルと流出システムの状態

量とを結合した状態量を考える必要があり，その推移を不連続に推移する時刻と連続的に推移する期間に分けて考えること，連続的に推移する部分では降雨強度も状態量に追加すること等は全く同様に考える。よって，本章では，流出システムモデルとして“確率過程的” kinematic wave モデルを用いるときに生じる特有の問題についてだけ議論する。

3.2 “確率過程的” kinematic wave モデル

本論文で提案する“確率過程的” kinematic wave モデルとは，次の諸式で記述されるモデルである。

$$\partial h/\partial t+\partial q/\partial x=r(t)+v(t),\ t\geqslant t_0,\ 0\leqslant x\leqslant 1 \qquad (1)$$

$$q=\alpha h^m \qquad (2)$$

$$h(0,\ t)=0,\ t\geqslant t_0 \qquad (3)$$

$$Q(t_{k+1})=\mu Fq(1,\ t_{k+1})+w_{k+1},\ k=0,\ 1,\ldots,\ t_0<t_1< \qquad (4)$$

ただし，空間座標を表わす独立変数 x は無次元化されていて，h, q は位置 x, 時刻 t の関数である。$r(t)$ は降雨強度である。(2) 式は，q と h の関係式であり，(3) 式は境界条件である。空間座標が無次元化されていること，および攪乱項 $v(t)$ が付加されていることを除けば，(1)～(3) 式は，上流端からの流入のない通常の斜面流の kinematic wave モデルの記述式と同じものである。空間座標に関して無次元化されていることに注意すると，$q(1,\ t_{k+1})$ は流出高を表わす。(4) 式は，時刻 t_{k+1} での流出流量 $Q(t_{k+1})$ を表わす式で，$0<\mu\leqslant 1$ は流出率を考慮する定数，F は流域面積，w_{k+1} は攪乱項である。攪乱 $\{v(t),\ t\geqslant t_0\}$ は，初期水深 $\{h(x,\ t_0),\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$ とは独立な白色正規確率変数過程，攪乱 $\{w_{k+1},\ k=0,\ 1,\cdots\}$ は，攪乱 $\{v(t),\ t\geqslant t_0\}$，初期水深 $\{h(x,\ t_0),\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$ とは独立な白色正規確率変数系列であって，次のような統計的パラメータを持つものとする。

$$E[v(t)]=0,\ Var\ [v(t)dt]=Vdt, \qquad (5)$$

$$E[w_{k+1}]=0,\ Var[w_{k+1}]=W_{k+1} \qquad (6)$$

また，初期水深 $\{h(x,\ t_0),\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$ も正規分布をなすとし，

$$E[h(x,\ t_0)]=\bar{h}_0(x),\ Cov[h(x,\ t_0),\ h(y,\ t_0)]=\Sigma(x,\ y) \qquad (7)$$

なる期待値，共分散をもつとする。

このような“確率過程的” kinematic wave モデルの時刻 t での状態量はその水深 $\{h(x,\ t),\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$ であって，これは有限次の数ベクトルではないから，前章でとりあげた流出システムモデルとは異なるタイプのモデルである。

とは言っても，空間座標について離散化して，若干の近似によって，前章で取りあげた形のモデルに変形することはできる。実際，自然数 N を適当にとって，$\Delta x=1/N$とおき，$i=1,\ldots,N$ について

$$h_i(t)=\frac{1}{\Delta x}\int_{(i-1)\Delta x}^{i\Delta x}h(x,\ t)dx$$

とおくと，(1) 式を x について $(i-1)\Delta x$ より $i\Delta x$ まで積分して Δx で割ることにより，

$$dh_i(t)/dt=r(t)+\frac{q((i-1)\Delta x,\ t)-q(i\Delta x,\ t)}{\Delta x}+v(t)$$

を得る。よって，$i=1,\cdots,N$ について

$$q(i\Delta x,\ t)=\alpha h(i\Delta x,\ t)^m\fallingdotseq\alpha h_i(t)^m$$

と近似することにより，(1)～(4) 式は

$$dh_1(t)=r(t)-\frac{\alpha}{\Delta x}h_1(t)^m+v(t),$$

$$dh_i(t)=r(t)+\frac{\alpha}{\Delta x}\{h_{i-1}(t)^m-h_i(t)^m\}+v(t),\ i=2,\ldots,\ N$$

