

洪水の伝播速度について

石原 安雄・小葉竹重機

ON THE PROPAGATION SPEED OF A FLOOD WAVE

By *Yasuo ISHIHARA* and *Shigeki KOBATAKE*

Synopsis

The runoff phenomenon of a heavy rainfall in a river basin is divided briefly into the transformation process from rainfall to outflow on mountain slope and the propagation process of water resulting from the above outflow in river channel. As the part of the research of such a runoff, this paper describes the physical background of the propagation speed of flood waves in an actual river channel, and consists of two parts.

In the first part, the change of propagation speed of a flood wave passing through a location of river channel is discussed. As the results, it is found out that the flood wave is characterized remarkably as a uniformly progressive flow at the rising stage, and that the propagation speed at a location of river channel holds nearly constant regardless of change of discharge, because the relationship between the cross-section area of the flow and the discharge shows approximately linear.

In the second part, the change of propagation speed of a flood wave along a river course is examined. The river bed configuration is divided into mountainous river bed, dune bed type-I and dune bed type-II, and the formulae of flow resistance for each bed configuration is discussed in the light of open-channel hydraulics. It is obtained from the discussions that the mean velocity of a flood flow, corresponding the propagation speed, has a tendency to increase from upstream to downstream in a mountainous region, that is, in the range of mountainous river bed, and to decrease slightly from upstream to downstream in a alluvial region, that is, in the range of dune bed type-I or type-II.

1. 概説

河川流域における洪水時の雨水流出が、流域の表層地質と表面地形によって特性づけられ、河域地形が主として洪水時の侵蝕及び洗掘作用によって形成されたものであることは、多くの研究者によって認められている。このことから、洪水時の雨水流出過程を、雨水の山腹斜面での変形過程を含む小流域における流出過程、すなわち単位セル内の流出過程と、それらの単位セルを結合している河道網系における洪水の合流・流下過程とから成り立つものと考えることができる¹⁾。したがって、後者の合流・流下過程がどのように表現されるかということは、前者の流出過程の研究と同等に重要であるといわなければならない。

ところで、水理学の分野では古くから多くの研究者によって洪水流の水理学的研究が行われ、一様河道を

伝播する洪水流の理論についてはほぼ完成の域にあり³⁾, さらに複雑な断面形状と境界条件のもとにおける洪水流の挙動についても逐次解明されつつある³⁾⁴⁾。一方, 近年の計算機の著しい進歩で, 開水路流れの基礎方程式を直接数値計算することが可能となり, 種々の境界条件のもとにおける水理量が比較的簡単に得られるようになった。

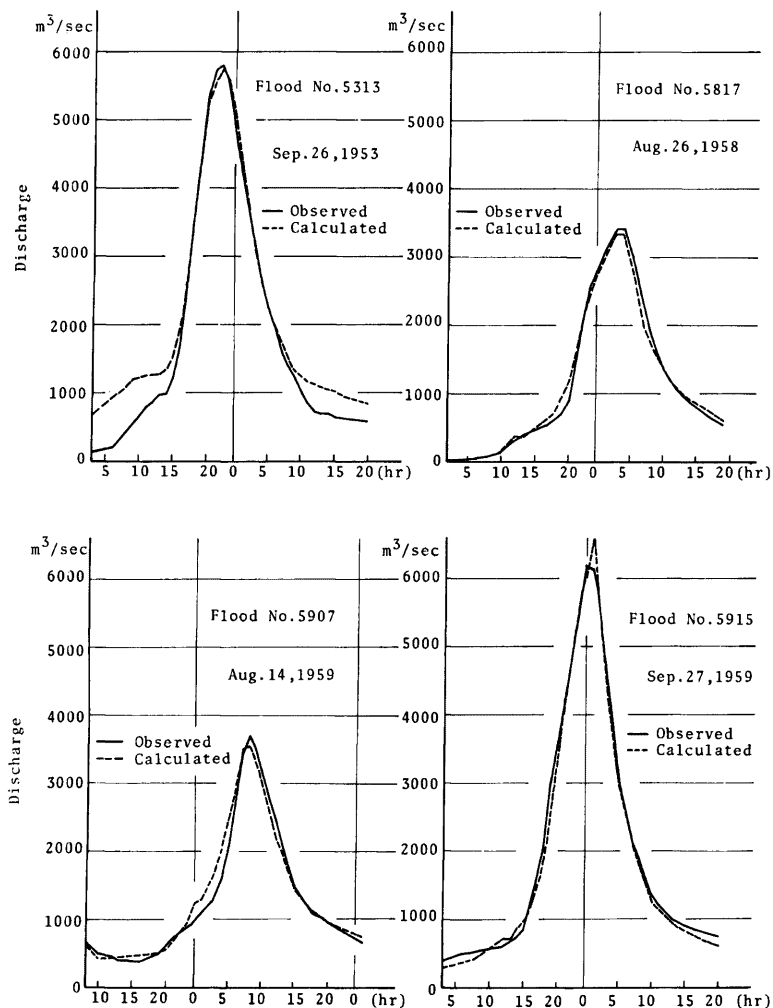


Fig. 1. Observed hydrographs at Kamo of River Kizu, and calculated ones which are calculated by the assumptions of linear translation and linear superposition using the data at Tsukigase and Shimagahara.

これらの成果が流出計算の中にも用いられることは当然望ましいことであるが、降雨から河川流出水への変換の算定精度が、これらの河道内における洪水追跡計算の精度に比べて一般にかなり劣る現在では、計算量が増大することもある実用的ではない。洪水予報などの実際問題では、簡便な計算方法によって迅速に結果を得ることが要求される場合がしばしばある。

Fig. 1 は高山ダムが完成する以前の木津川・加茂地点の洪水ハイドログラフを4例示したものである。このうち5313洪水（昭和28年13号台風）と5915洪水（昭和34年15号台風、伊勢湾台風）はこれによって高山ダム、続いて青蓮寺、室生ダムが追加建設された、いわば代表的な木津川の洪水である。図中実線は加茂地点の実測ハイドログラフであり、破線は加茂地点から上流約16kmで合流する名張川、伊賀川のそれぞれ月ヶ瀬、島ヶ原流量観測点のハイドログラフから求めた加茂地点の計算ハイドログラフである。計算は伝播速度を一定とし、合流も単純な重ね合わせで表現できるとした、いわゆる線形河道の仮定に基づいたものである。すなわち月ヶ瀬・加茂間（25km）、島ヶ原・加茂間（21km）を2時間で伝播するとし、残流域からの流出量としては月ヶ瀬地点の現在の流量に残流域の平均雨量と月ヶ瀬流域の平均雨量の比を乗じ、さらに流域面積比0.58を掛けたものを加茂地点で合流する残流域からのハイドログラフとしたものである。極めて単純で粗い計算であるにも拘わらず実測値と計算値は驚く程良く一致している。そこで、われわれはこの関係をさらに一般化して、河道網系における洪水の伝播合成過程を単純なおくれ過程と線形合流過程で表現し、河川流域からの流出過程をいわゆる一次元多段過程⁶⁾として次式を示した⁶⁾。

$$q_i(t) = \{A_i \cdot z(2\alpha_i) + B_i \cdot z(\tau_i + \alpha_i) + C_i \cdot z(2\tau_i)\} * q_{i-1}(t) \quad i=2, 3, \dots, n \quad \dots\dots\dots (1)$$

$q_i(t)$ は i th order の流域からの流出ハイドログラフで単位量の降雨に対する単位面積当りのもの、 $z(\beta)$ は $z(\beta) * f(t) = f(t - \beta)$ を表わす時間変換オペレーターである。 A_i, B_i, C_i は統計則から得られる平均的な i th order の流域構成とその合流状況を示す **Fig. 2** において

$$\begin{aligned} A_i &= a p_i^2 / G_i \\ B_i &= (1+a) p_i / G_i \\ C_i &= 2 / G_i \\ G_i &= 2 + (1+a) p_i + a p_i^2 \end{aligned}$$

