

# 弾性表面波による構造物基礎周辺地盤の振動解析

土岐憲三・三浦房紀

## SEISMIC RESPONSE OF NEAR SURFACE GROUND AND FOUNDATION STRUCTURE SUBJECTED TO SURFACE WAVES

by Kenzo TOKI and Fusanori MIURA

### Synopsis

The paper deals with the seismic response analysis of near surface ground and structural foundation which are subjected to surface waves such as Love and Rayleigh waves. The finite element method is applied to the problem, in which the semi-infinite element is first introduced to take into account the exact mode shape in the deep base layer.

The frequency response function of the foundation structure and that of near surface ground are computed for the incidence of the fundamental mode of Love and Rayleigh wave. The result of numerical computation shows that the foundation structures submerged in the surface ground has a shielding effect of surface waves of higher frequency component for the response of near surface ground behind the structure.

### 1. はじめに

過去にわが国で発生した多くの地震のうち、新潟地震（1964）による越後線および新潟空港滑走路の縦断方向に発生した波状の陥没は分散性レーレー波によるものといわれており<sup>1)</sup>、国道7号線海老ヶ瀬地区の道路に発生した蛇行はラブ波によるものといわれている<sup>2)</sup>。また十勝沖地震（1968）の際に八戸港湾で観測された SMAC 強震記録のうち N-S 成分がレーレー波であり、E-W 成分がラブ波であるともいわれている<sup>3)</sup>。また諸外国での過去の地震時にも地表面に沿って波動が伝播する現象の見られることも報告されている<sup>4)</sup>。このように強震加速度波形中にも表面波成分が明らかに認められることから、地下埋設管や沈埋トンネル等の埋設構造物、あるいは長大橋に代表される長大構造物のような、地表面に沿った方向における地盤の相対運動がその耐震性に重要な影響を及ぼすと考えられる構造物に対して、表面波が伝播する際の構造物自身あるいはその周辺地盤の挙動を明らかにすることは急務であると思われる。

このような問題を、土-構造物系の動的相互作用の観点から取り扱う場合には有限要素法は有力な手段である。ところが有限要素法で解析する場合、その解析対象領域を仮定の境界で囲まれた有限領域としなければならないが、動的問題を扱う際にはこのような境界面を設定することは、この面で波動の屈折と反射の現象を生ずることになり、この人為的な仮想境界での境界条件をいかに設定するかが、動的問題を扱う場合に特に重要な課題となる。

さて、Fig. 1 は有限要素モデルの例であるが、2つの側面と底面との3つの人為境界によって有限領域とされている。表面波は地表面に沿って伝播する波動であるから、有限要素モデルの側面の境界を波動が透過できるように境界条件を設定しなければならない。そこで Lysmer らは力学モデル側面の鉛直な境界面

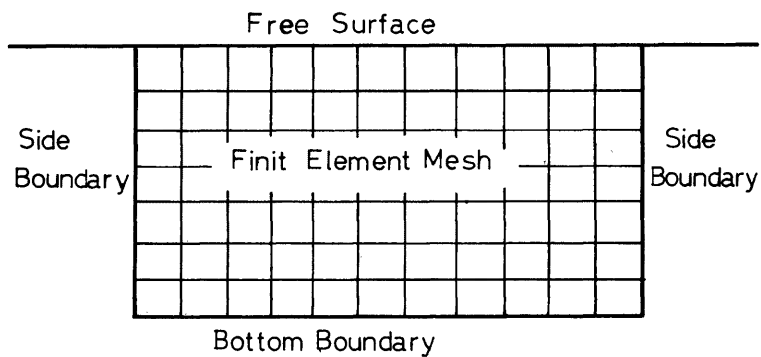


Fig. 1. Finite element mesh and artifitial boundaries.

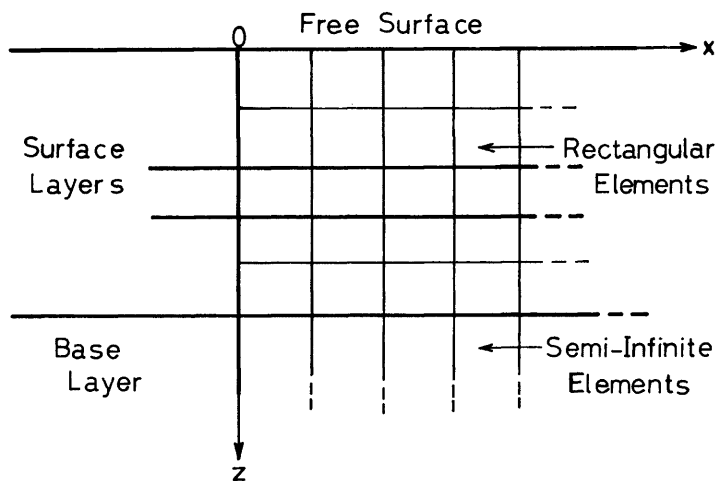


Fig. 2. Finite element model of ground.

での応力の連続性を等価節点力に置き換えることによってこの境界条件を満足させることに成功した<sup>3)</sup>。しかし底面の境界に関しては、剛な基盤層の存在を仮定して有限要素モデルの最下節点の変位を固定している。このため、水平・上下変位の鉛直方向の分布は実際の伝播波の分布とはかなり異なったものとなり、この影響を小さくするためには地表面からかなり深い所まで有限要素網を設ける必要が生じ、計算機で数値計算を行うのに大容量を必要とする。また工学的に必要となる振動数よりも低振動数領域も解析の対象となる反面、要素数の制約から分割要素が大きくなり、したがって高振動数領域での精度が低下する結果となることがある。

そこで、本研究では、地盤を有限要素でモデル化するに当り、地盤を表層と基盤とに大別し、表層には従来から用いられてきた長方形要素を、基盤には半無限要素を用いる(**Fig. 2**)。この半無限要素とは、川原ら<sup>4)</sup>によって提案された変位関数に指数関数を導入して節点からの距離と共に変位を指数関数的に減少ならしめる半無限に伸びる帯状要素のことであるが、ここで用いる半無限要素は、それをさらに表面波の変位分布を表現し得るよう発展させたものである。この半無限要素を導入することにより、表面波の鉛直方向への変位分布を忠実に再現することが可能となり、また鉛直下方へ無限に広がる領域を解析の対象に組み入れることが可能となり、しかも鉛直下方に剛な基盤面を設定する必要がなく、さらに数値計算上の技術的な見地から **Lysmer** らの用いたモデルに比べ節点数が大幅に少なくてすみ、計算機による計算時間が大幅に減少され、その結果高振動数領域での精度向上が期待されることになる。

以下にラブ波、レーレー波に対する半無限要素の定式化を行い、それらを用いて水平地盤の固有方程式、さらに構造物基礎を含む水平地盤の運動方程式を導き、数値解析例として応答倍率の観点から構造物周辺地盤の挙動を調べる。

## 2. 有限要素網による地盤のモデル化

### 2.1 ラブ波に対する半無限要素

表層のモデル化に用いる長方形要素の剛性マトリクス、質量マトリクス等は **Lysmer** ら<sup>3)</sup>によって導びかれているのでここではその誘導は省略し、基盤層のモデル化に用いられる半無限要素の定式化について述べる。

#### (1) 要素内の変位

今、ラブ波の伝播方向を  $x$  軸に取り、鉛直下方に  $z$  軸を取ると、ラブ波による変位成分は  $y$  軸方向のみとなる。半無限要素の変形の様子を **Fig. 3** に示す。要素内の変位  $v(x, z)$  は変位関数  $\{d\}$  と節点変位ベクトル  $\{\delta\} = \{v_1, v_2\}^T$  とを用いて次式で与えられる。

$$v(x, z) = \{d\} \{\delta\} \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

ここで変位関数  $\{d\}$  を次式で与える。

$$\{d\} = \frac{1}{l} \{(l-x)e^{-az}, xe^{-az}\} \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

$$\text{ここに} \quad a = \sqrt{k^2 - (\omega/C_T)^2} \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

$l$ : 要素幅,  $k$ : 波数,  $\omega$ : 円振動数,  $C_T$ : 基盤内での横波速度

#### (2) ひずみと応力

半無限要素内で生じるひずみは  $\gamma_{xy}$  と  $\gamma_{zy}$  の2成分であり、次式で表わされる。

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{Bmatrix} = [B] \{\delta\} \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

$$\text{ここに} \quad [B] = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -e^{-az} & e^{-az} \\ -a(l-x)e^{-az} & -axe^{-az} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

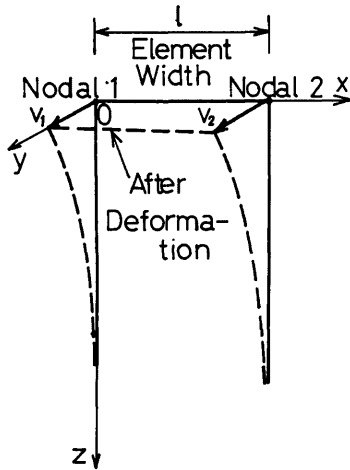


Fig. 3. Semi-infinite element for Love wave

$$[m]^e = \frac{\rho l}{12a} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

## 2.2 レーレー波に対する半無限要素

### (1) 要素内の変位

レーレー波の伝播方向を  $x$  軸とし、鉛直下方に  $z$  軸をとると、レーレー波によって生じる変位成分は  $x$  軸方向の変位  $u$  と  $z$  軸方向の変位  $w$  の2成分である。このときの半無限要素の変形の様子は **Fig. 4** に示す。要素内の変位  $u(x, z)$  と  $w(x, z)$  は変位関数  $[d]$  と節点変位ベクトル  $\{\delta\} = \{u_1, w_1, u_2, w_2\}^T$  を用いて次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [d] \{\delta\} \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

ここで、変位関数  $[d]$  を次式で与えることによってレーレー波による変位状態が表現される。すなわち、

$$[d] = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} (Ae^{-az} + Be^{-bz})(l-x) & 0 & (Ae^{-az} + Be^{-bz})x & 0 \\ 0 & -\left(\frac{a}{k}Ae^{-az} + \frac{k}{b}Be^{-bz}\right)(l-x) & 0 & -\left(\frac{a}{k}Ae^{-az} + \frac{k}{b}Be^{-bz}\right)x \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2.12)$$

式 (2.12) 中、 $A, B$  は表層と基盤の境界における変位の連続性から、次の条件を満足しなければならない。すなわち、**Fig. 4** の座標系で、 $(x, z) = (0, 0)$  における変位は節点1の節点変位  $u_1, w_1$  に等しくなければならない。また、 $(x, z) = (l, 0)$  では、節点2の節点変位  $u_2, w_2$  に等しくなければならない。この条件を式 (2.11)、(2.12) を用いて表現すると  $A, B$  に関して次の2式を得る。

$$A + B = 1, \quad -\frac{a}{k}A - \frac{k}{b}B = 1$$

これより  $A, B$  は次のように定まる。

$$A = -\frac{k(k+b)}{ab-k^2}, \quad B = \frac{b(a+k)}{ab-k^2} \quad \dots\dots\dots (2.13)$$

$$\text{ここに } a = \sqrt{k^2 - \omega/C_L^2}, \quad b = \sqrt{k^2 - (\omega/C_T)^2} \quad \dots\dots\dots (2.14)$$

