

洪水の時・空間生起確率算定法とその治水計画への適用

高 棹 琢 馬・池 淵 周 一

FLOOD PROBABILITY IN TIME AND SPACE AND ITS APPLICATION TO FLOOD CONTROL PLANNING

By Takuma TAKASAO and Shuichi IKEBUCHI

Synopsis

This paper proposes an approach to the integration or combination of hydrology and water resource systems. Firstly, the flood probabilities in time and space among the sub-basins are estimated through the stochastic model of hourly rainfall and the runoff system model. Secondly, their probabilities are transformed into ones at multi-defence points in the river basin based on the flood routing model including the effect of dam control and overflow at the point being lack of river capacity and the shift-operation on non-homogeneous finite state markov chain. Lastly, the optimization problem including the objective function and the above flood probability as stochastic constraint are formed. And as its optimization technique the chance constraint method are introduced and the scale, location and operational rule of flood control facilities are decided.

1. 序 論

1 水文システムと水資源システム

Sherman の単位図法が近代水文学の幕明けであったとすると、水資源計画あるいは水資源システムの概念構成が開始されたのは、ハーバード水資源プログラムであろう。その後、水文学は Holton の浸透能曲線をはじめ、多くの研究成果をもたらし、最近では流出モデルとして分布型非線形モデルが提案されるほど、その発展にはめざましいものがある。

一方、水資源計画あるいはシステムは、水を資源として有効に開発・利用する立場から、その計画・設計・操作問題に OR 的手法を導入しようとしてきた。最近では水量だけでなく水質をも包含する勢いである。

従来、水文学あるいは水文システムの研究と、水資源計画あるいは水資源システムの研究はいくぶん independent に発展してきたきらいがある。しかし、水資源システムの計画・設計・操作問題における入力水文現象であり、その構成にあたっては水文学が一つの基盤とならなければならない。とはいえ水文学が基礎であり、その厳密・詳細なシステムモデルの構成がすべてだとは思われない。水資源システムの計画・設計・操作問題の対象目的・精度などに応じ、その構成に有効となるような形で、水文システムで得られた研究成果から情報構成あるいは情報加工することも必要である。

こうした立場から、水文学からの情報システムと水資源システムの諸側面、いわゆる計画・設計・操作問題の相互関係の基本フレームを図示したのが Fig. 1 である。両者を結ぶ、あるいは integrate する手段として最適化手法がある。なお、水資源システムといえば、水の利用・開発に重点をおいた言葉のようであるが、ここでは治水・利水・保水を包含したトータルな意味あいをもたせている。

水文情報システムでは、水文現象の確率分布特性および時系列特性を水資源システムの構成に有用な情報いわゆる平均値あるいは期待値情報、極値あるいは超過確率情報、シミュレーション、予測情報に加工する

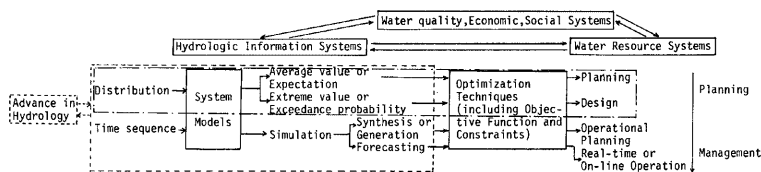


Fig. 1. Interrelationships between Hydrology and Water Resource Systems

意味あいのシステムモデルの構成が重要であり、水資源システムにおいては、それらを用いて水量、水質、土地利用を含んだ計画・設計・計画操作・実時間操作問題が主要な側面となる。そして両者を結ぶものとして目的関数、制約条件を含んだ各種の最適化手法を駆使するのである。また、水資源システムにおいては計画的側面から管理的側面に行くにつれ、より詳細な情報とくに時系列情報が必要となってきた、それだけシステムモデルも複雑性をおびてこよう。

以上のように水文システムと水資源システムの結合あるいは総合化は今後ますます重要性を増すであろう。こうした状況をふまえ、本研究ではその一つのアプローチを提案するものである。すなわち、洪水現象の確率分布特性と治水計画の結合を Fig. 1 のフローにおいては、[] に相当する部分を展開する。

こうした展開により治水計画の基本フレーム、たとえば洪水防御施設群の配置・規模・操作ルールなどが多くの代替案のなかからいくつか選択されると、それを実施段階にまで高めるためには、その配置・規模・操作ルールに、さらに流況シミュレーションを加えてより精度の高い信頼度までも含めた解析が必要となつてこよう。前段階をスクリーニング (Screen model) といっており、本研究もこの段階の治水計画をとり扱っている。

1. 2 治水計画の問題点と従来の研究

洪水防御計画の基本は、河川の洪水による災害を防止または軽減するために計画基準点において計画のハイドログラフ、いわゆる基本高水を設定し、この基本高水に対してこの計画の目的とする洪水防御効果が確保できるように策定するものとされている。このために基本高水に対してこの計画により設置される施設が水系を一貫して相互に技術的、経済的に調和がとれ、かつ十分にその目的とする機能を果たすよう策定されなければならない。

ところでこのような基本高水は、往々にして対象流域末端での計画基準点で定められ、したがって計画降雨さらに洪水流出モデルを設定する時、流域をランプした形で取り扱われることが多い。しかし近年の洪水防御計画の策定は、こうした取り扱いでは十分とはいえない段階にきつつある。すなわち、1) 流域に多くの防災対象地区が出現し、最下流計画基準点を対象としてはおれない。2) 多くの既設ダムによる洪水コントロール、大規模な土地利用の改変など、洪水流況への人為的作用が大きくなっている。とくに本川と支川の接点での洪水防御計画の計画アンバランスは大きな問題となっている。

こうした事実は、もはや流域をランプした形で取り扱うのは十分でなく、流域全体と個々の部分流域との治水安全度のバランス化、さらには人為的效果の導入をはからなければならないことを意味している。前者の問題に対しては最近、便宜的な形で洪水の到達時間に応じた超過確率の導入が考えられているが¹⁾、降雨の空間的・時間的分布特性とくにその従属性を考えると十分とはいえないし、後者の問題については、その研究はかなり限られた取り扱いといえる。

すなわち、長尾は水系の安全性と洪水処理施設の操作・配置問題に、堤防区間のピーク水位と調節池地点における高水の総流量の2変数統計処理をとりあげ、水系の安全性の確率的評価をおこなっている²⁾。とくに洪水処理施設の治水機能の確率論的評価には多くの興味ある成果を導びいているが、2変数処理に終始しており、しかも水位、総流量といった流量の確率特性が既知であるとしているので、本研究が対象としてい

るダム群・多評価地点系への拡張は難しい。また、石原・瀬能は上記の成果にさらに上流部の影響をも考慮して下流部の氾濫の危険度を確率論的に評価している³⁾。ただ、ここでも2支川、1本川といった単純な河川システムが議論の対象となっており、より複雑な河川システムへの拡張は困難のようである。

本研究は、こうした従来の研究を評価するとともに、より普遍的な取り扱い、いわゆる降雨の時・空間分布特性およびダム群・多評価地点系、さらに氾濫効果をも導入した洪水の時・空間生起確率の算定法を提案するとともに、洪水の超過確率を用いて施設群の規模・配置・操作ルールなど治水計画の基本フレームを決定する方法を展開する。

1. 3 本研究の内容とその基本構成

雨水および河川水などの偶発的な自然現象をシステムティックに解析する側面と、水資源を人為的效果を導入して有用に防御・活用するための施設群の計画・設計・操作などの水資源システム解明の側面との結合をはかることが本研究の基本となる考えである。その基本構成を述べると以下のようである。

まず、ランプした形で流域をとらえるのではなく、多数の防災対象地区を包含する意味で、対象流域を部分流域に分割する。もちろん分割にあたっては、観測網、施設群、評価地点を考慮に入れて決定しなければならない。このもとの、各部分流域間の降雨の確率構造を空間的にも時間的にも一様でない有限マルコフ連鎖モデルで構成し、流出変換モデルを介して部分流域および部分流域間の流量の時・空間生起確率を算定する。この遷移確率を用い、ダム・堤防などの施設群を考慮に入れ、multiplication あるいは shift-operation 概念を適用することによって、複数評価地点の洪水の時・空間生起確率（本研究での洪水生起確率は、河道通過流量が河道疏通能力を超える確率として定義している）が算定される。

