

# エントロピー的にみた降雨・流出変換特性と そのモデル化

高 棹 琢 馬・池 淵 周 一

## STOCHASTIC ASPECTS ON THE RUNOFF SYSTEM AND MODEL MAKING BASED ON THE CONCEPT OF ENTROPY

By *Takuma* TAKASAO and *Shuichi* IKEBUCHI

### Synopsis

In this paper we put an interpretation based on the maximum entropy for the reason that the distribution of rainfall and river discharge variables is different from hourly to daily or monthly time unit. And then we put an interpretation based on the concept of entropy for the runoff system, in particular relating the runoff system to the scale effect in time and space. Lastly we define the transmission rate of the runoff system with due regard to that it is a lag system and find out the transition probabilities among the runoff states by maximizing the transmission rate under some constraints. Once the probabilities being found out, we may simulate the sequences of river discharge on a basis of those probabilities.

### 1. 序 論

確率水文統計学の内容には大別して、推計学（統計学）的立場によるものと、時系列論（確率過程論）的立場によるものがある。推計学の基本は、母集団と標本（観測値）との関係にある確からしきをもって結びつける標本分布論であるが、周知のようにその基本の大きさが絶対的に小さい点が問題であって、それらの統計量から母集団の母数を推定することは困難である。水文統計学は、まさにこの問題にとりこんできたといっても過言ではない。

ところで、こうした問題に加えて、標本が比較的大きい水文量、たとえば日雨量のひん度特性をみると指数分布にしたがい、月雨量は対数正規分布にしたがうということが経験的によく知られているが、この場合、水文量としては雨量という同位の分布特性でありながら時間単位の取り方によってどうして異なるかという疑問に統計学は何も答えをもたない。もちろん中心極限定理があるが、それとても漸近定理であり、どのくらいの標本数ならどの分布といった具合にはいえない。本研究の第1テーマはこの疑問に答えることであり、その一つの答えとしてある制約下のもとで最大エントロピーをもつ確率分布が指数分布、正規分布、対数正規分布することを導入する。

以上は、降雨あるいは流量個々の系列分布特性であったが、つぎのテーマは両系列を同時に考えた場合、いわゆる確率過程の変換特性である。降雨・流出現象はまさにその代表的なもので、流出システムは時間スケール、面積スケールによって構造変化をする。そのさい、遅れ時間がこのスケール効果の重要な要素となる。すなわち、流域面積が小さいと、遅れ時間は短かく、レスポンスは、より鋭敏、あるいはデタミニスティックになるのに対し、流域面積が大きくなると、遅れ時間は大きくなり、システムは不確実性に満ちてくる。同時に、流量の出現には一種の平滑効果も反映される。ここでは分布特性および時間的従属性両者をもつ確率過程のエントロピー計算法を展開するとともに、降雨系列のエントロピー、流量系列のエントロピーおよび線形変換系のエントロピーの関係からこれら変換が時間スケール、面積スケールの大きさととも

にどのような構造変化をするのかをエントロピー的に解釈する。

第 3 のテーマは、こうした現象のエントロピー的解釈を基礎に、工学的な問題としての長期流出モデル—エントロピーモデルを、状態遷移に関する相互情報量あるいは獲得情報量概念の最大化によって構成し、流況シミュレーション法にまで高めることを試みている。

以上、要するに本研究は、著者らが従来からおこなってきた不確定な水文現象に対するエントロピー概念の積極的な利用をさらに上記 3 つのテーマに導入し、その確率的構造の解明をはかったものである。

## 2. エントロピーの概念構成とその計算法

### 2.1. エントロピーの定義式と諸性質

水文事象  $x$  の生起確率を  $P$  とすれば、 $x$  の実現に関する自己情報量  $I(x)$  は

$$I(x) = -\ln P \dots\dots\dots(2-1)$$

で定義される。いま、確率事象  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  の確率を  $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ ,  $x_i$  から  $x_j$  への遷移確率あるいは条件つき確率を  $P_i(j)$  とすると、 $X$  の情報量の期待値  $H(x)$  は自己情報量の概念を拡張して、

$$H(X) = -\sum_{i,j} P_i P_i(j) \ln P_i(j) \dots\dots\dots(2-2)$$

で表わされる。これは確率事象の中の一つの事象が平均として持っている情報量を意味し、統計力学との類似から、これを情報エントロピーとよぶ。これからつぎのことがいえる。

- i) 確率的構造が一様で、かつ独立な場合ほどエントロピーは大きく、確率的構造が複雑なほどエントロピーは小さい。
- ii) たとえば、分散あるいは平均値が指定された場合、 $\max_{P(x)} H(x)$  を満たす  $P(x)$  は、それぞれ正規分布あるいは指数分布となることが証明できるが、これはわれわれが経験的に知っている水文量の分布特性を理論的に説明できる可能性を示している。これについては次章で展開する。
- iii) 時間特性としては、エントロピーが大きいほどその過程は定常的であり、大数の法則が成立するエルゴード過程に漸近する。

2 つの確率事象  $X$  および  $Y$  を考えると、つぎの 5 種類のエントロピーが基本となる<sup>1)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} H(X) &= -\sum_i P_i \ln P_i, H(Y) = -\sum_j P_j \ln P_j, H(X, Y) = -\sum_{i,j} P(i, j) \ln P(i, j) \\ H_X(Y) &= -\sum_{i,j} P(i, j) \ln P_i(j), H_Y(X) = -\sum_{i,j} P(i, j) \ln P_j(i) \end{aligned} \right\} \dots\dots(2-3)$$

ここに、 $H(X, Y)$  は結合エントロピー、 $H_X(Y)$  および  $H_Y(X)$  は条件つきエントロピーとよばれ、 $P_i = P(x_i)$ ,  $P_j = P(y_j)$  はそれぞれ  $X, Y$  の確率、 $P(i, j) = P(x_i, y_j)$  は  $X, Y$  の同時確率、 $P_i(j) = P(y_j/x_i)$  および  $P_j(i) = P(x_i/y_j)$  は条件つき確率である。

以上は確率分布が離散的に表現される場合であったが、連続的な場合にも、各エントロピーは積分の形で表現でき、(2-3) 式はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} H(X) &= -\int P(x) \ln P(x) dx, H(Y) = -\int P(y) \ln P(y) dy, \\ H(X, Y) &= -\iint P(x, y) \ln P(x, y) dx dy \\ H_X(Y) &= -\iint P(x, y) \ln P_x(y) dx dy, H_Y(X) = -\iint P(x, y) \ln P_y(x) dx dy \end{aligned} \right\} \dots\dots(2-4)$$

で与えられる。

これらのエントロピーの間には、つぎのような関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} H(X) + H(Y) &\geq H(X, Y) = H(X) + H_X(Y) = H(Y) + H_Y(X) \\ H(X) &\geq H_Y(X), H(Y) \geq H_X(Y) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2-5)$$

ここに、等号は  $X$  と  $Y$  が独立な事象の場合にのみ成立する。これらの関係から、つぎのようなことがいえる。

- i) 事象  $X$  と  $Y$  の同時実現のエントロピーは個々の事象のエントロピーの和以上であり、 $X$  (または  $Y$ ) のエントロピーと、 $X$  (または  $Y$ ) がわかっている時の  $Y$  (または  $X$ ) のエントロピーの和に等しい。
- ii)  $Y$  (または  $X$ ) のエントロピーは  $X$  (または  $Y$ ) を知ることによって決して増大しない。
- iii)  $X$  と  $Y$  の相関関係が大きいかほど  $H_X(Y)$  (または  $H_Y(X)$ ) は減少して 0 に近づき、 $H(X, Y)$  は小さくなって  $X$  と  $Y$  の対応関係は決定論的になる。このことは、後に算出する 2 変数正規過程の結合エントロピー ((2-15) 式) からも明らかである。