$k$ ; 波数,  $\omega$ ; 円振動数,  $C_L$ ; 基盤での縦波速度,  $C_T$ ; 基盤での横波速度

次に応力は Hooke の法則により次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = G[B] \{\delta\} \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

ここに  $G$ ; 基盤でのせん断弾性定数

(3) 剛性マトリクスと質量マトリクス

半無限要素の剛性マトリクス  $[k]^e$  は次式で求まる。

$$[k]^e = G \int_0^l \int_0^\infty [B]^T [B] dz dx \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

上式に式 (2.5) を代入して次式を得る。

$$[k]^e = \frac{Gl}{2a^{1/2}} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{3}a^2l^2 & -1 + \frac{1}{6}a^2l^2 \\ -1 + \frac{1}{6}a^2l^2 & 1 + \frac{1}{3}a^2l^2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

次に質量マトリクス  $[m]^e$  は次式で与えられる。

$$[m]^e = \rho \int_0^l \int_0^\infty \{d\}^T \{d\} dz dx \quad \dots\dots\dots (2.9)$$

ここに、 $\rho$ ; 基盤の密度

上式に式 (2.2) を代入して次式を得る。

$$\dots\dots\dots (2.10)$$

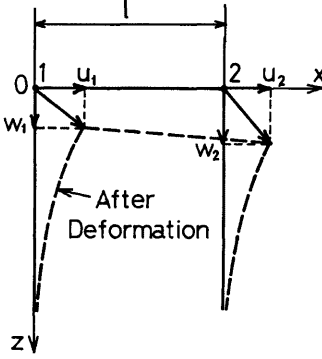


Fig. 4. Semi-infinite element for Rayleigh wave.

ここに

$$[B] = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -(Ae^{-\alpha z} + Be^{-bz}) & 0 & (Ae^{-\alpha z} + Be^{-bz}) & 0 \\ 0 & -(aCe^{-\alpha z} + bDe^{-bz})(l-x) & 0 & -(aCe^{-\alpha z} + bDe^{-bz})x \\ -(aAe^{-\alpha z} + bBe^{-bz})(l-x) & -(Ce^{-\alpha z} + De^{-bz}) & -(aAe^{-\alpha z} + bBe^{-bz})x & (Ce^{-\alpha z} + De^{-bz}) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

次に応力は次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

ここに

$$[C] = Q \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$Q = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \alpha = \frac{1-2\nu}{2} \quad (2.21)$$

 $\nu$ ；ポアソン比， $E$ ；ヤング率

(3) 剛性マトリクスと質量マトリクス

剛性マトリクス  $[k]^e$  は次式で求まる。

$$[k]^e = \int_0^l \int_0^\infty [B]^T [C] [B] dz dx \quad (2.22)$$

式 (2.18)，(2.20) を用いて次式を得る。

$$[k]^e = \frac{Q}{6l} \begin{bmatrix} 6(1-\nu)E' + 2\alpha l^2 F & 3\nu l G' + 3\alpha l H & -6(1-\nu)E' + \alpha l^2 F & 3\nu l G' - 3\alpha l H \\ 3\nu l G' + 3\alpha l H & 2(1-\nu)l^2 I + 6\alpha J & -3\nu l G' + 3\alpha l H & (1-\nu)l^2 I - 6\alpha H \\ -6(1-\nu)E' + \alpha l^2 F & -3\nu l G' + 3\alpha l H & 6(1-\nu)E' + 2\alpha l^2 F & -3\nu l G' - 3\alpha l H \\ 3\nu l G' - 3\alpha l H & (1-\nu)l^2 I - 6\alpha J & -3\nu l G' - 3\alpha l H & 2(1-\nu)l^2 I + 6\alpha J \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

以下，表現を簡単にするため次の置き換えを行う。

$$-\frac{a}{k}A = C, \quad -\frac{k}{b}B = D \quad (2.15)$$

この置き換えによって式 (2.12) の変位関数は次式のように簡潔に表現される。

$$[d] = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} (Ae^{-\alpha z} + Be^{-bz})(l-x) & 0 \\ 0 & (Ce^{-\alpha z} + De^{-bz})(l-x) \\ (Ae^{-\alpha z} + Be^{-bz})x & 0 \\ 0 & (Ce^{-\alpha z} + De^{-bz})x \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

(2) ひずみと応力

レーレー波が伝播する際に生じるひずみは  $\varepsilon_x$ ， $\varepsilon_z$ ， $\gamma_{xz}$  の3成分であり，次式で表わさせる。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = [B] \{\delta\} \quad (2.17)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} E' &= \frac{A^2}{2a} + \frac{2AB}{a+b} + \frac{B^2}{2b} \\ F &= \frac{a^2 A^2}{2a} + \frac{2abAB}{a+b} + \frac{b^2 B^2}{2b} \\ G' &= \frac{aAC}{2a} + \frac{aBC+bAD}{a+b} + \frac{bBD}{2b} \\ H &= \frac{aAC}{2a} + \frac{aAD+bBC}{a+b} + \frac{bBD}{2b} \\ I &= \frac{a^2 C^2}{2a} + \frac{2abCD}{a+b} + \frac{b^2 D^2}{2b} \\ J &= \frac{C^2}{2a} + \frac{2CD}{a+b} + \frac{D^2}{2b} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.24)$$

次に質量マトリクス  $[m]^e$  は次式で与えられる。

$$[m]^e = \rho \int_0^l \int_0^{\infty} [d]^T [d] dz dx \dots\dots\dots (2.25)$$

上式に式 (2.16) を代入して次式を得る。

$$[m]^e = \frac{\rho l}{6} \begin{bmatrix} 2E' & 0 & E' & 0 \\ 0 & 2J & 0 & J \\ E' & 0 & 2E' & 0 \\ 0 & J & 0 & 2J \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.26)$$

ここに  $\rho$  ; 基盤の密度,  $E', J$  は式 (2.24) で与えられる値である。

### 3. 固有値問題

#### 3.1 概 説

Lysmer らは最下端の節点変位を固定した水平地盤の有限要素モデルを用いて、有限要素幅  $l$  を限りなく 0 に近づけ、その極限において、与えられた円振動数  $\omega$  に対してラブ波については波数  $k$  の自乗を固有値とする固有方程式を、レーレー波については波数  $k$  を固有値とする固有方程式を導出した<sup>3),5)</sup>。

ここでは、基盤を半無限要素を用いてモデル化した無限下方にまで変位の存在し得る水平地盤モデル (Fig. 2 参照) に対しても Lysmer らによって導かれた固有方程式と全く同形式の固有方程式が得られることを示す。固有方程式を解くことによって求まる波数  $k$  と固有ベクトル  $[V]$  は、あとの境界条件の設定の際に用いられる。また波数  $k$  が求まれば、 $C=\omega/k$  なる関係を用いて、与えられた円振動数  $\omega$  に対する位相速度  $C$  が求まり、分散曲線が得られる。

#### 3.2 ラブ波に対する固有値問題

##### (1) 基盤の変位と節点力の関係

円振動数  $\omega$ , 波数  $k$  で  $x$  の正方向に伝播するラブ波による変位  $v$  は次式で表わされる。

$$v = V(z) \cdot e^{i(\omega t - kx)} \dots\dots\dots (3.1)$$

ここに  $V(z)$  ; 振幅

ここで任意の隣接する 2 つの半無限要素 I, II に注目し、共通の節点を座標の原点にとる (Fig. 5 参照)。要素幅は I, II いずれも  $l$  とし、節点番号を在より順に ①, ②, ③ とする。節点 ② の節点変位を  $v_n$  とすれば式 (3.1) より

$$v_n = V(0) \dots\dots\dots (3.2)$$

なる関係を得る。ただし、簡単のため、時間項  $e^{i\omega t}$  は省いてある。以後においても省略することにする。

式 (3.1), (3.2) より節点 ①, 節点 ② の変位が求まり、結局要素 I の節点変位ベクトル  $\{d\}_I$ , 要素 II の節点変位ベクトル  $\{d\}_{II}$  はおのおの次式で表わされる。

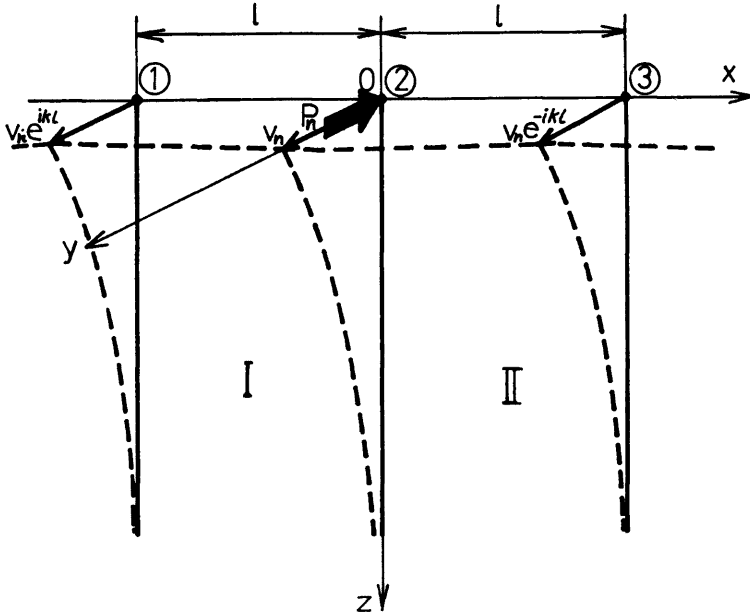


Fig. 5. Nodal displacements and nodal forces in base layer for Love wave.

$$\{\delta\}_1 = \begin{Bmatrix} v_n e^{ikl} \\ v_n \end{Bmatrix} = \{E\} v_n \quad \dots\dots\dots (3.3)$$

$$\{\delta\}_{11} = \{\delta\}_1 e^{-ikl} = \{E\} v_n e^{-ikl} \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

ここに

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} e^{ikl} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.5)$$

そこで、節点②に働く要素Ⅰ、Ⅱの変形による節点力  $P_n$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} P_n &= \{k\} \epsilon_2 \{\delta\}_1 + \{k\} \epsilon_1 \{\delta\}_{11} = (\{k\} \epsilon_2 + \{k\} \epsilon_1 e^{-ikl}) \{E\} v_n \\ &= l \cdot L_n \cdot v_n \quad \dots\dots\dots (3.6) \end{aligned}$$

ここに  $\{k\} \epsilon_1$ ,  $\{k\} \epsilon_2$  は式 (2.8) の剛性マトリクスの第1行、第2行であり、これらを式 (3.6) に代入して  $L_n$  が次のように定まる。

$$L_n = \frac{G}{al^2} \left\{ (1 - \cos kl) + a^2 l^2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cos kl \right) \right\}$$