以上が水文システムに相当する部分であり、これを基礎とした水資源システム問題への最適化手法としては Chance constraint モデルを考え、施設群の規模・配置・操作ルールなどの基本フレームを決定する。このようにして水文情報システムと水資源システムを結合することができ、かつ水系一貫した治水計画の策定がはかれる。Fig. 2 はこれら一連の内容をトータルフローとして示したものである。

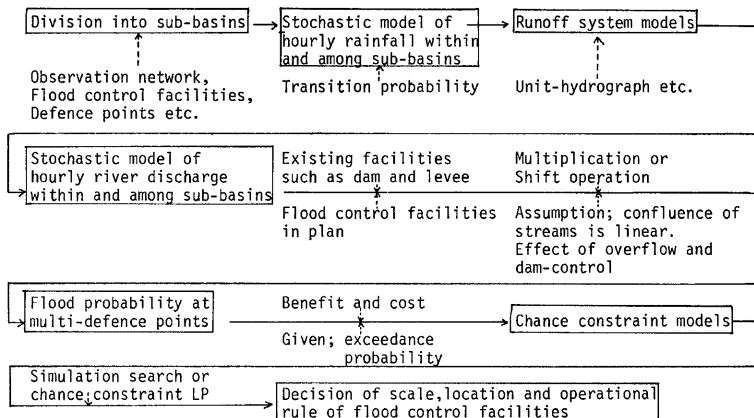


Fig. 2. Total flow of flood probability in time and space and its application to planning.

2. 部分流域および部分流域間の降雨および流量の時・空間分布モデル

2. 1 前提となる基本条件

豪雨および流出量は時間的にも空間的にもきわめて複雑な現象をしており、短時間降雨の不確定構造やそ

の流出変換構造などについては鋭意研究が進められている。本章においては前章で述べた解析目的および次章で述べる洪水の時・空間発生確率算定法を誘導する意味で以下のような前提・仮定を設けて、部分流域および部分流域間の降雨および流量の時・空間分布モデルを誘導する。

(1) 対象流域の部分流域への分割

治水計画を考える場合、流域の自然的・社会的条件に基づいて、それぞれについての流域の区分と評価を行なうことが必要となる。ここでいう流域とは、斜面と河道を1対とした単位流域がいくつか組み合わせられた複合体で構成されるものとする。ところでこの単位流域の大きさを決定することが1つの研究課題ではあるが、ここでは対象流域の設定は水文界によって区切り、対象流域内の部分流域分割は、1) 大規模なダムや遊水池などの施設群の分布、2) 観測点・評価地点の分布、3) データの取りやすさを考慮して、分析目的に適合するように行なうことにする。

(2) 豪雨の時・空間確率構造

淀川水系木津川流域のテレメータ雨量計から得られた豪雨時の時間雨量データを分析すると、時間雨量は時間的にも空間的にも一様でない確率構造を示している。すなわち、平均値や分散は時間軸、空間軸上において変化しており、また相関係数は時間原点のとり方、地点のとり方により異なっている。相関の程度は時間軸上においては1時間前に、空間軸上においては最近接点に高い相関を示し、以後はおくれ時間、距離の増加とともに減している。

一方、V. T. Chow は年最大流量をもたらすような豪雨は、時間軸では一様でない有限マルコフ連鎖モデルで構成できるとしており⁴⁾、従来の地域相関分析結果も対象地点を中心としたある範囲に高相関が分布しており、その相関は距離とともに減している^{5,6)}。

こうした分析から本研究では、豪雨の確率構造を空間的にも時間的にも一様でない有限マルコフ連鎖モデルで表現する。

(3) 部分流域での流出変換

流出機構は降雨を入力、流出流量を出力とする複雑な変換システムとみることができる。本研究が治水計画の screening model を構成するという立場から、降雨・流量規模を離散的に扱い、その離散量の確率分布、さらには遷移確率を議論するということから流出変換モデルとしては線形時間不変の仮説に基づく単位図法を考えている。もちろん、後述するように Kinematic wave 法で代表される非線形流出モデルを用いることもできるが、議論を簡単にするため単位図法で代表される線形流出モデルを採用したにすぎない。

2.2 部分流域および部分流域間の降雨の時・空間分布モデル

いま、Fig. 3 に示すような N 個の部分流域からなる河川システムを考える。

時刻 t における N 個の部分流域それぞれの流域平均雨量を $R_k(t)$ (k は部分流域番号, $k=1, \dots, N$) とする。ここで $R_k(t)$ の値を降雨規模に応じて離散的な値 $0, 1, \dots, s$ に変換しておくと、2つの隣接部分流域 $k, k-1$ における空間的にも時間的にも一様でない

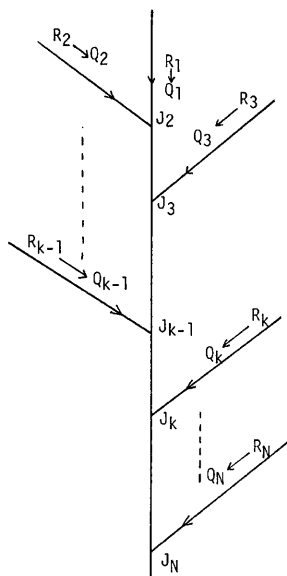


Fig. 3. Schematic representation of river system.

T 時間連続雨量の条件つき確率は次式で表現される。

$$\begin{aligned} & P_r\{R_k(t) \cap R_k(t+1) \cap R_k(t+2) \cap \cdots \cap R_k(t+T) | R_{k-1}(t) \cap R_{k-1}(t+1) \cap R_{k-1}(t+2) \cap \cdots \\ & \quad \cap R_{k-1}(t+T)\} \\ &= \frac{P_r\{R_k(t) \cap R_k(t+1) \cap \cdots \cap R_k(t+T) \cap R_{k-1}(t) \cap R_{k-1}(t+1) \cap \cdots \cap R_{k-1}(t+T)\}}{P_r\{R_{k-1}(t) \cap R_{k-1}(t+1) \cap \cdots \cap R_{k-1}(t+T)\}} \\ &= \frac{P_r\{R_k(t) \cap R_{k-1}(t) \cap R_k(t+1) \cap R_{k-1}(t+1) \cap \cdots \cap R_k(t+T) \cap R_{k-1}(t+T)\}}{P_r\{R_{k-1}(t) \cap R_{k-1}(t+1) \cap \cdots \cap R_{k-1}(t+T)\}} \cdots \cdots (1) \end{aligned}$$

上式の分母、分子はそれぞれ T 個および $2T$ 個の確率変数の同時確率を表現している。

いま、部分流域 k , $k-1$ 個々においてはその降雨の時間的従属性が 1 時刻前にのみ従属し、部分流域間においてもその対 (R_k, R_{k-1}) が 1 時刻前の対にのみ従属すると考えると、上式はさらに次式のようにになる。こうした仮定は前述した時間雨量の時・空間相関構造の分析を通じてはばいえるようであり、観測データの統計処理上も好都合である。

$$(1) \text{式} = \frac{P_r\{R_k(t) \cap R_{k-1}(t)\} \cdot P_r\{R_k(t+1) \cap R_{k-1}(t+1) | R_k(t) \cap R_{k-1}(t)\} \cdots P_r\{R_k(t+T) \cap R_{k-1}(t+T) | R_k(t+T-1) \cap R_{k-1}(t+T-1)\}}{P_r\{R_{k-1}(t)\} \cdot P_r\{R_{k-1}(t+1) | R_{k-1}(t)\} \cdots P_r\{R_{k-1}(t+T) | R_{k-1}(t+T-1)\}} \cdots \cdots (2)$$

