

開水路非定常流の数値計算法について

岩佐義朗・井上和也・片山 猛

ON THE NUMERICAL METHODS FOR UNSTEADY FLOW IN OPEN CHANNEL

By Yoshiaki IWASA, Kazuya INOUE and Takeshi KATAYAMA

Synopsis

The present study deals with the technique of numerical simulation of unsteady flow in a flume and floods in river. The fundamental equations are expressed in conservation law system and transformed into characteristics forms, which are reduced to linear combinations of equations of continuity and motion. Difference scheme for method of characteristics will be established according to the direction of each characteristics and compared with Lax-Wendroff scheme. Comparative studies have been made on unsteady flow in a flume and a real flood in Yodo river. The result shows that the method of characteristics will be usefully applied to gradually varied unsteady flows.

1. 緒 言

開水路非定常流に関しては従来より数多くの理論的ならびに実験的研究が行なわれ、興味ある現象の基本的な特性の多くが解明されている。一方、最近の電子計算機の発展とあいまって、基礎式を直接的に数値積分する数値計算的な研究も多くなっている。たとえば、開水路非定常流として分類される流れのうち実用上重要性の高い洪水流に関しては、従来ピーク値の伝播および減衰などを中心にして研究されてきたが、貯水池の操作方法などと関連してハイドログラフ全体を対象とすると、その方法の一つとして基礎式の数値積分、すなわち流れの基礎式—多くの場合一次元的な連続式とエネルギー式より構成される—を直接数値的に解くことが行なわれる。

この研究は上述のような数値積分を行なう場合の計算法を扱ったもので、必ずしも洪水流に限らずもう少し範囲を拡げて考察しようとしたものである。すなわちまず一次元解析法による開水路非定常流の基礎式が、一つの保存則系を構成することおよびこれらが2独立変数2従属変数の双曲型の偏微分方程式系であることより、特性曲線による表示に改める。つぎに特性曲線の方角に応じた差分式を導き、これと保存則系に対する代表的差分法である Lax-Wendroff の方法と比較する。さらに、上の特性曲線による差分式によって数値計算するための具体的な方法および安定性について検討するとともに、この方法を水理実験によって得られた非定常流および実際の河川における洪水追跡に適用して検討する。

明らかにこの研究では特性曲線による方法に重点が置かれている。それは特性曲線が dynamic waves の伝播という流れのもつ水理学的特徴を最もよく表現していて、数値計算にあたって境界条件の組み込み方などに水理学的にみて適切な指針を与えられからである。なお、洪水流の理論の重要な分類として Kinematic wave 理論があるが、ここでは触れない。

2. 基礎式とその特性曲線表示

2.1 開水路非定常流の基礎式

一次元解析法による開水路非定常流の基礎式はつぎのように表わされる¹⁾。

$$\text{連 続 式: } \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{運 動 量 式: } \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\beta v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\lambda' \cos \theta}{A} \frac{\partial}{\partial x} (h_0 A) = s_0 - s_f \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{エネルギー式: } \frac{\beta}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\alpha v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} = s_0 - s_f \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここに、 A : 流水断面積、 Q : 流量、 q : 単位長さあたりの横流入量、 $v=Q/A$: 平均流速、 h_0 : 水面から流水断面の図心までの深さ、 $s_0=\sin \theta$: 水路底こう配、 s_f : 摩擦こう配で、抵抗則として Manning 式を用いるとき $s_f=n^2 v^2/R^{4/3}$ (n : 粗度係数、 R : 径深)、 h : 水深、 α : エネルギー係数、 β : 運動量係数、 λ' および λ : それぞれ運動量およびエネルギー解析法における圧力分布係数、 x : 距離、 t : 時間である。

開水路非定常流の解析は (1) および (2) 式から構成される運動量解析法と、(1) および (3) 式によるエネルギー解析法の 2 つに分類される。これらのいずれを用いるべきかは、解析の対象とされる流れの水理学的な特徴によらなければならない。たとえば洪水の変形や伝播などの流れの巨視的な挙動を解析するにはエネルギー解析法が好都合であり、一方様な人工水路内の流れや段波のように局所的に変化する流れには運動量解析法が適用される。なお (2) 式はいくつかの仮定のもとに (3) 式と同様の St. Venant の式に変形されるが、上述のようにその物理的な意義が異なるので、その取扱いは区別されなければならない。

2.2 保 存 則 系

(2) および (3) 式に対してそれぞれ次式の比力 M および全エネルギー水頭 H を導入する。

$$M = \frac{\beta Q^2}{gA} + \lambda' h_0 A \cos \theta \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$H = \frac{\alpha Q^2}{2gA^2} + z + \lambda h \cos \theta \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここで z は基準面から水路底の高さである。これらにより、(2) および (3) 式はつぎのように改められる。

$$\text{運 動 量 式: } \frac{\partial Q}{\partial t} + g \frac{\partial M}{\partial x} = gA(s_0 - s_f) + \frac{Qq}{A} \quad \dots\dots\dots(2)'$$

$$\text{エネルギー式: } \frac{\beta}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} = -s_f \quad \dots\dots\dots(3)'$$

以上の変形により、運動量解析法およびエネルギー解析法のいずれの系もつぎの保存則系としてまとめられる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{q} \quad \dots\dots\dots(6)$$

あるいは

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{q}' \quad \dots\dots\dots(7)$$

ここで、 $\tilde{A}=[a_{ij}]=[\partial F_i / \partial U_j]$ (F_i , U_j は $\mathbf{U}$, $\mathbf{F}$ の i, j 成分, $i, j=1, 2$) で定義される行列であり、また $\mathbf{q}' = \mathbf{q} - (\partial \mathbf{F} / \partial x) \mathbf{U} : \text{const}$ である。

運動量解析法の場合、

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} Q \\ gM \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q \\ gA(s_0 - s_f) + Qq/A \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(8)$$

であり、したがって

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\beta v^2 + \lambda' \cos \theta \cdot gA/B_1 & 2\beta v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}' = \mathbf{q}' \quad \dots\dots\dots(9)$$

である。ただし、 B は水面幅であり、また運動量解析法なので水路は一樣としている。

一方、エネルギー解析法の場合

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} A \\ v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} Q \\ gH/\beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q \\ -gs_f/\beta \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(10)$$

