

成層地盤中に根入れされた基礎構造物の振動特性

小堀 鐸二・南井 良一郎・鈴木 有

VIBRATIONAL CHARACTERISTICS OF SUB-STRUCTURES EMBEDDED IN A LAYERED MEDIUM

By Takuji KOBORI, Ryoichiro MINAI and Tamotsu SUZUKI

Synopsis

A flexible structure embedded in a viscoelastic multi-layered medium over a rigid half-space is considered when subjected to horizontal, harmonic, base rock motions or exciting forces acting at the top of the structure. The method of the dynamic response analysis for the system is described on the bases of the expansion technique of eigen functions and the variational method. Assuming that the system is two-dimensional, the analysis is made for the two cases in which SH-waves (or the Love waves) and P- and SV-waves (or the Rayleigh waves) are caused respectively. To give the validity of the method of analysis some numerical examples are shown.

1. ま え が き

1° 研究の目的

建築構造物は地盤中に地下室や基礎地業などの根入れ部分をもつのが一般的な構造形式である。地震時における構造物の根入れの効果は、主として構造物の水平変形に対する地盤の横抵抗の増加と構造物の周面とくに側面からの波動の逸散による減衰量の増大として現われ、根入れのない場合に較べて構造物の振動性状に顕著な影響を与えるものと考えられる。したがって、根入れをもつ構造物の振動性状を連成系としての動的相互作用の面から明らかにすることは、現実の耐震設計において重要な課題であろう。本論では、成層地盤中に根入れをもつ基礎構造物の振動特性を波動論に立脚して解析する。この種の問題を扱った従来の研究に較べてより現実に近い解析モデルを設定し、固有関数展開と変分法という手法を適用して解を導くとともに、数値解析例を示して、本解法の有用性と、このような連成系の動的相互作用や振動性状について論じることを目的とする。

2° 既往の研究概観

地盤中に根入れをもつ構造物の振動という境界値問題を扱った既往の研究は、その解析手法から3つのグループに大別できる。第1は、有限要素法や差分法に全面的に依存する数値計算によるものである〔例えば J. Lysmer and R. L. Kuhlemeyer¹⁾〕。この方法は任意の境界形状と系を構成する材料の非弾性的な性質を導入できるという利点をもっているが、個々の計算法に固有の欠陥や制約は避けがたい。第2は、こうした数値計算法と波動論による解析法を組合わせて、数値解析のもつ特色を生かしながら、その境界が有界でなければならないという制約を一部取り除いた半解析的な方法によるものである。これには有限要素法に立脚し、水平方向への波動の逸散を考慮しうるように工夫した J. Lysmer と G. Waas 等の研究^{2),3)}、同じねらいで有限要素法の一変形ともいふべき薄層要素法なる手法を提案した田治見等の研究⁴⁾がある。第3のグループは波動論に基づく解析的な——言わば正統的な——研究である。これには垂直変形を拘束した表層地盤中に埋込まれている円筒形構造物の振動を扱った田治見の研究⁵⁾とその発展^{6),7)}、wedge による波動の diffraction の解析法を半無限地盤中の剛体基礎の振動に適用した S. A. Thau and A. Umek の研究^{8),9)}、あるいは、垂

直断面が半円筒形の剛な根入れ基礎をもつ構造物に SH 波が入射するときの振動を扱った Luco の研究¹⁰⁾とその発展¹¹⁾、無限体中の一様な円筒の振動解と半無限体上の円筒基礎の振動解を組合わせた近似解法を示した M. Novak et al. の研究¹²⁾、その他はみるべきものが少ない。

文献²⁰⁾で扱った基礎が地表面にのる場合に較べると解析的な研究が非常に立遅れているのは、地盤のもつ水平境界面に根入れという垂直境界面が混在するため数理的取扱いが格段に難しくなるからであろう。このような波動論に基づく正攻法の研究では、境界値問題の解析を可能とするために、工学的な観点からやや大胆な仮定、たとえば、剛な基盤の存在や地盤の垂直変形の無視、あるいは地中にある構造物の断面形状に制約を与えて剛体や 1 次元連続体として扱うなど、を置いて解析対象の簡略化をはかっている。