さて、上式の分子を行列表示すると〈1〉、〈2〉となる。

$$\langle 1 \rangle \quad P_r\{R_k(t) \cap R_{k-1}(t)\}$$

$$= \begin{pmatrix} P_{0,0}^{(k)}(t) & P_{0,1}^{(k)}(t) & \cdots & P_{0,s}^{(k)}(t) \\ P_{1,0}^{(k)}(t) & \cdots & \cdots & P_{1,s}^{(k)}(t) \\ \vdots & \ddots & P_{s,0}^{(k)}(t) & \vdots \\ P_{s,0}^{(k)}(t) & \cdots & \cdots & P_{s,s}^{(k)}(t) \end{pmatrix}$$

$$\langle 2 \rangle \quad P_r\{R_k(t+mdt) \cap R_{k-1}(t+mdt) | R_k(t+(m-1)dt) \cap R_{k-1}(t+(m-1)dt)\}$$

$$= \begin{pmatrix} P_{0,0,0,0}^{(k)}(t+mdt) & P_{1,0,0,0}^{(k)}(t+mdt), \cdots, P_{s,0,0,0}^{(k)}(t+mdt), P_{0,1,0,0}^{(k)}(t+mdt), \cdots, \\ P_{0,0,1,0}^{(k)}(t+mdt) & P_{1,0,1,0}^{(k)}(t+mdt), \cdots, \cdots \\ \vdots & \ddots & P_{s,0,1,0}^{(k)}(t+mdt) \cdots \\ P_{0,0,s,0}^{(k)}(t+mdt) & \cdots \cdots \cdots \\ & P_{s,1,0,0}^{(k)}(t+mdt), \cdots, P_{s,s,0,0}^{(k)}(t+mdt) \\ & \cdots \cdots \cdots P_{s,s,1,0}^{(k)}(t+mdt) \\ & \vdots \\ & \cdots \cdots \cdots P_{s,s,s,0}^{(k)}(t+mdt) \end{pmatrix}$$

ここに成分 $P_{a,b}^{(k)}(t)$ は $P_r\{R_k(t)=b | R_{k-1}(t)=a\}$ を、 $P_{a,b|c,d}^{(k)}(t+mdt)$ は $P_r\{R_k(t+mdt)=a | R_{k-1}(t+mdt)=b | R_k(t+(m-1)dt)=c | R_{k-1}(t+(m-1)dt)=d\}$ を表わしており、 $0 \leq a, b, c, d \leq s$ である。

また (2) 式の分母を行列表示すると〈3〉、〈4〉となる。

$$\langle 3 \rangle \quad P_r\{R_k(t)\} = [P_0^{(k)}(t) \ P_1^{(k)}(t) \ \cdots \ P_s^{(k)}(t)]$$

$$\langle 4 \rangle \quad P_r\{R_k(t+mdt) | R_k(t+(m-1)dt)\}$$

$$= \begin{pmatrix} P_{00}^{(k)}(t+mdt) & P_{01}^{(k)}(t+mdt) & \cdots & P_{0s}^{(k)}(t+mdt) \\ P_{10}^{(k)}(t+mdt) & P_{11}^{(k)}(t+mdt) & \cdots & P_{1s}^{(k)}(t+mdt) \\ \vdots & \ddots & P_{s0}^{(k)}(t+mdt) & \vdots \\ P_{s0}^{(k)}(t+mdt) & P_{s1}^{(k)}(t+mdt) & \cdots & P_{ss}^{(k)}(t+mdt) \end{pmatrix}$$

ここに成分 $P_a^{(k)}(t)$ は $P_r\{R_k(t)=a\}$ を, $P_{ab}^{(k)}(t+mdt)$ は $P_r\{R_k(t+mdt)=b | R_k(t+(m-1)dt)=a\}$ を表わし, $0 \leq a, b \leq s$ である。

以上の<1>~<4>を用いて(2)式が求まることは明らかである。同様に, $k-1$ 部分流域の T 時間連続雨量と, それから ndt 時間おくれの k 部分流域の T 時間連続雨量との空間的にも時間的にも一様でない降雨の条件つき確率も次式で求まる。すなわち,

$$\begin{aligned} & P_r\{R_k(t+n) \cap R_k(t+n-1) \cap \dots \cap R_k(t+n+T) | R_{k-1}(t) \cap R_{k-1}(t+1) \cap \dots \cap R_{k-1}(t+T)\} \\ &= P_r\{R_{k-1}(t)\} P_r\{R_{k-1}(t+1) | R_{k-1}(t)\} \dots P_r\{R_k(t+n) | R_{k-1}(t+n-1)\} P_r\{R_{k-1}(t+n) \cap \\ & \quad R_k(t+n) | R_{k-1}(t+n) \cap R_k(t+n-1)\} P_r\{R_k(t+n+1) \cap R_k(t+n-1) | R_k(t+n) \cap R_{k-1}(t+n)\} \dots \\ & \quad P_r\{R_k(t+T-1) | R_k(t+T) \cap R_{k-1}(t+T)\} \dots P_r\{R_k(t+T+2) \cap R_k(t+T+1)\} \dots \\ & \quad P_r\{R_k(t+n+T) | R_k(t+n+T-1)\} / P_r\{R_{k-1}(t)\} \cdot P_r\{R_{k-1}(t+1) | R_{k-1}(t)\} \dots \\ & \quad P_r\{R_{k-1}(t+T) | R_{k-1}(t+T-1)\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし, $dt=1$ 時間として扱った(3)式から明らかのように, 前記の各要素<1>~<4>を用いれば時間おくれのある場合も同様に条件つき確率を算定することができる。

2. 3 部分流域および部分流域間の流量の時 空間分布モデル

すでに2.1(3)部分流域での流出変換で述べたように, 線形の流出変換モデルを用いると, 降雨系列は次式のように流量系列に変換される。

$$Q_k(t) = \sum_{\tau=0}^T h_k(\tau) R_k(t-\tau) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに, $\sum_{\tau=0}^T h_k(\tau)=1$ ($k=1, \dots, N$) であり, $h_k(\tau)$ は k 流域での単位図, $R_k(t)$ は k 流域の有効雨量, T は降雨が流量に影響を及ぼす時間数である。

いま, 2つの部分流域 $k-1, k$ を考えよう。そして $k-1$ 部分流域からの流出量 $Q_{k-1}(t)$ と k 部分流域からの流出量 $Q_k(t+n)$ との間で, 時間的にも一様でない流出量相互の条件つき確率を算定しよう。この条件つき確率は,

$$\begin{pmatrix} P_{00}^{(k)}(t+n), P_{01}^{(k)}(t+n) \dots\dots P_{0s'}^{(k)}(t+n) \\ P_{10}^{(k)}(t+n), \dots\dots\dots P_{1s'}^{(k)}(t+n) \\ \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ P_{s'0}^{(k)}(t+n) \dots\dots\dots P_{s's'}^{(k)}(t+n) \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (5)$$

のように行列表示される。ここに, $P_{kl}^{(k)}(t+n) = P_r\{Q_k(t+n)=l | Q_k(t)=k\}$ であり, $0 \leq k, l \leq s'$ である。なお, s' は流量規模の分割数である。

ところで上記の各行列要素 $P_{kl}^{(k)}(t+n)$ は単位図および2.2で述べた降雨の時・空間分布モデルから以下のように算定される。すなわち,

$$Q_{k-1}(t) = \sum_{\tau=0}^T h_{k-1}(\tau) \cdot R_{k-1}(t-\tau), \quad Q_k(t+n) = \sum_{\tau=0}^T h_k(\tau) \cdot R_k(t+n-\tau) \quad \dots\dots\dots (6)$$

とするとき,

$$\begin{aligned} P_r\{Q_k(t+n)=l | Q_{k-1}(t)=k\} &= \frac{P_r\{Q_{k-1}(t)=k \cap Q_k(t+n)=l\}}{P_r\{Q_{k-1}(t)=k\}} \\ &= \sum \frac{P_r\{R_{k-1}(t) \cap R_{k-1}(t-1) \cap \dots \cap R_{k-1}(t-T) \cap R_k(t+n) \cap \\ & \quad R_k(t+n-1) \cap \dots \cap R_k(t+n-T)\}}{P_r\{R_{k-1}(t) \cap R_{k-1}(t+1) \cap \dots \cap R_{k-1}(t-T)\}} \quad \dots\dots (7) \\ &= \left\{ \begin{matrix} k = \sum_{\tau=0}^T h_{k-1}(\tau) R_{k-1}(t-\tau) \\ l = \sum_{\tau=0}^T h_k(\tau) R_k(t+n-\tau) \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