で a は $(i-1)$ th order の流域に対する残流域の面積比、 p_i は降雨強度比である。 α_i, τ_i は i th order における雨域および流水の伝播時間を表わし、 $\alpha_i = l_i / 2U$, $\tau_i = l_i / 2V_i$ である。結局、 n th order の河川流域からの流出量 $q_n(t)$ は (1) 式の核を F_i とおくと、つぎの漸化式で表わされる。

$$q_n(t) = F_n * F_{n-1} * \dots * F_2 * F_1 * r_0(t) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$r_0(t)$ は降雨、 F_1 は単位セル内における降雨から流出量への変換核である。

この理論を二、三の流域に適用してみたところ、洪水予報というような応用水文学的な立場からいえば、充分な精度で流出量の算定が行えることが明らかとなった⁷⁾⁸⁾。しかし洪水流出という非線形現象を線形系によって表現しようとする以上、まずその背景となる物理的意義ないしは近似度を明確にしておくことが必要で、またその適用にあたっては自から制約があるはずで、したがって、この条件を明らかにしておくことが重要である。

本文はこうした立場に立って、河道内における洪水の伝播現象のうち伝播速度について考察を加えたものであるが、便宜上、一地点における流量の増減に伴う洪水の伝播速度の変化と、流下方向に沿っての伝播速度の変化とに分けて考察を

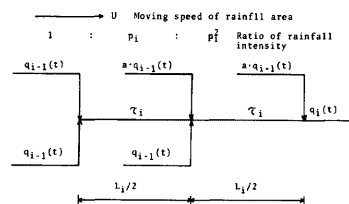


Fig. 2. Stream net of i th order river basin obtained by the analysis of a river basin geometry.

行うことにする。

2. 一地点における洪水の伝播速度

河道を流下する洪水波の伝播速度については、古くから Kleitz-Seddon の法則が成立することはよく知られている。

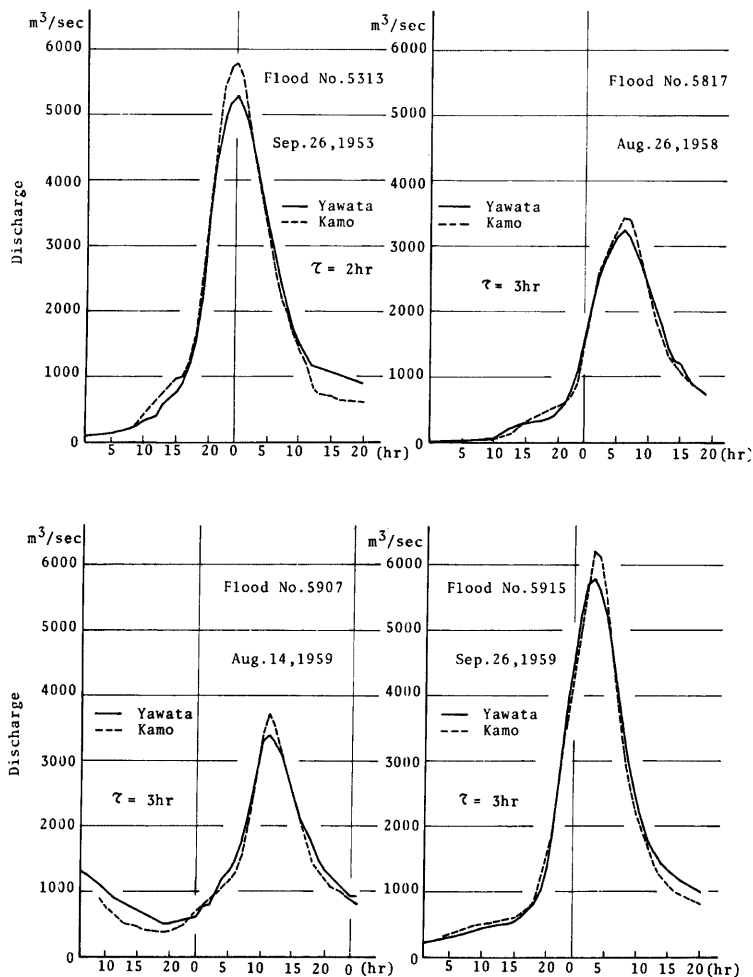


Fig. 3. Observed hydrographs at Yawata of River Kizu, and linearly translated hydrographs at Kamo.

$$\omega = dQ/dA \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 ω は伝播速度、 Q は流量、 A は流水断面積である。その後、わが国においても洪水流の Kinematic wave としての特性が明確にされ、林²⁾、田中¹⁾、高橋⁴⁾などによって研究が進められた結果、洪水ピークの伝播速度は

$$\omega_p = (dQ/dA)_{Q=Q_p} \quad \dots\dots\dots (4)$$

で与えられることが明らかとなった。

いずれにしても、洪水時の流況は Kinematic wave で近似でき、その伝播速度は $Q \sim A$ 関係によって大体定まるといことはほぼ確実のようである。

また、すでに多くの研究者によって指摘されているように、上下流の二点で測定されたハイドログラフを時間をずらして重ね合わせると、増水期については両者がほぼ一致し、減水期には下流値でのてい減がやや緩やかになっていることが見出される。また厳密な運動式及び連続式を用いた数値計算の結果求められるハイドログラフを同様に重ね合わせてみると、ほぼ同じような関係になっていることも見出される。Fig 3 は木津川に加茂地点とその下流に位置する八幡地点のハイドログラフを、 $\tau=2\text{hr}$. または 3hr . ずらして重ねたもので、洪水は Fig. 1 のものと同じである。ピークはてい減するが、それまでは両者はほぼ一致しており、前述の特性が明らかである。

実用上から、もう一つの注目すべきことは、流下距離が比較的小さいと、ピークの減衰が大きくないことである。水理学的厳密さからいうと、僅かなピークの減衰でも、洪水の大きさや波形などがその減衰状態にどのように影響するかを調べることは非常に有意義であることはいうまでもない。しかし前述のように、河川流域における洪水時の雨水流出過程を論ずる中では、上記のピーク流量の僅かな減少はほとんど問題にならないと考えられる。

以上の考察と事実から、少なくとも洪水の増水期の流況はいわゆる一様進行流によって近似的に表現することができるようと思われる。高橋⁴⁾は洪水波が一様進行流の性格を持ち得る可能性について次のような考察を行っている。

洪水波の上立り部分を除けば Kinematic wave としての特性が顕著であるから、同一水深、同一流量、 $\partial H/\partial t = \text{const.}$, $\partial H/\partial x = \text{const.}$ の位相の伝播速度をすべて $5/3 \cdot V$ とする近似を2回行うことによって、一定波高の点の伝播速度 ω に対して次式の近似解を得た。

$$\omega \approx \frac{5}{3} V \left\{ 1 + \frac{9}{50} \frac{nH^{1/3}}{i^{3/2}} \left(1 - \frac{4}{9} F^2 \right) \frac{\partial^2 H/\partial t^2}{\partial H/\partial t} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

但し、 $F^2 = Q^2/gH^3$

カッコ外の $5/3 \cdot V$ は Kinematic wave を示し、カッコ内の項はその修正係数である。すなわち、水位上昇期において V の項は H が大きいほど大きくなり、波形を尖鋭化する効果があるが、 $\partial^2 H/\partial t^2$ が負であれば修正係数は波形を扁平化する効果がある。すなわち、ある地点でのハイドログラフを Fig. 4 のように与えると、下段の表のように ω はハイドログラフの変曲点の間ではほぼ一定となる可能性がある。ただし、Kinematic wave としての特性は洪水波の前面で顕著であるから、ここで得られた ω の特性も最初の変曲点からピーク付近までの間で顕著であると考えられる。

以上のように、洪水波はとくに前面において一様進行流の性格を有するが、これが洪水の伝播を単純なおくれ過程とし

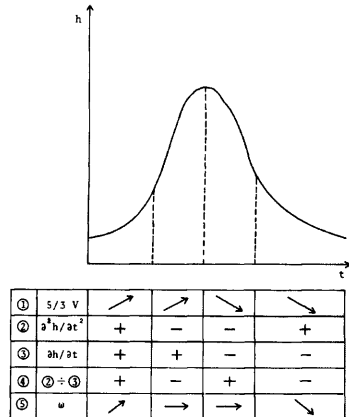


Fig. 4. Explanation of change of the propagation speed of a flood wave using equ.(5).