**2.2. エントロピーの計算法**

ここでは、水文事象の分布および時間的従属性両者の特徴をもった種々のエントロピーについて、その計算法を述べる。

(1) 種々の分布に対するエントロピー

まず、時間的従属性を考えない独立過程に対しては、その分布に関するエントロピーが重要である。

(a) 正規分布のエントロピー

$$H(X) = \ln \sqrt{2\pi e \sigma^2} \dots\dots\dots (2-6)$$

ここに、 $\sigma^2 = \text{Var}(x)$  である。

(b) 対数正規分布のエントロピー

$$H(X) = \ln \sqrt{2\pi e \zeta^2} + \lambda \dots\dots\dots (2-7)$$

ここに、 $\lambda = E(\ln x)$ ,  $\zeta^2 = \text{Var}(\ln x)$  である。

(c) 指数分布のエントロピー

$$H(X) = \ln(e\mu) \dots\dots\dots (2-8)$$

ここに、 $\mu = E(x)$ 。

(d) ガンマ分布のエントロピー

一般的分布として知られているガンマ分布のエントロピーは、その誘導がやや複雑であるが、次式で与えられる。

$$H(X) = -\ln \alpha^{n+1} \Gamma(n+1) - n \Gamma'(n+1) / \Gamma(n+1) + n \ln \alpha + (n+1) \dots\dots\dots (2-9)$$

ここに、 $\alpha, n$  はガンマ分布

$$P(x) = \alpha^{n+1} / \Gamma(n+1) \cdot x^n e^{-\alpha x} \dots\dots\dots (2-10)$$

におけるパラメータであり、 $\Gamma(\cdot)$  はガンマ関数である。また、' は微分を意味する。

(2) マルコフ過程のエントロピー

いま、状態が  $(S_{j1}, S_{j2}, \dots, S_{jm})$  にあるとき、つぎに  $S_i$  が生起する条件つき確率を  $P(S_i / S_{j1}, S_{j2}, \dots, S_{jm})$  とすると、 $S_i$  が生起ることによってわれわれが受け取る情報量は

$$I(S_i / S_{j1}, S_{j2}, \dots, S_{jm}) = -\ln P(S_i / S_{j1}, S_{j2}, \dots, S_{jm})$$

で与えられる。したがって、状態が  $(S_{j1}, S_{j2}, \dots, S_{jm})$  にあるときの単位時間あたりの平均情報量は

$$H(S | S_{j1}, S_{j2}, \dots, S_{jm}) = \sum_i P(S_i / S_{j1}, S_{j2}, \dots, S_{jm}) I(S_i / S_{j1}, S_{j2}, \dots, S_{jm})$$

となり、これをすべての可能な状態にわたって平均をとれば、単位時間あたりの平均情報量が計算できる。これを  $m$  重マルコフ過程  $S$  のエントロピーといい、次式で与えられる<sup>2)</sup>。

$$H(S) = \sum_{S_{jm}} P(S_{j1}, S_{j2}, \dots, S_{jm}) \cdot H(S | S_{j1}, S_{j2}, \dots, S_{jm}) \dots\dots\dots (2-11)$$

ところで、上式を計算する場合、状態間の同時確率および条件つき確率が必要となるが、ここでは  $m$  重マルコフ型エントロピーを  $m+1$  次同時分布のエントロピーと、 $m$  次同時分布のエントロピーの差として求める。

いま、同時確率分布を正規分布と仮定すると、その確率密度関数は次式で与えられる。

$$q(u_1, u_2, \dots, u_m) = \sqrt{\det A_m} / (2\pi)^m e^{-Q/2} = B_m e^{-Q/2} \dots\dots\dots (2-12)$$

ここに、 $Q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} u_i u_j$ ,  $A_m = [a_{ij}]$  は  $u_1, u_2, \dots, u_m$  の分散・共分散行列の逆行列である。したがって、

エントロピーの定義式に (2-12) 式を代入すると,  $m$  次元同時正規分布のエントロピー  $H_m$  は

$$H_m = -\int \dots \int q(u_1, u_2, \dots, u_m) \ln q(u_1, u_2, \dots, u_m) du_1 du_2 \dots du_m \dots \dots \dots (2-13)$$

で与えられる。その誘導は省略するが, いくつかの積分公式を駆使することによって, 上式は最終的に

$$H_m = m/2 - \ln B_m \dots \dots \dots (2-14)$$

となる。ここに,  $B_m = \sqrt{\det A_m / (2\pi)^m}$  である。

たとえば,  $m=2$  に対しては, 上式は,

$$H_2 = 1 + \ln 2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2} \dots \dots \dots (2-15)$$

となる。ここに  $\sigma_1, \sigma_2$  および  $\rho_{12}$  は  $u_1, u_2$  の標準偏差および相関係数である。

一方,  $m$  重マルコフ型エントロピー  $H(m)$  は

$$\begin{aligned} H(m) &= -\int q(u_1, u_2, \dots, u_m) \ln q(u | u_1, u_2, \dots, u_m) du_1 du_2 \dots du_m du \\ &= -\int q(u_1, u_2, \dots, u_m, u) \ln q(u_1, u_2, \dots, u_m, u) du_1 du_2 \dots du_m du \\ &\quad + \int q(u_1, u_2, \dots, u_m) \ln q(u_1, u_2, \dots, u_m) du_1 du_2 \dots du_m \dots \dots \dots (2-16) \end{aligned}$$

となる関係から,  $m$  次元同時確率エントロピー  $H_m$  との間に次式の関係が成立する。

$$H(m) = H_{m+1} - H_m \dots \dots \dots (2-17)$$

さらに, 対数正規分布については, 正規化することにより, (2-16) 式は, 各周辺分布の平均値を等しいとくと, 次式より計算される。

$$H'_m = m/2 - \ln B'_m + m\lambda \dots \dots \dots (2-18)$$

ここに,  $H'_m$  は  $m$  次元同時対数正規分布のエントロピー,  $B'_m = \sqrt{\det A'_m / (2\pi)^m}$ , ( $Q' = \sum_{i,j} b_{ij} \ln u_i \cdot \ln u_j$ ,  $A'_m = [b_{ij}]$ ),  $\lambda$  は対数変換後の平均値である。したがって, 対数正規  $m$  重マルコフ型エントロピーは

$$H'(m) = H'_{m+1} - H'_m \dots \dots \dots (2-19)$$

で与えられる。

他の分布形, とくにわれわれが対象とする水文事象で経験する指数分布の 1 重マルコフ型エントロピーについては 2 変数指数分布にみられるようにベッセル関数を積分の中に含むので, 数値計算にゆだねなければならない。仕意分布であるガンマ分布に関してはもっと複雑とならざるをえない。

### 3. 水文系列の分布特性—そのエントロピー的解釈

#### 3.1. 時間単位と水文系列の分布特性

標本の大きさが比較的大きい水文量, たとえば日雨量の頻度特性をみると指数分布にしたがい, 月雨量は対数正規分布にしたがうことは経験的によく知られている。この場合, 水文量としては雨量という同じ量の分布特性が時間単位のとり方によって, どうして異なるのかという疑問には統計学は何も答えをもたない。なるほど, 中心極限定理が一つの答えを提供しているようであるが, これとてもどのくらいの標本数の和であればどの分布といった具合にはいえない。しかし, 前章 2.1 の諸性質でも述べたように, 平均値一定という制限のもとで最大エントロピーをもつ分布は指数分布であること, および分散一定という制限のもとで最大エントロピーをもつ分布は正規分布であることを考えると, 時間単位のとり方により水文系列の分布特性が異なるという問題に, 情報エントロピーの概念が導入できよう。一方, ある条件のもとでエントロピーが最大になるということは確率的にもっとも起こりやすいことを意味しているのではなからうか。

通常, 日単位以内を対象とする場合, DAD 解析にみられるように, 降雨強度と時間関係はほぼ確定されるようであり, このことより, このようなタイムスケール内では平均値が指定できるのではなからうか。また, 時間が半日または月単位以上になると, このような関係は指定できなく, 分散が指定されるようになるのではなからうか。こうした観点から, 次節では, ある条件のもとで最大エントロピーをもつ確率分布を誘

導しておく。

### 3.2. 与えられた拘束に対して最大エントロピーをもつ分布の導出

(1)  $x$  の分散が指定された場合

$x$  の分散一定, すなわち  $\sigma^2$  を与えられた定数として

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 P(x) dx = \sigma^2 \quad \dots\dots\dots (3-1)$$

なる制限のもとで, 最大エントロピーをもつ確率密度関数  $P(x)$  を求めよう。このとき, 確率の規格化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1 \quad \dots\dots\dots (3-2)$$