$$Q(t_{k+1})=\mu F\cdot\alpha h_N(t_{k+1})^m+w_{k+1}$$

と変形される。これは，状態量が $(h_1(t),\ldots,\ h_N(t))$ で与えられるモデルであって，前章で扱った形のモデルである。

しかしながら，本章ではこのような離散化モデルを用いず，(1)～(4) 式の形の式を直接取り扱って，そのフィルタリングと予測の諸式を導く。これによると，簡単な条件のもとでは，それらの諸式（実は偏微分方程式になる）を解析的に解くことができ，"確率過程的" knematic wave モデルの特性を理論的に検討できるという利点もある。

以下，前章と同じ型の気象システムモデル，すなわち **2.2** (5)，(6) 式のような気象システムモデルを仮定して議論する。

3.3 水深・流出流量の予測

本節では，現在時刻までの観測情報 Y をもとに将来時刻の水深・流出流量を予測する諸式を誘導する。全ての確率変量は，Y が与えられたときの条件つき確率分布のもとで考察することにしていちいち断らない。たとえば，水深の期待値，共分散を

$$h(x,\ t)=E[h(x,\ t)]$$

$$P(x,\ y,\ t)=Var[h(x,\ t),h(y,\ t)]$$

とかくが，詳しくは，右辺はそれぞれ $E[h(x,t)\,|\,Y]$, $Var[h(x,t),h(y,t)\,|\,Y]$ である。

（1） 確定降雨の場合

本項では，期間 $t_k<t\leqq t_{k+1}$ での降雨強度 $r(t)$ が確定している場合に，この間の水深の期待値・共分散の推移式を導く。結論を先に言うと，これらの推移式は偏微分方程式になるので，時刻 t_k での水深の期待値 $\hat{h}(x,t_k)$, 共分散 $P(x,y,t_k)$ を初期条件として与え，後述する境界条件のもとにその偏微分方程式を $t=t_{k+1}$ まで積分すれば $\hat{h}(x,t_{k+1})$, $P(x,\ y,\ t_{k+1})$ が求められる。降雨強度が確定していると考えることができるのは，たとえば，時刻 t_{k+1} になって，期間 $t_k<t\leqq t_{k+1}$ の降雨強度が既知となった場合に水深の（流量 $Q(t_{k+1})$ を観測する前の）事前確率分布を求める場合である。前章では，この場合はフィルタリングの節で取り上げたが，本章では，次項の不確定降雨の場合の導入という意味もあって，先行して本節で述べておく。

3.1 節 (2) 式で $m>1$ であると，水深の確率分布の推移式を厳密に求めることは容易ではないので，水深に対してある参考関数を定め，その回りに **3.1** 節 (2) 式を線形化して議論を展開する。すなわち，まず，初期・境界値問題

$$\frac{\partial h^*}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\{\alpha h^{*m}\}=r(t),\ h^*(0,\ t)=0,\ t_k<t\leqq t_{k+1},\ h^*(x,\ t_k)=\hat{h}(x,\ t_k),\ 0\leqq x\leqq 1 \cdots\cdots(1)$$

を満たす参考関数 $h^*(x,t)$ をとり，$q=\alpha h^m$ をこの参考関数の回りに線形化することによって，$h(x,t)$ の推移式である **3.2** 節 (1) 式を

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\{C(x,\ t)\ (h-h^*)+\alpha h^{*m}\}=r(t)+v(t) \cdots\cdots(2)$$