であり、したがって

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda \cos \theta \cdot v/g/\beta B' & A \\ \alpha v/\beta & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}' = \begin{bmatrix} -g(s_f + (\partial Z/\partial x)_A : \text{const})/\beta \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(11)$$

である。 Z はピエゾ水頭の基準面からの高さで水位に等しいとしてよく、また $(\partial Z/\partial x)_A : \text{const}$ とは断面積を一定とする水位の変化率で水路の幾何学的形状より求められる。

(6) 式の保存則系は $x-t$ 平面の任意の閉曲線を C とするとき、

$$\oint_C (\mathbf{F} dt - \mathbf{U} dx) = \int_S \mathbf{q} dx dt \quad \dots\dots\dots(12)$$

と変形される。ここで S は C によって囲まれる平面である。いま、流れに段波などの不連続があるとしてその伝播速度が w で、軌跡が $x-t$ 平面において $dx/dt = w$ で表わされるとき、 C を Fig. 1 のようにとり、不連続のそれぞれの側の値を添字 1 および 2 で示せば次式が成立する ($\delta x = r \delta t$, r : 定数, $\delta t \rightarrow 0$)。

$$-w(\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2) + (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) = 0 \quad \dots\dots\dots(13)$$

すなわち Rankine-Hugoniot の関係が得られる²⁾。この関係は $\mathbf{U}$, $\mathbf{F}$ として運動量解析法による (8) 式の諸量を代入すれば、段波に関する水理学的な関係に他ならないことがわかる。

2.3 特性曲線表示

(6) 式の保存則系を特性曲線による表示に改める³⁾。 $\mathbf{U}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{q}$ の要素の数はいずれの解析法でも 2 個であるので、簡単のためそれらを U_1 , U_2 等で表わすことにする。さて、特性曲線は $x-t$ 平面上のある曲線 $C: \phi(x, t) = 0$ 上で $\mathbf{U}$ が与えられても、(6) あるいは (7) 式より $\partial U_i / \partial t$, $\partial U_i / \partial x$ ($i=1, 2$) が一意的に定められない曲線として定義され、その方向 $dx/dt = -\phi_t / \phi_x$ は、

$$\tilde{\mathbf{Q}} = E\phi_t + \tilde{\mathbf{A}}\phi_x \quad \dots\dots\dots(14)$$

とするとき、

$$\det \tilde{\mathbf{Q}} = 0 \quad \dots\dots\dots(15)$$

で与えられる (E : 単位行列)。すなわち特性曲線の方法は $\tilde{\mathbf{A}}$ の固有値に等しい。(9) および (11) 式から明らかに $\tilde{\mathbf{A}}$ の固有値は異なる実数であり、このことはいずれの系も双曲型であることを意味する。したがって (15) 式より特性曲線の方法は次式で与えられる。

$$\frac{dx}{dt} \equiv v_0 \pm c_0 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + 4a_{12}a_{21}} \quad \dots\dots\dots(16)$$

dx/dt が上の値をとるとき、 $\mu \tilde{\mathbf{Q}} = 0$ をみたく $\mu \neq 0$ が (14) 式より

$$\mu_1 : \mu_2 = a_{21} : \left(\frac{dx}{dt} - a_{11}\right) \quad \dots\dots\dots(17)$$

である。(7) 式に μ を乗ずれば、 $\mu \tilde{\mathbf{A}} = \mu(dx/dt)$ より

$$\mu \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right) = \mu \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{U} = \mu \mathbf{q}' \quad \dots\dots\dots(18)$$

となる。 $\partial/\partial t + (dx/dt)/\partial x$ は特性曲線に沿う微分を表わすから、(18) 式は特性曲線に沿った $\mathbf{U}$ の微分方程式の線型結合である。(18) 式はさらに

$$\mu \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} - \mathbf{q} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots(19)$$

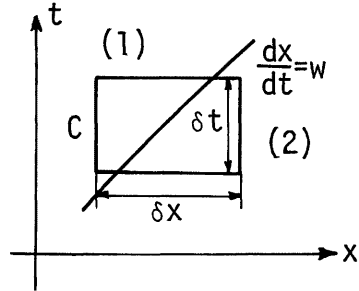


Fig. 1. Schematic diagram for discontinuity propagation.

となる。ただしいうまでもなくここでの微分は特性曲線に沿うものである。以上より特性曲線による表示は(19)式のように基礎式の線型結合で表わされることになる。

3. 差分式の構成

(6)または(7)式あるいはそれらを特性曲線表示に改めた(19)式を解くには一般に数値的な方法によることになる。そのための差分化の方法に関しては従来より対象とする流れの特徴に応じた種々のものが考案されている⁴⁾。それらは、(i) (6)または(7)式を差分式に改めるもの(たとえば Lax-Wendroff の差分法)、(ii) (18)または(19)式を差分式に改めるものの2つに大別される。後者は一般に特性曲線法と呼ばれているが、これはさらに、 $x-t$ 平面を特性曲線によって網状に覆う特性曲線網法(characteristics grid method, Liggett and Woolhiser⁵⁾ら)と、 $x-t$ 平面にあらかじめ設定された格子点について解を求める固定格子点法(fixed grid method, Stoker⁶⁾, Zovne⁷⁾ら)に分けられる。特性曲線網法は特性曲線の交点が必ずしも所要の点と一致しないから、ある地点のハイドログラフやある時刻での水面形などを求めるのに内挿法が必要とされ、機械計算にとって重大な欠点となることがある。

ここで行なう差分法は固定格子点法の explicit scheme で、特性曲線の方角に応じて x 方向の差分のとり方を変える Courant-Isaacson-Rees の方法⁸⁾を開水路非定常流に適用したものであり、また Stoker の広長方形断面の一樣水路に対する方法を一般化した方法である。以後便宜のためこの方法を特性曲線法と呼ぶことにする。

3.1 特性曲線法

$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}<0$ すなわち(16)式の2本の特性曲線の方角は異符号であるとし(このことは流れを常流と仮定することになる)、正号の特性曲線を ζ_+ 、負号のそれを ζ_- で表わす。さて(19)式の差分化にあたって Fig. 2 を参照し、 ζ_+ に沿う関係では