さらに降雨の時間従属性が1時刻前のみに従属するとした場合には,

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\tau=0}^T [P_r\{R_{k-1}(t-T)\}P_r\{R_{k-1}(t+1-T)|R_{k-1}(t-T)\}\cdots \\
&\quad \left\{ \begin{array}{l} k=\sum_{\tau=0}^T h_{k-1}(\tau)R_{k-1}(t-\tau) \\ l=\sum_{\tau=0}^T h_k(\tau)R_k(t+n-\tau) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} P_r\{R_{k-1}(t+n-T)|R_{k-1}(t+n-1-T)\}P_r\{R_{k-1}(t+n-T) \cap \\ R_k(t+n-T)|R_{k-1}(t+n-1-T) \cap R_k(t+n-1-T)\}\cdots \\ P_r\{R_{k-1}(t) \cap R_k(t)|R_{k-1}(t-1) \cap R_k(t-1)\} \\ P_r\{R_k(t+1)|R_{k-1}(t) \cap R_k(t)\} \cdot P_r\{R_k(t+2)|R_k(t+1)\}\cdots \\ P_r\{R_k(t+n)|R_{k-1}(t+n-1)\}/P_r\{R_{k-1}(t-T)\}P_r\{R_{k-1}(t-T+1)| \\ R_{k-1}(t-T)\}\cdots P_r\{R_{k-1}(t)|R_{k-1}(t-1)\}\} \cdots \cdots \cdots (8)
\end{array} \right.
\end{aligned}$$

と表わせる。ここに、 $\left\{ \begin{array}{l} k=\sum_{\tau=0}^T h_{k-1}(\tau)R_{k-1}(t-\tau) \\ l=\sum_{\tau=0}^T h_k(\tau)R_k(t+n-\tau) \end{array} \right\}$ は $k=\sum_{\tau=0}^T h_{k-1}(\tau) \cdot R_{k-1}(t-\tau)$, $l=\sum_{\tau=0}^T h_k(\tau)R_k(t+n-\tau)$

を満足する T 時間連続降雨系列の集合を意味している。もちろん、 $k-1, k$ 流域からの流出量の同時刻での条件つき確率は上式の n にゼロを代入すればよい。また、単位図ではなく、一般の非線形流出モデルを用いる場合には、それぞれの部分流域からの流出量の組み合わせを満足する降雨系列群の生起確率を導入すればよいことになる。

いずれにしても、上記の方法で $P_r\{Q_i(t+n)=l|Q_{k-1}(t)=k\}$ が算定されると部分流域間相互の流量の遷移確率行列が(5)式のように表現されたことになる。

3. 洪水の時・空間生起確率算定法

本章では、前章で展開した部分流域間相互の流量の遷移確率行列に線形合流流下仮定、ダム操作、破堤・氾濫効果を導入して、複数評価地点の洪水流量の時・空間生起確率を算定する。そのために、まず一様でないマルコフ連鎖にしたがう確率変数の和分布を求める方法を展開する。

3.1 一様でない有限マルコフ連鎖に従属した確率変数の和分布

たがいに独立な確率変数の和分布は“Convolution”あるいは“たたみこみ”によって容易に求めることができるが、ここではマルコフ連鎖に従属した確率変数の和分布を考える。

時刻 t で状態が S_j のとき、 $X_t=j$ となる離散的な確率変数系列を $\{X_t\}$ とする。 $X_0=j_0, X_1=j_1, \dots, X_{t-1}=j_{t-1}$ であったとき、 $X_t=j$ となる条件つき確率が条件 $X_{t-1}=j_{t-1}$ だけに関係し、それ以前の経過に無関係であるとき、すなわち

$$P_r\{X_t=j|X_0=j_0, X_1=j_1, \dots, X_{t-1}=j_{t-1}\}=P_r\{X_t=j|X_{t-1}=j_{t-1}\} \cdots \cdots \cdots (9)$$

が任意の $t>1$ および起こりうる任意の正の整数の組 $\{j_0, j_1, \dots, j_{t-1}\}$ および任意の j に対して成り立つとき、 $\{X_t\}$ を有限マルコフ連鎖という。

この定義から、マルコフ連鎖理論を展開するのに

$$p_{ij}(t)=P_r\{X_t=j|X_{t-1}=i\} \cdots \cdots \cdots (10)$$

という値が重要な役割を演じる。ここに $p_{ij}(t) \geq 0$ ($i, j=0, 1, \dots, s$), $\sum_j p_{ij}(t)=1$ であり、(10)式をマルコフ連鎖の遷移確率、 $p_{ij}(t)$ を i 行 j 列目の要素としてもつ $(s+1) \times (s+1)$ 行列 $P_t=[p_{ij}(t)]$ を遷移確率行列という。なお、遷移確率 $p_{ij}(t)$ が時間に無関係のとき、マルコフ連鎖は時間的に一様であるといわれるが、ここでは時間 t にも関係するという意味で、一様でない有限マルコフ連鎖 (non-homogeneous markov chain) を扱っている。

つぎに問題となる一様でない有限マルコフ連鎖に従属した離散的な確率変数

$$S_m=\sum_{t=0}^m X_t \cdots \cdots \cdots (11)$$

の分布を求めるうえで重要な役割を演じる multiplication あるいは shift-operation²⁾ について述べる。

いま、行列 $\mathbf{A}$ ($p \times q$) と $\mathbf{B}$ ($q \times r$) がある場合、通常、 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の行列積の結果は ($p \times r$) 行列 $\mathbf{C}=[c_{ij}]$ となる。ところで、 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の shift-operation とはつぎのような操作を意味する。すなわち、 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の shift-operation (以下、記号 * で表記する) の結果は、($p+r-1$) $\times r$ 行列 $\mathbf{D}=[d_{ij}]$ となる。ここに、

$$\left. \begin{array}{l} d_{ij}=c_{i-j+1,j}; 0 \leq i-j+1 \leq p \\ d_{ij}=0 \quad ; \text{その他} \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(12)$$

である。この結果は、行列積 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ と類似しているが、 j 番目の要素が $j-1$ だけ下方にシフトされており、その空白の位置がゼロで満たされているところが異なっている。なお、Shift-operation には分配の法則は成立するが、一般には結合法則や交換法則は成り立たない。

さて、この shift-operation を用いて確率変数 S_m の分布を誘導しよう。まず、どの X_t も 0 から s までの整数値をとるとすると、(11) 式で定義される S_m は 0 から $(m+1)s$ までの範囲に限定される。したがって、 S_m の分布は $(m+1)s$ の確率集合で十分に記述される。そこで、いくつかの定義をおこなった上で、 S_m の分布を導こう。

<定義1>

$s_i^{(m)}=p_r\{S_m=i\}$ とすると、 $\mathbf{S}_m=\{s_i^{(m)}\}$ は $\mathbf{S}_m$ の分布を定義する $\{s(m+1)+1\} \times 1$ の確率行列である。ただし、 $i=0,1,\dots,(m+1)s$ とする。もちろん、 $\mathbf{S}_0$ は初期確率分布である。

<定義2>

$(s+1) \times 1$ 行列 $\mathbf{E}$ はすべての要素が 1 である行列とする。すなわち、

$$\mathbf{E}'=(1, 1, \dots, 1) \quad \dots\dots\dots(13)$$

ただし、記号'は転置行列を意味する。

<定義3>

$(s+1) \times (s+1)$ の単位行列を $\mathbf{I}$ とする。すなわち、

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(14)$$

<定義4>

$\mathbf{P}_t$ は $p_{ij}^{(t)}$ を遷移確率要素とする遷移確率行列とする。

以上の定義を用いると、以下のように shift-operation を用いて $\mathbf{Q}_t$ が定義できる。

$$\mathbf{Q}_0=\mathbf{S}_0' * \mathbf{I} \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$\mathbf{Q}_t=\mathbf{Q}_{t-1} * \mathbf{P}_t \quad (t=1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots(16)$$