と近似する。ただし，

$$C(x,\ t)=\alpha m\{h^*(x,\ t)\}^{m-1} \cdots\cdots(3)$$

とおいた。(2) 式より (1) の第1式を引き，$e(x,t)=h(x,t)-h^*(x,t)$ とおくと，e に関する偏微分方程式と境界条件

$$\frac{\partial e}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\{C(x,\ t)e\}=v(t),\ e(0,\ t)=0 \cdots\cdots(4)$$

を得る。(4) 式で期待値をとると，**3.2** 節 (5) の第1式より

$$\frac{\partial \hat{e}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\{C(x,\ t)\hat{e}\}=0,\ \hat{e}(0,\ t)=0$$

が得られ，$\hat{e}(x,t_k)=\hat{h}(x,t_k)-h^*(x,t_k)=0$ であることを考慮すると，$t_k\leqq t\leqq t_{k+1}$ で $\hat{e}(x,t)=0$ が得られる。すなわち，$h^*(x,t)=\hat{h}(x,t)$ である。言いかえると，(1) 式は水深の期待値 $\hat{h}(x,t)$ の推移式である。また，$e(x,t)$ はこの期待値からの偏差を表わす。

偏微分方程式 (4) の解は，特性基礎曲線 $dx/dt=C(x,t)$ 上で，$de/dt=v(t)-e\partial C/\partial x$ として求められる。よって，時刻 t に位置 x を通る特性基礎曲線の時刻 τ における位置を ξ として，これが $\xi=f(\tau,t,x)$ と表

れされるとすると，(4) 式の解は

$$e(x,t)=\left\{e(f(t_k,t,x),t_k)+\int_{t_k}^{t}v(\tau)\exp\left[\int_{t_k}^{t}C_x(f(s,t,x),s)ds\right]d\tau\right\}$$
$$\times\exp\left[-\int_{t_k}^{t}C_x(f(\tau,t,x),\tau)d\tau\right]\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

と表わされる。ただし，$C_x(\xi,\eta)$ は関数 $C(x,t)$ を x で偏微分して x,t に ξ,η を代入したものである。これより，

$$E[v(t)e(x,t)]=\frac{1}{2}V\quad\cdots\cdots(6)$$

を得る。一方，$e(x,t)$ が期待値からの偏差を表わすことに注意すると，$P(x,y,t)=E[e(x,t)e(y,t)]$ であるから，(4) 式を用いて，

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,y,t)=E\left[e(y,t)\frac{\partial}{\partial t}e(x,t)+e(x,t)\frac{\partial}{\partial t}e(y,t)\right]$$
$$=E[v(t)e(y,t)]+E[v(t)e(x,t)]$$
$$-E\left[\frac{\partial}{\partial x}\{C(x,t)e(x,t)e(y,t)\}\right]-E\left[\frac{\partial}{\partial y}\{C(y,t)e(x,t)e(y,t)\}\right]$$
$$\cdots\cdots(7)$$

となり，(6) 式を用いて整理すると

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,y,t)+\frac{\partial}{\partial x}\{C(x,t)P(x,y,t)\}+\frac{\partial}{\partial y}\{C(y,t)P(x,y,t)\}=V\cdots\cdots(8)$$

を得る。これが水深の共分散 $P(x,y,t)$ のしたがう偏微分方程式である。境界条件は，(4) の第 2 式より，

$$P(0,y,t)=P(x,0,t)=,\ 0\leq x,\ y\leqslant 1.\quad\cdots\cdots(9)$$

で与えられる。

（2） 不確定降雨の場合

本項では，期間 $t_k<t\leqslant t_{k+1}$ での降雨強度 $r(t)$ が，この間では一定値 r_{k+1} をとるがその値は不確定であって，