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_j^{n+1} - f_R}{\Delta t} \approx \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} \quad \dots\dots\dots (20.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_j^{n+1} - f_R}{\Delta x_+} \approx \frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{\Delta x_+}, \quad f \approx \frac{f_j^{n+1} + f_R}{2} \approx \frac{f_j^n + f_{j-1}^n}{2} \quad \dots\dots\dots (21.1)$$

とする。ただし、 f_j^n は U などの格子点 (j, n) での値である。一方、 ζ_- に沿う関係でも同様に

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_j^{n+1} - f_S}{\Delta t} \approx \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} \quad \dots\dots\dots (20.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_S - f_j^n}{\Delta x_-} \approx \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\Delta x_-}, \quad f \approx \frac{f_j^{n+1} + f_S}{2} \approx \frac{f_j^n + f_{j+1}^n}{2} \quad \dots\dots\dots (21.2)$$

とする。さらに μ は格子点 (j, n) での値で近似する。このとき、(19)式はつぎのように差分化される。

ζ_+ : $dx/dt = v_0 + c_0$ に沿う関係

$$\begin{aligned} & (a_{21})_j^n \left(\frac{U_{1j}^{n+1} - U_{1j}^n}{\Delta t} + \frac{F_{1j}^n - F_{1j-1}^n}{\Delta x_1} - \frac{q_{1j}^n + q_{1j-1}^n}{2} \right) \\ & + \left(\frac{a_{22} - a_{11}}{2} + c_0 \right)_j \left(\frac{U_{2j}^{n+1} - U_{2j}^n}{\Delta t} + \frac{F_{2j}^n - F_{2j-1}^n}{\Delta x_1} - \frac{q_{2j}^n + q_{2j-1}^n}{2} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (22.1) \end{aligned}$$

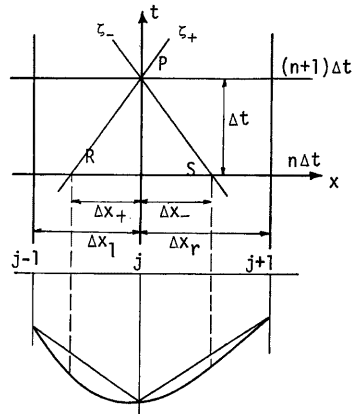


Fig. 2. Difference scheme by characteristics method.

$\zeta_- : dx/dt = v_0 - c_0$ に沿う関係

$$\begin{aligned} & (a_{21})_j^n \left(\frac{U_{1j}^{n+1} - U_{1j}^n}{\Delta t} + \frac{F_{1j+1}^n - F_{1j}^n}{\Delta x} - \frac{q_{1j+1}^n + q_{1j}^n}{2} \right) \\ & + \left(\frac{a_{22} - a_{11}}{2} - c_0 \right)_j^n \left(\frac{U_{2j}^{n+1} - U_{2j}^n}{\Delta t} + \frac{F_{2j+1}^n - F_{2j}^n}{\Delta x} - \frac{q_{2j+1}^n + q_{2j}^n}{2} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (22.2) \end{aligned}$$

これらの具体的な形およびその解法については後述する。

(22) 式の差分式の特徴は特性曲線の方角そのものは差分式に含まれないことおよび未知数 U_{1j}^{n+1} , U_{2j}^{n+1} について explicit に解かれることにある。 $\Delta x_r = \Delta x_l = \Delta x$ であるときこれらを解き、まとめれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} U_{1j}^{n+1} &= U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{j+1}^n - F_{j-1}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{1}{2c_0} (\bar{A} - v_0 E) \right]_j^n (F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n) \\ &+ \frac{\Delta t}{4} (q_{j+1}^n + 2q_j^n + q_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{2c_0} (\bar{A} - v_0 E) \right]_j^n (q_{j+1}^n - q_{j-1}^n) \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

3.2 Lax-Wendroff の差分法との関係

保存則系に対する代表的な差分法である Lax-Wendroff の方法と 3.1 の特性曲線法との差違は、 $\bar{A}$ を定数行列と仮定するとき明らかにすることができる。このときの Lax-Wendroff の差分法は、簡単のためさらに非齊次項 $q \equiv 0$ とすればつぎのように表わされる。

$$U_{1j}^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{j+1}^n - F_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \bar{A} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n) \quad \dots\dots\dots (24)$$

したがって、(23) 式との差 ϵ は、

$$\epsilon = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[\left(\frac{1}{c_0} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \bar{A} - \frac{v_0}{c_0} E \right] (F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n) \quad \dots\dots\dots (25)$$

である。(24) 式は 2 次の精度を有している²⁾。 ϵ は明らかに 2 次の項であり、(24) 式に 2 次の差を有する (23) 式は 1 次精度である。すなわち、Lax-Wendroff の差分法は 2 次の精度であるのに対し、特性曲線法は 1 次の精度である。 ϵ の大きさは $(F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n) \approx (\partial^2 F / \partial x^2)_j^n$ に比例するから、両者の差は F の変化率が急変する部分で大きくなるものと予想される。

上述の差は、 $\bar{A}$ が定数行列のとき、(21) 式の近似式の精度の差にもとづいていることが明らかにされる²⁾。すなわち、(21.1) および (21.2) 式において、 f_R および f_S の近似値としてそれぞれ $(j-1, n)$ 点と (j, n) 点および (j, n) 点と $(j+1, n)$ 点の間の一次の内挿値がとられている (Fig. 2 参照) が、いまこの近似の精度をあげ、上記の 3 点間の二次の内挿値をとることにすれば、 $\Delta x_+ = (v_0 + c_0) \Delta t$ であるから、

$$\frac{f_j^n - f_R}{\Delta x_+} \approx - \frac{(v_0 + c_0) \Delta t}{2\Delta x^2} (f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n) + \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad \dots\dots\dots (26)$$

となる。 f_S についても同様の近似を行ない、(22) 式中の x 方向の差分項を置き換えて解けば、(24) 式と全く同じ結果が導かれる。

以上のことからここで導かれた特性曲線法は、Lax-Wendroff の差分法に比し精度が 1 次劣り、そしてこの差は $\bar{A}$ が定数行列のとき、Fig. 2 の R および S 点での値を近似するのに一次の内挿法を用いるか二次のそれを用いるかだけの差であることがわかる。また先に述べたように、 F の変化率が $(j-1, n)$, (j, n) , $(j+1, n)$ の 3 点で大きく変化しないとき、すなわち F が直線的な変化を示す部分では両者の差は大きくないといえることができる。