$l \rightarrow 0$  の極限では若干の計算後、次式を得る。

$$\lim_{l \rightarrow 0} L_n = \frac{G}{2a} k^2 + \frac{G}{2} a \quad \dots\dots\dots (3.7)$$

(2) 表層の変位と節点力の関係

表層については Lysmer らにより導びかれているのでここではその結果を示すにとどめる (Fig. 6 参

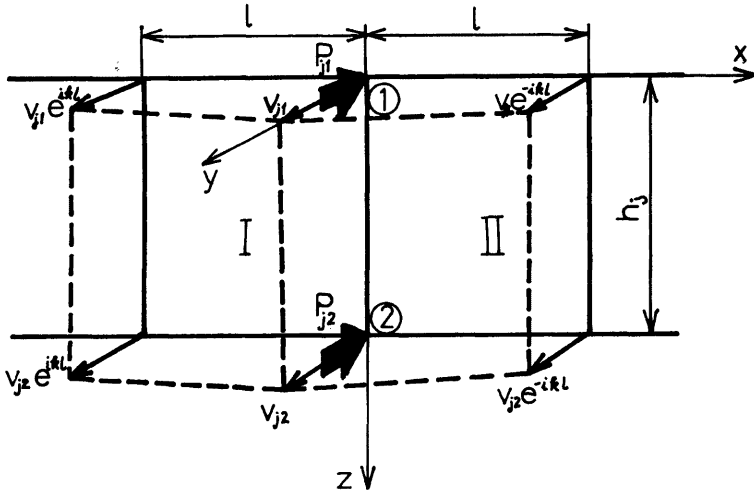


Fig. 6. Nodal displacements and nodal forces in surface layer for Love wave.

照)。表層は深さ方向に  $(n-1)$  行に要素が分割してあるものとする (Fig. 3 参照。したがって基礎は第  $n$  行目となる)。

第  $j$  行目に注目し、節点①、②に働く節点力を  $P_{j1}$ ,  $P_{j2}$  とすると変位—節点力の関係は次式で与えられる<sup>3)</sup>。

$$\begin{Bmatrix} P_{j1} \\ P_{j2} \end{Bmatrix} = l [L]_j \begin{Bmatrix} v_{j1} \\ v_{j2} \end{Bmatrix} \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \quad \dots\dots\dots (3.8)$$

ここに  $v_{j1}$ ,  $v_{j2}$  はそれぞれ節点①、②の節点変位であり  $[L]_j$  は  $l \rightarrow 0$  の極限で次式となる。

$$[L]_j = \frac{G_j}{h_j} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{3}(lk)^2 & -1 + \frac{1}{6}(lk)^2 \\ -1 + \frac{1}{6}(lk)^2 & 1 + \frac{1}{3}(lk)^2 \end{bmatrix} \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \quad \dots\dots\dots (3.9)$$

### (3) 節点に働く慣性力

Fig. 5 の節点②に生じる慣性力のうち半無限要素の寄与分を  $R_n$  とすると、 $R_n$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} R_n &= \omega^2 (\{m\}^* \{ \delta \}_1 + \{m\}^* \{ \delta \}_{11}) = \omega^2 (\{m\}^* \{ \delta \}_2 + \{m\}^* \{ \delta \}_2 e^{-ikl}) [E] v_n \\ &= l \cdot \omega^2 \cdot m_n \cdot v_n \quad \dots\dots\dots (3.10) \end{aligned}$$

ここに  $\{m\}^*$ ,  $\{m\}_2$  は式 (2.10) の質量マトリクスの第 1 行および第 2 行であり、これらを式 (3.10) に代入して  $m_n$  が次のように定まる。

$$m_n = \frac{\rho}{6a} (2 + \cos kl)$$

$l \rightarrow 0$  の極限において

$$m_n = \frac{\rho}{2a} \quad \dots\dots\dots (3.11)$$

次に表層に関しては、Fig. 6 の節点①、②に生じる慣性力をそれぞれ  $R_{j1}$ ,  $R_{j2}$  とすると、

$$\begin{Bmatrix} R_{j1} \\ R_{j2} \end{Bmatrix} = l \cdot \omega^2 [m]_j \begin{Bmatrix} v_{j1} \\ v_{j2} \end{Bmatrix} \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \quad \dots\dots\dots (3.12)$$

ここに  $[m]_j$  は  $l \rightarrow 0$  の極限で次式となる。

$$[m]_j = \frac{\rho_j h_j}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \quad \dots\dots\dots (3.13)$$

(4) 固有方程式

式 (3.8), (3.6) の関係を、一般に行なわれているマトリクス、ベクトルの集成を全層にわたって行い、次のようにまとめて表わす。

$$\{P\} = l \cdot [L] \cdot \{v\} \quad \dots\dots\dots (3.14)$$

ここに

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_{11} \\ P_{12} + P_{21} \\ \vdots \\ P_{n-1,2} + P_n \end{Bmatrix}, \quad \{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix}, \quad [L] = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \circ & \circ & -L_1 \\ \circ & \circ & -L_2 \\ \circ & \circ & \circ \end{matrix} & & \\ & \begin{matrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{matrix} & \\ & & \begin{matrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{matrix} \\ & & & \begin{matrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{matrix} \\ & & & & \begin{matrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{matrix} \\ & & & & & \begin{matrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{matrix} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.15)$$

次に慣性力ベクトルについても同様に表わせ、次式を得る。

$$\{R\} = l \cdot \omega^2 [m] \{v\} \quad \dots\dots\dots (3.16)$$

ここに

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_{11} \\ R_{12} + R_{21} \\ \vdots \\ R_{n-1,2} + R_n \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.17)$$

力のつり合いより式 (3.14) と式 (3.16) から次の方程式を得る。

$$(-[L] + \omega^2 [m]) \{v\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (3.18)$$

ところがマトリクス  $[L]$  は次のように分解できる。

$$[L] = [A] + k^2 [B] \quad \dots\dots\dots (3.19)$$

ここに

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{H_1}{h_1} & -\frac{G_1}{h_1} & & & \\ -\frac{G_1}{h_1} & \frac{G_1}{h_1} + \frac{G_2}{h_2} & -\frac{G_2}{h_2} & & 0 \\ & -\frac{G_2}{h_2} & \frac{G_2}{h_2} + \frac{G_3}{h_3} & -\frac{G_3}{h_3} & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & -\frac{G_{n-2}}{h_{n-2}} & \frac{G_{n-2}}{h_{n-2}} + \frac{G_{n-1}}{h_{n-1}} & -\frac{G_{n-1}}{h_{n-1}} \\ & & & -\frac{G_{n-1}}{h_{n-1}} & \frac{G_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{aG_n}{2} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.20)$$

$$[B] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2h_1G_1 & h_1G_1 & & & \\ h_1G_1 & 2(h_1G_1 + h_2G_2) & h_2G_2 & & 0 \\ & h_2G_2 & 2(h_2G_2 + h_3G_3) & h_3G_3 & \\ & & h_{n-2}G_{n-2} & 2(h_{n-2}G_{n-2} + h_{n-1}G_{n-1}) & h_{n-1}G_{n-1} \\ 0 & & & h_{n-1}G_{n-1} & 2h_{n-1}G_{n-1} + \frac{3}{a}G_n \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.21)$$

式 (3.19) を式 (3.18) に代入して結局次式を得る。

$$(\omega^2[m] - [A] - k^2[B])[v] = \{0\} \quad \dots\dots\dots (3.22)$$

明らかにこの式は波数  $k$  の自乗を固有値とする固有値問題を表わしており、固有方程式は次式となる。

$$|\omega^2[m] - [A] - k^2[B]| = 0 \quad \dots\dots\dots (3.23)$$

ここで式 (3.20), (3.21) より明らかなように式 (3.23) は  $a$  の関数となっている。この  $a$  は式 (2.3) で与えられる値であり、波数  $k$  の関数である。したがって式 (3.23) を解く場合、繰り返し計算の必要がある。すなわち適当な方法によって  $a$  の値を推定し、これを  $a$  の第1近似値として式 (3.23) に代入して固有値  $k_1^2$  を求める。これを式 (2.3) に代入して  $a$  を求めこれを  $a$  の第2近似値とする。次下同様の過程を解が収束するまで繰り返す。

$a$  の第1次近似値の推定法は数通り考えられるが、Lysmer らの手法、すなわち、最下節点の変位を固定したモデルの固有値問題を解くことによって求めた波数  $k$  を式 (2.3) に代入して求める手法が最適と思われる。なぜなら、両者の計算機プログラムには多くの共通点があるからである。

### 3.3 レーレー波に対する固有値問題

#### (1) 基盤の変位と節点力の関係

円振動数  $\omega$ 、波数  $k$  で  $x$  の正方向に伝播するレーレー波による  $x$  方向の変位  $u$ 、 $z$  方向の変位  $w$  はそれぞれ次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u &= U(z) e^{i(\omega t - kx)} \\ w &= W(z) e^{i(\omega t - kx)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.24)$$

ここに  $U(z)$ ,  $W(z)$ ; 振幅

ここで、ラブ波の場合と同様に任意の隣接する半無限要素 I, II を取り出せば、各々の節点変位ベクトル  $\{\delta\}_I$ ,  $\{\delta\}_{II}$  は次のように表わせる(Fig. 7 参照)。

$$\begin{aligned} \{\delta\}_I &= \begin{Bmatrix} u_{2n-1} e^{ikh} \\ u_{2n} e^{ikh} \\ u_{2n-1} \\ u_{2n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e^{ikh} & 0 \\ 0 & e^{ikh} \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{2n-1} \\ u_{2n} \end{Bmatrix} \\ &= [E] \{u\}_n \quad \dots\dots\dots (3.25) \\ \{\delta\}_{II} &= \{\delta\}_I e^{-ikh} = e^{-ikh} [E] \{u\}_n \quad \dots\dots\dots (3.26) \end{aligned}$$

ここに  $\{u\}_n$ ; 表層と基盤の境界上の節点変位ベクトル

そこで、節点②に働く要素 I, II の変形による節点力、水平成分  $P_{2n-1}$ 、鉛直成分  $P_{2n}$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} P_{2n-1} \\ P_{2n} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \{k\}_3 + \{k\}_1 e^{-ikh} \\ \{k\}_4 + \{k\}_2 e^{-ikh} \end{Bmatrix} [E] \{u\}_n \\ &= [L]_n \{u\}_n \quad \dots\dots\dots (3.27) \end{aligned}$$

ここに  $\{k\}_1$ ,  $\{k\}_2$ ,  $\{k\}_3$ ,  $\{k\}_4$  は式 (2.23) の剛性マトリクスの第1行、第2行、第3行、第4行である。また

$$[L]_n = \frac{Q_n}{3I^2} \begin{bmatrix} 6(1-\nu_n)E'(1-\cos kl) + \alpha_n l^2 F(2+\cos kl) & i3l(\alpha_n H - \nu_n G' \sin kl) \\ -i3l(\alpha_n H - \nu_n G') \sin kl & 6\alpha_n J(1-\cos kl) + (1-\nu_n)l^2 I(2+\cos kl) \end{bmatrix}$$