3° 問題の設定

ここではより現実の状態に近い解析モデルとして、堅固な基盤の存在を前提に、剛な基盤上に線形粘弾性体からなる任意の層数の成層地盤を考え、同じように成層の線形粘弾性体に置換された基礎構造物がこの地盤中に根入れされているという連成系を設定する。そして、解析された結果を、地盤から入射する地震動に対する上部構造物との連成系の地震応答解析に適用することを目的に、基盤において水平地震動が作用する場合および根入れされた基礎構造物の頂部で水平加振力が作用する場合について、それぞれ time harmonic な振動特性を解析する。また、全体の系を中心軸に関して対称な 2 次元問題として扱い、入力作用方向として連成系の断面に垂直な場合と平行な場合を考える。前者では SH 波（または Love 波）が、後者では SH 波に加えて P - SV 波（または Rayleigh 波）が生起する。

4° 解析手法上の特徴と本論の構成

連成系の振動特性は、構造物系と地盤系の 1 次元 SH 波の波動伝達関数による定常解を基本にして、相互作用の効果を各系での表面波を意味する固有関数展開で表わし、両者の和によって表現される形におく。このような解の想定によって、連成系の水平面での境界条件を予め満足させておき、残る根入れ部分の垂直面での連続条件に固有関数の直交性と必要に応じて変分法を適用し、これを満足させるよう展開式中の未定常数を定めるという方法をとる。すなわち、固有関数展開と変分法という 2 つの手法に立脚する解法である。これら 2 つの手法は波動伝播を扱うある種の境界値問題に別個にあるいは組合わけて用いられてきた。代表的な例をあげると、垂直面に境にして性質の異なる半無限体で、その片側から特定のモードの表面波が入射するときの表面波の伝播特性を論じた問題に適用されている [L. E. Alsop and A. McGarr^{13), 14)}]。

ところで未定常数の決定には、設定された問題に対する固有関数展開による解の完備性の有無によって、固有関数の直交性のみから厳密に決定する場合とこれに変分法を併用して近似的に定める場合がある。後者の扱いでは半解析的な方法に近い性格をもった近似解法になるが、波動論による既往の解析的な研究に較べると、対象とする解析モデルに一般性がある。とくに構造物の剛性と連成系に生じる垂直変形を考慮に入れていることから、基礎構造物と地盤の剛性比の影響や、基礎構造物の剪断変形に加えて曲げ的な変形の影響を考慮できる点に特徴があるといえよう。

まず第 2 節で解法上の仮定を述べて手法を概観し、次に第 3 節に数値解析例を示し、本解法の有用性とその限界について、また計算結果を基にして根入れをもつ構造物の振動性状についても論及した。

2. 解析の仮定と手法の概要

2.1 解析モデルの設定と解析上の諸仮定

Fig. 1 に示すような連成系を設定し、解析にあたって以下の仮定をおく。

1) 堅固な基盤の存在を前提にして剛な基盤を考え、その上にすべて水平な境界面をもつ、任意の層数の任意の線形粘弾性体からなる表層地盤を想定する。

2) 基礎構造物も連続体で置換え、表層地盤と同じように任意の成層粘弾性体で表現する。

3) 地盤と構造物の表面は同一面上にあるとする。また、構造物の根入れ深さは任意の位置のものを扱うことができる。このとき、根入れが基盤に達していない場合には、地盤と構造物の境界面を基盤のところま

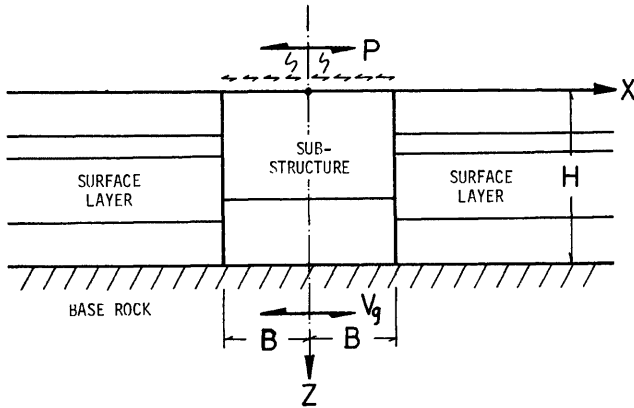


Fig. 1. Geometry of interaction system.