も同時に満足されなければならない。変分法による未定係数  $\alpha, \beta$  を導入し,

$$-\int_{-\infty}^{\infty} P(x) \ln P(x) dx + \alpha \int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx + \beta \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 P(x) dx \quad \dots\dots\dots (3-3)$$

の  $P(x)$  に関する変分をとり, これを 0 とおくと,

$$-[1 + \ln P(x)] + \alpha + \beta(x-\mu)^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (3-4)$$

あるいは,

$$P(x) = \exp \{ \alpha - 1 + \beta(x-\mu)^2 \} \quad \dots\dots\dots (3-5)$$

を得る。 $\alpha$  と  $\beta$  を消去するために, この  $P(x)$  を (3-2) 式に代入して積分をおこなうと

$$\exp(\alpha-1) \sqrt{\pi/\beta} = 1 \quad (\beta < 0) \quad \dots\dots\dots (3-6)$$

をうる。この結果を利用して  $P(x)$  の表示から  $\alpha$  を消去し, これを (3-1) 式に代入すると

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 P(x) dx = -1/2\beta \quad \dots\dots\dots (3-7)$$

この結果から, 最終的に,

$$P(x) = 1/\sqrt{2\pi\sigma^2} \cdot \exp [-(x-\mu/\sigma)^2/2] \quad \dots\dots\dots (3-8)$$

が最大エントロピーをもつ確率密度関数であることがわかる<sup>3)</sup>。この分布はまさに正規分布であり, その最大エントロピーは (2-6) 式で与えられる。

(2)  $\ln x$  ( $x > 0$ ) の分散が指定された場合

$x$  が正の値に限られた場合,  $\ln x$  の分散  $\zeta^2$  を与えられた定数として (1) と同様の展開をはかると, 最大エントロピーをもつ確率密度関数  $P(x)$  が

$$P(x) = 1/\sqrt{2\pi\zeta^2} x \cdot \exp [-(\ln x - \lambda/\zeta)^2/2] \quad \dots\dots\dots (3-9)$$

で与えられる。これは対数正規分布であり, その最大エントロピーは同じく (2-7) 式で与えられる。

(3)  $x$  ( $x > 0$ ) の平均値が指定された場合

$x$  が正の値に限られた場合, その平均値  $\mu$  を与えられた定数として最大エントロピーをもつ確率密度関数  $P(x)$  を求めると

$$P(x) = 1/\mu \cdot \exp(-x/\mu) \quad \dots\dots\dots (3-10)$$

が得られる。これは指数分布であり, その最大エントロピーは (2-8) 式で与えられる。

### 3.3. 水文系列の分布特性の適用

前節の理論を水文系列の分布特性に適用するためには, 各時間単位の水文系列が平均値指定なのか, 分散あるいは標準偏差指定なのか, そのいずれの拘束にしたがっているかを評価する必要がある。本研究では, 指定あるいは規定されるという意味をつぎのように解釈し, 本理論の適用をはかった。すなわち,

- 1) 各時間単位それぞれ標本群をいくつかのグループに任意に分割し, その各グループごとに平均値, 分散あるいは標準偏差を算定する。
- 2) ついで, それらの統計量の平均値, 分散あるいは標準偏差を再び求めて, その変動係数を算出する。
- 3) 最後に, 平均値に関する変動係数と, 分散あるいは標準偏差に関する変動係数を比較し, その大小によって平均値が指定されるか, 分散が指定されるかを判断する。

後章ではこうした評価を実際データに適用し、時間単位にともなう水文系列の分布特性を議論する。

4. 降雨・流出変換過程のエントロピー的解釈

不確実さをもつ流出現象は、まさに降雨・流量という二つの確率過程の変換プロセスをいっている。ところで、降雨系列、流量系列を一つの情報源と考えると、それらのエントロピーは 2 章で述べた方法で算定することができる。ここでは両者を結合する変換系のエントロピーを算定する方法を展開し、面積スケール、時間スケールとともに変換系がどのような特性をもつかをエントロピー的に解釈することを考える。

さて、降雨から流量への変換プロセスは、かならずしも線形系とはいいたくない。しかし、日単位以上の長期間の降雨・流出現象を議論する場合、それは線形変換系で近似できよう。したがって、本章では変換系を線形とみなし、その変換のエントロピーを考察する。

4.1. 座標系の変化にもとづくエントロピー変化

一つの確率密度関数  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  において、その確率変数の座標  $x_1, x_2, \dots, x_n$  を新しい座標  $y_1, y_2, \dots, y_n$  に座標変換したとき、エントロピーはどのように変化するかを考える<sup>4)</sup>。

いま、確率密度関数  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  を変数変換して、新しく確率密度関数  $q(y_1, y_2, \dots, y_n)$  を得たとすると、ヤコビアンに関する公式を用いて、次の関係が得られる。

$$q(y_1, y_2, \dots, y_n) = J(x_1, x_2, \dots, x_n / y_1, y_2, \dots, y_n) P(x_1, x_2, \dots, x_n) \dots\dots\dots (4-1)$$

簡単のため、 $x_1, x_2, \dots, x_n$  を  $x, y_1, y_2, \dots, y_n$  を  $y$  と略記すると  $x, y$  のエントロピーは

$$H(x) = - \int P(x) \cdot \ln P(x) dx \dots\dots\dots (4-2)$$

$$H(y) = - \int q(y) \ln q(y) dy \dots\dots\dots (4-3)$$

と書ける。(4-2) 式に (4-1) 式と微小体積の変換式を代入すると、

$$H(y) = - \int J(x/y) P(x) \ln [J(x/y) \cdot P(x)] J(y/x) dx = - \int J(x/y) P(x) \cdot \ln J(x/y) J(y/x) dx \\ - \int J(x/y) P(x) \ln P(x) J(y/x) dx = - \int P(x) \ln [J(x/y)] dx + H(x) \dots\dots\dots (4-4)$$

となる。すなわち、新しいエントロピーはもとのエントロピーから、上記の関数行列式の対数の期待値をひいたものである。

座標変換のうち、とくにつぎの線形変換の場合をとりあげる。

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4-5)$$

このとき、関数行列式  $J(y/x)$  および  $J(x/y)$  は次のようになる。

$$J(y/x) = \begin{vmatrix} \partial y_1 / \partial x_1 & \partial y_1 / \partial x_2 & \dots & \partial y_1 / \partial x_n \\ \partial y_2 / \partial x_1 & \partial y_2 / \partial x_2 & \dots & \partial y_2 / \partial x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial y_n / \partial x_1 & \partial y_n / \partial x_2 & \dots & \partial y_n / \partial x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 1 / J(x/y) \dots\dots\dots (4-6)$$

係数の行列式を  $|a_{ij}|$  と略記すれば

$$J(x/y) = |a_{ij}|^{-1}$$

であるから、(4-4) 式は

$$H(y) = H(x) + \ln |a_{ij}| \dots\dots\dots (4-7)$$

となる。

4.2. 線形フィルターのエントロピー損失

本節では線形フィルターによるエントロピー損失の問題を扱う。さて、時間領域の現象と周波数領域の現象とはフーリエ変換によって結びついているから、当然、時間領域における標準化定理に対して周波数領域に

ついても標本化定理が成立し<sup>5)</sup>、集合のエントロピーは時間標本値で表わしたときも、周波数標本値で表わしたときも同じ値をとる。したがって、ここでは線形フィルターの損失の問題を周波数領域における標本値集合によって考察する。

いま、 $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{TW}, y_{TW}$  を周波数領域内の標本点における入力信号の値とする。 $x$  は実数分、 $y$  は虚数分を表わす。出力信号の値を  $x'_1, y'_1, x'_2, y'_2, \dots, x'_{TW}, y'_{TW}$  とし、またつぎのように表わす。

$$Y(f) = G(f) + jS(f)$$

すると、

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= G(f_1)x_1 - S(f_1)y_1 \\ y'_1 &= S(f_1)x_1 + G(f_1)y_1 \\ &\vdots \\ x'_{TW} &= G(f_{TW})x_{TW} - S(f_{TW})y_{TW} \\ y'_{TW} &= S(f_{TW})x_{TW} + G(f_{TW})y_{TW} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4-8)$$