$l \rightarrow 0$  の極限では

$$\lim_{l \rightarrow 0} [L]_n = Q_n \begin{bmatrix} (1-\nu_n)E'k^2 + \alpha_n F & i(\alpha_n H - \nu_n G')k \\ -i(\alpha_n H - \nu_n G')k & \alpha_n Jk^2 + (1-\nu_n)I \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.28)$$

ここに  $i = \sqrt{-1}$ ,  $Q_n$ ,  $\alpha_n$  は式 (2.21) で与えられる基盤の弾性定数,  $\nu_n$ ; 基盤のポアソン比。

#### (2) 表層の変位と節点力の関係

ここでも結果のみを示すに止める (Fig. 8 参照)。

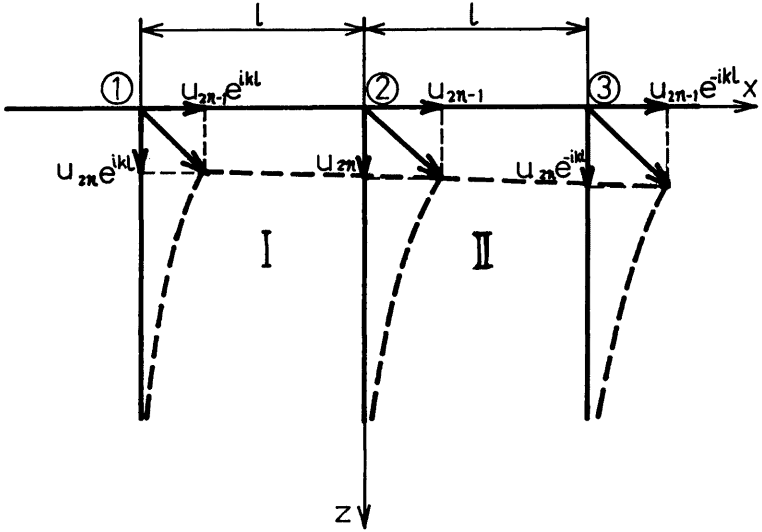


Fig. 7. Nodal displacements and nodal forces in base layer for Rayleigh wave

$$\begin{Bmatrix} P_{j1} \\ P_{j2} \\ P_{j3} \\ P_{j4} \end{Bmatrix} = [L]_j \begin{Bmatrix} u_{2j-1} \\ u_{2j} \\ u_{2j+1} \\ u_{2j+2} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.29)$$

ここに  $[L]_j$  は  $l \rightarrow 0$  の極限で次式となる。

$$[L]_j = \frac{Q_j}{6} \begin{bmatrix} 2h_j(1-\nu_j)k^2 + 6\frac{\alpha_j}{h_j} & i3(\alpha_j - \nu_j)k & h_j(1-\nu_j)k^2 - 6\frac{\alpha_j}{h_j} & i3(\alpha_j + \nu_j)k \\ -i3(\alpha_j - \nu_j)k & 2h_j\alpha_j k^2 + 6\frac{1-\nu_j}{h_j} & i3(\alpha_j + \nu_j)k & h_j\alpha_j k^2 - 6\frac{1-\nu_j}{h_j} \\ h_j(1-\nu_j)k^2 - 6\frac{\alpha_j}{h_j} & -i3(\alpha_j + \nu_j)k & 2h_j(1-\nu_j)k^2 + 6\frac{\alpha_j}{h_j} & -i3(\alpha_j - \nu_j)k \\ -i3(\alpha_j + \nu_j)k & h_j\alpha_j - 6\frac{1-\nu_j}{h_j} & i3(\alpha_j - \nu_j)k & 2h_j\alpha_j k^2 + 6\frac{1-\nu_j}{h_j} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.30)$$

### (3) 節点に働く慣性力

**Fig. 7** の節点②に生じる慣性力のうち半無限要素の寄与分の水平成分を  $R_{2n-1}$ 、鉛直成分を  $R_{2n}$  とすると、これらは式 (2.26) で与えられる質量マトリクスを用いて次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \dot{R}_{2n-1} \\ R_{2n} \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \{m\}_3 + \{m\}_1 e^{-ikh_l} \\ \{m\}_4 + \{m\}_2 e^{-ikh_l} \end{bmatrix} [E] \{u\}_n$$

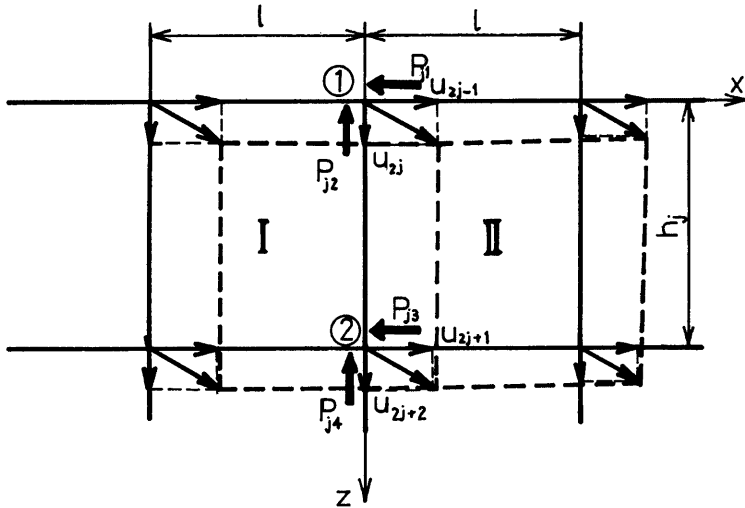


Fig. 8. Nodal displacements and nodal forces in surface layer for Rayleigh wave.

$$= l \cdot \omega^2 [m]_n \{u\}_n \quad \dots\dots\dots (3.31)$$

ここにマトリクス  $[m]_n$  は次式で与えられる。

$$[m]_n = \frac{\rho}{6} \begin{bmatrix} 4E' + 2E' \cos kl & 0 \\ 0 & 4J + 2J \cos kl \end{bmatrix}$$

また  $l \rightarrow 0$  の極限では次式となる。

$$\lim_{l \rightarrow 0} [m]_n = \rho \begin{bmatrix} E' & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.32)$$

次に表層に関しては, Fig. 8 の節点①, ②に生じる慣性力をそれぞれ  $R_{j1}, R_{j2}, R_{j3}, R_{j4}$  とすると,

$$\begin{Bmatrix} R_{j1} \\ R_{j2} \\ R_{j3} \\ R_{j4} \end{Bmatrix} = l \cdot \omega^2 [m]_j \begin{Bmatrix} u_{2j-1} \\ u_{2j} \\ u_{2j+1} \\ u_{2j+2} \end{Bmatrix} \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \quad \dots\dots\dots (3.33)$$

ここに  $[m]_j$  は  $l \rightarrow 0$  の極限で次式となる。

$$[m]_j = \frac{\rho_j h_j}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \quad \dots\dots\dots (3.34)$$

## (4) 固有方程式

式 (3.30) で与えられるマトリクス  $[L]_j$  は次のように分割できる。

$$[L]_j = [R]_j k^2 + i[S]_j k + [T]_j \quad \dots\dots\dots (3.35)$$

ここに

$$[R]_j = \frac{Q_j h_j}{6} \begin{bmatrix} 2(1-\nu_j) & 0 & (1-\nu_j) & 0 \\ 0 & 2\alpha_j & 0 & \alpha_j \\ (1-\nu_j) & 0 & 2(1-\nu_j) & 0 \\ 0 & \alpha_j & 0 & 2\alpha_j \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.36)$$

$$[S]_j = \frac{Q_j}{2} \begin{bmatrix} 0 & (\alpha_j - \nu_j) & 0 & (\alpha_j + \nu_j) \\ -(\alpha_j - \nu_j) & 0 & (\alpha_j + \nu_j) & 0 \\ 0 & -(\alpha_j + \nu_j) & 0 & -(\alpha_j - \nu_j) \\ -(\alpha_j + \nu_j) & 0 & (\alpha_j - \nu_j) & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.37)$$

$$[T]_j = \frac{Q_j}{h_j} \begin{bmatrix} \alpha_j & 0 & -\alpha_j & 0 \\ 0 & (1-\nu_j) & 0 & -(1-\nu_j) \\ -\alpha_j & 0 & \alpha_j & 0 \\ 0 & -(1-\nu_j) & 0 & (1-\nu_j) \end{bmatrix} \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \quad \dots\dots\dots (3.38)$$

また式 (3.28) で与えられたマトリクス  $[L]_n$  も次のように分解できる。

$$[L]_n = [R]_n k^2 + i[S]_n k + [T]_n \quad \dots\dots\dots (3.39)$$

ここに

$$[R]_n = Q_n \begin{bmatrix} (1-\nu_n)E' & 0 \\ 0 & \alpha_n J \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.40)$$

$$[S]_n = Q_n \begin{bmatrix} 0 & (\alpha_n H - \nu_n G') \\ -(\alpha_n H - \nu_n G') & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.41)$$

$$[T]_n = Q_n \begin{bmatrix} \alpha_n F & 0 \\ 0 & (1-\nu_n)I \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.42)$$

以上のマトリクスを全層について集成したものをそれぞれ  $[R]$ ,  $[S]$ ,  $[T]$  とし、式 (3.32), 式 (3.34) から集成したマトリクスを  $[m]$  とすると、次のつり合い方程式を得る。

$$([R]k^2 + i[S]k + [T] - \omega^2[m])\{u\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (3.43)$$

これは波数  $k$  を固有値とする固有値問題を表わす。したがって固有方程式は次式となる。

$$|[R]k^2 + i[S]k + [T] - \omega^2[m]| = 0 \quad \dots\dots\dots (3.44)$$

式 (3.43) の固有値問題は次式と等価であり<sup>6)</sup>、実際の解析にはこちらが用いられる。

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -[R]^{-1}([T] - \omega^2[m]) & -i[R]^{-1}[S] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.45)$$

式中、ベクトル  $\{x\}$  はダミーである。

さて、式 (3.40)～式 (3.42) は波数  $k$  の関数であるから、ラブ波の場合と同様くり返し計算をして式 (3.45) を解かなければならない。その手法は本質的にはラブ波の場合と同様である。

#### 4. 境界条件

##### 4.1 概 説

本研究において用いる有限要素モデルは、基盤に半無限要素を導入したことにより鉛直方向には無限下方まで解析領域に入っているのですがこの方向については、もはや境界条件を設定する必要はないが、側方の境界

条件については考慮する必要がある。この側方の境界条件は、境界上の節点変位によって生じる応力を、等価節点力として運動方程式の外力項に加えることによって満足される。以下、ラブ波、レーレー波の場合について順に境界条件を設定する。