で下方へ延長した仮定の面を地盤内に想定し、この面の内部は構造物系に属するとして扱う。

4) 中心軸に関して対称な系を考え、紙面に平行に x - z 軸を、垂直に y 軸をとり、これを anti-plane あるいは平面歪が成立する 2 次元問題として扱う。したがって連成系の変位・応力状態には対称性または逆対称性が生じる。

5) 基盤から入射する地震動が上部および基礎構造物と地盤との連成系に作用するときの地震応答解析にこの解析結果を適用することを目的にして、基盤が一樣な水平正弦変位 $V_0 e^{i\omega t}$ で振動する場合および構造物の頂部に水平加震力 $P e^{i\omega t}$ が作用する場合の 2 種の入力形式を考える。以下ではそれぞれ“基盤振動”および“頂部加振”と呼ぶことにしよう。なお後者にあっては、加振力を構造物の表面に作用する一樣な剪断応力の分布に置換える。

6) 入力作用方向として紙面に垂直な y 軸方向および平行な x 軸方向の 2 つの場合を考える。したがって、前者では連成系に SH 波あるいは Love 波が、後者にあっては SH 波に加えて P - SV 波あるいは Rayleigh 波が生起するので、それぞれ“ SH 型”および“ P - SV 型”と呼ぶことにする。

2.2 解析手法の概要

解析法の概要は次のとおりである。表層地盤および構造物の振動特性を表わす解を次の 2 つの項の和として表現する。すなわち、地盤および構造物がそれぞれ単独に x 方向に無限の拡がりをもって存在する系〔これを“単独系”と呼ぶ〕の各入力形式に対応する 1 次元 SH 波の波動伝達関数で定常波の解を、また両者がともに存在することによる相互作用の効果を各単独系における固有関数（表面波を表わす解）の展開式、言換えるとすべての固有関数の 1 次結合式で表現する。前の項は実体波を後の項は表面波をそれぞれ意味する。また、実体波と表面波はそれぞれ基盤面および地盤と構造物の垂直境界面を震源として生起すると考えられるから、実体波の項は重複反射によって垂直方向に上下する standing wave を、また表面波の項は x 方向への進行波を表わし、地盤では無限遠への進行波のみを、構造物では x 軸の正・負両方向への進行波をともに含むことになる。このような解の表現をとるとき、運動方程式と応力-変位の関係式および水平な境界面での境界条件は既にすべて満足されているので、残る垂直面での境界条件から固有関数の 1 次結合式に含まれる未定常数を定めることになる。

ところでこの未定常数の決定には 2 通りの方法が考えられる。まず、単独系の固有関数を用いた展開によって設定した問題の解としての完備性が保障されているときには、第 1 の方法として、固有関数の性質の利

用すなわち直交条件の適用のみで十分であり、原理的には厳密解としての常数を決定しうる(実際の計算では無限級数を有限項で打ち切らざるを得ないので、その意味では得られた解は近似解である)。しかし、固有関数展開に解としての完備性が保障されていないときには、このような解の表現は一般に近似解でしかありえない。それは地盤と構造物の垂直境界面から diffraction によって生じる波動の効果をこのような固有関数の合成では表現しえないからであろう。この場合には、第2の方法として、固有関数の直交性を利用して、この垂直境界面における変位・応力の連続条件のうちの一部の成立を保障するとともに、残る連続条件の差異が境界面全体で最小になるよう変分法(最小二乗法)を適用する。

以上いずれの方法をとっても結果は未定常数に関する多元連立複素1次方程式に帰着するから、これを解いて表面波の各モードの寄与の程度を現わす未定常数をすべて定めることができる。なお、前述の解としての完備性の有無にかかわらず、変分法を併用する後者の方法に解法としての一般性があるので、完備性が保障されている場合にも当然この方法が適用できる。このとき2つの方法を適用した結果得られる未定常数を定める方程式は一般に同一の表現式にはならないが、計算結果は同じものが得られるはずである。したがって、完備性が保障されている場合どちらの方法によるかは数値計算上のメリットから判断して選択することになろう。