で近似的に表現できる物理的背景とも考えられる。そこで、次節においてこの一様進行流の特性について考察を行う。なお伝播速度としては同一水深、同一流量などの各種の水理量に対するものが定義されるが、Kinematic wave の特性が強いことと、実際の河川で得られる流量ハイドログラフは水位ハイドログラフから $H \sim Q$ 曲線によって換算されたものが多いということから、本文では水深と流量に関する伝播速度は区別しないで用いることにする。

2.1 一様進行流の特性

一様進行流についてはよく知られているが、以後の説明のために、その特性の一部を述べる。一般に、一様河道の開水路流れに関する一次元基礎方程式は次の2式である。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$i - \left(\frac{dH}{dA} - \frac{Q^2}{gA^3} \right) \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{gA^2} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{n^2 Q^2}{A^2 R^{4/3}} \quad \dots\dots\dots (7)$$

上式に

$$X = t$$

$$Y = x - \omega_0 t, \quad \omega_0 = \text{const.}$$

なる変数変換を行い、整理すると

$$\frac{\partial A}{\partial X} - \omega_0 \frac{\partial A}{\partial Y} + \frac{\partial Q}{\partial Y} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$i - \frac{n^2 Q^2}{A^2 R^{4/3}} - \left\{ \frac{dH}{dA} - \frac{Q(Q - 2A\omega_0)}{gA^3} \right\} \frac{\partial A}{\partial Y} + \frac{\omega_0}{gA} \frac{\partial Q}{\partial Y} = \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial X} - \frac{2Q}{gA^2} \frac{\partial A}{\partial X} \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。一様進行流であるためには

$$\frac{\partial A}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial X} = 0$$

であるから、(8) 式より

$$\frac{dQ}{dY} = \omega_0 \frac{dA}{dY} \quad \dots\dots\dots (10)$$

となる。したがって次式が得られる。

$$\omega_0 A - Q = Q_0 = \text{const.} \quad \dots\dots\dots (11)$$

いま一様進行流となる始点を (A_1, Q_1) 、続点を (A_2, Q_2) とすると、いずれの点においても (11) 式が成立しなければならないから、結局、

$$\omega_0 = \frac{Q_2 - Q_1}{A_2 - A_1} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$Q_0 = \frac{A_1 Q_2 - A_2 Q_1}{A_2 - A_1} \quad \dots\dots\dots (13)$$

が得られる。すなわち一様進行流では、(11) 式によって Q と A とは直線関係にあり、 ω_0 は (12) 式、 Q_0 は (13) 式で与えられるという結果が得られる。

つぎに運動方程式 (9) 式からは次式が得られる。

$$\frac{dA}{dY} = \frac{i - \frac{n^2 Q^2}{A^2 R^{4/3}}}{\frac{dH}{dA} - \frac{(Q - \omega_0 A)^2}{gA^3}} = \frac{i - \frac{n^2 (\omega_0 A - Q_0)^2}{A^2 R^{4/3}}}{\frac{dH}{dA} - \frac{Q_0^2}{gA^3}} \quad \dots\dots\dots (14)$$

(14) 式において、 $dA/dY = 0$ 、すなわち

$$i - \frac{n^2 Q^2}{A^2 R^{4/3}} = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

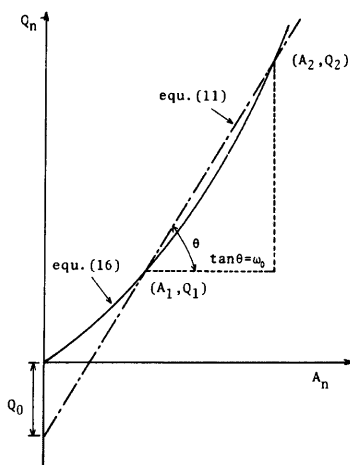


Fig. 5. Relation between steady flow and uniformly progressive flow.

を満足するように、 (A_1, Q_1) 、 (A_2, Q_2) の二つの組合わせを考えると、(14) 式の解は $A=A_1$ 、 $A=A_2$ を漸近線とした単斜曲線で与えられる。いま (15) 式を満足する (等流) A 及び Q を A_n, Q_n で表わすと

$$Q_n = \frac{z^{1/2}}{n} A_n R_n^{2/3} \quad \dots\dots\dots (16)$$

の Manning 形式の式が得られ、それを図示すると Fig. 5 のようになり、この図において、前述の (11)、(12)、(13) 式の関係は図示のとおりである。

2.2 実河川における流積・流量曲線

河道が一様河道とみなせる場合を考える。実河川では流量は時々刻々変化しているが、洪水時にはとくに変化が大きい。したがって低水時を除いては定常状態に近い流況はまず存在しない。このことは、高水時において定常状態の流積と流量との関係、すなわち $A_n \sim Q_n$ 関係を測定することは不可能であることを意味する。すなわち、洪水時に流量観測して得られる結果は常に非定常状態での流積と流量の関係であるはずである。

Fig. 6 は長良川忠節地点で観測された洪水ごとの流積・流量関係である。この図から、増水期には (図中白丸で示されている) $A \sim Q$ 関係はほぼ直線となることが認められ、これまでの考察の結果を裏づけるものである。また減水期には (図中黒丸) 下に凸の曲線となり、全体として一つのループを描くことも認められる。

このように洪水時に測定された $A \sim Q$ 関係はループを描くが、増水期は一様進行流に近い特性を示すことを考えると、そのループは Fig. 5 において、 (A_1, Q_1) 、 (A_2, Q_2) の二点を通る (16) 式の曲線を囲むようなものとなるはずである。また一般にある地点での流積・流量曲線とは、(16) 式で定義されると考えられるが、現実にはそのような状態での実測はほとんどないことは前述のとおりである。したがって、多くの

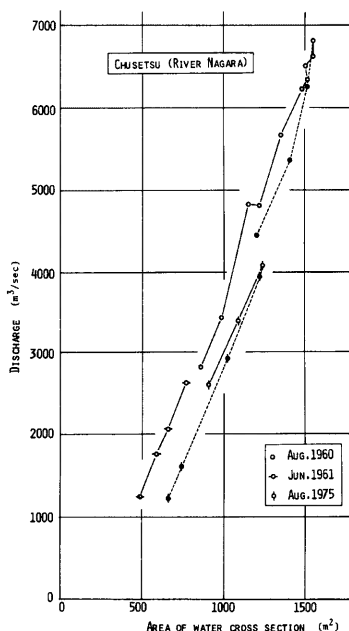


Fig. 6. Observational results at the rising stage of flood wave at Chusetsu of River Nagara.

実測点を用いて、(16) 式に対応する $A_n \sim Q_n$ 関係を決定する際には、peak 近傍での測定点を最重要と考え、かつ実測点を増水期と減水期に分けて描くようにしなければならないことになる。

2.3 実河川における伝播速度とその適用範囲

これまでの考察によって洪水波はとくにその前面で一様進行流的性格を有することが、理論的にも、また実例からも明らかにされ、われわれが雨水流出過程を考える上で仮定した線形河道のうち、伝播を単純なおくれ過程とすることの物理的背景を明らかにすることができた。そこで、つぎに実河川においてこの線形河道の仮定が有効となる流量、あるいは流積の始点（下限）、すなわち洪水波を一様進行流とみなせるようになる始点と、その一様進行流の伝播速度について考察を行う。

いうまでもなく一様進行流の始点は Fig. 4 から明らかなように、洪水波の変曲点付近であって、ある地点に対して一義的に定まるものではなく、伝播速度、すなわち $A \sim Q$ 関係の直線の勾配も洪水波形によって異なるものである。しかしながら、洪水予報のような場合には当該洪水の変曲点とそれ以後の dQ/dA の値を知って計算を進めるよりは、予め定められた始点と見なせる流積（水位）あるいは流量の概略値と、伝播速度とがある方が便利であることは当然である。