#### 4.2 ラブ波に対する境界条件

ここでは、解析領域を I 領域、その左側の外部領域を L 領域、右側を R 領域と呼ぶことにする。(Fig. 9)。

まず、L 領域から I 領域にラブ波が入射する場合について考える。

(1) 基盤での境界条件 (Fig. 10)

第  $m$  次のラブ波のモードが伝播する時の基盤内の変位  $v^m$  は次式で与えられる。

$$v^m = v_n^m e^{-a z} e^{i(\omega t - k x)} \quad \dots\dots\dots (4.1)$$

ここに  $v_n^m$ ; 第  $m$  次のモードによる表層と基盤の境界上の節点変位。  $k_m$ ; 第  $m$  次の波数。

I 領域の  $x=0$  の面上に存在する応力は  $\tau_{xy}$  であり、これは式 (4.1) および Hooke の法則を用いて次式で表わされる。

$$\tau_{xy}|_{x=0} = G_n \frac{\partial v^m}{\partial x} \Big|_{x=0} = -i k_m G_n v_n^m e^{-a z} \quad \dots\dots\dots (4.2)$$

ここに  $G_n$ ; 基盤のせん断弾性係数。

等価節点力としては、全せん断力の  $1/r$  ( $r>0$ ) が節点に作用するとすれば、等価節点力  $P_n'$  は次式で表わせる。

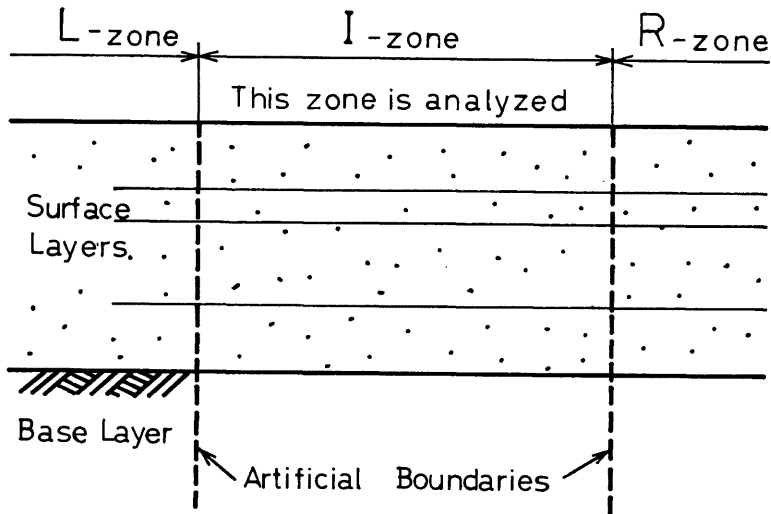


Fig. 9. Layered ground model for analysis.

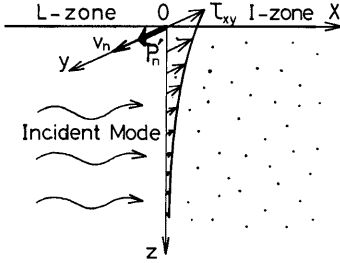


Fig. 10. Shear stress and equivalent nodal force; Love wave case

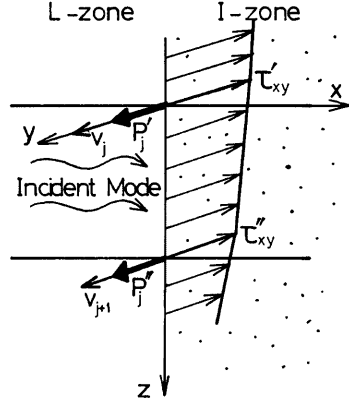


Fig. 11. Shear stress and equivalent nodal force; Love wave case.

$$P_n' = \frac{1}{r} \int_0^{\infty} \tau_{xy} dz = i \frac{1}{r} k_m G_n \frac{1}{a} v_n^m \quad \dots\dots\dots (4.3)$$

(2) 表層での境界条件 (Fig. 11)

第  $m$  次のモードが伝播する時の表層内の変位  $v^m$  は式 (3.1) より次式で表わされる。

$$v^m = V^m(z) e^{i(\omega t - k_m x)} \quad \dots\dots\dots (4.4)$$

ここに  $V^m(z)$  は第  $m$  次の固有モードである。

$x=0$  の面上に生じるせん断力  $\tau_{xy}$  は次式で与えられる。

$$\tau_{xy}|_{x=0} = G_j \frac{\partial v^m}{\partial x} \Big|_{x=0} = -ik_m G_j V^m(z) \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \quad \dots\dots\dots (4.5)$$

等価節点力  $p_j'$ ,  $p_j''$  はおのおの次式で与えられる。

$$p_j' = -\frac{h_j}{6} (2\tau_{xy}' + \tau_{xy}'') = -i \frac{h_j G_j k_m}{6} (2v_j^m + v_{j+1}^m) \quad \dots\dots\dots (4.6)$$

$$p_j'' = i \frac{h_j G_j k_m}{6} (v_j^m + 2v_{j+1}^m) \quad \dots\dots\dots (4.7)$$

ここに  $v_j^m$ ; 第  $m$  次モードの節点  $j$  での振幅

(3) 全モードによる境界条件

(1), (2) で単一の要素について求めた境界条件を全要素での境界条件として集成する。

第  $m$  次のモードによる等価節点力ベクトル  $\{P\}_m$  は次式で与えられる (Fig. 12 参照)。

$$\{P\}_m = \begin{Bmatrix} p_1' \\ p_1'' + p_2' \\ \vdots \\ p_j' + p_{j+1}' \\ \vdots \\ p_{n-1}' + p_n' \end{Bmatrix} = \frac{ik_m}{6} \begin{Bmatrix} 2h_1 G_1 v_1^m + h_1 G_1 v_2^m \\ h_1 G_1 v_1^m + 2(h_1 G_1 + h_2 G_2) v_2^m + h_2 G_2 v_3^m \\ \vdots \\ h_{j-1} G_{j-1} v_{j-1}^m + 2(h_{j-1} G_{j-1} + h_j G_j) v_j^m + h_j G_j v_{j+1}^m \\ \vdots \\ h_{n-2} G_{n-2} v_{n-2}^m + 2(h_{n-2} G_{n-2} + h_{n-1} G_{n-1}) v_{n-1}^m + h_{n-1} G_{n-1} v_n^m \\ h_{n-1} G_{n-1} v_{n-1}^m + (2h_{n-1} G_{n-1} v_n^m + \frac{1}{ra} G_n v_n^m) \end{Bmatrix}$$

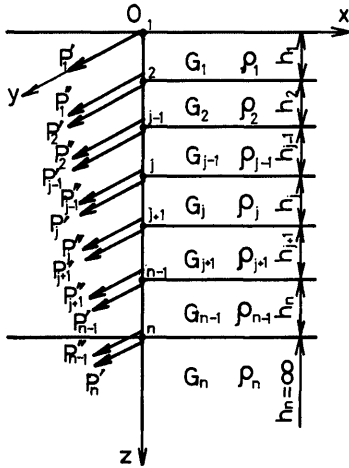


Fig. 12. Equivalent nodal forces on boundary.

$$\{v\} = [V] \{\alpha\}$$

一方、モーダルマトリクス  $[V]$  は式 (3.21) で定義される  $[B]$  マトリクスと次の意味で直交している。

$$[V]^T [B] [V] = [I] \quad \dots\dots\dots (4.11)$$

ここに  $[I]$  ; 単位マトリクス

式 (4.10) の両辺に前から  $[V]^T [B]$  を乗じて式 (4.11) の関係を用いると  $\{\alpha\}$  が次式で表わせる。

$$\{\alpha\} = [V]^T [B] \{v\} \quad \dots\dots\dots (4.12)$$

ここで、式 (4.12) を式 (4.9) に代入すると等価節点力ベクトルが次式で表わされる。

$$\{P\}_L^E = i[B]_L' [V]_L [H]_L [V]_L [B]_L \{v\}_L^E \quad \dots\dots\dots (4.13)$$

$$\equiv [R]_L^E \{v\}_L^E \quad \dots\dots\dots (4.14)$$

ところで、 $[R]_L^E$  マトリクスは相反作用の定理から対称マトリクスでなければならず、式 (4.13) において  $[B]_L' = [B]$  でなければならぬ。したがって、式 (4.3) の  $r$  は 2 に等しくなければならず、基盤内で生じる全せん断力の 1/2 を等価節点力として第  $n$  節点に作用させればよいことになる。

上の場合と全く同様にして、i) 反射波または透過波が I 領域から L 領域へ進む場合、ii) R 領域から I 領域へ入射する場合、iii) 反射波または透過波が I 領域から R 領域へ進む場合の等価節点力ベクトル  $\{P\}_L^E$ ,  $\{P\}_R^E$ ,  $\{P\}_R^E$  が次のように求まる。

$$\{P\}_L^E = [R]_L^E \{v\}_L^E \quad \dots\dots\dots (4.15)$$

$$\{P\}_R^E = [R]_R^E \{v\}_R^E \quad \dots\dots\dots (4.16)$$

$$\{P\}_R^E = [R]_R^E \{v\}_R^E \quad \dots\dots\dots (4.17)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} [R]_L^E &= -[R]_L^E \\ [R]_R^E &= i[B]_R [V]_R [H]_R [V]_R [B]_R \\ [R]_R^E &= -[R]_R^E \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.18)$$

$$\equiv \frac{ik_m}{6} \{J\}_m \quad \dots\dots\dots (4.8)$$

全モードによる等価節点力ベクトル  $\{P\}$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \{P\}_L^E &= \frac{i}{6} \sum_{m=1}^n \alpha_m k_m \{J\}_m \\ &= i[B]_L' [V] [H] \{\alpha\} \quad \dots\dots (4.9) \end{aligned}$$

ここに  $[B]_L'$  は式 (3.21) で定義される  $[B]$  マトリクスの第  $(n, n)$  要素において  $\frac{1}{2a}$  のかわりに  $\frac{1}{ra}$  と置いたものである。

$[V]$  ; モーダルマトリクス

$[H]$  ; その第  $(j, j)$  要素に  $k_j'$  を持つ対角マトリクス  
ただし、 $k_j^2 > 0$  のとき  $k_j' = \sqrt{k_j^2}$

$$k_j^2 < 0 \text{ のとき } k_j' = -i\sqrt{-k_j^2}$$

$\{\alpha\}$  ; 刺激係数ベクトル

式 (4.9) のベクトル  $\{P\}_L^E$  についている下の添字  $L$  は注目している境界が  $L$  領域との境界であること、上添字  $R$  はその境界を右方向 (Right) に波動が透過することを意味する。

さて、変位ベクトル  $\{v\}$  はモーダルマトリクス  $[V]$  と刺激係数ベクトル  $\{\alpha\}$  との積で表わされる。すなわち、

$$\dots\dots\dots (4.10)$$

### 4.3 レーレー波に対する境界条件

レーレー波が I 領域から II 領域に入射する場合について考える。

#### (1) 基盤での境界条件

第  $m$  次のモードによる水平変位  $u$  と鉛直変位  $w$  は式 (2.11), (2.16) より次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_{2n-1}^m (Ae^{-az} + Be^{-bz}) e^{i(\omega t - k_m x)} \\ w &= u_{2n}^m (Ce^{-az} + De^{-bz}) e^{i(\omega t - k_m x)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.19)$$