上式は ' 符号のない座標から、そのある座標への 1 次変換を表わすから、前節 (4-7) 式に応じて、つぎのように書ける。

$$H' = H + \ln \begin{vmatrix} G(f_1) & -S(f_1) & 0 & 0 & \dots \\ S(f_1) & G(f_1) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & G(f_2) & -S(f_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & S(f_2) & G(f_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = H + \sum_{i=1}^{TW} \ln |Y(f_i)|^2 \dots\dots\dots (4-9)$$

もし、 $TW \gg 1$  であれば  $f_i$  の値は密接して等間隔に帯域幅  $W$  にわたっているので、上式右辺の第 2 項は

$$\sum_{i=1}^{TW} \ln |Y(f_i)|^2 = T \sum_{i=1}^{TW} \ln |Y(f_i)|^2 \Delta f \approx T \cdot \int_0^W \ln |Y(f)|^2 df \dots\dots\dots (4-10)$$

したがって、

$$H' = H + T \int_0^W \ln |Y(f)|^2 df \dots\dots\dots (4-11)$$

ここで、帯域幅  $W$  内における入力集合の 1 自由度あたりのエントロピーを  $H_n$ 、出力集合の 1 自由度あたりのエントロピーを  $H'_n$  とおくと、

$$H'_n = H' / 2TW = H_n + 1/W \cdot \int_0^W \ln |Y(f)| df \dots\dots\dots (4-12)$$

エントロピーの差を代表する

$$A = 1/W \cdot \int_0^W \ln |Y(f)| df \dots\dots\dots (4-13)$$

は線形フィルターの伝達特性  $Y(f)$  だけの関数となっている。

### 4.3. 降雨・流出変換過程への適用

いま、上記の理論展開を降雨・流出変換過程に適用すると、 $H'_n$  は流量の 1 自由度あたり、あるいは単位時間あたりのエントロピー  $H(Q)$ 、 $H_n$  は降雨のエントロピー  $H(R)$ 、フィルターの伝達特性  $Y(f)$  は単位図あるいは線形応答関数の周波数表現に相当する。そこで、線形応答関数として、ガンマ分布関数

$$K(t) = \alpha^{n+1} / \Gamma(n+1) \cdot t^n e^{-\alpha t} \dots\dots\dots (4-14)$$

を考え、そのフーリエ変換を (4-13) 式に代入すると、

$$A = (n+1) [1 + \ln \alpha / \sqrt{(2\pi W)^2 + \alpha^2} - \alpha / 2TW \cdot \tan^{-1} 2\pi W / \alpha] \dots\dots\dots (4-15)$$

が得られる。データ間隔を考えると、 $W = \frac{1}{2}$  となり、上式は最終的に

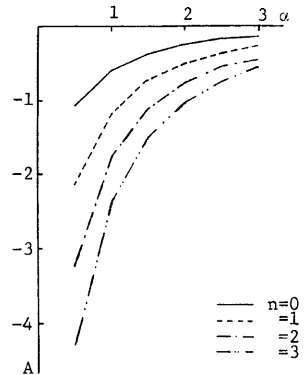


Fig. 1. Relationship between value  $A$  and parameter  $\alpha$  or  $n$ .

$$A = (n+1) \cdot [1 + \ln \alpha / \sqrt{\pi^2 + \alpha^2} - \alpha / \pi \cdot \tan^{-1} \pi / \alpha] \dots\dots\dots (4-16)$$

となる。Fig. 1 は、線形応答関数のパラメータ  $\alpha$ ,  $n$  とエントロピー損失  $A$  との関係を示したものである。流出変換過程における貯留効果を具現する係数  $K (=1/\alpha)$  が大きくなるにつれ、また集中効果を具現する  $n$  が大きくなるにつれ、エントロピー損失  $A$  が大きくなる傾向が示されている。

問題は流出変換過程が時間スケール、面積スケールにともなう、どのように変化するかであって、後章では各スケールにおける降雨系列、流量系列の分布特性および時間従属性両者の特徴をもったエントロピー  $H(R), H(Q)$  を 2.2 で述べた計算法によって求め、その差  $H(Q)-H(R)$  をエントロピー損失  $A$  と結びつけて、流出変換過程をエントロピー的に解釈している。

5. エントロピーモデル—状態遷移確率法

5.1. 相互情報量あるいは獲得情報量

2 章で述べたエントロピーの概念および定義とその諸性質から導かれる最も重要な量に相互情報量あるいは獲得情報量  $R(X, Y)$  がある。相互情報量  $R(X, Y)$  は以下のように定義される。

$$R(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) = H(X) - H_Y(X) = H(Y) - H_X(Y) \dots\dots\dots (5-1)$$

この関係は、サブシステム  $X$  と  $Y$  のエントロピーの和と、 $X$  と  $Y$  の対応関係を示すエントロピーの差を示すものであって、いわば  $X$  と  $Y$  から構成されるトータルシステムの組織の程度を表わすものと考えてよい。いかえれば、 $R(X, Y)$  を最小にすれば、トータルシステムの不確かさが最小になることを意味する。したがって、事象または変数  $X$  と  $Y$  の対応を考える場合、 $R(X, Y)$  を最大にするような確率（通常は遷移確率）を求めれば、それが  $X$  と  $Y$  の対応を最も適切に示すことになる。すなわち、 $X$  と  $Y$  の間の確率的内部構造が規定されるわけである。(5-1) 式から、 $R(X, Y)$  は  $X$  (または  $Y$ ) に関する不確かさから、 $Y$  (または  $X$ ) を知ったうえで  $X$  (または  $Y$ ) の不確かさの差を示す量、いわゆる獲得情報量を示すものとも解釈でき、その対応性から  $X$  と  $Y$  の間の平均相互情報量といわれることもある。この場合にも、 $R(X, Y)$  を最大にするように  $X$  と  $Y$  間の確率的構造を定めることは自然であろう。通常は、 $X$  と  $Y$  の間に物理的・社会的・経済的条件がつき、それらの制約条件の上で  $R(X, Y)$  を最大にする確率構造を求めるのが普通であるが、いずれにしても、上述したところから  $R(X, Y)$  を最大にする意義は理解できるはずである。

さて、事象  $X$  と  $Y$  の対応関係として、 $X$  と  $Y$  が互いに独立な場合、 $X$  と  $Y$  の間の変換システムには雑音がない場合と雑音がある場合の 3 つが考えられる。 $X$  と  $Y$  が互いに独立な場合には (2-5) 式と (5-1) 式から  $R(X, Y) = 0$  となり、 $X$  と  $Y$  の間にはなんらの情報伝達もない。

変換システムの雑音の有無の意味はつぎのようである。変換システムには有限個の可能な状態があり、変換システムからの出力はこの状態と現在の入力との関数であるとする。すると、変換システムは、

$$y_t = f(x_t, \beta_t), \beta_{t+1} = g(x_t, \beta_t) \dots\dots\dots (5-2)$$

と表現できる。 $x_t, y_t$  および  $\beta_t$  はそれぞれ時間  $t$  での入力、出力およびシステムの状態である。雑音のないシステムとは、(5-2) 式が決定論的に定まる場合をいい、このとき、入出力のエントロピーは等しくなり、

$$R(X, Y) = H(X) = H(Y) \dots\dots\dots (5-3)$$

となる。雑音のあるシステムとは (5-2) 式が確率論的に定まる場合をいい、このとき

$$R(X, Y) = H(X) - H_Y(X) = H(Y) - H_X(Y) \dots\dots\dots (5-4)$$

となり、通常の事象  $X$  と  $Y$  の対応はこのような場合である。なお、雑音が大きくて  $X$  と  $Y$  の対応が全く定まらなくなると、

$$H_Y(X) = H(X) \text{ または } H_X(Y) = H(Y) \dots\dots\dots (5-5)$$

となつて  $R(X, Y) = 0$  となることはいうまでもない。

5.2. モデル化の基本

流出モデル、とくに長期流出モデルの主要な目的は、欠測流量を補充すること、および模擬降水の発生によって将来長期間にわたる流出形態を量的に把握・予測することにあるから、降水系列と流量系列を別個に