4. 数値計算法とその適用

前節で構成された特性曲線法によって数値計算を行なうための具体的な方法について述べるとともに、水理実験と数値計算の結果を比較し、また実際の河川の洪水追跡を行なった結果について検討する。

4.1 数値計算法

エネルギー解析法によると、その特性曲線表示を (19) 式より求めると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha + \beta}{2\beta} v \pm c \quad \dots\dots\dots (27)$$

に沿って

$$\frac{1}{B} \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q \right) + \left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v \pm c \right) \left(\frac{\beta}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} + s_f \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

となる。ここで

$$c = \sqrt{\left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v \right)^2 + \frac{\lambda g A \cos \theta}{\beta B}} \quad \dots\dots\dots (29)$$

である。(27) および (28) 式によって、基礎式 (1) および (3) 式からなる系は、特性曲線に沿う独立な 2 つの微分方程式系に改められたことになる。3.1 で仮定されたように (27) 式の 2 本の特性曲線の方向が異符号つまり流れを常流とすれば、(28) 式の正号の関係は上流から下流に流下する影響を表わし、負号の関係は下流から上流に遡上する影響を表わしているといえる。

(28) 式を (22) 式に従って差分化すれば、エネルギー解析法による数値計算式として次式が得られる。

上流から下流へ伝わる関係：

$$\frac{1}{B_j^n} \left(\frac{A_{j+1}^n - A_j^n}{\Delta t} + \frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{\Delta x_{j-1}} - \frac{q_j^n + q_{j-1}^n}{2} \right) + \left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v + c \right)_j \left(\frac{\beta}{g} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{H_{j+1}^n - H_j^n}{\Delta x_{j-1}} + \frac{s_{fj}^n + s_{fj-1}^n}{2} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (30.1)$$

下流から上流へ伝わる関係：

$$\frac{1}{B_j^n} \left(\frac{A_{j+1}^n - A_j^n}{\Delta t} + \frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{\Delta x_j} - \frac{q_{j+1}^n + q_j^n}{2} \right) + \left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v - c \right)_j \left(\frac{\beta}{g} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{H_{j+1}^n - H_j^n}{\Delta x_j} + \frac{s_{fj+1}^n + s_{fj}^n}{2} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (30.2)$$

ただし Δx_j は断面 j と $j+1$ の区間距離である。つぎに計算方法を具体的に述べよう。

(1) 中間点の計算法：添字 n に関する量は初期値あるいは前回の計算から既知である。境界条件の課せられている境界点や分合流点などの境界点以外の中間点では (30.1) および (30.2) 式より未知数 A_j^{n+1} , v_j^{n+1} が連立的に解かれる。

(2) 境界点の計算法：境界点には計算区間の上流端や下流端のように何らかの境界条件の課せられている点と、分・合流点のように計算区間に含まれる内部境界点の 2 種類がある。前者に関しては流れを常流としているから一般には、上流端においては (30.2) 式と境界条件、下流端においては (30.1) 式と境界条件から、それぞれ連立的に解が求められる。したがって、境界条件は、水位 (深) - 時間曲線、流量 - 時間曲線、水位 - 流量の関係 (たとえば水門の越流公式、段落ち部での限界水深の関係、河川における水位 - 流量曲線) などのうちのどれか一種類に限られることになる。一方、分・合流点の場合、本・支川のごう配、分・合流角度、流量比などによって複雑な水理現象が予想されるから、それらの分・合流点の水理特性に適應した計算方法がとられなければならない。したがって一般的な方法を示すことはできないが、最も単純なもの、たとえば Fig. 3 のような合流点において断面番号を図のようにつけるとき、(i) $Z_2 = Z_4 = Z_5$, (ii) $Q_2 + Q_4 = Q_5$ とする方法であろう。このときは、(i), (ii) の 3 式および断面 1 ~ 2, 断面 3 ~ 4 間で成立する (30.1) 式、断面 5 ~ 6 間で成立する (30.2) 式よりくり返し計算法によって解が求められる。

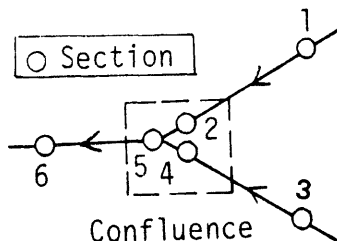


Fig. 3. Example of confluence.

(3) 初期条件の計算法：初期条件にはふつう定常状態の解すなわち等流あるいは不等流計算の結果が与えられる。通常不等流計算では

$$Q_{j+1} = Q_j + (q_{j+1} + q_j) \Delta x_j / 2 \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$H_{j+1} = H_j - (S_{fj+1} + S_{fj}) \Delta x_j / 2 \quad \dots\dots\dots (32)$$

が成立する。(31) および (32) 式と (30) 式を比較すれば、(30) 式で表わされる数値計算法は、不等流のそれに非定常成分の計算式が重ね合わされたものとみなせることが分る。また $t = n \Delta t$ で隣接する 3 断面 ($j+1$, j , $j-1$) 間で (31) および (32) 式が満たされるならば、(30) 式より $t = (n+1) \Delta t$ でも $A_j^{n+1} = A_j^n$, $v_j^{n+1} = v_j^n$ であり、計算の上でも定常状態が続くことになる。

(4) 安定性の検討：(28) 式のような非斉次非線型のしかも境界条件の課せられたような系の差分式の安定性の検討はこれまでほとんど行なわれていないといえる。従来の安定性の解析は線型化された系の初期値問題に関するものが中心であった。ここでもそれらにならって (30) 式の安定条件を求めよう。簡単のため幅が十分広く単位幅についての取り扱いが可能な一様水路に定常等流状態 ($h = \bar{h}$, $v = \bar{v}$) を想定し、これに微小な擾乱が加ったとして線型化された系を考える。この系に対し、 $\Delta x_j = \Delta x$ (一定) として (30) あるいは (23) 式の差分式の増幅行列 $G(\kappa \Delta x)$ を求めると、

$$G(\kappa \Delta x) = E - i \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{A} \sin \kappa \Delta x - \frac{1}{c_0} (\bar{A} - \bar{v} E) \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{A} (1 - \cos \kappa \Delta x) + i \frac{\Delta t}{2} \bar{B} \sin \kappa \Delta x \right] + \frac{\Delta t}{2} \bar{B} (1 + \cos \kappa \Delta x)$$