そこで、通常の流量観測資料から、この二つの量の概略値を求めることにする。これには洪水の立上りから減水部までの密な流量観測の結果が多くあることが必要であるが、一般にはこうした資料はほとんどないといっても過言ではなく、一つの洪水観測の中で増水期の観測は一、二回で、あとは減水期の観測である場合がほとんどである。したがって、いまの考察には不充分であるが、一応増水期を白丸、減水期を黒丸として流量観測の結果を、縦軸に流量、横軸に流積をとって普通目盛でプロットしてみることにする。この関係はこれまでの考察からもわかるように、(16) 式のまわりを囲むようなものであって、平均的な曲線は (16)

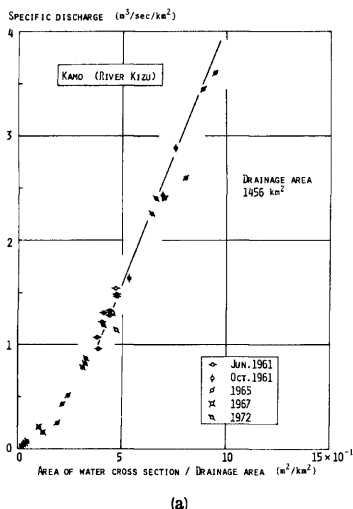
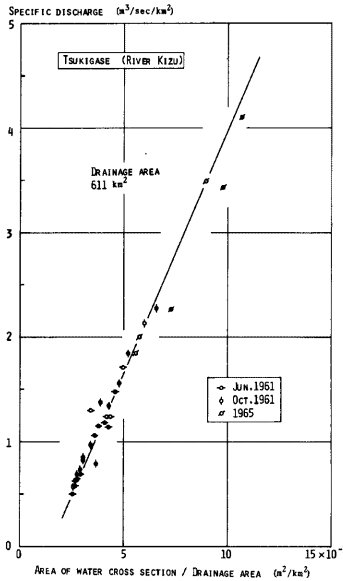


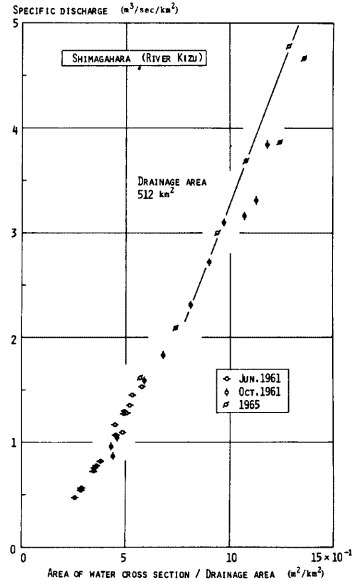
Fig. 7. Observational results of discharge at several points of different rivers in Kinki district. From these figures, approximated starting point of the uniformly progressive flow are obtained.

式を表わすこととなる。普通目盛にプロットすると一般には曲線となるであろうが、ある流量以上の範囲を増水期での観測結果を重視して近似的に直線で表わしてしまうと、この直線の勾配は、それ以上の流量となる多くの洪水の伝播速度の平均値に近い値を与えているものと考えられる。Fig. 7 は近畿地方の諸河川の流量観測点における観測値を、縦軸に比流量、横軸に流積を流域面積で割って無次元化したものをもって示したものである。このうち (a), (b), (c) は前章での考察に用いた木津川の加茂、月ヶ瀬、島ヶ原の各地点におけるものである。(d) の猪名川・軍行橋の例は、後の考察で用いる水面勾配の観測結果もある昭和47年の資料について示したものである。月ヶ瀬地点におけるように、直線近似がかなり精度の良い近似を与えている場合もある。Fig. 8 は Irrawaddy 川の Sagaing 地点におけるもので、この場合もある流量以上では直線近似が妥当と思われる。

Fig. 7, Fig. 8 からこの直線近似が可能となる流量を比流量で考えると、一般に流域面積が小さくなるに従って、この値は大きくなると考えられるが、流域面積がかなり小さくなっても、この値はあまり大きな値とはならないと予想され、オーストラリアの試験地（流域面積 0.39 km^2 ）で行われたトレーサーによる平均流速の測定結果¹⁰⁾を見れば、比流量に換算すると $2.6 \text{ m}^3/\text{sec}/\text{km}^2$ 程度からは平均流速が一定となることが認められる。これらのことを考慮に入れば、日



(b)

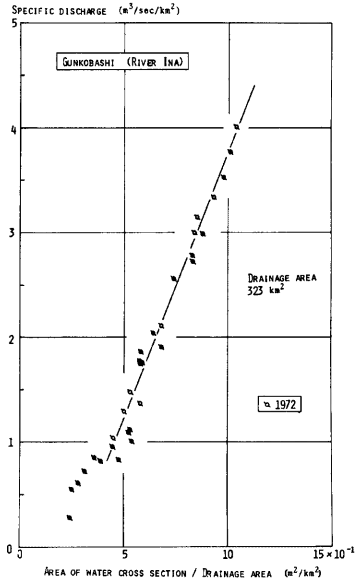


(c)

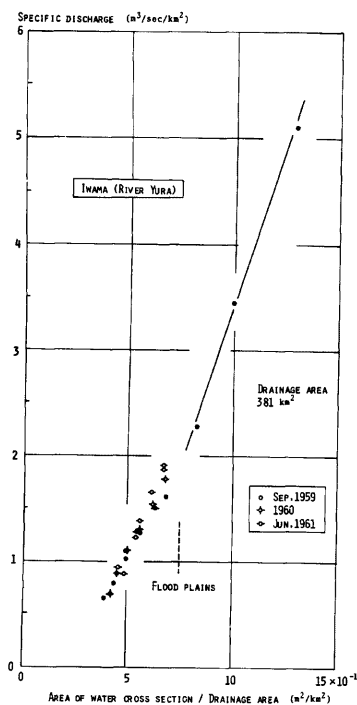
本の河川で流域面積が $10 \sim 1000 \text{ km}^2$ の流域では、この値は $1 \sim 2 \text{ m}^3/\text{sec}/\text{km}^2$ 程度の範囲にあると思われる。

ところで、このようにして得られた直線近似が可能となる始点は、本節の初めにも述べたように一様進行流の始点とは直接的な関係はなく、むしろ、抵抗という面から見た河道条件が変化する点に対応するものとも考えられる。この河道条件の変化の一つは高水敷とか断面形急変部の存在によるものであり、Fig. 7 の中にもこの場合に相当すると思われるものがある。もう一つの変化は流量の増加による河床形態の変化によるものが考えられる。Fig. 9 は猪名川の軍行橋地点における $v/u_* \sim u_*$ 関係を示したもので、Fig. 7 (d) で始点とした流積に対応する u_* の付近からは、 v/u_* がほぼ一定となっており河床波が安定に保たれていると考えることができるので、河床形態が安定する点が直線近似の始点となっている場合の例と考えられる。

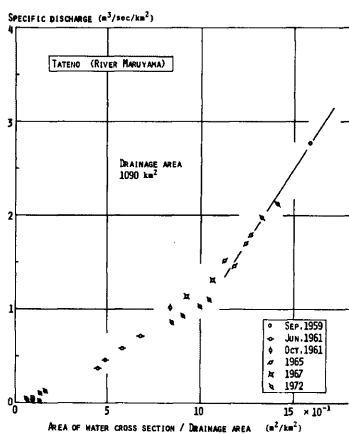
以上、本章での考察によって、伝播を単純なおくれ過程として表現することの物理的背景と、その成立範囲の概略値を得ることができた。また、線形合流過程の仮定に対しては、今後更に検討を行う必要があることはいうまでもないが、Fig. 1 の例からも、実用的にはこの仮定が成立すると考え



(d)



(e)



(f)

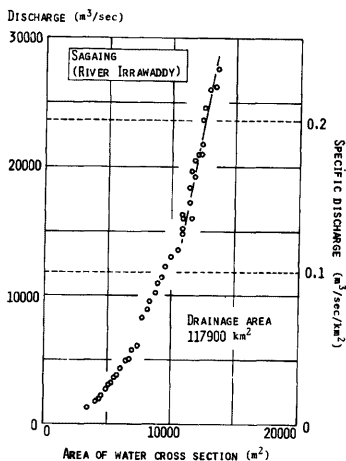
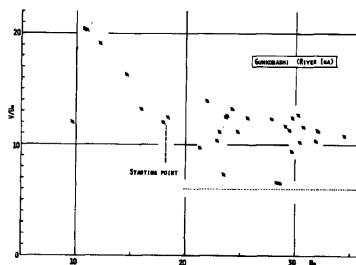


Fig. 8. Observational results of discharge at Sagang of River Irrawaddy.