扱うのではなく、両者の相互関係を考察することによって流出系を正確に理解していく必要がある。

ところで、長期流出は非常に多くの水文サイクルを対象としなければならず、一つのサイクル内の流出現象でもきわめて複雑であることを考えると、長期流出系のモデル化には確率論的な考え方が不可欠である。

こうした立場から、著者らは最大エントロピー仮説に基づくエントロピーモデル—状態遷移確率法を提案しているが<sup>7),8)</sup>、ここではこれらをさらに発展させ、前節の相互情報量あるいは獲得情報量概念の適用を試みる。

なお、モデル化においては降水および流量系列の単位時間をどのようにとるかという問題、いわゆる基準時間の問題があるが、長期流出は大出水時を除くとその現象はかなり緩慢であり、日単位で把握することが最低限必要であり、かつ実用的に十分な精度があろう。また長期間にわたる降水量および流量資料は日降水量および日平均流量として観測・測定されており、実際の流出解析においても好都合である。

### 5.3. 流出系の等価遅延時間

エントロピーモデルを構成するにあたって、一つの大きな仮定は流出変換システムの定常性である。すなわち、系の内部状態の遷移を確率的に表現していく場合、その遷移確率は対象とする期間内では定常あるいは一様とみなして理論展開を構成している。そこで、系を定常化する期間分割の基準として、本節では相互情報量概念に基づく指標を提示しておこう。

いま、 $X$  を降水系列、 $Y$  を流量系列とすると、2変数正規過程  $X=X(t)$ 、 $Y=Y(t+\tau)$  に対して、結合エントロピー  $H(X, Y; \tau)$  は (2-15) 式と同様次式で与えられる。

$$H(X, Y; \tau) = 1 + \ln 2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2(\tau)} \quad \dots\dots\dots (5-6)$$

ここに、 $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  および  $\rho_{xy}(\tau)$  はそれぞれ  $X$ 、 $Y$  の標準偏差および相互相関係数である。すなわち、相関係数が大いほど結合エントロピーは小さくなり、両者の対応がデタミスティックになることがわかる。

さて、(5-1) 式の相互情報量を最大にすることを考える。

$$\max_{\tau} R(X, Y; \tau) = \min_{\tau} H(X, Y; \tau) \quad \dots\dots\dots (5-7)$$

上式はさらに (5-6) 式から、

$$\min_{\tau} H(X, Y; \tau) = \max_{\tau} \rho_{xy}(\tau) \quad \dots\dots\dots (5-8)$$

となる。すなわち、 $\max_{\tau} R(X, Y; \tau)$  を満足する  $\tau$  を流出系の等価遅延時間とよぶと、これは降水と流量の長期系列を対象としたときの流出系の代表的な遅れ時間を意味し<sup>9)</sup>、エントロピーモデル構成にあたって必要な系定常化の期間分割の基準となる。

### 5.4. 流出系の確率的内部構造—状態遷移確率法

さて、降雨・流出変換過程を対象とすると、(5-2) 式は次式のように表記される。

$$Q_t = f(R_t, S_t), S_{t+1} = g(R_t, S_t) \quad \dots\dots\dots (5-9)$$

ここに、 $R_t$ 、 $Q_t$ 、 $S_t$  はそれぞれ時間  $t$  における降雨、流量および系の内部状態、具体的には流域の貯留状態を意味する。

ところで、 $R_t$ 、 $Q_t$ 、 $S_t$  の間で連続式が成立すると考えると、流量  $Q_t$  は

$$Q_t = S_t + R_t - S_{t+1} \quad \dots\dots\dots (5-10)$$

で与えられることになる。問題は (5-9) 式中の

$$S_{t+1} = g(R_t, S_t) \quad \dots\dots\dots (5-11)$$

の状態遷移である。われわれはこの状態遷移の確率的構造解明に、相互情報量概念を適用しようとするものである。

相互情報量を再起すると、

$$R(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) = H(X) - H_Y(X) = H(Y) - H_X(Y)$$

となり、 $H(X, Y)$  を最小にすることは全体系のエントロピーを最小にすること、すなわち、不確定さを最小にしようとしているわけであり、あるいは  $H_X(Y)$ 、 $H_Y(X)$  を最小にすることは変換システムの不

確定さを最小にしようとしているわけであり、この意味で  $R(X, Y)$  を最大にするということは、変換系がもっとも確定される、あるいは逆にもっとも実現しやすい、生起しやすい変換システムをわれわれが構成しようとしていることに等価であり、自然である。

さて、内部状態いわゆる貯留状態の遷移に関して、相互情報量は次式で表現される。

$$R(S_t, R_t, S_{t+1}) = H(S_{t+1}) - H_{S_t, R_t}(S_{t+1}) \quad \dots \dots \dots (5-12)$$

いま、系の定常化がはかられているとすると、その期間内では上式は

$$R = -\sum_j P_j \ln P_j + \sum_{i,j,s} P_i \cdot P_s \cdot P_{is}(j) \ln P_{is}(j) \quad \dots \dots \dots (5-13)$$

で与えられる。ここに、 $P_s$  は  $R_t = s$  なる降雨確率、 $P_i$  は  $S_t = i$  なる状態確率、 $P_j$  は  $S_{t+1} = j$  なる状態確率、 $P_{is}(j)$  は  $S_t = i, R_t = s$  なる条件のもとで  $S_{t+1} = j$  になる条件つき、あるいは遷移確率である。なお、(5-13) 式の誘導においては、降雨確率がそのときの貯留状態とは無関係であると仮定している。

つぎに、 $S_t = i, R_t = s$  なる条件のもとで  $S_{t+1} = j$  に遷移するには、ある特性値が課される、あるいはもたらされると考える。具体的にはある種の遅れ時間に相当するものであろうが、いま、それを  $t_{ijs}$  と表記すると、単位特性値あたりの相互情報量あるいは獲得情報量は

$$H' = R/T = (-\sum_j P_j \ln P_j + \sum_{i,j,s} P_i \cdot P_s \cdot P_{is}(j) \ln P_{is}(j)) / \sum_{i,j,s} P_i \cdot P_s \cdot P_{is}(j) \cdot t_{ijs} \quad \dots \dots (5-14)$$

で与えられる。

このように考えると、われわれの次のステップとしては、(5-14) 式をある制約条件あるいは規格化条件のもとで最大にする方法を展開することである。本研究ではこの問題を次のように定式化した。

$$\text{目的関数: } \max H' = \max_{P_i, P_s, P_{is}(j)} R/T \quad \dots \dots \dots (5-15)$$

$$\text{制約条件: } \sum_i P_i = 1 \quad \text{あるいは} \quad \sum_j P_j = 1 \quad \dots \dots \dots (5-16)$$

$$\sum_{i,s} P_i \cdot P_s \cdot P_{is}(j) = P_j \quad \dots \dots \dots (5-17)$$

$$\sum_{i,j} P_i \cdot P_s \cdot P_{is}(j) = P_s \quad \dots \dots \dots (5-18)$$

制約条件 (5-16), (5-17), (5-18) 式はいずれも確率の規格化条件である。確率が非負であるという制約条件  $P_i \geq 0, P_{is}(j) \geq 0$  は後述するように、 $\sum_i P_i = 1$  を満たす非負値  $P_i$  を与えていく計算手順をとっているので自動的に満足される。

(5-15) 式の目的関数を (5-16), (5-17), (5-18) 式の制約条件のもとで最大にするような状態確率  $P_j$  (あるいは  $P_i$ ) および遷移確率  $P_{is}(j)$  を求める問題は一種の最適化問題であり、ラグランジュ未定係数法により、最終的には次式のように求められる。(詳細な誘導は付録を参照されたい。)すなわち、 $P_{is}(j)$  は

$$P_{is}(j) = P_j \exp(C \cdot t_{ijs} - 1) / \sum_{i,j} P_i \cdot P_j \exp(C \cdot t_{ijs} - 1) \quad \dots \dots \dots (5-19)$$

で与えられる。ここに未知数  $C$  は次式を満足する。

$$-\sum_s P_s \ln \left\{ \sum_{i,j} P_i \cdot P_j \cdot \exp(C \cdot t_{ijs} - 1) \right\} = 1 \quad \dots \dots \dots (5-20)$$