となる。ただし、 $\alpha = \beta = \lambda = 1$, $q = 0$ としている。 κ ：擾乱の波数、 i ：虚数単位であり、またこの場合、 $c_0 = \sqrt{g \bar{h}}$,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{v} & g \\ \bar{h} & \bar{v} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \frac{g s_0}{\bar{v}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4\bar{v}/3\bar{h} & -2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (34)$$

である。

$G(\kappa \Delta x)$ の固有値の絶対値が、 $\Delta t \rightarrow 0$ のとき $1 + O(\Delta t)$ 以下であることが、安定性のための von Neumann の必要条件である⁹⁾。上の G の固有値をあらゆる κ に対して求めるには、数値計算によらなければならないから一般的な検討は困難である。しかし、必要条件として κ に特別な値を用いれば従来の安定条件が得られる。すなわち、 G の固有値を ν とすると、 $\kappa \Delta x = 0$ に対して

$$\nu = 1, \text{ および } \nu = 1 - 2g s_0 \Delta t / \bar{v} \quad \dots\dots\dots (35)$$

$\kappa \Delta x = \pi$ に対して

$$\nu = 1 - 2(c_0 \pm \bar{v}) \Delta t / \Delta x \quad \dots\dots\dots (36)$$

となる。von Neuman の条件および (36) 式より $c_0 > \bar{v}$ (流れを常流としているので、この条件は満たされている) および、Courant-Friedrichs-Lewy の条件¹⁰⁾

$$|\Delta t / \Delta x| \leq 1 / |c_0 \pm \bar{v}| \quad \dots\dots\dots (37)$$

が得られる。また (35) 式よりつぎの非斉次項に関する Vasiliev の安定条件⁴⁾ が得られる。

$$\Delta t \leq \bar{v} / g s_0 \quad \dots\dots\dots (38)$$

以上の過程から明らかなように従来より安定条件とされている (37) および (38) 式は必要条件であって、実際には用いる差分式によって上のように流れが常流であるという条件がさらに追加されたりするので注意を要する。

運動量解析法によると、その特性曲線表示を (19) 式より求めると

$$\frac{dx}{dt} = \beta v \pm c' \quad \dots\dots\dots (39)$$

に沿って

$$(-\beta v \pm c') \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + g \frac{\partial M}{\partial x} - g A (s_0 - s_f) - \frac{qQ}{A} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (40)$$

である。ここで

$$c' = \sqrt{\beta(\beta-1)v^2 + \frac{\lambda' g A \cos \theta}{B}} \quad \dots\dots\dots(41)$$

である。(22)式に従って差分化する方法およびその解法などはエネルギー解析法の場合と全く同様に進められるので省略する。

4.2 水理実験による検討

(1) 実験方法：実験装置は **Fig. 4** に模式的に示されるように、長さ 10 m、幅 25 cm、深さ 20 cm の長方形断面の滑面一様水路からなり、上流端に 2 個、下流端に 1 個の計 3 個の給水装置を有している。実験では、まず上流端の給水系 1 より一定の流量 (0.92 l/s) を給水し定常流を得たのち、給水系 2 あるいは 3 のバルブを適宜開閉して非定常な給水を行ない非定常流を発生させた。水位の測定は **Fig. 4** に示される 4 点 (測点 M.P. No. 0~No. 3) に容量式水位計を設定し、ペンレコーダーに記録させた。水路内に周期の短かい表面波の発生することがあったが、記録からはそれらによる変動を除いて水位変化を読みとった。なお流量の測定は初期の定常状態を除いて行なわれていない。

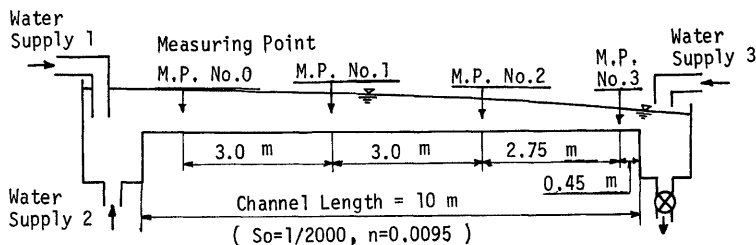


Fig. 4. Experimental set-up.

(2) 数値計算との比較：実験は下流端に堰上板を設けた場合と、下流端を段落ちにした場合とに分けられている。したがって計算にあたっては、前者の場合測点 3 の水位記録を 3 秒ごとに読みとった値を下流側の境界条件とし、後者の場合には下流端において限界水深が現われるとした。上流側については測点 0 の水位記録を 3 秒ごとに読みとった値を境界条件とした。また初期条件には不等流計算の結果を設定した。計算はいずれも特性曲線法 (ここでは CH 法と略記する) および Lax-Wendroff の差分法 (LW と略記) によって行なった。ただし LW 法は境界点では適用されないため、そこでは CH 法を用いた。

Fig. 5 (a), (b) は流れの変化が緩やかな場合の結果の例で図には実験値およびエネルギー解析法の CH 法による計算結果が示されている ($\Delta x = 0.44$ m, $\Delta t = 0.1$ 秒)。**Fig. 5** (a) (case 1) は、上流端の給水が hump 状に行なわれたもので、測定 1 および 2 に関してピーク値とその伝播を含めてハイドログラフ全体が計算によってよく再現されている。**Fig. 5** (b) (case 2) は下流端から給水したときの下流の水位変化が上流へ遡上する場合の結果で実験値と計算値はよく適合しており、とくに上流へ伝播するに従い実験値にみられる水位の立ち上がりが急になる傾向が、計算上も良く現われており理論的な予測と一致している。LW 法による計算結果は CH 法とほぼ一致し、その差は **Fig. 5** (a), (b) には図示しえない程度で、3.2 で述べたように、変化の緩やかなとき両者の差はないとみなされる。