$$E[r_{k+1}]=\hat{r}_{k+1},\ Var\ [r_{k+1}]=R_{k+1}\quad\cdots\cdots(10)$$

なる統計的パラメータをもつ場合を考える。r_{k+1} の $\hat{r}_{k+1}$ からの偏差は $h(x,t_k)$ の $\hat{h}(x,t_k)$ からの偏差とは独立であると仮定する。このような仮定は，前章で流出システムの予測を論じた場合の設定と同等のものである。前章で議論したように，このような期間 $t_k<t\leqslant t_{k+1}$ では，状態量としては，水深 $h(x,t)$, 降雨強度 $r(t)$, 気象システムの状態ベクトル $S(t)$ を考える必要がある。よって，本項では，水深の期待値 $\hat{h}(x,t)$,共分散 $P(x,y,t)$ だけでなく，降雨と水深との共分散 $P_r(x,t)=Cov[r(t),h(x,t)]$, 気象システムの状態ベクトルと水深の共分散 $P_S(x,t)=Cov[S(t),h(x,t)]$（列ベクトル）の推移も考えていく（$t_k<t\leqslant t_{k+1}$ で $r(t)$, $S(t)$ は一定であるから，$r(t)$, $S(t)$ の期待値，共分散は一定値のままである。

今度は，参考値関数 $h^*(x,t)$ としては，前項 (1) 式で $r(t)$ を $\hat{r}_{k+1}$ でおきかえた初期・境界値問題の解をとる。そうすると，$h(x,t)$ の推移の近似式 (2)，$c(x,t)$ の定義式 (3) はそのままでよい。(4) 式は，今度は，

$$\frac{\partial e}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\{C(x,t)e\}=v(t)+[r(t)-\hat{r}_{k+1}],\ e(0,t)=0\quad\cdots\cdots(11)$$

と変更しなければならない。前項と同じ議論により，これより $\hat{e}(x,t)=0$, $t_k<t\leqslant t_{k+1}$ を得る。すなわち，$\hat{h}(x,t)=h^*(x,t)$ である。

また，(11) 式の解は，前項 (5) 式の右辺で $v(\tau)$ を $v(\tau)+[r(\tau)-\hat{r}_{k+1}]$ に変更して得られることに注意すると，前項 (6) 式は

$$E[\{v(t)+[r(t)-\hat{r}_{k+1}]\}e(x,t)]=\frac{1}{2}V+P_r(x,t).\cdots\cdots(11)$$

と変更しなければならない。よって，前項（7）式で，$v(t)$ を，$v(t)+[r(t)-\bar{r}_{k+1}]$ に変更して上式を用いると，水深の共分散の推移式

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\{C(x,t)P\}+\frac{\partial}{\partial y}\{C(y,t)P\}=V+P_r(x,t)+P_r(y,t). \quad \cdots\cdots(12)$$

を得る。境界条件は，

$$P(0,y,t)=P(x,0,t)=0,\quad 0\leqslant x,y\leqslant 1 \quad \cdots\cdots(13)$$

で与えられる。$P_r(x,t)$, $P_S(x,t)$ の推移式は，その定義と（11）式より，

$$\frac{\partial}{\partial t}P_r(x,t)+\frac{\partial}{\partial x}\{C(x,t)P_r(x,t)\}=R_{k+1} \quad \cdots\cdots(14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P_S(x,t)+\frac{\partial}{\partial x}\{C(x,t)P_S(x,t)\}=0 \quad \cdots\cdots(15)$$

で与えられる。境界条件は

$$P_r(0,t)=0,\quad P_S(0,t)=0 \quad \cdots\cdots(16)$$

で与えられる。

時刻 t_{k+1} での流出流量 $Q(t_{k+1})$ は（4）式で表わされるので，（2）式を用いると，

$$Q(t_{k+1})=\mu F\alpha\{h(1,t_{k+1})\}^m+w_{k+1}$$

と表わされる。これは，付録［1］の（4）式の形の式であるから，そこでの議論を用いると，$\hat{h}(1,t_{k+1})$, $P(1,1,t_{k+1})$ から $Q(t_{k+1})$ の期待値と分散を求めることができる。