したがって、(5-20) 式より  $C$  を求め、それを (5-19) 式に代入すると  $P_{is}(j)$  が求められる。

さらに、貯留状態の変化から流量への変換は前述の (5-10) 式からわかるように、 $k = i + s - j$  として確率的に評価できる。すなわち、 $P_i, P_{is}(j)$  が算定されると、降雨  $R_t = s$  のときに流量  $Q_t = k$  となる確率は

$$P_r(Q_t = k) = \sum_{\{i+s-j=k\}} P_i \cdot P_s \cdot P_{is}(j) \quad \dots \dots \dots (5-21)$$

として算定できる。ここに、 $\{i+s-j=k\}$  は  $i+s-j=k$  を満足するすべての要素集合  $(i, j, s)$  を意味している。

このように考えると、(5-19) および (5-20) 式を同時に解くことによって状態遷移確率  $P_{is}(j)$  は理論的に求められる。しかし、これら方程式中には未知数として  $P_i$  および  $C$  が含まれており、 $P_{is}(j)$  をそのままの形で解くことは容易ではない。本研究ではこの問題に対して以下のような iteration method を考えている。

- 1) まず,  $\sum P_i = 1$  を満足するように  $P_i$  を仮定する。
- 2) この仮定された  $P_i$  を (5-20) 式に代入し,  $C$  を求める。
- 3) この  $C$  を (5-19) 式に代入して  $P_{is}(j)$  を算定する。
- 4) この  $P_i, P_{is}(j)$  を降雨確率  $P_r$  (これは豊富なデータからすでに求められているものとする。) とともに (5-21) 式に代入し, 流量確率  $Pr(Q=k)$  を算定する。
- 5) この算定された  $Pr(Q=k)$  が実測流量データから求められている生起確率と一致しているかどうかを比較する。
- 6) もしほとんど一致しているようであれば, そのときの  $P_i, P_{is}(j)$  がわれわれが求める状態確率および状態遷移確率である。
- 7) 両者の一致の程度が悪い場合には1)にもどり  $P_i$  を仮定しなおし, 許容できる一致の範囲まで, この手順を繰り返す。

以上のような手順によって, いったん  $P_i, P_{is}(j)$  が求められると, われわれはこれらの確率を用いて流量系列をシミュレートすることができる。こうしたシミュレーション法は, 降雨シミュレーション法を介さない直接的な流況シミュレーション法を構成している。また, 方法論そのものの展開においても, 従来, 流出モデルの展開が降雨は確率論的, 変換系は決定論的な取り扱いに終始してきているが, ここでは変換系そのものも確率論的に扱っており, さらに, 具体的に流出変換構造を説明, 記述するモデル構成あるいはシステム方程式の構成およびそのパラメータ同定をはからないで, 変換の確率構造をさぐるようとしているところに大きな特徴がある。

## 6. 実流域への適用と考察

本章では, 淀川の支川である木津川および宮津湾に注ぐ由良川河流域に前章までの理論展開を適用し, その結果を考察する。

### 6.1. 水文系列の分布特性

3章では, 平均値および分散あるいは標準偏差 (対数変換した場合も含めて) が安定している場合に, 最大エントロピーをもつ分布はそれぞれ指数分布, 正規分布 (対数正規分布) であることを述べた。本章ではその一つの実証として木津川流域普爾地点の降雨データを解析する。各時間単位でのデータは以下のようである。

〔日単位未満〕 主降雨時間帯, 67ケースを対象 (昭和48~52年), mm/hr に換算

1時間単位: 主降雨時間帯 3時間め,  $t=3$   
開始時点から

〃 6 〃  $t=6$ .

6時間単位: 1時間目から6時間目までの総和

12時間単位: 1時間目から12時間目までの総和

ここに, 主降雨時間帯とは出水をもたらすような一連降雨 (総雨量 30 mm 以上) によって, 流域末端の流量 (青蓮寺ダム流入量) が立上る時刻から15時間分を意味する。

〔日単位以上〕 昭和2~44年までの日雨量データを対象, mm/day に換算。

日単位 : 6月15日, 9月15日 (ただし, 3 mm/day 以下の場合には, その前後の日

Table 1. Coefficients of variation on mean value and variance (rainfall).

unit time		c.v. on mean value	c.o. on variance
one hour	$t=3$	0.210	0.510
	$t=6$	0.420	0.450
six hours		0.180	0.310
twelve hours		0.170	0.500
one day	Jun. 15	0.220	0.340
	Sep. 15	0.390	0.580
ten days	Jun.	0.086	0.087
	Sep.	0.060	0.259
month	Jun.	0.055	0.175
	Sep.	0.053	0.233
Season	Spring	0.060	0.260
	Summer	0.052	0.102
	Fall	0.012	0.225
	Winter	0.163	0.049
year		0.080	0.050

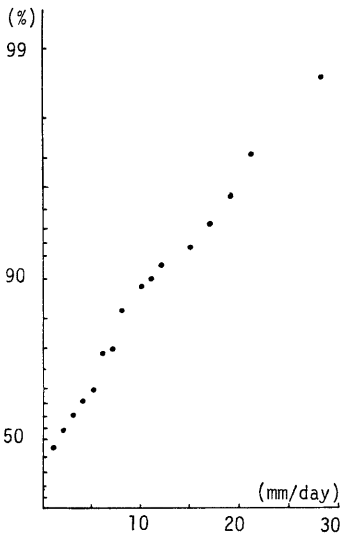


Fig. 2(1). Plotting position on probability paper (hourly time unit  $t=6$ ).

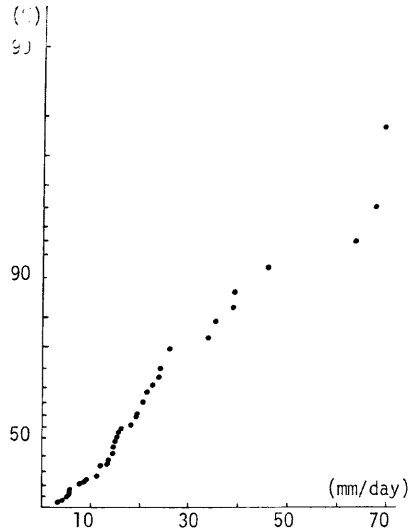


Fig. 2(2). Plotting position on probability paper (daily time unit, Jun. 15).

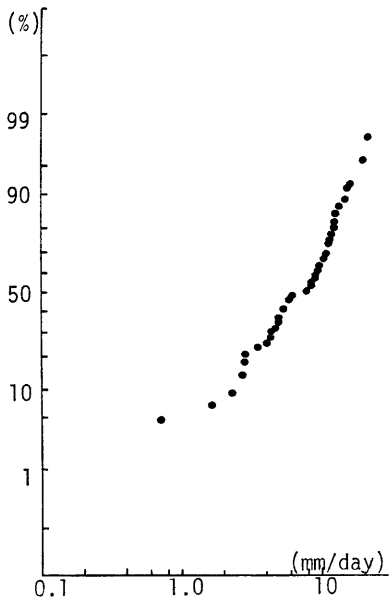


Fig. 2(3). Plotting position on probability paper (10 days time unit, Jun.).

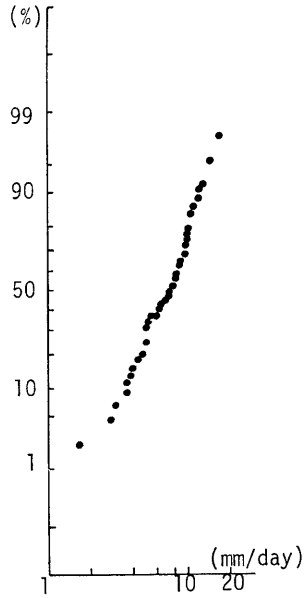


Fig. 2(4). Plotting position on probability paper (monthly time unit, Jun.).