Fig. 9. Relation between $v/u_* \sim u_*$ at Gunkobashi of River Ina. This figure corresponds to Fig. 7(d).

てよいであろう。

3. 流下方向における伝播速度の変化

Fig. 10 は木津川の加茂地点から上流にある流量観測点における観測結果を、 $A \sim Q$ 関係によって示したものであるが、各観測点は同じような $A \sim Q$ 関係にあり、前章での考察のようにこの勾配が伝播速度を表わすわけであるから、各観測点における伝播速度はほぼ等しいことになる。しかし、さらにもっと詳しく見るならば、流域面積が小さくなると伝播速度が若干速くなっている傾向も認められる。いづれにしても、このように多くの流量観測点があって長年にわた

る資料の蓄積がある場合には、(1)式における τ_i の算定にはこれらの結果を考慮すればよいわけで、(1)、(2)式の適用には都合良く、また計算精度の向上も期待できるはずである。しかし、流域内の流量観測点が少ない場合には、この場合がほとんどであるが、これらの観測結果からだけで τ_i を算定することは困難で、他に洪水の流下方向における伝播速度の変化に関する知識が必要である。

ところで、この問題に関しては、河道が固定床という極端な場合を考えてみても、洪水ごとによって、また時間によっても変化する水面勾配、支川の流入状況など、水量、河道条件の不確定さのために、水理学の立場からの一般論の展開は極めて困難であって、まして、実際河川のように移動床の河道に対してはそれ以上に困難である。

この問題の困難さはいうまでもなく、現象の非定常性に一因がある。これを定常状態として扱ったものが、いわゆる regime theory であり、水理幾何学である。水理幾何学の方野では、平均流速の流下方向への変化に関して、

$$v=CQ^m \quad \dots\dots\dots (17)$$

とおいた時、 m の範囲は $0.05 \leq m \leq 0.25$ であるという結果が得られている¹¹⁾。

しかし、この結果も各地点における多くの洪水の観測結果を集積して得られたものであって、一つの洪水波の伝播速度が流下に伴ってどのように変化するかという問題に対しては、直ちに参考となるものではない。

本章では、一つの洪水流の中のある水塊に注目し、その水塊を含む部分の伝播速度が流下とともにどのように変化するかについて考察を行うが、思考モデルとしては、水理幾何学の場合と同様に、(16)式に対応する定常状態を対象とする。

このように定常状態を基準にして洪水の伝播速度を考察することは（このことは Kleitz-Seddon の法則から平均流速を考察することと同等である）、とりもなおさず抵抗則を考察することである。そこで以下では、まず河床形態を山地河床、砂堆河床Ⅰ、砂堆河床Ⅱに分けて、それぞれについて抵抗則の考察を行い、つぎにそれらが各 order の河道に対応づけられるものとして、order ごとの伝播速度の比を考察して、流下に伴う洪水の伝播速度の変化の様子を調べることにする。

3.1 伝播速度比と平均流速比

一般に v を平均流速、 R を径深、 I をエネルギー勾配、 A を流水断面積、 C_1, K, a, b, z を数値定数とすると、

$$v=C_1 R^a I^b \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$R=KA^z$$

とおくと、

$$v=C_1 K^a A^{az} I^b \quad \dots\dots\dots (20)$$

となり、平均流速 v と伝播速度 ω との関係は、 a, z がある流域の河道に対して一定に保たれるならば、

$$\omega=\frac{dQ}{dA}=v+A\frac{dv}{dA}=v+a zv=(1+az)v \quad \dots\dots\dots (21)$$

となる。よって i th order における ω_i と $(i+1)$ th order の ω_{i+1} の比は

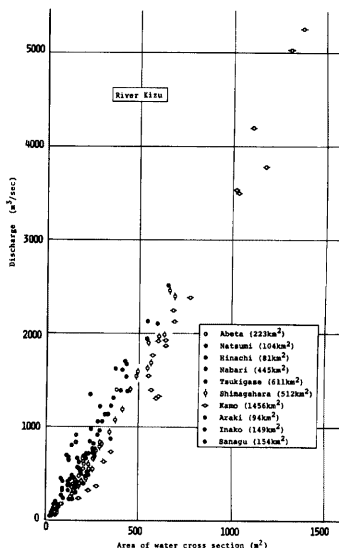


Fig. 10. Observational results of discharge at several points of River Kizu.

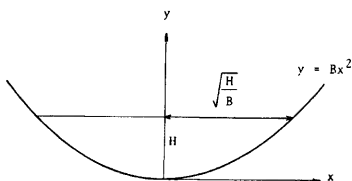


Fig. 11. Parabolic cross section

$$k=0.402F^{-0.114}, p'=1.45 \div \frac{13}{9} \quad \dots\dots\dots (24)$$

という結果を得た。ただし、 F はその地点より上流の流域面積で単位は km^2 、 R および A の単位はそれぞれ、 m 、 m^2 である。

いま、Fig. 11 に示すような広放物線形断面を考えると、

$$R \div \frac{2}{3}H = \left(\frac{B}{6}\right)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{2}{3}}$$

となって、 $p'=13/9$ となり、実測の p' とほとんど同じ値となることから、自然河川の断面形は広放物線形断面で近似できることがわかる。また、このことは (22) 式の誘導にあたって ω を一定と考えたことの根拠でもある。

(23)、(24) 式から径深と流積の関係は、流域面積をパラメーターとして、次式で表わされることになる。

$$R=0.255F^{-0.171}A^{\frac{2}{3}} \quad \dots\dots\dots (25)$$

3.3 山地河床の平均流速

一般に山地河川では、河床に露出した基岩とか、大きな岩石などが流水の抵抗に大きく関与すると考えられ、これは栈粗度の示す抵抗と類似した特性を示すものと考えられる。

Herbich 等¹³⁾が 15cm 立方のブロックを幅 160cm、長さ 1,590cm、高さ 30cm の水路に種々の配列と間隔で並べて行った実験結果を、 $v/u_* \sim R/d$ の関係に整理し直すと、Fig. 12 のようになる。ただし、 R はブロックの断面は考慮しないで、水深と水路幅から求めたもので、 d は原文中ではブロックの高さ K となっているものである。図中の記号はブロックの配列と間隔の分類を示すもので、黒はブロックが水面下にある場合である。

一方、栈粗度の実験によると、例えば Powell によれば、Fig. 12 中の小さい図に示すような結果が得られている¹⁴⁾。こうした実験事実から類推して、前述のブロック粗度についても Fig. 12 に実線で示したように、実験結果が示す直線をそのまま延長して、 $R/d > 1.2$ の実験の領域外でも、片対数紙上で直線となると仮定しよう。

この関係を指数式で近似すれば

$$v/u_* = \alpha (R/d)^{\beta} \quad \dots\dots\dots (26)$$

となる。ただし

$$\beta = 0.552, 1 \leq R/d < 5 \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\beta = 0.216, 5 \leq R/d < 10 \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\beta = 0.167 = 1/6, 10 \leq R/d < 10^3 \quad \dots\dots\dots (29)$$

で、 α も各領域で一つの定った値となる。

(26) 式は

$$v = \alpha \cdot g^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2} + \beta} d^{-\beta} \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$\frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = \frac{v_{i+1}}{v_i} \quad \dots\dots\dots (22)$$

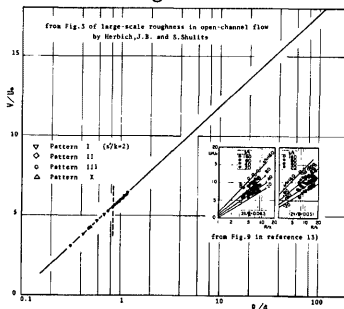
となり、比を考える上では伝播速度 ω のかわりに平均流速 v を用いてもよいことになる。したがって以下では v に関して考察を進めることにする。

3.2 径深と流積の関係

上田¹²⁾は九州の諸河川における実測資料をもとに

$$R = (kA^{p'-1})^{\frac{2}{3}} \quad \dots\dots\dots (23)$$

とおいたとき

Fig. 12. Relation between $v/u_* \sim R/d$.