ここに  $u_{2n-1}^m$ ,  $u_{2n}^m$  はそれぞれ水平方向、鉛直方向の節点変位である (Fig. 13 参照)。

$x=0$  の面上でのひずみ成分  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{xz}$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x|_{x=0} &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = -ik_m (Ae^{-az} + Be^{-bz}) u_{2n-1}^m \\ \varepsilon_z|_{x=0} &= \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} = -(aCe^{-az} + bDe^{-bz}) u_{2n}^m \\ \gamma_{xz}|_{x=0} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = -(aAe^{-az} + bBe^{-bz}) u_{2n-1}^m - ik_m (Ce^{-az} + De^{-bz}) u_{2n}^m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.20)$$

次に  $x=0$  面に生じる応力は  $\sigma_x$ , と  $\tau_{xz}$  の 2 成分であり, これらは式 (2.19) に式 (4.20) を代入して次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x|_{x=0} &= -Q_n \{ ik_m (1-\nu_n) (Ae^{-az} + Be^{-bz}) u_{2n-1}^m + \nu_n (aCe^{-az} + bDe^{-bz}) u_{2n}^m \} \\ \tau_{xz}|_{x=0} &= -G_n (aAe^{-az} + bBe^{-bz}) u_{2n-1}^m - ik_m G_n (Ce^{-az} + De^{-bz}) u_{2n}^m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.21)$$

基盤内の全応力は  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xz}$  を  $z$  について 0 から  $\infty$  まで積分することによって求まる。途中,  $A+B=1$ ,  $C+D=1$  なる関係を用いて整理すると全応力は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \sigma_x dz &= -Q_n \left\{ ik_m (1-\nu_n) \left( \frac{A}{a} + \frac{B}{b} \right) u_{2n-1}^m + \nu_n u_{2n}^m \right\} \\ \int_0^\infty \tau_{xz} dz &= -G_n u_{2n-1}^m - ik_m G_n \left( \frac{C}{a} + \frac{D}{b} \right) u_{2n}^m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.22)$$

等価節点力として, 水平方向には全応力の  $1/r$ , 鉛直方向には  $1/s$  ( $r, s > 0$ ) が節点に作用するとすれば, 水平方向, 鉛直方向の等価節点力  $p_{2n-1}$ ,  $p_{2n}$  は次式となる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} p_{2n-1} \\ p_{2n} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{1}{r} ik_m (1-\nu_n) Q_n \left( \frac{A}{a} + \frac{B}{b} \right) \\ \frac{1}{s} G_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{2n-1}^m \\ u_{2n}^m \end{Bmatrix} \\ &= (ik_m [R]_n' + [D]_n) \begin{Bmatrix} u_{2n-1}^m \\ u_{2n}^m \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (4.23) \end{aligned}$$

ここに

$$[R]_n' = \begin{bmatrix} (1-\nu_n) Q_n \left( \frac{A}{a} + \frac{B}{b} \right) / r & 0 \\ 0 & G_n \left( \frac{C}{a} + \frac{D}{b} \right) / s \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.24)$$

#### (2) 表層での境界条件<sup>7)</sup>

この場合の節点変位ベクトル  $\{u_{2j-1}^m, u_{2j}^m, u_{2j+1}^m, u_{2j+2}^m\}^T$  と等価節点力ベクトル  $\{p_{2j-1}, p_{2j}, p_{2j+1}, p_{2j+2}\}^T$  との関係

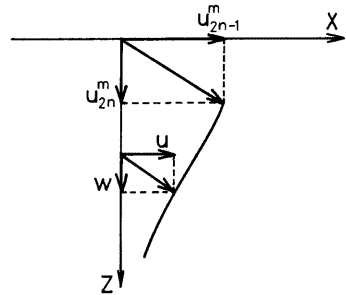


Fig. 13. Nodal displacements in Rayleigh wave case.

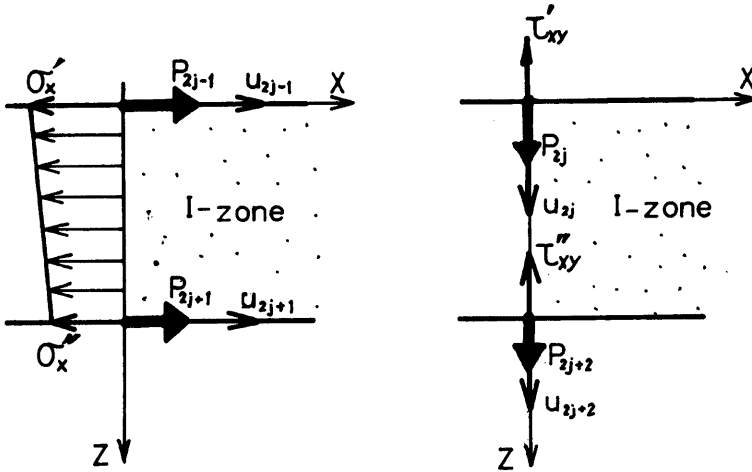


Fig. 14. Stresses and equivalent nodal forces; Rayleigh wave case in surface layers

は次式で表わせる。

$$\begin{Bmatrix} p_{2j-1} \\ p_{2j} \\ p_{2j+1} \\ p_{2j+2} \end{Bmatrix} = (ik_m [R]_j + [D]_j) \begin{Bmatrix} u_{2j-1}'' \\ u_{2j}'' \\ u_{2j+1}'' \\ u_{2j+2}'' \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4.25)$$

ここに  $[R]_j$  は式 (3.36) で与えられるマトリクス。

また

$$[D]_j = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \nu_j Q_j & 0 & -\nu_j Q_j \\ G_j & 0 & -G_j & 0 \\ 0 & \nu_j Q_j & 0 & -\nu_j Q_j \\ G_j & 0 & -G_j & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4.26)$$

(3) 全てのモードによる境界条件

ラブ波の場合と同様に、境界上の節点全体にわたる関係を、前項で求めた個々の要素に対する関係から集成する。すなわち、

$$\{P\}_m = [W]_m \{u\}_m \quad \dots\dots\dots (4.27)$$

ここに

$$[W]_m = ik_m [R]' + [D] \quad \dots\dots\dots (4.28)$$

上式中  $[R]'$  は式 (3.36) で与えられるマトリクス  $[R]_j$  と式 (4.24) で与えられるマトリクス  $[R]_n'$  を集成したもの。 $[D]$  は式 (4.27) で与えられるマトリクス  $[D]_j$  と式 (4.23) 中、第 2 項のマトリクス  $[D]_n$  から集成されるものである。

全てのモードによる境界上の変位を  $\{u\}$  とすると、 $\{u\}$  はモーダルマトリクス  $[V]$  と刺激係数ベクトル  $\{\alpha\}$  を用いて次のように表現できる。

$$\{u\} = \sum_{m=1}^{2n} \alpha_m \{u\}_m = [V] \{\alpha\} \quad \dots\dots\dots (4.29)$$

全てのモードによる節点力ベクトルを  $\{P\}$  とすると、 $\{P\}$  は次式で表わされる。

$$\{P\} = \sum_{m=1}^{2n} \alpha_m (ik_m [R]' + [D]) \{u\}_m = i[R]' [V] [H] + [D] [V] \{\alpha\}$$

ここで、式 (4.29) より  $\{\alpha\} = [V]^{-1} \{u\}$  であるからこの関係を上式に代入して、結局次式を得る。

$$\begin{aligned} \{P\} &= (i[R]' [V] [H] [V]^{-1} + [D]) \{u\} \\ &= [W] \{u\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4.30)$$

ここに、 $[H]$  は波数  $k_m (m=1, 2, \dots, 2n)$  を第  $(m, m)$  要素にもつ対角マトリクスである。ただし  $k_m$  を固有値とすると、 $-k_m$  も固有値であり、次の規則に従って  $\pm k_m$  のうち、いずれか一方が選ばれる。

- (a)  $\pm k_m$  が実数の場合： $+k_m$  を採る。
- (b)  $\pm k_m$  が複素数か虚数の場合：虚数部が負の方を採る。

ここで、 $k_m$  に対する固有ベクトルを  $\{v\}_m$  とすると、 $-k_m$  に対する固有ベクトルは  $\{v\}_m$  の奇数番目の要素の符号が逆になっているものである。したがって波数の符号が変われば、それに対応する固有ベクトルに変えなければならない。また式 (4.31) に用いてある添字  $L$  と  $R$  はラブ波の場合と同じ意味を表わす。

ところで、マトリクス  $[W]_L^E$  は相反作用の定理より対称でなければならない、そのためには  $[W]_L^E$  は次の形をしておればよい<sup>7)</sup>。

$$[W]_L^E = (i[R] [V] [H] [V]^{-1} + [D])$$

ここに  $[R]$  は式 (3.36) および式 (3.40) より集成され、一方  $[R]'$  は式 (3.36) および式 (4.24) より集成されるマトリクスであり、この両者を等置することにより未知数  $r, s$  が定まる。式 (3.40) および式 (4.24) より  $r, s$  は次式で与えられる。

$$r = \left( \frac{A}{a} + \frac{B}{b} \right) / E', \quad s = \left( \frac{C}{a} + \frac{D}{b} \right) / J \quad \dots\dots\dots (4.31)$$

ここに  $E'$  および  $J$  は式 (2.24) で与えられる値である。

以上の議論より、第  $n$  節点に作用させる水平方向の等価節点力としては、基盤内に生じる水平方向の全応力の  $E'/(A/a+B/b)$  倍を、鉛直方向にはその方向の全応力の  $J/(C/a+D/b)$  倍を作用させればよいという結論を得る。

次に、i) 反射波または透過波が I 領域から L 領域へ進む場合、ii) R 領域から I 領域へ入射する場合、iii) 反射波または透過波が I 領域から R 領域へ進む場合の等価節点力ベクトル  $\{P\}_L^E, \{P\}_R^E, \{P\}_R^R$  も全く同様の手順によって求まる。その結果は以下のとおりである。

$$\{P\}_L^E = [W]_L^E \{u\}_L^E \quad \dots\dots\dots (4.32)$$

$$\{P\}_R^E = [W]_R^E \{u\}_R^E \quad \dots\dots\dots (4.33)$$

$$\{P\}_R^R = [W]_R^R \{u\}_R^R \quad \dots\dots\dots (4.34)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} [W]_L^E &= -i[R]_L [\tilde{V}]_L [H]_L [\tilde{V}]_L^{-1} + [D]_L \\ [W]_R^E &= -i[R]_R [\tilde{V}]_R [H]_R [\tilde{V}]_R^{-1} + [D]_R \\ [W]_R^R &= i[R]_R [V]_R [H]_R [V]_R^{-1} + [D]_R \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.35)$$