そして、 S_m の分布は $\mathbf{Q}_t$ において $t=m$ とした $\mathbf{Q}_m$ を用いて次式のように定式化できる。

$$\mathbf{Q}_m \mathbf{E}=\mathbf{S}_m \quad \dots\dots\dots(17)$$

3. 2 複数評価地点における洪水の時・空間生起確率

洪水の時・空間生起確率を算定するにあたって、本研究が治水計画立案の screening model であること、および前節の shift-operation を用いる意味で、洪水流の河道追跡に関し、以下の前提を設け算定法を導く。すなわち、河道網系における洪水の合流伝播過程を単純化して、単純なおくれ過程と線形合流過程で表わされるとした、いわゆる一次元多段過程⁸⁾としての取り扱いをおこなう。この考えは、最近、石原ら⁹⁾によって発展させられ、実測値との対応でもかなりの一致をみている。もちろん、このような単純化、近似化は問題のあるところであるが、マルコフ連鎖表現における離散化の程度に関連して、いちがいに許せないことでもない。

そこで以下では、前節の shift-operation 概念および線形合流流下仮定を河道網系に適用し、複数評価地点での洪水流量の時・空間生起確率を算定しよう。すなわち、1) 線形合流流下の場合(基本となる算定

法), 2) ダム操作を考慮した場合の算定法, 3) 破堤・氾濫効果を導入した場合の算定法, を順次導くとともに, 最後に, これらすべてを考慮した現実の河川システムを考察する。

(1) 基本となる算定法

いま, 前掲の **Fig. 3** で示される河川システムで考えると, 河道流下的前提条件から合流点 $J_1, J_2, \dots, J_N$ に時刻 t に流入した互いに空間的, 時間的に従属した $Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_N(t)$ 単位の洪水量 (各流入量は離散的な値 $0, 1, \dots, s$ をとると仮定) は, 洪水波の合流点 $J_2, J_3, \dots, J_{N+1}$ への到達時間 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ を考慮すると, r 地点には,

$$Q_1(t) + Q_2(t + \tau_1) + \dots + Q_r(t + \sum_{i=1}^{r-1} \tau_i) \quad \dots\dots\dots (18)$$

なる洪水流量をもたらす。したがって, この合成流量の生起確率を求めればよいことになる。この一様でない有限マルコフ連鎖に従属した確率変数 $Q_1(t), Q_2(t + \tau_1), \dots, Q_r(t + \sum_{i=1}^{r-1} \tau_i)$ の和分布 U_r は shift-operation を用いることによって次式のように与えられる。

$$U_r(t + \tau_1 + \dots + \tau_{r-1}) = (P_1(t) * I) * P_2(t + \tau_1) * \dots * P_r(t + \tau_1 + \dots + \tau_{r-1}) \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$U_r \cdot E = [P_1^{(r)}(t + \tau_1 + \dots + \tau_{r-1}), P_1^{(r)}(t + \tau_1 + \dots + \tau_{r-1}), \dots, P_r^{(r)}(t + \tau_1 + \dots + \tau_{r-1})] \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここに, $P_i^{(r)}$ は r 地点で離散的な値 i をとる確率, $P_1(t)$ は $1 \times (s+1)$ の行ベクトルで部分流域 I からの流入量 $Q_1(t)$ の生起確率分布を要素とする。すなわち,

$$P_1(t) = \{P_1^{(1)}(t), P_1^{(1)}(t), \dots, P_1^{(s)}(t)\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

また, $P_k(t + \tau_1 + \dots + \tau_{k-1})$ は空間的にも時間的にも一様でない $(s+1) \times (s+1)$ 有限マルコフ連鎖で構成され,

$$\begin{aligned} P_k(t + \tau_1 + \dots + \tau_{k-1}) &= P_k\{Q_k(t + \sum_{i=1}^{k-1} \tau_i) \\ &= j | Q_{k-1}(t + \sum_{i=1}^{k-2} \tau_i) = i\} \\ &= \{P_{ij}^{(k)}(t + \sum_{i=1}^{k-1} \tau_i)\} \quad (i, j = 0, 1, \dots, s) \quad \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

このように考えると, r 地点での河道疏通能力 F_r との比較から, 洪水の生起確率 (通過流量が河道疏通能力を超える確率) q_r は次式で与えられる¹⁰⁾。

$$\begin{aligned} q_r(t + \sum_{i=1}^{r-1} \tau_i) &= P_r\{Q_r(t + \sum_{i=1}^{r-1} \tau_i) > F_r\} \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{[F_r]} P_r^{(r)}(t + \sum_{i=1}^{r-1} \tau_i) \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

ここに, $[F_r]$ は F_r の整数部を表す。

以上の展開はダム操作がなく, また r 地点までに破堤・氾濫がない場合の算定法であったが, つぎにダム操作を考慮した場合への拡張を考えよう。

(2) ダム操作を考慮した場合の算定法

Fig. 3 に示した各支川にダムが介在し, その貯留効果を考慮する河川システムを設定する (**Fig. 4** 参照)

いま, 以下のような放流ルールが放流量 O_k を調節するために仮定される。

$$\left. \begin{aligned} O_k &= Q_k && 0 \leq Q_k \leq M_k \\ O_k &= M_k && M_k < Q_k \leq K_k \\ O_k &= Q_k - (K_k - M_k) && K_k < Q_k \leq s \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

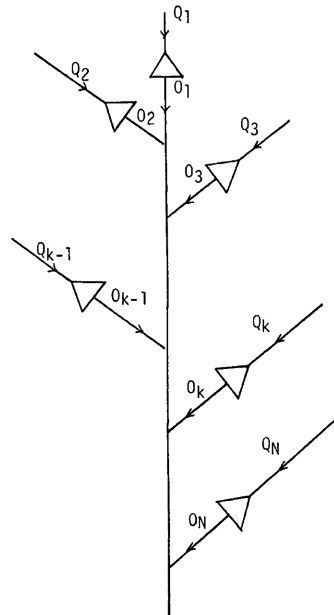


Fig. 4. River system with multi-reservoirs.

ここに、 M_k は支川からの流入量に対するある適当な値、 K_k は放流量 M_k が許容されるとき、ダム k に収容されうる最大流量、 $Q_k - (K_k - M_k)$ は $Q_k > K_k$ のとき起こるオーバーフロー $Q_k - K_k$ を含んだ全放流量である。もちろん、一定量放流ルールの場合には、

$$\left. \begin{aligned} O_k &= Q_k & ; 0 \leq Q_k \leq M_k \\ O_k &= M_k & ; M_k < Q_k \leq K_k \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

を考えればよい。

このように放流ルールが仮定されると、放流量は流入量と即時的対応をするので、インプット—アウトプット変換行列で表現することができる。以後、この変換行列を O_k で表現すると、 O_k は次式のようなになる¹¹⁾。

$$\begin{aligned} O_k &= \{P_r(O_k = v | Q_k = u)\} \\ &= \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \cdots M_k & M_{k+1} & M_{k+2} \cdots s-(K_k-M_k) & s-(K_k-M_k-1) \cdots s \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ M_k \\ M_{k+1} \\ M_{k+2} \\ \vdots \\ K_k \\ K_{k+1} \\ K_{k+2} \\ \vdots \\ s \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 & & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \end{matrix} \quad \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

上式は任意の流入量 $Q_k = u$ が入ってきたとき、放流量 O_k が v となる確率行列を表わしている。

ところで、 $k-1$ 地点へのある流入量 Q_{k-1} は Q_k とマルコフ従属をしているので、 Q_{k-1} と O_k との間にはつぎの遷移行列が構成される。

$$\{P_r(O_k = v | Q_{k-1} = u)\} = P_k \cdot O_k \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここに、 P_k は(22)式で与えられるものと同じ確率行列である。