つきに計算結果が (12) 式のうちの連続式を満たしているかどうかを確かめた結果が、**Table 1** (a), (b) である。すなわち、 $x=0$ および L をそれぞれ水路の下流端および上流端とし、

$$Q_{in}(t) = \int_0^t Q(L, t') dt', \quad Q_{out}(t) = \int_0^t Q(0, t') dt', \quad V(t) = \int_0^L A(x, t) dx$$

とするとき

$$C_r(t) = (Q_{in}(t) - Q_{out}(t) + V(0) - V(t)) / Q_{out}(t) \quad \dots\dots\dots(42)$$

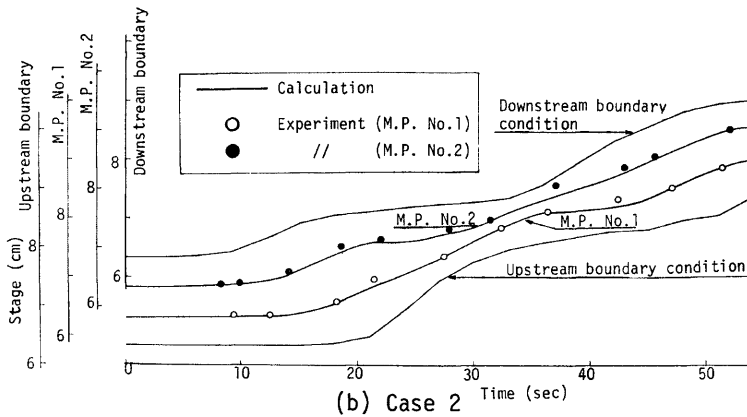
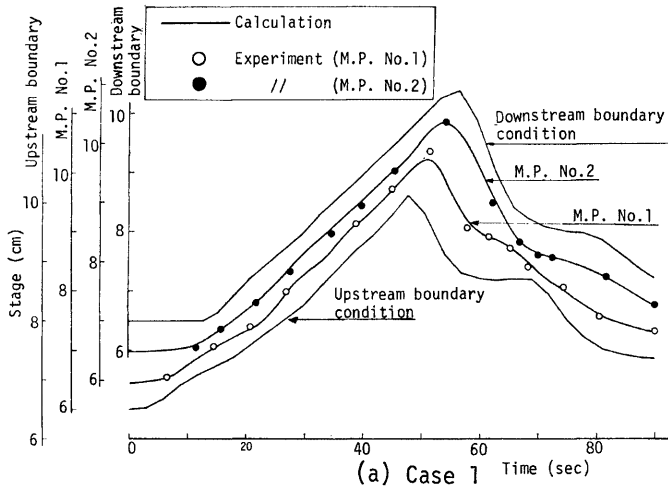


Fig. 5. Comparative representations of unsteady flows in experimental flume -Gradually varied flow - (a) case 1, (b) case 2.

Table 1. Computational errors in integrated continuity equation.

(a) Case 1										
t (sec)		10	20	30	40	50	60	70	80	90
Cr (%)	L.W. Scheme	-0.08	-0.04	-0.02	-0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
	CH. Method	-2.10	-1.29	-0.79	-0.35	0.16	0.32	0.23	0.18	0.14
(b) Case 2										
t (sec)		10	20	30	40	50	60			
Cr (%)	L.W. Scheme	-0.06	0.01	0.66	0.12	0.02	0.06			
	CH. Method	-0.81	-4.67	8.45	3.05	3.27	2.03			

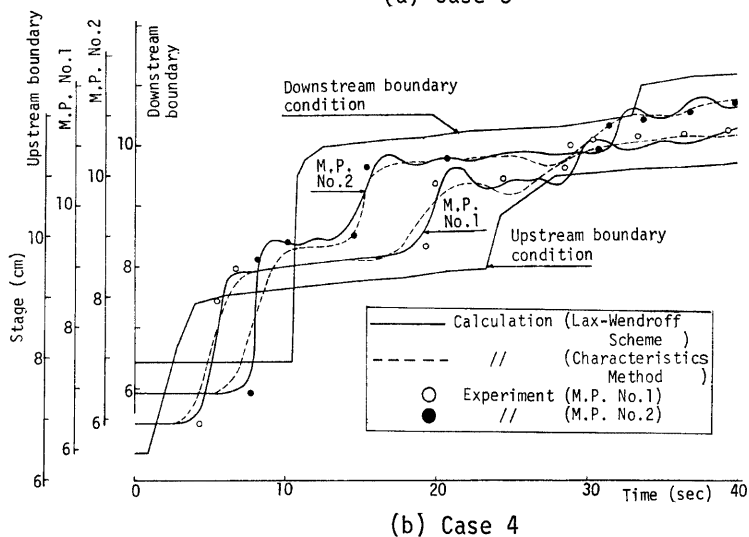
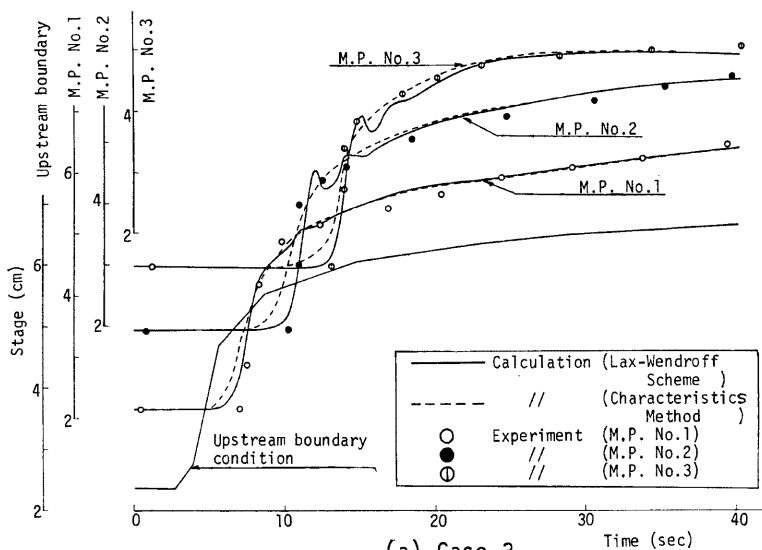


Fig. 6. Comparative representations of unsteady flows in experimental flume -Surge- (a) case 3, (b) case 4.