となるが、ここで、礫の粒径 d の算定が問題となる。河川断面が広放物線形断面で表わされることを考慮して、近似的に、(26) 式を単位幅当りで考えると、この場合の平均流速を u とすれば次式となる。

$$u/u_* = \alpha (h/d)^\beta \quad \dots\dots\dots (31)$$

単位幅当りの流量 q は

$$q = \alpha d^{-\beta} u_* (u_*^2/gI)^{1+\beta} = \alpha d^{-\beta} u_*^{3+2\beta} (gI)^{-(1+\beta)} \quad \dots\dots\dots (32)$$

となり

$$u_* = \alpha^{-\frac{1}{3+2\beta}} d^{\frac{\beta}{3+2\beta}} q^{\frac{1}{3+2\beta}} (gI)^{\frac{1+\beta}{3+2\beta}} \quad \dots\dots\dots (33)$$

となる。

いま、礫が移動する限界状態を考えれば、一般に、

$$u_*^2 = 0.05 s g d, \quad s = (\sigma - \rho)/\rho \quad \dots\dots\dots (34)$$

であって、この時 (33) 式は

$$u_{*c} = \alpha^{-\frac{1}{3+2\beta}} d^{\frac{\beta}{3+2\beta}} q_c^{\frac{1}{3+2\beta}} (gI)^{\frac{1+\beta}{3+2\beta}} \quad \dots\dots\dots (35)$$

である。(34), (35) 式より次式が得られる。

$$d = \left\{ (0.05s)^{-\frac{3+2\beta}{3}} \alpha^{-\frac{2}{3}} g^{-\frac{1}{3}} \right\} q_c^{\frac{2}{3}} I^{\frac{2}{3}(1+\beta)} \quad \dots\dots\dots (36)$$

山地河川においては、河道全長にわたって q_c が一定であると仮定すると、定数項を α' で表わせば、

$$d = \alpha' I^{\frac{2}{3}(1+\beta)} \quad \dots\dots\dots (37)$$

となる。すなわち、エネルギー勾配 I を河床勾配にとれば、河床材料の粒径の縦断方向における分布は、河床勾配のみによって定まることになる。比良川における調査からも、山地河川においては大きな砂礫が第一次的に河床勾配に関係していることが報告されている¹⁵⁾。

ところで、山地河川では巨礫による抵抗が大きな割合を占めており、また、この礫は通常の洪水では移動しないと考えられる。したがって、たとえば粒径 d の $10 \sim 10^2$ 倍の水深で初めて礫が移動し始めるとすれば、(37) 式の β は $1/6$ となり、次式が得られる。

$$d = \alpha' I^{\frac{7}{9}} \quad \dots\dots\dots (38)$$

(38) 式を (30) 式に代入すると

$$v = \alpha \alpha'^{-\beta} g^{\frac{1}{3}} R^{\left(\frac{1}{3} + \beta\right)} I^{\left(\frac{1}{3} - \frac{7}{9}\beta\right)} \quad \dots\dots\dots (39)$$

となり、これに R と A の関係を示す (25) 式を代入し、 $Q = Av$ の関係を用いると、定数項を新たに α'' において、

$$v = \alpha'' F^{-0.171\left(\frac{1}{3} + \beta\right)\left(\frac{3}{4+2\beta}\right)} I^{\left(\frac{1}{3} - \frac{7}{9}\beta\right)\left(\frac{3}{4+2\beta}\right)} Q^{\frac{1+2\beta}{4+2\beta}} \quad \dots\dots\dots (40)$$

の関係が得られる。

したがって、同じ抵抗則を示す山地河川の i th order と $(i+1)$ th order の河道の平均流速の比は

$$\frac{v_{i+1}}{v_i} = \left(\frac{F_{i+1}}{F_i} \right)^{-0.171\left(\frac{1}{3} + \beta\right)\left(\frac{3}{4+2\beta}\right)} \left(\frac{I_{i+1}}{I_i} \right)^{\left(\frac{1}{3} - \frac{7}{9}\beta\right)\left(\frac{3}{4+2\beta}\right)} \left(\frac{Q_{i+1}}{Q_i} \right)^{\frac{1+2\beta}{4+2\beta}} \quad \dots\dots\dots (41)$$

で与えられることになる。

3.4 砂堆河床Ⅰの平均流速

ここで砂堆河床Ⅰとは砂堆が発達過程にある河床で、砂堆河床Ⅱとは砂堆が安定に保たれている河床とする。

Engelund¹⁶⁾によれば、同一の河床形態をもつ流れにおいては、粒子せん断力（有効せん断力） τ_*' は河床せん断力 τ_* の関数になり、次式で表わされる。

$$\tau_*' = f(\tau_*) \quad \dots\dots\dots (42)$$

ただし、 τ_* は無次元化された河床せん断力で、 $\tau_* = RI/sd$ 、粒子せん断力 τ_*' は次の二式で定義されるも

のである。

$$\tau_*' = RI'/sd = R'I/sd \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$v = \sqrt{gRI'} [6.0 + 5.75 \log (R'/2d)] \quad \dots\dots\dots (44)$$

(44) 式を指数式で近似すれば

$$v/u_*' = 7.66 (R'/2d)^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (45)$$

$$v = 6.82 g^{\frac{1}{2}} d^{-\frac{1}{2}} R'^{\frac{3}{2}} I^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (46)$$

となる。 d の表示式である (36) 式から

$$d = (0.05s)^{-\frac{10}{9}} (6.82)^{-\frac{2}{9}} g^{-\frac{1}{9}} q_c^{\frac{2}{9}} I^{\frac{7}{9}} \quad \dots\dots\dots (47)$$

であるから、これを (46) 式に代入すると

$$v = (6.82)^{\frac{10}{9}} g^{\frac{5}{9}} (0.05s)^{\frac{2}{9}} q_c^{-\frac{1}{9}} R'^{\frac{3}{2}} I^{\frac{10}{9}} = (18.9 q_c^{-\frac{1}{9}}) R'^{\frac{3}{2}} I^{\frac{10}{9}} \quad \dots\dots\dots (48)$$

の関係が得られる。

R' と R の関係については、岸、黒木¹⁷⁾によって考察が加えられているが、ここでは単純に R' は R に比例するとして

$$R' = \gamma_1 R$$

とおくと、(48) 式は次式となる。

$$v = (18.9 \gamma_1^{\frac{3}{2}} q_c^{-\frac{1}{9}}) R^{\frac{3}{2}} I^{\frac{10}{9}} \quad \dots\dots\dots (49)$$

(49) 式に (25) 式を代入すると

$$v = (7.60 \gamma_1^{\frac{3}{2}} q_c^{-\frac{1}{9}}) F^{-0.171 \cdot \frac{2}{9}} A^{\frac{4}{9}} I^{\frac{10}{9}} \quad \dots\dots\dots (50)$$

となり、さらに $Q = A, v$ の関係を用いると

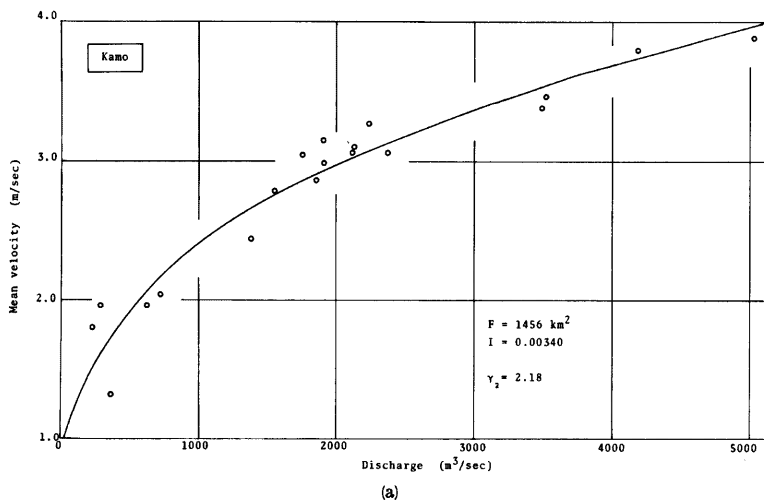


Fig. 13. Observational results of discharge at several points of River Kizu and theoretical curve of equ.(52).