以上の仮定をふまえると、Fig. 4 の河川システムへインプットされた流入量 Q はダムにより変換された後、放流量 O を生みだすから、これら放流量の任意時刻、任意合流地点を通過する合成流量の分布 V_r は、前節(9)、(20)式の拡張的な形として次式のように算定される。

$$V_r = (\cdots(((P_1 * I) O_1)' * (P_2 O_2)) * \cdots) * (P_r O_r) \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$V_r \cdot E = \{\pi_0^{(r)}, \pi_1^{(r)}, \cdots, \pi_{r-s-1}^{(r)}\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここで、 $\pi_i^{(r)}$ は r 地点での流量規模が i である確率を表わす。ただし、上式においては l 段階後に得られる $(sl+1) \times (s+1)$ 行列の i' 行 j' 列要素の中で $p_{i'j'}^{(l)}$ を含む項について以下のような操作をした後に、右側から $P_{l+1} O_{l+1}$ を shift-operation する、というルールを保持しなければならない。すなわち、 $p_{i'j'}^{(l)}$ のサフィックス j が $(sl+1) \times (s+1)$ 行列の列番号 j' から 1 を引いた値に等しい場合にはそのままの位置に、一致しない場合はその項を i' 行 $j+1$ 列に移行するという操作である。このとき、ダム操作後の洪水の生起確率は、 $P_r(O_r(t + \sum_{i=1}^{r-1} \tau_i) > F_r)$ として与えられる。

(3) 破堤・氾濫効果を導入した場合の算定法

破堤・氾濫効果は厳密に氾濫解析を通じて議論しなければならないが、淀川流域での氾濫解析¹²⁾などを考慮すると、いまの問題に対しては Fig. 5 に示すような流下率なる概念でおきかえても十分精度がある。このことは、破堤・氾濫効果が流下率を導入した氾濫前後のハイドログラフから変換マトリックスを構成することによって考慮できることを意味している。したがって、河道疏通能力以上はこの流下率で、疏通能力

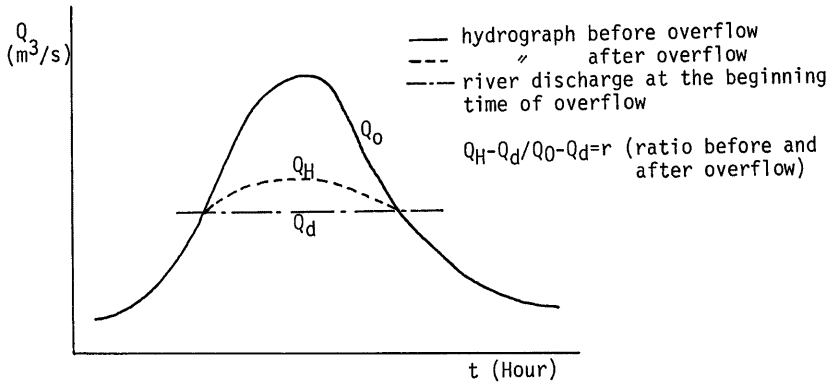


Fig. 5. Hydrographs before and after overflow.

以内は単位行列で変換マトリックスを構成すれば、ダム操作と同様の展開で破堤・氾濫効果を導入した洪水の生起確率を算定することができる。もちろん、ダム操作を導入した場合と同様に洪水の生起確率は

$$P_r\{O_i(t + \sum_{l=1}^{r-1} \tau_l) > F_r\}$$

(4) より複雑な河川システムへの拡張

支川や本川にダムあるいは破堤・氾濫箇所がいくつもある複雑な河川システムへの拡張も、変換行列および shift-operation を組み合わせていくことによって可能である。たとえば、Fig. 6 に示すような河川システ

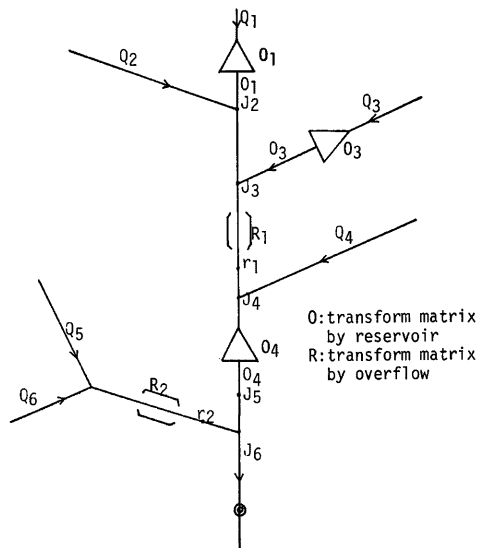


Fig. 6. Complicated river system.

ムにおいては、以下の手順をとることにより洪水の生起確率が算定される。

- 1) 合流点 J_2 での合成流量の生起確率 S_2 は $S_2 = (P_1 O_1) * (P_2 * I)$
 - 2) S_2 の構成要素 $p_{ij} p_{jk}$ の添字 k に着目する。 $k=0$ のときは第1列に、 $k=1$ のときは第2列に、 $\dots$ 、とそれぞれ要素を移動した行列を S_2^0 とし、その右側から $P_3 O_3$ を shift-operation する。すなわち、 $S_3 = S_2^0 * (P_3 O_3)$
 - 3) 遊水池変換行列 R_1 で変換された後の r_1 地点での流量の生起確率 T_1 は $T_1 = R_1' * S_3$ 。ここに $'$ は転置を意味する。
 - 4) T_1 を2)と同様なルールにしたがい修正し、修正後の行列を T_1^0 とする。
 - 5) 合流点 J_4 では $S_4 = T_1^0 * P_4$
 - 6) O_4 で変換された後は、 $S_5 = O_4' * S_4$ となる。
 - 7) Q_5, Q_6 の流入量を受けて R_2 で変換された後の r_2 地点での合成流量の生起確率 T_2 は $T_2 = R_2' * \{ (P_5 * I) * P_6 \}$
 - 8) T_2 の各行の成分を加えたものを各行の成分内容とし、その成分内容 $p_i p_{ij}$ のすべての p_i を $p_{0i} p_{ij}$, $p_{1i} p_{ij}$, $p_{2i} p_{ij}$, $\dots$ におきかえたものをその行の1列, 2列, 3列, $\dots$ 成分とする。このように修正された行列を T_2^0 とする。
 - 9) 合流点 J_6 での合成流量の生起確率 S_6 は $S_6 = S_5 * T_2^0$
 - 10) ③地点での通過流量の生起確率は $S_6 * E$ の各行の値として求まる。ただし、 $E' = [1, 1, \dots, 1]$ である。
- もちろん、③地点より上流にいくつか評価地点があれば、それぞれの評価地点において合成流量の生起確率行列に右側から E 行列を乗ずれば、その評価地点での洪水流量の生起確率が各行の値として求まることはいうまでもない。

4. 水系一貫した治水計画の策定に関する理論構成

1. で述べたように、水文システムと水資源システムの結合は重要であり、前章までに水文システムとくに洪水流量の確率分布特性を議論してきた。本章では、こうした洪水の時・空間生起確率を基礎に、水系一貫した治水計画を策定する方法論を展開する。

4. 1 最適化問題

水文システムの情報を水資源システムの計画・設計・操作問題に有効に利用し、意志決定をはかる手段として最適化手法がある。一般に、水文システムが不確実な現象を取り扱っている以上、その最適化にも不確実性下での意志決定手法の展開が必要である。

Stochastic optimization technique といっても、その内容は多種多様であり、最適化問題に不可欠な目的関数および制約条件をいずれも平均値あるいは期待値表現でおきかえ、通常の LP や DP で最適解を求める方法からシミュレーション手法を駆使する方法まで広範囲にわたっている。

一般に、最適化問題は次式のように目的関数および制約条件から構成されている。

$$\text{目的関数; } \max \text{ or } \min f(\mathbf{X}) \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$\text{制約条件; } g_i(\mathbf{X}) = b_i, \quad i=1, \dots, m \quad \dots\dots\dots (31)$$