時刻 t_k から t_k+ へ不連続に推移する部分に対する理論は，ほぼ前章でのそれと同様にして展開できるので，本論文では省略する。

3.4 水深のフィルタリング

気象システムのフィルタリングについては，**2.4** 節で述べたのと全く同様である。よって，本節では，時刻 t_{k+1} で観測式

$$Q(t_{k+1})=\mu F\alpha\{h(1,t_{k+1})\}^m+w_{k+1} \quad \cdots\cdots(1)$$

による観測値 $Q(t_{k+1})$ が得られた場合の流出システムの状態量＝水深のフィルタリングだけを取りあげる。期間 $t_k<t\leqslant t_{k+1}$ での降雨強度 r_{k+1} が既知となった後では，前節（1）で述べたようにして，$h(x,t_{k+1})$ の事前期待値 $\hat{h}(x,t_{k+1})$, 事前共分散 $P(x,y,t_{k+1})$ を求めることができることに注意しよう。（1）式のかわりに，線形観測式

$$Z_{k+1}=ah(1,t_{k+1})+b+w_{k+1} \quad \cdots\cdots(2)$$

を考えると，付録［4］で述べる Kalman フィルターを適用して，$h(x,t_{k+1})$ の事後期待値 $\hat{h}^+(x,t_{k+1})$, 事後共分散 $P^+(x,y,t_{k+1})$ は

$$k_x=aP(1,x,t_{k+1})/(W+a^2P(1,1,t_{k+1})) \quad \cdots\cdots(3)$$

で定められる利得関数 k_x を用いて

$$\hat{h}^+(x,t_{k+1})=\hat{h}(x,t_{k+1})+k_x(Z_{k+1}-a\hat{h}(1,t_{k+1})-b) \quad \cdots\cdots(4)$$

$$P^+(x,y,t_{k+1})=P(x,y,t_{k+1})-k_xaP(1,y,t_{k+1}) \quad \cdots\cdots(5)$$

として求められる。実際には，観測式は（1）式であるから，参考値 $h^*=h(1,t_{k+1})$ の回りに（1）式を線形化すると，

$$Q(t_{k+1})=(\mu F\alpha mh^{*m-1})\,h(1,t_{k+1})+(1-m)\mu F\alpha h^{*m}+w_{k+1}$$

となり，（2）式と同形になるから，（3）～（5）式の事後期待値，事後共分散の計算式が適用できる（拡張 Kalman フィルター）。こうして得られた事後推定 $\hat{h}^+(1,t_{k+1})$ をあらためて参考値 h^* として上記の過程を反復することも考えられる（反復拡張 Kalman フィルター）。

3.5 結　　論

本章では，“確率過程的” kinematic wave モデルを提案し，その流出予測への適用の基礎理論を述べた。誘導された予測式，すなわち水深の条件つき期待値，条件つき共分散の推移式は偏微分方程式の形をとるの

で，実際問題への適用においてはその数値解法が問題となろう。付録の [5] に1例を示すように，簡単な条件のもとではこれらの偏微分方程式を解析的に解くことが可能であり，“確率過程的” kinematic wave モデルの変換構造を理論的に解析することができるが，本論文では流出予測の枠組みのもとで議論していることもあり，別の機会に詳細に論じたい。

4. 結論と今後の課題

本論文では，互いに関連している2つの課題を扱かった。1つは，気象・流出システムに対しある程度一般的な状態空間型のモデル（詳しくは **2.2** 節）を想定し，それに Kalman 流のフィルタリング・予測理論を適用して流出予測方式を構成することである。得られた流出予測方式は，将来の流出量の期待値と分散を与えるという形のものである。また，時間が経過して新しい観測情報が入手されると，それを一定の方式で処理して古い予測を修正する形になっていて即時的予測方式になっている。もう1つは，流出現象の物理的構造を考慮した優れた流出モデルである kinematic wave モデルに攪乱項を導入して，“確率過程的” kinematic wave モデルとして，前者の流出予測方式と結合させるという課題である。本論文では，水深のフィルタリング・予測式を準線形化によって導いた。導かれた水深の条件つき期待値・共分散の推移式は偏微分方程式の形をとる。