ここに  $[\tilde{V}]$  は  $[V]$  の各ベクトルの奇数番目の要素の符号を変えたものである。

## 5. 運動方程式

解析対象領域，すなわち I 領域全体にわたる剛性マトリクスを  $[K]_I$ ，質量マトリクスを  $[M]_I$ ，節点変位ベクトルを  $\{U\}_I$  とし，円振動数  $\omega$  の調和表面波が入射する場合について考えると運動方程式は次式となる。

$$([K]_I - \omega^2 [M]_I) \{U\}_I = \{P\}_I + \{P\}_L + \{P\}_R + \{P\}_K + \{P\}_H \quad \dots\dots\dots (5.1)$$

ここに  $\{P\}_I$ ；I 領域内の節点に働く強制外力ベクトル， $\{P\}_L$ ， $\{P\}_R$ ， $\{P\}_K$ ， $\{P\}_H$ ；ラブ波の場合は式 (4.14)～式 (4.17) で，レーレー波の場合は式 (4.30～式 4.34) で定義される等価節点力ベクトルである。

節点変位ベクトル  $\{U\}_I$  のうち，ラブ波の場合は  $n$  個，レーレー波の場合  $2n$  個の最初の変位成分は L 領域との境界上の節点変位であり，終りから同数の変位成分は R 領域との境界上の変位成分となるよう順序づけられているものとする。 $n$  は境界上の節点数である。I 領域内の節点総数を  $N$  とすれば，この系の自由度は，ラブ波の場合  $N$ ，レーレー波の場合は  $2N$  である。以下，ここではラブ波の場合について議論を進めるがレーレー波の場合も， $n \rightarrow 2n$ ， $N \rightarrow 2N$  とすれば全く同じである。

式 (5.1) に式 (4.14)，(4.15)，(4.16)，(4.17) を代入し，少し変形して次式を得る。

$$([K]_I - \omega^2 [M]_I) \{U\}_I = ([R]_L - [R]_R) \{v\}_L + [R]_L \{v\}_L + [v]_L + \{P\}_I + ([R]_K - [R]_H) \{v\}_K + [R]_K \{v\}_K + [v]_K + \{P\}_I \quad \dots\dots\dots (5.2)$$

ところが  $\{v\}_L$  は L 領域から入射する波動による L 領域と I 領域との境界上の節点変位であり， $\{v\}_K$  はこの境界上を逆向きに進行する波動による境界上の節点変位であるから  $\{v\}_L + \{v\}_K$  は  $\{U\}_I$  の最初の  $n$  個の成分に等しい。また同様な考えから  $\{v\}_K + \{v\}_H$  は  $\{U\}_I$  の最後の  $n$  個の成分に等しい。したがって式 (5.2) は次式となる。

$$([K]_I - \omega^2 [M]_I) \{U\}_I = ([R]_L - [R]_R) \{v\}_L + [R]_L \{U\}_I + ([R]_K - [R]_H) \{v\}_K + [R]_K \{U\}_I + \{P\}_I$$

したがって運動方程式として，上式を変形して結局次式を得る。

$$([K]_I - \omega^2 [M]_I - [R]_L - [R]_K) \{U\}_I = ([R]_L - [R]_R) \{U\}_L + ([R]_K - [R]_H) \{U\}_K + \{P\}_I \quad \dots (5.3)$$

ここに  $\{U\}_L$ ；L 領域から入射する波数の変位ベクトル

$\{U\}_K$ ；R 領域から入射する波動の変位ベクトル

式 (5.3) は  $N$  元連立方程式である。ところが  $[R]_L$  等は  $(n \times n)$  元マトリクス， $\{U\}_L$  等は  $n$  元ベクトルであるから，これらをそれぞれ  $(N \times N)$  元， $N$  元へと拡大しなければならない。具体的には， $[R]_L$ ， $[R]_R$  を  $(N \times N)$  元にするには左上  $(n \times n)$  に  $[R]_L$ ， $[R]_R$  の要素を入れ，残りの要素を全て 0 にし， $[R]_K$ ， $[R]_H$  の場合には右下  $(n \times n)$  に要素を入れ残りを 0 とする。また  $\{U\}_L$  は最初の  $n$  個に， $\{U\}_K$  は終りの  $n$  個にその要素を入れ残りの  $(N-n)$  個の要素を 0 とすればよい。

## 6. 数値解析例と考察

### 6.1 数値解析に用いたモデル

Fig. 15 に示すように地表面付近に構造物基礎が埋設されている水平地盤モデルを，地盤の弾性定数その他の値を Table 1 に示すように 3 通り仮定して，L 領域からラブ波，レーレー波の基本モードを入射させた。したがって運動方程式 (5.3) 式中， $\{v\}_L$  は基本モードであり， $\{v\}_K = \{P\}_I = \{0\}$  である。Fig. 16 は Fig. 15 の地盤モデルの有限要素網である。

### 6.2 ラブ波による解析例—地盤表面の周波数応答倍率

各周波数におけるラブ波の基本モードが入射した時の，Fig. 16 に示してある点①～⑤の応答倍率を Fig. 18 に示す。また Fig. 17 に周波数が 1 Hz，2 Hz，3 Hz の時の基本モードを示しておく。

Fig. 18 中，点①，②の応答曲線は周波数が高くなるにつれて入射振幅より応答が大きくなる場合のあ

Table 1. Constants of analyzed models

| CASE                    |            | Thickness<br>(m)          | Density<br>(kg-se <sup>3</sup> /m <sup>3</sup> ) | Shere<br>Modulus<br>(kg/m <sup>2</sup> ) | Poisson's<br>Ratio | Shere Wave<br>Velocity<br>(m/sec) |
|-------------------------|------------|---------------------------|--------------------------------------------------|------------------------------------------|--------------------|-----------------------------------|
| 1                       | 1st Layer  | 25                        | 200                                              | $4.50 \times 10$                         | 0.25               | 150                               |
|                         | 2nd Layer  | 150                       | 210                                              | $1.89 \times 10$                         | 0.25               | 300                               |
|                         | Base Layer | $\infty$                  | 220                                              | $7.92 \times 10$                         | 0.25               | 600                               |
| 2                       | 1st Layer  | 25                        | 200                                              | $2.00 \times 10$                         | 0.25               | 100                               |
|                         | 2nd Layer  | 150                       | 210                                              | $1.21 \times 10$                         | 0.25               | 240                               |
|                         | Base Layer | $\infty$                  | 220                                              | $5.50 \times 10$                         | 0.25               | 500                               |
| 3                       | Sur. Layer | 175                       | 210                                              | $1.21 \times 10$                         | 0.25               | 240                               |
|                         | Base Layer | $\infty$                  | 220                                              | $5.50 \times 10$                         | 0.25               | 500                               |
| Structure<br>Foundation |            | Width x<br>Hight<br>20x25 | 250                                              | $6.50 \times 10$                         | 0.167              | 1 610                             |

ることを示している。これは構造物基礎からの反射波による影響で、入射波と反射波の位相の関係で峰や谷が生ずる。このように入射波からみて構造物の前面での地盤の挙動は波長（周波数）によって大きく変動を受けることを示している。また点②の曲線は点①のそれに比べて非常に不規則である。これは点②の方が構造物に近いので構造物の挙動の影響をより強く受けるためと考えられる。すなわち、点③の曲線が構造物の挙動を示しているわけであるが、これは入射波動に対してかなりの割合で応答を呈しており、このため構造物前面である点③の挙動は構造物との動的相互作用のためこのような不規則性を示すものと思われる。

次に点③、④、⑤の挙動に注目すると場合 1 と場合 2 とでは、ほぼ ③→④→⑤の順で応答倍率が大きくなっている。これは構造物の存在によって押えられた地表での振幅が、構造物から遠ざかるにつれて回復されていくことを意味し、第 2 層を伝播する波動が、第 1 層に波動エネルギーを供給するためであると思われる。場合 3 においては、これとは逆に、③の応答倍率が④、⑤のそれよりもやや大きくなっている。この場合、表層は構造物よりはるかに大きな層厚をもつ一層のみであるから、場合 1、場合 2 のような波動エネルギーの上下へのやりとりは生じず、地表面においては構造物とほぼ同程度の振幅で波動が伝播してゆくものと考えられる。これらのことは、地表付近の地盤の挙動は地盤の地下構造の影響を強く受けることを意味するものである。

次に Fig. 18 の一般的傾向として、周波数が高くなるにつれて点 ①、②の応答曲線は変動が激しくなり、点③、④、⑤の応答曲線は小さな応答倍率を示すようになる。このことは、とりまなお高周波数になる程、構造物による影響を強く受けることを意味し、反射エネルギーが増大することになる。

### 6.3 レーレー波による解析例

ラブ波の場合と同様にレーレー波の各周波数における基本モードが入射したときの応答倍率を求め、その結果を水平方向の応答倍率を Fig. 19 に、鉛直方向のそれを Fig. 20 に示す。Fig. 16 中の点④と⑤の挙動はラブ波の場合と同様に非常によく似ているので、ここでは点⑤の挙動は煩雑を避けるため省略してあ

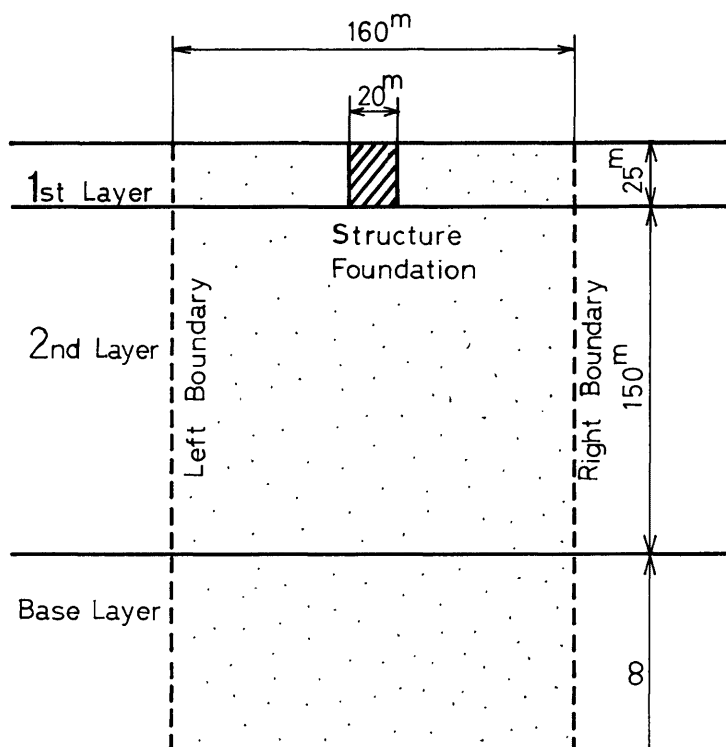


Fig.15. Analyzed ground model.