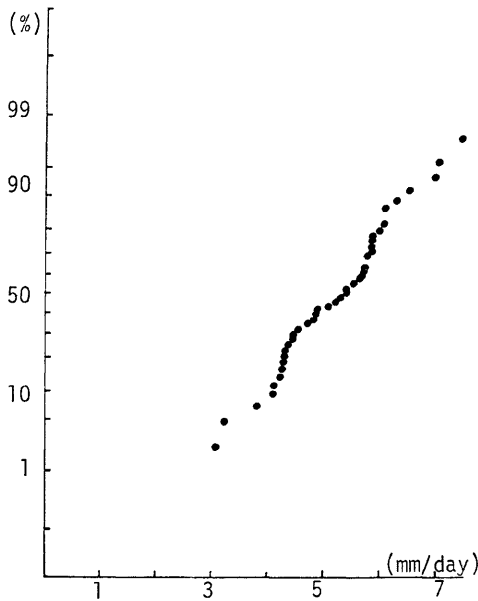


Fig. 2(5). Plotting position on probability paper (yearly time unit).

の降雨量を採用する。)

旬単位 : 6月中旬 (6/11~6/20), 9月中旬 (9/11~9/20)

月単位 : 6月, 9月

季節単位 : 春 (3, 4, 5), 夏 (6, 7, 8), 秋 (9, 10, 11), 冬 (12, 1, 2月)

年単位 : 1~12月

つぎに、日単位未満においては67ケースを1~10, 11~20, 21~30, 31~40, 41~50, 51~67の6グループに区分し、各グループにおける平均値、標準偏差を求め、それぞれの変動係数の大小を、日単位以上については、昭和2~11, 12~21, 22~31, 32~44年の4グループに区分し、各グループにおける平均値、標準偏差(対数変換した場合も含めて)を求め、それぞれの変動係数の大小を比較した。Table 1がその結果である。

まず、1, 6, 12時間単位についてはともに平均値が標準偏差より安定しており、エントロピー的に解釈すると、これらは指数分布にしたがうといえよう。事実、これらデータをトーマス法によって、確率紙上にプロットした結果はほぼ指数分布にしたがっている(Fig. 2(1))。

一方、日単位以上については、日雨量(6月15日)、季節雨量(冬)、年雨量については標準偏差のほうが安定しているが、その他の時間単位については、その逆の傾向を示している。6月中旬については両者がほぼ等しい。こうした結果は、日雨量(6/15)および季節雨量(冬)は対数正規分布に、年雨量は正規分布にしたがうが、それ以外は対数正規分布にしたがうとはいえないようである。このことを確率紙上のプロット形状(Fig. 2(2), (3), (4), (5))と比較してみたが、日雨量(6/15)、季節雨量(冬)、年雨量を除く時間単位に対しては、平均値近傍はもとより、大きな値を示す部分でのバラツキがいくぶん大きいようで、こうした低確率群に属する標本の存在は、平均値に比べ標準偏差を大きくし、その結果、標準偏差の安定性

を失うことに結びつくのかもしれない。したがって、こうした異常値を除去すると、上記の時間単位においても標準偏差が安定するのではないかと考えられ、今後の研究課題としたい。

## 6.2. 降雨・流量時系列のエントロピーおよびエントロピー差

降雨・流出変換過程のエントロピーが、時間スケール、面積スケールとともにどのように変化するかをみるために、由良川流域荒倉 (150)、角 (556) および福知山 (1157 km<sup>2</sup>) 地点の日単位以上の降雨・流量系列を対象とした。もちろん、日単位での降雨・流量データが基本になるが、降雨は各流域のいくつかの観測地点からティーセン法によって面積雨量に変換している。3 地点とも各時間単位で用いたデータ期間は以下のようである。

日単位：昭和32～36年の6月1日から7月31日の降雨期

旬単位：昭和35～36年の6月上旬から11月下旬 (降雨期) および

昭和32～36年の1月上旬から12月下旬 (全年)

月単位：昭和32～36年の6月から11月 (降雨期) および1月から12月 (全年)

季節・年単位：昭和28～36年

まず、これらデータがしたがう分布を確率紙上の形状から、またその時間的従属性をコロログラム解析から以下のように見出した。

日単位降雨：指数分布，0 重マルコフ

日単位流量：対数正規分布，1 重マルコフ

旬単位降雨，流量：対数正規分布，1 重マルコフ (降雨期)

“ “ : “ 3 “ (全年)

月単位降雨，流量：対数正規分布，1 重マルコフ (降雨期)

“ “ : “ 3 “ (全年)

季節単位降雨，流量：対数正規分布，2 重マルコフ

年単位降雨，流量：正規分布，0 重マルコフ

なお、日単位降雨系列は1重マルコフともみなされるが、その場合には前述したように、エントロピー計算が数値計算によらなければならないので、ここでは簡単のため0重マルコフ、いわゆる独立過程として扱った。

**Table 2** はこうした分布特性および時間的従属性両者をもった確率過程のエントロピーを2章で述べたエントロピー計算法に基づいて算定したものである。この表から以下の点が指摘できる。

- 1) すべての時間スケール、面積スケールにおいて、降雨エントロピー  $H(R)$  は流量エントロピー  $H(Q)$  より大きい。
- 2) 時間スケールが大きくなるにつれて、 $H(R), H(Q)$  ともに小さくなる。
- 3) 時間スケールが大きくなるにつれて、 $H(Q)-H(R)$  の絶対値は小さくなる。
- 4) 面積スケールの効果は、 $H(Q)-H(R)$  にほとんど反映されていない。

こうした側面はつぎのように解釈できよう。すなわち、

- ① 河川流量は変動の激しい降雨が流域という場を通る過程において、スムージング効果をうけてきている。
- ② 時間スケールが大きくなると、降雨・流出の変換プロセスはインパルスの応答あるいは0次遅れ特性をおびてくる。一方、日単位程度の降雨・流出レスポンスは単位関数の応答あるいは多次遅れ特性をもってくる。
- ③ 日単位以上のプロセスにおいては、タイムスケールの効果が、面積スケールの効果よりも大きく流出プロセスに反映されてくる。

なお、実際に、Wiener の 河波・予測理論に基づく統計的単位関法<sup>10)</sup> によって、これら時間スケールの応答関数を求めてみると、②の特徴を示しており、また、これら応答関数を (4-14) 式に相当させると、そのパラメータ変化による (4-16) 式の  $A$  の値とエントロピー差  $H(Q)-H(R)$  とは変化の傾向を同じくし、③の特徴を説明している。

Table 2. Entropies on rainfall and river discharge processes and their difference.

unit time		Arakura	Kado	Fukuchiyama
day	$H(R)$	3.36	3.24	3.21
	$H(Q)$	2.15	2.11	2.13
	$H(Q)-H(R)$	-1.21	-1.13	-1.08
ten days (1-th multi)	$H(R)$	2.73	2.55	2.49
	$H(Q)$	2.23	2.29	2.13
	$H(Q)-H(R)$	-0.50	-0.26	-0.36
ten days (3-th multi)	$H(R)$	2.66	2.48	2.37
	$H(Q)$	2.34	2.23	2.09
	$H(Q)-H(R)$	-0.32	-0.25	-0.28
month (1-th multi)	$H(R)$	2.42	2.37	2.23
	$H(Q)$	2.03	2.02	1.79
	$H(Q)-H(R)$	-0.39	-0.35	-0.44
month (3-th multi)	$H(R)$	2.43	2.32	2.17
	$H(Q)$	2.22	2.07	1.94
	$H(Q)-H(R)$	-0.21	-0.25	-0.23
season	$H(R)$	1.98	1.76	1.74
	$H(Q)$	1.84	1.60	1.90
	$H(Q)-H(R)$	-0.14	-0.16	0.16
year	$H(R)$	0.98	0.77	1.03
	$H(Q)$	0.95	0.53	1.23
	$H(Q)-H(R)$	-0.03	-0.23	0.20

その他、日単位については融雪期のエントロピーを算定したり、エントロピーの経年変化を算定したが、紙数の都合により、前者については融雪期の降雨エントロピー  $H(R)$  は降雨期のそれよりも小さく、 $H(Q)$  はその逆であること、後者については、 $H(R)$ 、 $H(Q)$  とそれぞれをとりあげると、経年変化はかなり大きい。が、 $H(R)$ 、 $H(Q)$  を同時に比べると経年変化パターンは類似している、ということを用いておく。

## 7. 結 論

本研究は、降雨・流出現象のもつ不確定性を積極的に受け入れる立場に立って、情報理論の概念を導入し、情報エントロピーのもつ性質にもとづいて、不確定な水文現象を確率的に説明しようとしたものである。得られた結果を要約すると、以下のようである。