ここに、 $\mathbf{X}$ は決定変数ベクトルである。問題によれば、目的関数 $f(\mathbf{X})$ 、1つまたはいくつかの制約条件 $g_i(\mathbf{X})$ あるいは制約条件の右辺の値 b_i さらには決定変数そのものが不確実性にみまわれることがある。このなかで目的関数 $f(\mathbf{X})$ および b_i がランダムな形で最適化問題が組み入れられる場合は、ランダムな制約条件式 $g_i(\mathbf{X})$ あるいはランダムな決定変数 $x_j \in \mathbf{X}$ を取り扱う場合より比較的容易である。たとえば、目的関数のなかにランダムな成分が含まれている場合によく用いる方法はコスト関数とか便益関数の期待値表現である。もちろん、この期待値表現がいずれの場合にも満足いく解をもたらすとは限らないがよく用いられる方法である。一方、 b_i がランダムな場合は次節のような取り扱いが可能である。

4. 2 Chance constraint method

いくつかの制約条件式の右辺の値 b_i がランダムであるとき、その制約条件が満足しなければならない確率 p_i を定義することによって、確率制約条件を課す。すなわち、制約条件式を

$$g_i(\mathbf{X}) = E[b_i] \quad \dots\dots\dots(32)$$

のように期待値表現しないで、たとえばつぎのような chance constraint を課すのである。

$$P_r\{g_i(\mathbf{X}) \leq b_i\} \geq p_i \quad \dots\dots\dots(33)$$

いま、ランダム変数 b_i の確率分布関数 $F_{b_i}(b)$ を

Fig. 7 で与えると、変数 b_i が値 $b_i^{(1-p_i)}$ あるいは $b_i^{(p_i)}$ をこえる確率はそれぞれ $1-p_i$ および p_i となる。

chance constraint (33) 式は $g_i(\mathbf{X})$ がランダム変数 b_i をこえない確率が少なくとも p_i であることを意味している。一方、値 $b_i^{(1-p_i)}$ は確率 p_i でもってランダム変数 b_i の値よりも大きくはならないから、 $g(\mathbf{X})$ が値 $b_i^{(1-p_i)}$ より大きくなることは十分に保障される。したがって、chance constraint

$$P_r\{g_i(\mathbf{X}) \leq b_i\} \geq p_i \quad \text{あるいは} \quad P_r\{g_i(\mathbf{X}) \geq b_i\} \leq 1-p_i \quad \dots\dots\dots(34)$$

は次式のような確定的な制約条件と等価になる¹³⁾。

$$g_i(\mathbf{X}) \leq b_i^{(1-p_i)} \quad \dots\dots\dots(35)$$

同様に、chance constraint

$$P_r\{g_i(\mathbf{X}) \geq b_i\} \geq p_i \quad \text{あるいは} \quad P_r\{g_i(\mathbf{X}) \leq b_i\} \leq 1-p_i \quad \dots\dots\dots(36)$$

に等価な確定的制約条件は

$$g_i(\mathbf{X}) \geq b_i^{(p_i)}$$

となる。この chance constraint に等価な確定的制約条件が以下の理論構成の基礎となる。

4. 3 治水計画への適用

前節の chance constraint method を治水計画に適用することを考える。すなわち、複数の洪水防御地点において洪水の河道疏通能力を超える確率をある一定の値におさえながら、ダム建設、河道改修などの配置、規模、操作ルールとそれに要する費用を最小にしたり、あるいは防御効果による純便益を最大にするといった形で水系一貫した治水計画を立案しようとするものである。これはまさに、水文システムで構成した洪水の時・空間生起確率算定法と水系一貫した治水計画の策定を chance constraint モデルで結合しようとするものである。

いま Fig. 6 の河川システムの一部をとり出し、Fig. 8 のようなシステムにこうした方法を適用することを考える。すなわち、2つのダム A, B、破堤・氾濫を許す箇所 OF_C , OF_D 、2つの評価地点 ①, ② となるシステムで Q はダム流入量あるいは支川流入量である。

まず、目的関数としては洪水防御効果による純便益を最大にすることを考える。すなわち、

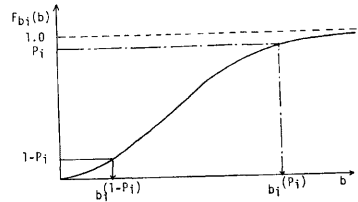


Fig. 7. Distribution function of random variable b_i .

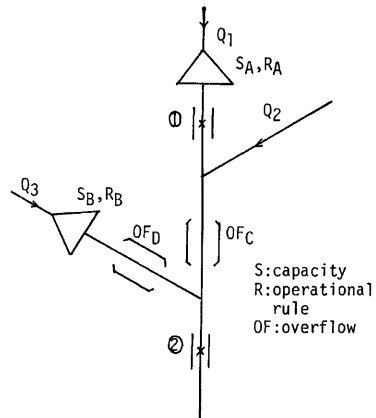


Fig. 8. River system applied of chance constraint model.

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{X}} \{B(\mathbf{X}) - C(\mathbf{X})\} = & \sum_{i=1}^T \{B_{1i}(S_A, R_A, X_{①}) - C_{1i}(S_A, R_A, X_{①})\} \\ & + \sum_{i=1}^T \{B_{2i}(S_B, R_B, X_{②}) - C_{2i}(S_B, R_B, X_{②})\} \quad \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

ここに $\mathbf{X}$ は決定変数であり、いまの場合ダム の規模 S 、操作ルール R 、評価地点での河道改修規模あるいは河道疏通能力 $X_{①}$ がこれに相当する。 $B(\cdot)$ は便益関数を、 $C(\cdot)$ はコスト関数を意味し、 T は洪水防御期間である。なおサフィックス 1, 2 は評価地点を表わす。一方、制約条件としては次式の確率制約条件を考える。

$$P_r(X_{①} \leq Q_{①}) \leq 1 - p_1 \quad \dots\dots\dots (38)$$

$$P_r(X_{②} \leq Q_{②}) \leq 1 - p_2 \quad \dots\dots\dots (39)$$

これらの確率制約条件は、前節の議論とくに (36) 式からわかるように次の確定制約条件と等価になる。

$$X_{①} \geq Q_{①}^{(p_1)} \quad \dots\dots\dots (40)$$

$$X_{②} \geq Q_{②}^{(p_2)} \quad \dots\dots\dots (41)$$

ここに、 $X_{①}$ 、 $X_{②}$ は評価地点 ①、② での河道疏通能力で決定すべき河道改修規模になる。また、 $Q_{①}^{(p_1)}$ 、 $Q_{②}^{(p_2)}$ は評価地点 ①、② を通過する洪水流量 $Q_{①}$ 、 $Q_{②}$ の確率分布関数の p_1 、 p_2 に相当する値である。

ところで、問題は時間軸の扱いである。すなわち、 $Q_{①}$ 、 $Q_{②}$ の確率分布関数は時間的に変化する。それは同時に決定変数 $X_{①}$ 、 $X_{②}$ を時間的に変えることになり現実的ではない。そこで、時間的変化は $Q_{①}^{(p_1)}$ 、 $Q_{②}^{(p_2)}$ が最大値をとる時間、いわゆる洪水ピーク時のみを対象とする。なぜなら、それ以外の時間においては洪水発生確率は p_1 、 p_2 以下になるからである。したがって、(37)、(40)、(41) 式中の $X_{①}$ 、 $X_{②}$ は時間の関数ではなく、ある定った決定変数として扱われる。

つぎに、 $Q_{①}^{(p_1)}$ 、 $Q_{②}^{(p_2)}$ は前章までの洪水の時・空間生起確率算定法によって求められるが、その確率はダム の規模 S_A 、 S_B および操作ルール R_A 、 R_B (問題を簡単にするため、 R_A 、 R_B は S_A 、 S_B に応じてあらかじめ与えられるとする)、さらには破堤・氾濫の関数となっている。さらに、評価地点 ② の洪水流量には評価地点 ① の河道疏通能力 (決定変数) も関係してくる。すなわち、

$$Q_{①}^{(p_1)} = f_n(S_A, R_A, p_1)$$

$$Q_{②}^{(p_2)} = f_n(S_A, S_B, R_A, R_B, OF_C, OF_D, X_{①}, p_2)$$

となっている。したがって、(37) 式の目的関数は具体的には、

$$\begin{aligned} \max_{\substack{X_{①}, X_{②}, \\ S_A, S_B}} \{ & \sum_{i=1}^T \{B_{1i}(X_{①}, S_A, R_A) - C_{1i}(X_{①}, S_A, R_A)\} + \sum_{i=1}^T \{B_{2i}(X_{①}, X_{②}, S_A, S_B, R_A, R_B) \\ & - C_{2i}(X_{②}, S_B, R_B)\} \quad \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