$$v = (4.07 \gamma_1^{\frac{6}{13}} q_c^{\frac{1}{13}} F^{-0.171} Q^{\frac{4}{13}} I^{\frac{10}{13}}) \dots\dots\dots (51)$$

の関係が得られる。(51) 式中の q_c は、現在その河床にあって、抵抗に大きな影響を及ぼすと思われる最大粒径付近の径粒を決定した、過去の大洪水に対するもので、ある河道区間については、ほぼ一定としてもよいであろう。したがって、(51) 式は

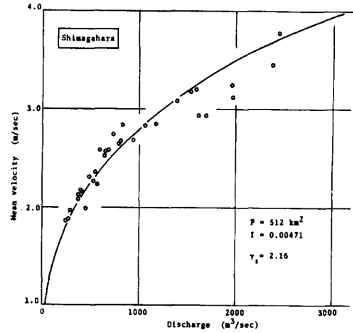
$$v = \gamma_2 F^{-0.0789} Q^{0.308} I^{0.256} \dots\dots\dots (52)$$

となる、

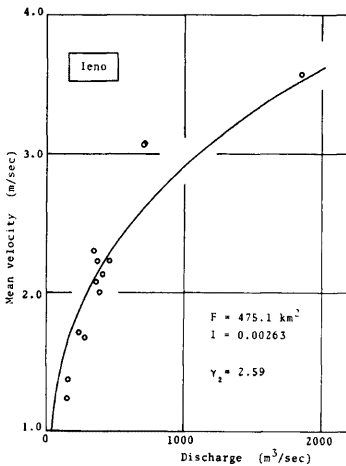
Fig. 13 は木津川の流量観測点における観測結果を示したもので、図中の実線は (52) 式を表わしている。エネルギー勾配 I に関しては河床勾配を用いることとし、5 万分の 1 の地図から、観測点の上流側を重視して求めたものである。 γ_2 については、観測結果に合うように定めたもので、その値は図中に記されている。これらの図によれば (a) と (b) の加茂、島ヶ原については γ_2 の値はほぼ同じであり、(c) と (d) の名張川の上流に位置する家野、安部田についても両者の γ_2 はほぼ同じである。このことは、ある河道区間に対しては q_c がほぼ一定であるという、前述の仮定を裏づけるものと考えられる。

そこで、簡単のために γ_2 を、同じ砂堆河床 I であればすべての河道区間に対して一定と仮定すると、結局、砂堆河床 I の i th order と $(i+1)$ th order の河道の平均流速の比は次式で与えられることになる。

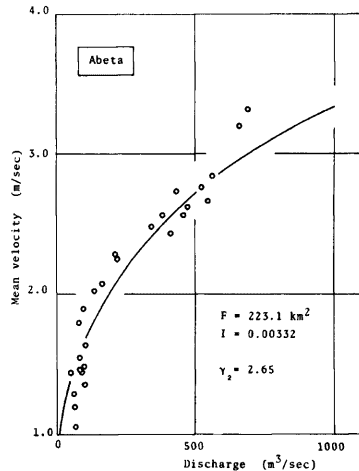
$$\left(\frac{v_{i+1}}{v_i} \right) = \left(\frac{F_{i+1}}{F_i} \right)^{-0.0789} \left(\frac{Q_{i+1}}{Q_i} \right)^{0.308} \left(\frac{I_{i+1}}{I_i} \right)^{0.256} \dots\dots\dots (53)$$



(b)



(c)



(d)

3.5 砂堆河床Ⅱの平均流速

砂堆が最も安定に保たれている状態では、

$$v/u_* = \varphi_0 \approx 10 \quad \dots\dots\dots (54)$$

であり、 v は次式となる。

$$v = \varphi_0 g^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}} I^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (55)$$

(55) 式に (25) 式を代入して、 $Q = Av$ の関係を用いると、

$$v = (\varphi_0^{\frac{8}{3}} g^{\frac{3}{8}} 0.255^{\frac{3}{8}})^{F-0.171} Q^{\frac{1}{3}} I^{\frac{2}{3}} \quad \dots\dots\dots (56)$$

となり、同じ砂堆河床Ⅱである i th order と $(i+1)$ th order の河道の平均流速の比は次式で与えられる。

$$\left(\frac{v_{i+1}}{v_i} \right) = \left(\frac{F_{i+1}}{F_i} \right)^{-0.0641} \left(\frac{Q_{i+1}}{Q_i} \right)^{0.250} \left(\frac{I_{i+1}}{I_i} \right)^{0.375} \quad \dots\dots\dots (57)$$

3.6 洪水時における河川の流下方向に沿う平均流速の変化

以上の考察によって、ある地点における平均流速を、流域面積、流量、エネルギー勾配の関数として表すことができた。また、これを i th order での平均流速と考え、同じ河床形態を示す i th order と $(i+1)$ th order の河道の平均流速の比も示した。

そこで、これらの成果を用いて、洪水時における河川流下方向への平均流速の変化について考察を行う。(40), (51), (56) 式からもわかるように、平均流速は i th order の中においても変化するものであるが、ここでは order 間での変化について考察を行う。

i th order と $(i+1)$ th order の流域の流域面積の比は、地形則から、

$$F_{i+1}/F_i = 4.3 \quad \dots\dots\dots (58)$$

という値が得られている¹⁸⁾。またエネルギー勾配については、近似的に河床勾配を用いることにすれば、これも地形則の検討から

$$I_{i+1}/I_i = 1/2.17 \quad \dots\dots\dots (59)$$

という値が得られている¹⁹⁾。

つぎに、流量に関しては、一つの洪水は上流から順次、支川からの流入を受けながら、流量を増して流下する。この流量の増加は、河道網系の構成、降雨域の時間的、空間的分布によって異なるが、一般的な性状を論ずる場合には、洪水の比流量に関する知見が一つの参考となる。洪水の比流量に関しては著者の一人が、洪水の伝播・合成過程を考えた詳細な検討を行っているが¹⁸⁾、ここでは簡単のために Creager 式²⁰⁾を用いることにする。流量を m^3/sec 、流域面積を km^2 の単位で表わした Creager 式は次式である。

$$Q_p = 124.2 (F/2.56)^{F'} \quad F' = 0.935 F^{-0.048} \quad \dots\dots\dots (60)$$

(60) 式を用いる場合には実際の流域面積を与える必要があるので、ここで order と流域面積を対応させなければならない。

われわれが観測研究を行ってきた荒川試験地の流域面積は $0.18 km^2$ であるが、この河道の抵抗は (27) 式に対応するものと考えられ、また試験地を含む西荒川が荒川本川と合流する付近 (流域面積 $4.4 km^2$) では (29) 式に対応するものと考えられる。そこで、ここでは一応 $0.10 km^2$ の流域を 1st order とし、河床形態は山地河床の $\beta = 0.552$ と考えることにする。

これらの関係を一括して表にしたものが **Table 1** である。 v_r は 1つ前の order との v の比である。河床形態が変わる場合は厳密には (40), (51), (56) 式の比を考えなければならないが、定数項の算定が困難であるので、ある河床形態はその前後の河床形態の性質を合わせ持つと考えて、たとえば $\beta = 0.216$ の 3rd order と $\beta = 0.556$ の 2nd order の比は、 $\beta = 0.216$ として (41) 式を用いることにして、3rd order の a_1, a_2, a_3 の欄は記入されている。また山地河川以外では、砂堆河床ⅠとⅡは同じように現われる可能性があるなので、両者とも記してある。

Table 1. Values which are necessary for the calculation of the change of mean velocity of a flood flow in a downstream direction.