本論文では述べなかったが重要な課題の1つに，モデルの定数，攪乱項の統計的パラメータを決定する問題がある。これはシステム同定の問題であり，日野[5]，Wood ら[6] の研究とともに筆者らの研究[4] が参考になろう。また，本論文では，攪乱項の系列が白色系列をなすと仮定したが，これは，全くランダムな部分を除いてそのモデルが現象の動特性を完全に記述しうると仮定することと本質的に同等である。実際のモデルがこの仮定を満足することはあり得ないから，本論文で述べた予測方式は “最適” ではないことになる。白色の仮定が正しければ，予測流量と観測流量の差の系列も白色性をもつから（厳密には，これは線形モデルの場合に成立つ），この予測残差の系列に持続性が認められるならば，攪乱項にある種の動的構造を与えなければならない。この点に関して更に検討していく予定である。

参 考 文 献

1） 高棹琢馬・椎葉充晴：流出システムのフィルタリングと予測．第16回 自然災害科学総合シンポジウム概要集，pp. 133-136, 1979.

2） Jazwinski, A. H.: Sotochastic process and filtering theory. Academic Press, 1970.

3） Kalman, R. E.: A new approach to linear filtering and prediction problems. Tans. ASME, Ser. D: J. Basic Eng. 83, pp. 95-108.

4） 高棹琢馬・椎葉充晴・乗京正弘・宝　馨・杉岡　篤：流出系のフィルタリングと予測に関する基礎的研究．昭和55年土木学会関西支部年講，1980.

5） Hino, M.: On-line prediction of hydrologic systems. Proceedings of the XVth Conference IAHR, pp. 121-129, 1973.

6） Wood, E. F. and Szöllözi-Nagy, A.: An adaptive algorithm for analyzing short-term structural and parameter change in hydrologic prediction. Water Resources Research, vol. 14, pp. 557-581.

付　　　録

［1］ 期待値ベクトル・共分散行列の推移

互いに無相関な n 次確率ベクトル x と m 次確率ベクトル v があって，これらの期待値ベクトルと共分散行列が次のように与えられているとする。

$$E[x]=\bar{x},\ Var[x]=\Sigma$$

$$E[v]=0,\ Var[v]=V,\ Cov[x,v]=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

このとき，$m\times n$ 次の非確率行列 A, m 次の非確率ベクトル b による x の1次関数 $Ax+b$ と v の和の形

に表わされる確率ベクトル

$$y=Ax+b+v \qquad (2)$$

の期待値ベクトル・共分散行列は次式によって求められる。

$$E[y]=A\bar{x}+b,\ Var[y]=A\Sigma A^T+V \qquad (3)$$

(2) 式にかわって，m 次ベクトル値関数 $f(x)$ によって定められる確率ベクトル

$$y=f(x)+v \qquad (4)$$

の期待値ベクトル・共分散行列を x, v の期待値ベクトル・共分散行列だけから求めることは，(2) 式のように $f(x)$ が1次式である場合を除けば，一般には不可能である。しかし，x がある参考値 x^* の“近傍にある”と仮定すれば，(4) 式を

$$y=[\partial f/\partial x]^*x+\{f(x^*)-[\partial f/\partial x]^*x^*\}+v \qquad (5)$$

と近似することができる。ただし，$[\partial f/\partial x]^*$ は関数 $f(x)$ の x に関する偏微分行列の $x=x^*$ における値である。これは，$A=[\partial f/\partial x]^*, b=f(x^*)-[\partial f/\partial x]^*x^*$ とおけば (2) と同形であるから，(3) 式を適用して，y の近似的な期待値ベクトルと共分散行列を求めることができる。参考値 x^* としては，その意味からして，$x^*=\bar{x}$ ととるのが適当である。

［2］ 線形確率微分方程式の差分化

線形の確率微分方程式

$$dh(t)/dt=F(t)h(t)+b(t)+v(t),\ t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1} \qquad (6)$$