制約条件は、

$$X_{①} \geq Q_{①}^{(p_1)} = f_n(S_A, R_A, p_1) \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$X_{②} \geq Q_{②}^{(p_2)} = f_n(S_A, S_B, R_A, R_B, OF_C, OF_D, X_{①}, p_2) \quad \dots\dots\dots (44)$$

となる。なお、(42) 式中のコスト関数 $C(\cdot)$ には施設規模 X 、 S の建設費用およびダム貯水池の操作・維持・管理費用が含まれる。また、便益関数 $B(\cdot)$ は、通常よく用いられる被害軽減額で評価する。すなわち、

$$B_{1i}(X_{①}, S_A, R_A) = \int_{Q_{①}}^{X_{①}} D(Q_{①}) P_r(Q_{①}) dQ_{①} \quad \dots\dots\dots (45)$$

$$B_{2i}(X_{①}, X_{②}, S_A, S_B, R_A, R_B) = \int_{Q_{②}}^{X_{②}} D(Q_{②}) P_r(Q_{②}) dQ_{②} \quad \dots\dots\dots (46)$$

ここに、 $\bar{Q}_{①}$ 、 $\bar{Q}_{②}$ は現有の河道疏通能力、 $D(Q_{①})$ 、 $D(Q_{②})$ は洪水流量 $Q_{①}$ 、 $Q_{②}$ の関数として表現した被害関数である。もちろん、 $p_r(Q_{①})$ 、 $p_r(Q_{②})$ は流量の生起確率であり、前章までの展開によって算定でき

る。ただし、前述したように、その確率にはダム A 、 B の規模 S_A 、 S_B および 操作ルール R_A 、 R_B (これは一定量あるいは一定率・一定放流量にみられるごとく S_A 、 S_B に応じて与えられるとする)、さらには破堤・氾濫効果の関数となっている。さらに、②の洪水流量には①の河道疏通能力も関係してくる。しかもこれらの係りは陰の形で表現になってくる。

こうした問題に対してはつぎのような接近をとらざるをえない。すなわち、1) $X_{①} \geq Q_{⑤}^{(p_1)}$ の範囲内で、 $S_{①}$ 、 $X_{①}$ の組み合わせに応じて $Q_{⑥}(t)$ の確率分布関数を求める。2) この関数は、 $f_n(S_A, S_B, R_A, R_B, OF_C, OF_D, X_{①}, p_2; t)$ の関数となっているから、 $Q_{⑥}^{(p_2)}(t)$ の最大値 $Q_{⑥}^{(p_2)}$ を用いて、3) $X_{②} \geq Q_{⑥}^{(p_2)}$ の範囲で、

$$\sum_{i=1}^T \{B_{2i}(X_{①}, X_{②}, S_A, S_B, R_A, R_B) - C_{2i}(X_{②}, S_B, R_B)\}$$

を max にする $X_{②}$ を求める。4) この操作を S_A 、 S_B 、 $X_{①}$ の組み合わせごとにおこない、5) 最終的には、 $\max \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^2 B_{ji}(X_{①}, X_{②}, S_A, S_B) - C_{ji}(X_{①}, X_{②}, S_A, S_B)$ となる $X_{①}$ 、 $X_{②}$ 、 S_A 、 S_B を最適解とするのである。こうした接近は一種のシミュレーション探索法といえよう

さらに多くのダム計画や河道改修計画を含んだシステムとなると完全にシミュレーションとならざるをえない。すなわち、1) ダムの規模、操作ルール、河道改修規模を与えて、各評価地点での洪水氾濫確率の時間的変化を求める。2) つぎに、その洪水氾濫確率がいずれの時間においても p_i なる許容確率にあるもののみを治水計画の候補者とする。3) さらに、それらの候補者について $\sum_{i=1}^T \{\text{Benetit-Cost}\}$ を求め、その最大値をとる組合せを最適な治水計画とするのである。4) もちろん、予算の制約があれば、 $\text{Cost} \leq C_{\max}$ の範囲内での最大値をとる組合せが最適となることはいうまでもない。5) 既設のダムおよびその操作効果はもちろん、shift-operation によって洪水流量の算定の中に組み込まれている。

なお、多くのシミュレーションを通じて、(42)式に相当する目的関数、(43)、(44)式に相当する制約条件式が、決定変数 $\mathbf{X}$ の陽な形で線形であろうと、非線形であろうと近似できる、あるいは近似することを考えると、通常の線形計画法や非線形計画法の導入も可能となる。ただ、こうしたシステムに対して、近似できたとしても、かなり多くのシミュレーションが必要であろう。

5. 結 語

洪水防御計画の策定状況が、流域に多く出現してきた防災地区を対象にしなければならなくなってきたこと、多くの既設ダムによる洪水コントロール、および大規模な土地利用の改変など洪水流況への人為的インパクトが大きくなってきており、その効果を見えなくなっていること、などにかんがみ、本研究は水文情報システムとしてダム群および破堤・氾濫効果を導入した洪水の時・空間生起確率算定法を提案するとともに、それを基礎に水資源システムとしての人為的効果を考慮した最適化手法を提示し、この両システムを結合することによって水系一貫した治水計画の立案をはかろうとしたものである。

その基本となる理論展開は、一様でない有限マルコフ連鎖に従属する確率変数の和分布を求めることであり、shift-operation および変換マトリックスの概念を導入して、任意時間、任意地点での洪水の生起確率を算定している。さらに、このような水文システムの情報を水資源システムの計画、設計、操作問題に有効に利用し、意志決定をはかる橋渡しをする最適化手法としての chance constraint method を治水計画に適用する基本的な考え方を展開した。

以上、本研究では理論構成に重点をおいて議論を進めてきたが、今後はこうした理論展開を実際の流域さらには実際の治水計画策定に適用していくべきである。それには水文データの収集をはじめ、部分流域での単位図、治水施設のコスト、便益関数などの調査、分析が必要であり、今後、こうした収集、調査、分析をはかり、実際問題への適用をはかっていきたい。

なお、本研究の理論構成の一部は、鹿島学術振興財団海外派遣研究助成をうけて遂行したことを付記しておく。

参 考 文 献

- 1) 小坂 忠；河川と下水道，建設省都市河川対策室，昭49.
- 2) 長尾正志；洪水処理計画に関する確率論的研究，京大防災研年報10号 B，1967.
- 3) 石原安雄・瀬能邦雄；はんらんの確率論的評価について，昭46年度土木学会関西支部年講，1971.
- 4) Chow, V.T.: Stochastic Hydrologic Systems, Proc. of 1st Bilateral U.S.-Japan Seminar in Hydrology, 1971, pp. 1.1-1.23.
- 5) 田中雄作；治水計画における降雨波形の処理について，土木学会論文報告集，No. 204，1972.
- 6) 今井一郎，鈴木栄一；降雨の相関解析，電気通信研究所成果報告，1, 825，1962.
- 7) Conover, W.J.: The Distribution of $\sum f(y_i)$ Where $(y_0, y_1, \dots)$ is Realization of a Non-Homogeneous Finite State Markov Chain, Biometrika 52, No. 1, 1965. pp. 277-279.
- 8) 高埴琢馬；出水系とその機構，石原藤次郎編水工水理学，丸善，1972.
- 9) 石原安雄，小葉竹重機；河道網における洪水の合成について，土木学会第39回年次学術講演会講演概要集Ⅱ-60，1974.
- 10) Nathan Buras: Scientific Allocation of Water Resources, American Elsevier Pub. Co., 1972, pp. 63-67.
- 11) 前出 10)
- 12) 稲田 裕；貯水池群による淀川水系の最適洪水調節に関する研究，京都大学学位論文，1977. pp. 155-158.
- 13) Loucks, D.P.: Stochastic River Basin Model, Lecture note at M.I.T., 1978.