を計算結果より求めたもので、 $C_r(t)=0$ ならば積分された連続式が満たされていることになる。表から明らかなようにいずれの場合も $C_r \approx 0$ とみてよく、とくに LW 法の精度の高ことがうかがわれる。

Fig. 6 (a), (b) は流れの変化が急で段波の発生している場合である。**Fig. 6** (a) (case 3) では下流端は段

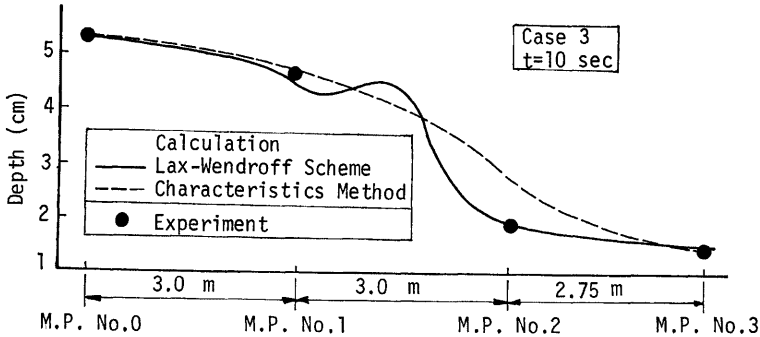


Fig. 7. Free surface profile of surge.

落ちであるが、**Fig. 6 (b)** (case 4) では堰上板が設けられているため、上流から伝播した段波が堰上板で反射し再び上流側へ伝わっている。計算は運動量解析法の CH 法および LW 法で行なわれ、case 3 では $\Delta x = 0.46$ m, $\Delta t = 0.1$ 秒, case 4 では $\Delta x = 0.44$ m, $\Delta t = 0.1$ 秒である。また **Fig. 7** は case 3 の $t = 10$ 秒における水面形状を示したものである。これらの図からつぎの点が見出される。(i) LW 法による計算では段波の前後の水位、段波の通過する時刻など実験値と一致した結果が得られ段波の急激な変化がよくとらえられているといえる。(ii) CH 法による計算結果では、全体としてみれば LW 法と大差ないが、段波による急激な変化はかなり分散され滑らかな変化となる。(iii) その結果、水位の上昇は実験値から分るように下流側ほど急で段波が発達しており、LW 法でもこの傾向がよくとらえられているのに反し、CH 法では逆に下流側ほど水位の上昇は緩やかになっている (**Fig. 6 (b)**)。 (iv) LW 法による計算値は段波の後面でやや振動のある変化を示す。(v) は空気流の衝撃波の計算に関して精度の高い差分式ほどこのような数値的な振動が避けられない¹⁰⁾とされていることに相当しよう。(ii) と (iii) は CH 法と LW 法の精度に関することである。**Table 2 (a)**, (b) は先と同様に $C_r(t)$ を求めた結果であるが、この表からも LW 法の精度の高ことが知られ、また CH 法は段波のように変化の著しい流れの計算には積分された連続式にかなりの誤差を生ずることになり、**3.2**で述べたことを裏づけている。

以上の実験による検討を要約するとつぎのようである。変化の緩やかな流れの場合、LW 法および CH 法のいずれもほぼ満足すべき結果を与える。一方変化の急な流れの場合、LW 法は精度が高く不連続的な水位変化も計算されるが、CH 法は全体的には LW 法と大差のない波形を与えるものの、急な変化は平滑化

Table 2. Computational errors in integrated continuity equation.

(a) Case 3

t (sec)		10	20	30	40
Cr (%)	L.W. Scheme	- 0.53	-0.32	0.10	0.13
	CH. Method	-37.33	-7.76	-3.00	-1.79

(b) Case 4

t (sec)		10	20	30	40
Cr (%)	L.W. Scheme	0.08	-0.31	-0.17	-0.12
	CH. Method	-13.66	-4.50	-2.27	-1.31

されすぎ、また連続式が乱されるなどの欠点を有する。

4.3 河川における洪水追跡

実際の河川の洪水追跡を行なうための数値計算法を考えると、つぎのことが新たな問題点として挙げられる。

(i) 河川の断面は一樣でなく、また断面積や径深などの断面に関する資料も必ずしも等間隔には測量されていない。したがって、計算断面以外のそれらの中間の断面についても計算しなければならない Lax-Wendroff の差分法は、断面間隔が問題となる上に、さらに断面資料の内挿が必要とされるため、そのままでは洪水追跡へ適用しにくい。この点を改めるため河道を一樣水路の連結として扱う方法があるが、その置換方法そのものが新たな課題となる。

(ii) 1.で述べたように、kinematic wave 理論は洪水流にきわめて有効であるが、合流部などがあって下流から影響が上流に及ぶ場合には適用されない。また kinematic shock が生じた場合、この部分を切り離して計算することになり機械計算に適しない。

(iii) 初期値の設定方法である不等流計算法は (31) および (32) 式で明らかなように 2 点間の差分式である。したがって 3 点による差分式である Lax-Wendroff の差分法は計算法上、初期値の計算方法と整合していない。

以上のことおよび洪水がきわめて緩やかな変化の流れであることを考え、ここでの洪水追跡にはエネルギー解析法の特性格線法によることにする。この方法では上述の点は問題とならない。

追跡の対象としたのは淀川における 6524 出水である。

計算区間は Fig. 8 に示されるとおりで、区間長やく 61 km、計算断面はやく 2 km ごとの計 36 断面である。この区間には 3 つの合流点が含まれているが、簡単のため 4.1 で述べた最も単純な方法によることにした。境界条件は槇尾山ではすぐ上流の天ヶ瀬ダムの放流量、山科では別に行なわれた出水解析による計算流量を与え、また枚方、羽束師、加茂においては観測水位を与えた。初期条件は枚方の観測水位をもとにして不等流計算を行ない、羽束師、加茂の計算水位がそれぞれの観測水位に一致するように各河川の流量を推定した。

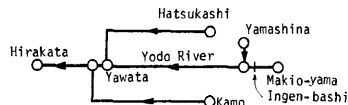


Fig. 8. Network of Yodo River.