る。

まず平方向の応答倍率から検討していく。場合 1, 場合 2, 場合 3 いずれの場合にも約 1.5Hz 付近にピークが存在する。しかしよく見ると、それぞれ僅かながらピークを生じる周波数に差異が認められる。すなわち、場合 2 が最も低い周波数でピークを生じており、次に場合 1, 次に場合 3 の順でピーク時の周波数が高くなっている。これは Table 1 から明らかなように、場合 2 の周辺地盤が最も柔らかく、次に場合 1, そして場合 3 の周辺地盤が最も硬い、という地盤条件と関連づけて考えられる。

このピークを除いて考えると、ラブ波の場合と非常によく似た応答を呈している。すなわち、点①と点②の応答は反射波の影響で、入射振幅より大きくなる場合があり、点②の応答の方が点①のそれに比べて構造物の挙動の影響を強く受けて不規則になっている。また点④の応答が構造物の応答、すなわち点③の応答曲

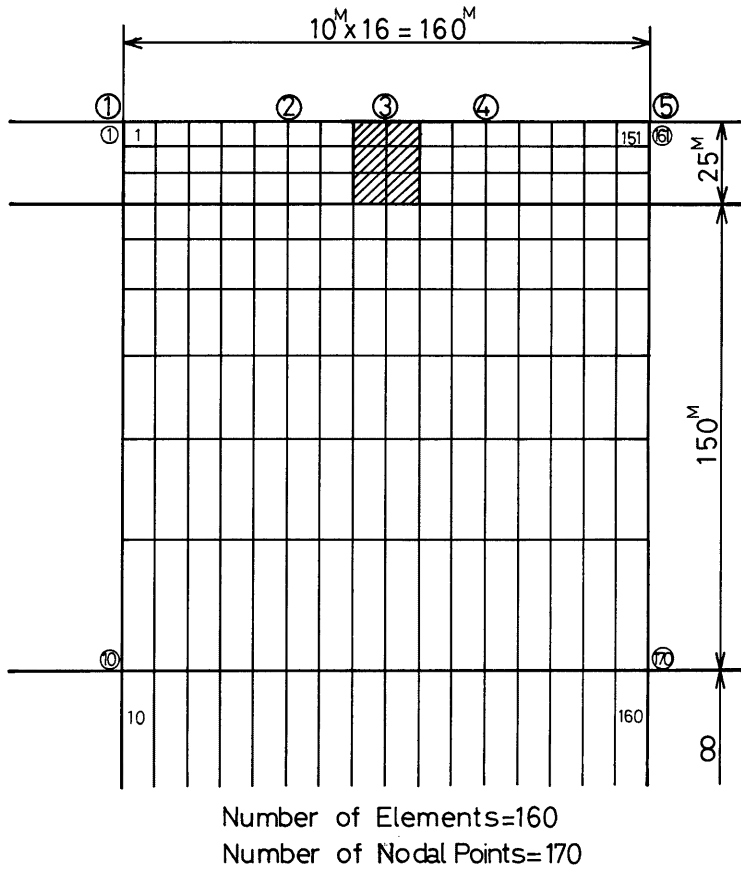


Fig. 16. Finite element mesh of analyzed ground model.

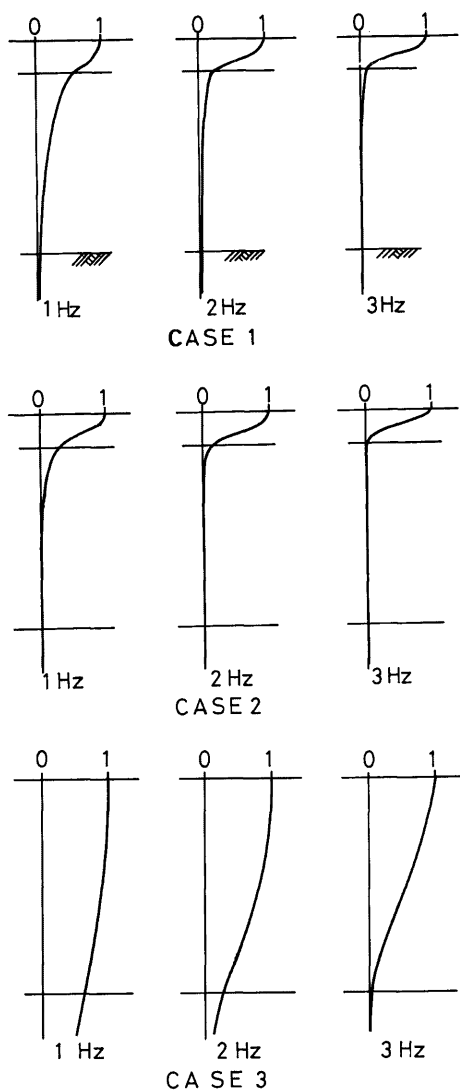


Fig. 17. Fundamental Love mode.

線より場合 1, 場合 2 ではやや大きく、逆に場合 3 ではやや小さくなっているのもラブ波の場合と同様である。その理由もラブ波の場合と同様であると考えられる。

次に鉛直方向の応答倍率であるが、周知のようにレーレー波が伝播する時、その媒質は精門運動を行い、その水平変位成分と鉛直変位成分の比は周波数によって異なる。本来この 2 成分は切り離して考えるべきではないかもしれないが、ここでは簡単のため、各点での応答鉛直変位振幅の、入射モードの地表面での鉛直変位振幅に対する比を応答倍率としている。

鉛直方向の応答倍率と水平方向の応答倍率を比較すると、いく分鉛直方向の応答倍率の方が大きい、定性的には水平方向の応答倍率とほとんど差異は見あたらない。

## 7. まとめ

本研究の成果を要約するに以下の通りである。

(1) 2. において、半無限要素を表面波の解析に適用できるように、ラブ波、レーレー波それぞれの場合について定式化を行った。この半無限要素を導入することにより次の 3 つの利点が考えられる。

(a). 表面波の変位が指数関数的に深さと共に減少する現象を忠実に再現し得る。

(b). 形式的に、無限下方まで解析領域に組み込むことになる。したがってこの方向には境界条件を考慮する必要がない。

(c). 従来の形有限要素網の最下節点を固定する手法に比べ、大幅に自由度を節約できる。本文では触れなかったが、ラブ波の場合、同程度の精度を得るのに約 1/4 の自由度でよいことが確かめられている。

反面、固有値問題を解く場合、波数  $k$  の第 1 次近似値を推定し、繰り返し計算をする手間を必要とする。

(2) 側方の境界条件設定の際に必要な基盤内応力と等価節点力との関係を導びいた。すなわち、

(a) ラブ波の場合、基盤内に生じる全応力の 1/2 を等価節点力とすればよい。

(b) レーレー波の場合、水平、鉛直それぞれ全応力の式 (4.32) で与えられる値の逆数倍を等価節点力とすればよい。

(3) 構造物基礎を含む水平地盤をラブ波、レーレー波が伝播する時の構造物基礎周辺の地盤の挙動を調べた。その結果、次のような結論が得られた。

(a) ラブ波、レーレー波いずれの場合も、構造物基礎前面の地盤の挙動は波長の影響を大きく受ける。またこの影響は構造物に近い程不規則である。

(b) 構造物基礎によりシートド効果が生じるが、周波数が高くなる程その効果は顕著となる。

(c) レーレー波が伝播する際、共振周波数が現れたが、この周波数は構造物周辺地盤の影響のためわずかながら差異が認められた。

なお本研究の数値計算は、京都大学大型計算機センター M 190 システムによった。

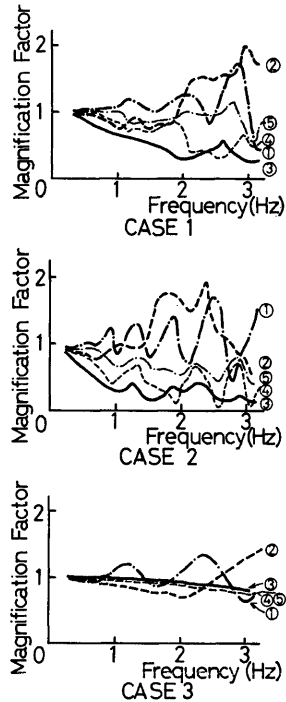


Fig. 18. Magnification factor in Love wave case.

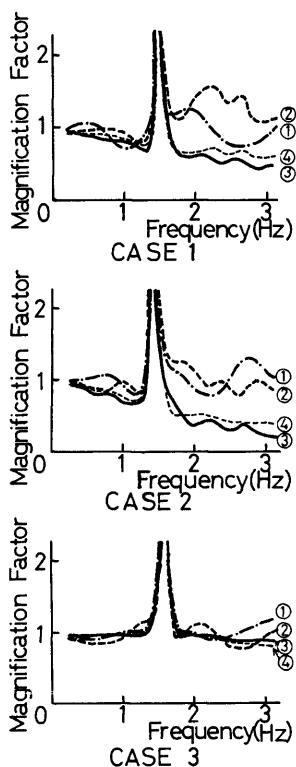


Fig. 19. Horizontal magnification factor in Rayleigh wave case.

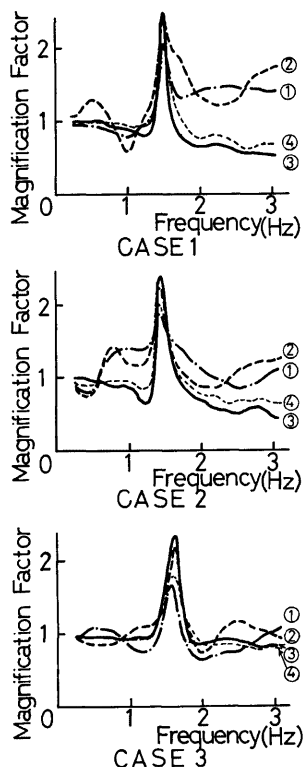


Fig. 20. Vertical magnification factor in Rayleigh wave case.

#### 参 考 文 献

- 1) 浅田秋江, 栗原益男: 軟弱地盤における三点三成分地震観測について, 土木学会第30回年次学術講演会講演概要集, 第3部, III-56.
- 2) Stratta, J.L. and T.F. Griswold: Rotation of Footings due to Surface Waves, BSSA, Vol. 66, No. 1, 1976, pp. 105-108.
- 3) Lysmer, J. and G. Waas: Shear Waves in Plane Infinite Structures, ASCE, No. EM1, 1972, pp. 85-105.
- 4) 川原, 竹脇, 斉藤: 有限要素法による動的解析の一方法, 土木学会第29回年次学術講演概要集, 第1部, I-56.
- 5) Lysmer, J.: Lumped Mass Method for Rayleigh Waves, BSSA, Vol. 60, No. 1, 1970, pp. 89-104.
- 6) Wilkinson, J.H.: The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford Univ. Press, (Clarendon),

London and New York, 1965, pp. 633-635.

- 7) Lysmer, J. and L.A. Drake: A Finite Element Method for Seismology, Ch. 6, in "Methods in Computational Physics II", Seismology, 1972, pp. 181-216.