が与えられているとする。ただし，$\{v(t), t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1}\}$ は $h(t_k)$ とは独立であって，$E[v(t)]=0$, $Var[v(t)dt]=V(t)dt$ なる連続白色正規過程とする。(6) 式を解けば，$h(t_k)$ から $h(t_{k+1})$ の推移式が得られる。微分方程式 (6) に対して，初期値問題

$$d\Phi(t,\tau)/dt=F(t)\Phi(t,\tau),\ t\geqslant\tau\geqslant t_k \qquad (7)$$

$$\Phi(\tau,\tau)=I \text{ (単位行列)}$$

の解を $\Phi(t,\tau)$ とすると，$h(t_{k+1})$ は $h(t_k)$ を用いて，

$$h(t_{k+1})=\Phi(t_{k+1},t_k)h(t_k)+b_k+v_k \qquad (8)$$

と表わされる。ただし，b_k は非確率ベクトルで，

$$b_k=\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Phi(t_{k+1},\tau)b(\tau)d\tau$$

として求められ，v_k は $h(t_k)$ とは独立で平均0，共分散行列が，

$$Var[v_k]=\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Phi(t_{k+1},\tau)V(\tau)\Phi(t_{k+1},\tau)^Td\tau$$

で与えられる正規確率ベクトルである。$x=h(t_k), y=h(t_{k+1}), A=\Phi(t_{k+1},t_k), b=b_k, v=v_k$ とおけば，(8) 式は (2) 式と同形であるから，(3) 式を用いて，$h(t_k)$ の期待値ベクトル・共分散行列から，$h(t_{k+1})$ の期待値ベクトル・共分散行列を求めることができる。

［3］ 非線形確率微分方程式の線形化

[2] と同じ条件のもとで，(6) 式にかわって，非線形確率微分方程式（次式の関数 $f(t,h)$ が h の非線形関数）

$$dh(t)/dt=f(t,h(t))+v(t),\ t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1} \qquad (9)$$

を考える。$h(t)$ がある経路 $h^*(t)$（参考経路と呼ばれる）の“近傍を動く”と仮定すると，(9) 式は

$$dh(t)/dt=[\partial f/\partial h]^*h(t)+\{f(t,h^*(t))-[\partial f/\partial h]^*h^*(t)\}+v(t) \qquad (10)$$

と近似できる。ただし，$[\partial f/\partial h]^*$ は関数 $f(t,h)$ の h に関する偏微分行列を $h=h^*(t)$ において評価したものである。参考経路のとり方としては，その意味から，初期値問題

$$dh^*(t)/dt=f(t,h^*(t)),\ h^*(t_k)=E[h(t_k)] \qquad (11)$$

の解をとるのが適切である。$F(t)=[\partial f/\partial h]^*, b(t)=\{f(t,h^*(t))-[\partial f/\partial h]^*h^*(t)\}$ とおけば，(10) 式は(6)

式と同形であるから，[2] の議論を適用して，$h(t_k)$ の期待値ベクトル・共分散行列から，$h(t_{k+1})$ の期待値ベクトル・共分散行列の近似値を求めることができる。

［4］ Kalman フィルター

条件 (1) に加えて，確率ベクトル x, v が正規分布にしたがうと仮定する。このとき，(2) 式のような関係にある確率ベクトル y の実現値が得られたとする。この場合の x の条件つき確率分布は正規分布であって，その条件つき期待値ベクトル $E[x|y]$，条件つき共分散行列 $Var[x|y]$ は，

$$\tilde{y}=y-A\bar{x}-b \quad \cdots\cdots (12)$$

$$K=\Sigma A^T(A\Sigma A^T+V)^{-1} \quad \cdots\cdots (13)$$

で定められる予測残差 $\tilde{y}$, Kalman 利得行列 K を用いて，

$$E[x|y]=\bar{x}+K\tilde{y} \quad \cdots\cdots (14)$$

$$Var[x|y]=(I-KA)\,\Sigma(I-KA)^T+KVK^T \quad \cdots\cdots (15)$$

として求められる。ただし，I は単位行列である。

次に，上述の議論で，(2) 式にかわって，(4) 式の形の式をとる場合を考えよう。x がある参考値 x^* の "近傍にある" と仮定すれば，(4) 式は (5) 式で近似できて (2) 式と同形になるから，上述の議論が適用できる。参考値 x^* としては，その意味から，$x^*=\bar{x}$ とおくのが適切である（拡張 Kalman フィルター）。この場合，(14) 式を適用して得られる条件つき期待値ベクトル $E[x|y]$ の "近似値" をあらためて x^* とすると，さらに良い近似値が得られると期待される。これを反復していくのが反復拡張 Kalman フィルターである。