Fig. 9 (a), (b), (c) はそれぞれ枚方、槇尾山、隠元橋における計算結果である ($dt=60$ 秒)。Fig. 9 (b) で、境界条件として与えられている流量が減少しているのは天ヶ瀬ダムによる洪水調節の結果である。このとき計算水位は観測水位よりかなり高いが、これは観測された水位に対する断面積が極端に小さくなるなどこの断面の資料に若干不備があることによる。Fig. 9 (c) では、洪水調節の結果流量は減少しているが、木津川、桂川の背水の影響を受け、かなり高い水位を示している。Fig. 9 の計算結果をみれば、観測値と全体としてよく一致しており、また各種のピーク値およびその出現時刻についてもほぼ満足すべき結果であるといえ、ここでの計算法が適切であったと考えることができよう。

5. 結 言

以上開水路非定常流の数値計算法について、特性曲線法に重点を置き、Lax-Wendroff の差分法と比較しながら考察を加えてきた。水理実験および洪水追跡にこれらを適用した結果はつぎのように要約される。

(i) 流れの変化が緩やかなとき、特性曲線法と Lax-Wendroff の差分法とではほとんど差がない。(ii) 段波のような急な変化の含まれる流れでは、Lax-Wendroff 法では不連続性がよく再現されるのに対し、特性曲線法ではかなり分散され平滑化されるとともに連続式が乱される。(iii) このような差は Lax-Wendroff の差分法が 2 次の精度であるのに対し、特性曲線法のそれが 1 次であることによると考えられる。(iv) 合流点などが含まれ、また水路も一樣でない実際の河川における洪水追跡には特性曲線法がほぼ満足すべき精

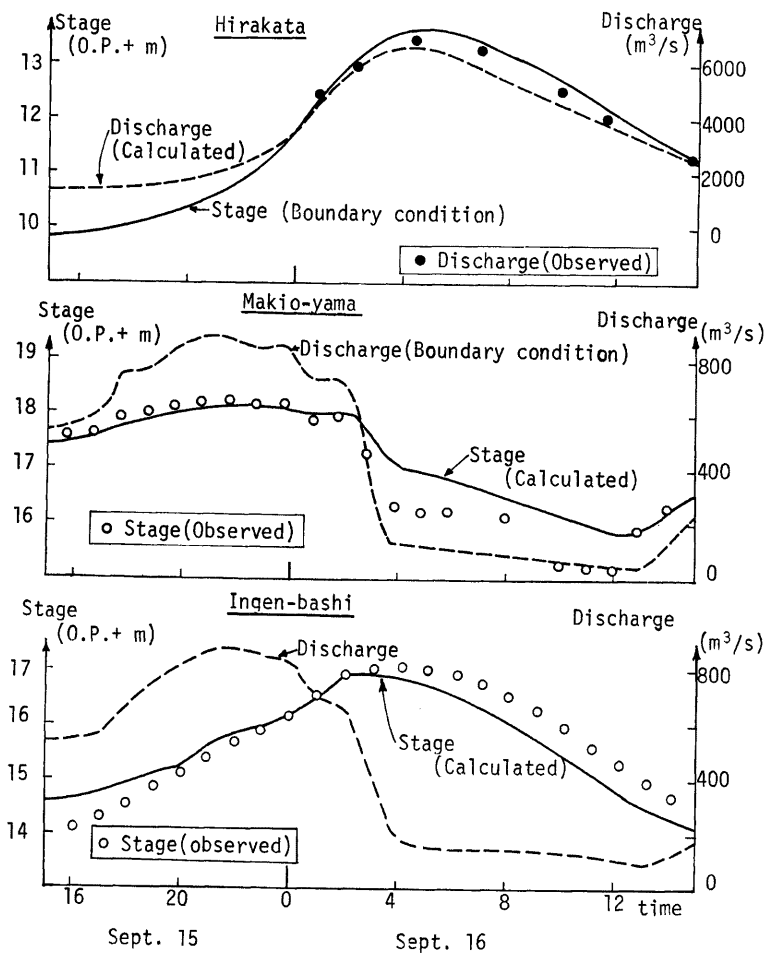


Fig. 9. Comparative representations of 6524-flood hydrographs in Yodo River.

度で適用される。

ここでは implicit な差分法については一切考えなかった。Implicit な差分法は安定性がよく、時間間隔を explicit な差分法にくらべてはるかに大きくとれるという利点を有するかわりに、大きい次元の連立方程式（多くの場合非線型）を解く必要があり、ここで扱ったような非定常流に対してどちらの方法がより有利であるかは直にはいいがたい。なお (30) 式は容易に implicit な差分法に改められることはいうまでもない。

なお、ここでの計算はすべて京都大学大型計算機センター SYSTEM 1 によって行なわれたことを附記しておく。

参 考 文 献

- 1) 岩佐義朗：水理学の解析法，石原藤次郎編，水工水理学，丸善，1972，pp. 1～21.
- 2) Richtmyer, R.D. and K.W. Morton: Difference Methods for Initial-Value Problems, 2nd Edition, John Wiley & Sons, 1967, pp. 288～350.
- 3) Courant, R. and D. Hilbert: Methods of Mathematical Physics, Vol. II, Interscience Pub., 1962, pp. 170～180.
- 4) 伊藤剛編：数値解析の応用と基礎，アテネ出版，1971.
- 5) Liggett, J.A. and D.A. Woolhiser: Difference Solutions of the Shallow-Water Equation, Proc. ASCE, Vol. 93, EM2, 1967, pp. 39～71.
- 6) Stoker, J.J.: Water Waves, Interscience Pub., 1957, pp. 451～509.
- 7) Zovne, J.J.: The Numerical Solution of Transient Supercritical Flow by the Method of Characteristics with a Technique for Simulating Bore Propagation, Georgia Institute of Technology, ERC-0370, 1970, pp. 21～35.
- 8) Courant, R., E. Isaacson and M. Rees: On the Solution of Nonlinear Hyperbolic Differential Equations by Finite Differences, Comm. on Pure and App. Math., Vol. 5, 1952, pp. 243～255.
- 9) 前掲2, pp. 60～90.
- 10) 水理公式集，土木学会編，1971，pp. 265～266.
- 11) 建設省近畿地方建設局，6524号出水の解析，1967.