- 1) 水文系列が時間単位のとり方によってどうして異なる分布形状を示すかという疑問に対しては、いくつかのケースを除いて、最大エントロピーをもつ確率分布という立場からエントロピー的に解釈することができた。データ集合から、低確率群に属するデータを除くなどの処置をおこなえば、この理論展開はより精度を高めよう。
- 2) 流出システムは時間と面積のスケール効果の影響を強く受ける。そしてこうした効果の確率的側面は、エントロピー概念、とくに、降雨のエントロピー、流量のエントロピーおよび線形変換システムのエントロピーに基づいて解釈することができる。ただ、これらのエントロピーはすでに時間スケールにおいても面積スケールにおいてもランプ (lumped) された形のデータに基づいて算定されており、面積スケールの効果が、エントロピー差  $H(Q)-H(R)$  にほとんど反映されておらず、いわば見かけのエントロピーともいえるものである。今後は、降雨、流量データから非線形成分を分離して<sup>11)</sup>、システムを線形化するとともに、時間、面積スケールいずれにおいても真の意味でのエントロピー評価をはかっていく必要がある。
- 3) 相互情報量あるいは獲得情報量概念に基づく長期流出モデル状態遷移確率法は流出変換系の内部構造

を確率的に表現するとともに、その流況シミュレーション法としての意義も大きい。今後は、特性値、具体的には遅れ時間  $t_{ijs}$  を何でもって評価するか、観測データとの関連を含めて検討したい。

以上、水文現象の不確定構造に関して、情報エントロピー概念の適用性が十分あることを示唆した。内容の豊富さにもかかわらず、本概念の水文現象への適用はまだ緒についたばかりであり、今後はこれら理論展開を一層具体化していきたいと考えている。

### 参 考 文 献

- 1) たとえば、大泉充郎・本多波雄・野口正一：情報理論，オーム社，昭37，pp. 27-30.
- 2) たとえば，三根 久：情報理論入門，朝倉書店，昭39，pp. 57-63.
- 3) たとえば，Stanford Goldman著，関 英男訳：情報理論，近代科学社，昭39，pp. 127-132.
- 4) 前出3，pp. 132-139.
- 5) 前出3，pp. 345-347.
- 6) 前出3，pp. 143-145.
- 7) 高棹琢馬・池淵周一：不確定現象のエントロピー的解釈，土木学会誌，昭53. 5，pp. 81-90.
- 8) T. Takasao and S. Ikebuchi: Study on the Stochastic Structures of the Long Term Runoff System, IAHS Pub., No. 117, 1975, 12, pp. 343-350.
- 9) 高棹琢馬：確率統計水文学の展望—情報エントロピーと水文事象，土木学会誌，昭52. 4，pp. 17-19.
- 10) 石原藤次郎・高棹琢馬・池淵周一：長期間流出解析法に関する2, 3の考察，土木学会論文報告集，No. 196, 昭46.
- 11) 前出10

### 〔付 録〕 (5-19), (5-20) 式の誘導

ラグランジュの未定係数法により，

$$L = H' + \sum_j \lambda_j (\sum_{i,s} P_i \cdot P_s \cdot P_{is}(j) - P_j) + \gamma \sum_i (P_i - 1) + \sum_s \nu_s (\sum_{i,j} P_i \cdot P_s \cdot P_{is}(j) - P_s) \quad \dots (1)$$

の  $P_s(j)$  および  $P_i$  に関する極大を求めればよい。いま，(1) 式の  $L$  について  $P_{is}(j)$  および  $P_i$  に関する偏微分を 0 に等しいとおくと，次式が得られる。

$$\partial L / \partial P_{is}(j) = P_i \cdot P_s \{1 + \ln P_{is}(j)\} / m - C \cdot P_i \cdot P_s \cdot t_{ijs} / m + P_i \cdot P_s \cdot \lambda_j + P_i \cdot P_s \cdot \nu_s = 0 \quad \dots (2)$$

$$\begin{aligned} \partial L / \partial P_i = & - \{ (1 + \ln P_i) + \sum_{i,s} P_s \cdot P_{is}(j) \ln P_{is}(j) \} / m - C \cdot \sum_{j,s} P_s \cdot P_{is}(j) t_{ijs} / m \\ & + \sum_{j,s} \lambda_j P_s \cdot P_{is}(j) + \gamma - \lambda_i + \sum_{j,s} \nu_s \cdot P_s \cdot P_{is}(j) = 0 \quad \dots (3) \end{aligned}$$

ここに， $\max H' = C \cdot \sum_{i,j,s} P_i \cdot P_s \cdot P_{is}(j) t_{ijs} = m$  とおいている。

$$\sum_{i,j,s} (2) \text{ 式} \times P_{is}(j) \text{ を求めて整理すると，} \\ 1/m + \sum_s P_i \ln P_i / m + \sum_j \lambda_j P_j + \sum_s \nu_s \cdot P_s = 0 \quad \dots (4)$$

$$\sum_i (3) \text{ 式} \times P_i \text{ を求めて整理すると，} \\ -1/m + \gamma + \sum_s \nu_s \cdot P_s = 0 \quad \dots (5)$$

$$(4) \text{ 式} - (5) \text{ 式を求めると，} \\ 2/m + \sum_i P_i \cdot \ln P_i / m + \sum_j \lambda_j P_j = \gamma \quad \dots (6)$$

$$(2) \text{ 式より，} \\ \nu_s = C \cdot t_{ijs} / m - \{1 + \ln P_{is}(j)\} / m - \lambda_j \quad \dots (7)$$

であるから，(6)，(7) 式を (3) 式に代入して整理すると，

$$\{-\ln P_i + \sum_i P_i \ln P_i\} / m = -(\sum_i \lambda_i P_i - \lambda_i) \quad \dots (8)$$

が得られ， $\lambda_i$  は



$$\lambda_i = -\ln P_i/m \quad \dots\dots\dots (9)$$

で与えられる。(9) 式を (6) 式に代入すると

$$\gamma = 2/m + \sum_i P_i \ln P_i/m - \sum_j P_j \ln P_j/m = 2/m \quad \dots\dots\dots (10)$$

また、(9) 式を (7) 式に代入して整理すると、

$$\ln P_{is}(j) = C \cdot t_{ijs} + \ln P_j - m\nu_s - 1 \quad \dots\dots\dots (11)$$

となり、 $P_{is}(j)$  は

$$P_{is}(j) = P_j \cdot \exp(C \cdot t_{ijs} - 1) \cdot \exp(-m\nu_s) \quad \dots\dots\dots (12)$$

で与えられる。ここで、(12) 式中の  $\exp(-m\nu_s)$  を消去するために、(12) 式を制約条件式

$$\sum_{i,j} P_i \cdot P_s \cdot P_{is}(j) = P_s \quad \dots\dots\dots (13)$$

に代入して整理すると、

$$\exp(-m\nu_s) = 1 / \sum_{i,j} P_i \cdot P_j \cdot \exp(C \cdot t_{ijs} - 1) \quad \dots\dots\dots (14)$$

が得られる。上式を (12) 式に代入すると、最終的に  $P_{is}(j)$  は

$$P_{is}(j) = P_j \cdot \exp(C \cdot t_{ijs} - 1) / \sum_{i,j} P_i \cdot P_j \cdot \exp(C \cdot t_{ijs} - 1) \quad \dots\dots\dots (15)$$

で与えられる。ここに、未知数  $C$  は以下のように求められる。すなわち、(5)、(10) 式より

$$-\sum_s m\nu_s \cdot P_s = m \sum_s 1/m = 1 \quad \dots\dots\dots (16)$$

となり、(14) 式より  $m\nu_s$  を求めると、

$$-P_s \cdot m \cdot \nu_s = -P_s \cdot \ln \left\{ \sum_{i,j} P_i \cdot P_j \cdot \exp(C \cdot t_{ijs} - 1) \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

であるから、(16) 式は

$$-\sum_s P_s \cdot \ln \left\{ \sum_{i,j} P_i \cdot P_j \cdot \exp(C \cdot t_{ijs} -) \right\} = 1 \quad \dots\dots\dots (18)$$

となる。