［5］ 水深の条件つき期待値・共分散の推移——確定降雨の場合

確定降雨の場合，水深の条件つき期待値・共分散の推移式は，**3.3** 節の議論により，

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\{\alpha\hat{h}^m\}=r(t) \quad \cdots\cdots (16)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\{C(x,t)P\}+\frac{\partial}{\partial y}\{C(y,t)P\}=V \quad \cdots\cdots (17)$$

で与えられる。ただし，$\hat{h}(x,t)$ は水深 $h(x,t)$ の条件つき期待値，$P(x,y,t)$ は $h(x,t)$ と $h(y,t)$ の条件つき共分散であって，上式中の関数 $C(x,t)$ は，

$$C(x,t)=\alpha m\{\hat{h}(x,t)\}^{m-1} \quad \cdots\cdots (18)$$

で与えられる。ここでは，次のような簡単な条件のもとで，(16)，(17) の解析的な解を求めておく。すなわち，$t=0$ を初期時刻として，

初期条件：$\hat{h}(x,0)=0,\ P(x,0,0)=P(0,x,0)=0$ ……(19)

境界条件：$\hat{h}(0,t)=0,\ P(0,x,t)=P(x,0,t)=0$ ……(20)

入力条件：$r(t)=r_0=$一定>0 ……(21)

とする。

(16)，(17) 式に対応する特性微分方程式は，それぞれ

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx}{C(x,t)}=\frac{dh}{r(t)},$$

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx}{C(x,t)}=\frac{dy}{C(y,t)}=\frac{dP}{V-P\dfrac{\partial}{\partial x}C(x,t)-P\dfrac{\partial}{\partial y}C(y,t)}$$

で与えられるから，これを条件 (19)，(20)，(21) 式のもとで解くことにより，水深の条件つき期待値は，

$x\geqslant(r_0t)^m\alpha/r_0$ で $\hat{h}(x,t)=r_0t$

$0\leqslant x<(r_0t)^m\alpha/r_0$ で $\hat{h}(x,t)=(r_0x/\alpha)^{1/m}$

として求められ，水深の条件つき共分散は，

$x,\ y>(r_0t)^m\alpha/r_0$ で $P(x,\ y,\ t)=Vt$

$y<(r_0t)^m\alpha/r_0>x$ で $P(x,\ y.\ t)=P(y,\ x,\ t)=(r_0x/\alpha)^{1/m}V/\{r_0(2m-1)\}$

$x,\ y<(r_0t)^m\alpha/r_0$ で $P(x,\ y,\ t)=V\int_{\max\{\xi,\eta\}}^{t}\left\{\frac{\tau-\xi}{t-\xi}\cdot\frac{\tau-\eta}{t-\eta}\right\}^{m-1}d\tau,$

$$\xi=t-(r_0x/\alpha)^{1/m}/r_0,\ \eta=t-(r_0y/\alpha)^{1/m}/r_0$$

として求められる（(x, y, t) 空間内の曲面，$x=(r_0t)^m\alpha/r_0$, $y=(r_0t)^m\alpha/r_0$ を横切るとき $P(x, y, t)$ は不連続に変化する）。特に，水深 $h(x, t)$ の条件つき分散 $P(x, x, t)$ は，上式より，

$x>(r_0t)^m\alpha/r_0$ で $P(x,\ x,\ t)=Vt$

$x<(r_0t)^m\alpha/r_0$ で $P(x,\ x,\ t)=(r_0x/m)^{1/m}V/\{r_0(2m-1)\}$

として求められる。