Channel order	Drainage area (km ²)	River bed configuration	$V_r = F_r^{a_1} Q_r^{a_2} I_r^{a_3}$			Q_r
			a_1	a_2	a_3	
1	0.10	Mountainous $\beta = 0.552$				
2	0.43	Mountainous $\beta = 0.552$	- 0.106	0.412	0.0415	4.30
3	1.85	Mountainous $\beta = 0.216$	- 0.0829	0.323	0.225	4.20
4	7.95	Mountainous $\beta = 1/6$	- 0.0789	0.308	0.256	3.50
5	34.2	Dune bed I II	- 0.0789 - 0.0641	0.308 0.250	0.256 0.375	2.96
6	147	Dune bed I II	- 0.0789 - 0.0641	0.308 0.250	0.256 0.375	2.55
7	632	Dune bed I II	- 0.0789 - 0.0641	0.308 0.250	0.256 0.375	2.22
8	2720	Dune bed I II	- 0.0789 - 0.0641	0.308 0.250	0.256 0.375	1.97
9	11700	Dune bed I II	- 0.0789 - 0.0641	0.308 0.250	0.256 0.375	1.77

この表に従って計算した結果が Fig. 14 であり, 1st order の平均流速との比で表わしてあるが, 実線は 5th order から砂堆河床 I としたもので, 破線は同じところから砂堆河床 II としたものである。この結果から, 洪水流の平均流速は, 流下の途中で最大値が現われるという, 極めて興味ある結果が得られた。また, ここで対象とした流域のような場合には, 3rd order から 8th order までの間では砂堆河床 I の場合には平均流速がそんなに変化しないので, 3rd order 程度の流域を単位流域として選び, 8th order 程度までを対象とするときは, (1), (2) 式の適用にあたって, 伝播速度の変化はあまり考慮しなくてもよいということになる。

ただし, 実際の流域を対象とする場合には, 基準流域の選び方と, order に対する河床形態の決定は, その流域の特性に合うように決める必要があることはいうまでもない。

3.7 低水時における河川の流下方向に沿う平均流速の変化

以上の考察の妥当性を示す例として, 低水時における河川流下方向の平均流速の変化を, 上と同様な方法で検討してみる。

低水時においては, 山地河川以外の河道ではすべて砂堆河床 I による抵抗を示すものと考えられ, 平均流速式は (52) 式となる。

$$v = \gamma_2 F^{-0.0789} Q^{0.308} I^{0.256}$$

また, このような低水時には流下方向への流量の増加は, 第一近似として, 流域面積に比例するとしてよいと思われる。

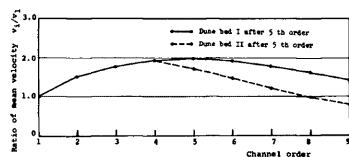


Fig. 14. The change of mean velocity of a flood flow in a downstream direction.

すなわち、比流量を一定とするわけである。また、エネルギー勾配として河床勾配を用いれば、 F と I の流量との関係は次式となる。

$$F = \text{const.} \times Q, \quad I = \text{const.} \times Q^{-0.591}$$

この関係を (52) 式に代入すれば

$$v = \text{const.} \times Q^{0.093} \quad \dots\dots\dots (61)$$

となる。

一方、水理幾何学からは前述の (17) 式が得られており、Leopold らは理論値といわれる 0.09 という値を得ている²¹⁾。(61) 式はこれとほぼ同じ値であって、ここでの考察の妥当性を裏づけるもので、また、(17) 式はこのような状態を対象として考えられたものであることがわかる。

以上、本章での考察によって、河川の流下方向に沿う平均流速の変化が明らかとなり、ある河道次数で平均流速が最大値となるという興味ある結果を得た。ただし、水面勾配の影響、(40)、(51)、(56) 式の定数項の評価、とくに (51) 式中の q_0 、また R' と R との関係の考察などは、今後の検討事項である。

4. 結 語

以上、われわれが雨水流出過程を考える上で仮定してきた、線形河道の仮定について、洪水の伝播速度の変化という面から考察を行ってきた。使用した資料は主としてわが国におけるものであるので、適用範囲は日本の河川ということに限定されるかもしれないが、得られた成果を列举すると次のようである。

- 1) とくに洪水波の前面では一様進行流としての特性が顕著であって、この時のある地点における流積・流量の関係はほぼ直線関係である。
- 2) 厳密な意味で洪水時の流れが一様進行流の特性を示す始点ではないが、一様進行流の特性で近似が可能となる流量の下限は、比流量で表わせば、 $1 \sim 2 \text{ m}^3/\text{sec}/\text{km}^2$ 程度である。
- 3) 洪水時においては、平均流速は山地河川では増加し、その後ある河道次数で最大となり、その後は順次減少する。
- 4) ある河道次数からは、近似的に平均流速を一定としてもよい。

最後に、資料を提供して頂いた近畿地建ならびに中部地建の関係者の方々に、感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) Ishihara, Y. and S. Kobatake: The roles of slope and channel processes in storm runoff in the Ara experimental basin, Tokyo Symposium, IAHS-AISH, Pub. No. 117, 1975, pp. 75-86.
- 2) Hayashi, T.: Mathematical theory and experiment of flood waves, Trans. Japan Soc. of Civil Eng., No. 18, 1953, pp. 13-26.
- 3) Hayami, S.: On the propagation of flood waves, Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute, Kyoto Univ., No. 1, 1951.
- 4) 高橋保: 河道における洪水流の特性に関する研究, 京都大学学位論文, 1971.
- 5) 高埴琢馬: 洪水流出系の分析と総合に関する基礎的研究, 京都大学学位論文, 1971.
- 6) 石原安雄, 小葉竹重機: 河道系における洪水の集中過程, 第10回災害科学総合シンポジウム講演論文集, 1973, pp. 235-238.
- 7) 石原安雄, 小葉竹重機: 洪水ハイドログラフの形成過程に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第18号 B, 1975, pp. 425-435.
- 8) 石原安雄, 小葉竹重機: 降雨の時空間分布がハイドログラフの波形に及ぼす効果について, 第31回土

- 木学会年次学術講演会概要集, 1976, pp. 157-158.
- 9) Tanaka, K.: On the quasi-steady flow in the open channel (the theoretical analysis of flood routing), Technology of the Osaka Univ., Vol. 2, No. 44, 1952, pp. 183-194.
 - 10) Pilgrim, D.H.: Travel times and nonlinearity of flood runoff from tracer measurements on a small watershed, Water Resources Research, Vol. 12, No. 3, 1976, pp. 487-496.
 - 11) 高山茂美：河川地形, 共立出版, 1974, pp. 176-184.
 - 12) 上田年比古：降雨流出に関する基礎的研究, 九州大学学位論文, 1961, pp. 18-32.
 - 13) Herbich, J.B. and S. Shulits: Large-scale roughness in open-channel flow, Proc. ASCE, Vol. 90, No. HY6, 1964, pp. 203-230.
 - 14) 足立昭平：流れの抵抗則—表面粗度—, 水工学に関する夏期研修会講義集, 1967, pp. 02-1~02-19.
 - 15) 矢野勝正, 土屋義人, 道上正規：沖積河川における河床砂れきの特性の変化について, 京都大学防災研究所年報, 第12号 B, 1969, pp. 463-473.
 - 16) Engelund, F.: Hydraulic resistance of alluvial streams, proc. ASCE, Vol. 92, No. HY2, 1966, pp. 315-326.
 - 17) 水理委員会移動床流れの抵抗と河床形状研究小委員会：移動床流れにおける河床形態と粗度, 土木学会論文報告集, 第210号, 1973, pp. 65-91.
 - 18) 石原英雄, 佐藤基：洪水比流量に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第18号 B, 1975, pp. 415-423.
 - 19) 榎根勇：水の循環, 共立出版, 1973, pp. 119-127.
 - 20) 本間仁：河川工学, コロナ社, 1963, pp. 78-83.
 - 21) Leopold, L.B., M.G. Wolman and J.P. Miller: Fluvial processes in geomorphology, W.H. Freeman and Company, 1964, pp. 198-281.