3. 振動特性の解析法

3.1 基礎方程式と振動特性の表現

振動特性の解の表現は入力の作用方向にかかわらず同様の計算過程で導くことができるので、ここでは SH 型と $P\cdot SV$ 型の場合を一括して記述することにし、各式の表現において、左側に $P\cdot SV$ 型、右側に SH 型の場合をそれぞれ示す。

前節に述べた仮定に基づき、振動特性の無次元表現式を次のようにおく。

＜表層地盤＞

$$\left\{ \begin{array}{l} u_G(x, z) \\ = g_G(z) + \sum_{p=1}^{\infty} A_G^p \phi_G^p(z) e^{-i\zeta_G^p(x-b)} \\ w_G(x, z) \\ = \sum_{p=1}^{\infty} A_G^p \psi_G^p(z) e^{-i\zeta_G^p(x-b)} \\ \sigma_{xxG}(x, z) \\ = \sum_{p=1}^{\infty} A_G^p \sigma_G^p(z) e^{-i\zeta_G^p(x-b)} \\ \sigma_{xzG}(x, z) \\ = \mu_G \frac{dg_G(z)}{dz} + \sum_{p=1}^{\infty} A_G^p \tau_G^p(z) e^{-i\zeta_G^p(x-b)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} v_G(x, z) \\ = g_G(z) + \sum_{p=1}^{\infty} A_G^p \phi_G^p(z) e^{-i\zeta_G^p(x-b)} \\ \\ \\ \sigma_{xyG}(x, z) \\ = \sum_{p=1}^{\infty} A_G^p \tau_G^p(z) e^{-i\zeta_G^p(x-b)} \end{array} \right\} \quad [x \geq b] \dots\dots\dots (3.1)$$

＜基礎構造物＞

$$\left\{ \begin{array}{l} u_F(x, z) \\ = g_F(z) + \sum_{q=1}^{\infty} A_F^q \phi_F^q(z) \cos(\zeta_F^q x) \\ w_F(x, z) \\ = - \sum_{q=1}^{\infty} A_F^q \psi_F^q(z) \cdot i \sin(\zeta_F^q x) \\ \sigma_{xxF}(x, z) \\ = - \sum_{q=1}^{\infty} A_F^q \sigma_F^q(z) \cdot i \sin(\zeta_F^q x) \\ \sigma_{xF}(x, z) \\ = \mu_F \frac{dg_F(z)}{dz} + \sum_{q=1}^{\infty} A_F^q \tau_F^q(z) \cos(\zeta_F^q x) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} u_F(x, z) \\ = g_F(z) + \sum_{q=1}^{\infty} A_F^q \phi_F^q(z) \cos(\zeta_F^q x) \\ \\ \\ \sigma_{xyF}(x, z) = \sum_{q=1}^{\infty} A_F^q \tau_F^q(z) \sin(\zeta_F^q x) \end{array} \right\} \quad [0 \leq x \leq b] \dots\dots\dots (3.2)$$

これらの式は次の基礎方程式——無次元運動方程式と応力—変位の無次元関係式——

$$\left\{ \begin{array}{l} -a_{0v}^2 u = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sigma_{xx}}{\mu_v} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\sigma_{xz}}{\mu_v} \right) \\ -a_{0v}^2 w = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\sigma_{xz}}{\mu_v} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\sigma_{zz}}{\mu_v} \right) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -a_{0v}^2 v = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sigma_{xy}}{\mu_v} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sigma_{yz}}{\mu_v} \right) \dots\dots (3.3) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_{xx}}{\mu_v} = \frac{1}{n_v^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{1}{n_v^2} - 2 \right) \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\sigma_{xz}}{\mu_v} = \frac{1}{n_v^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{1}{n_v^2} - 2 \right) \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\sigma_{zz}}{\mu_v} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_{xy}}{\mu_v} = \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\sigma_{yz}}{\mu_v} = \frac{\partial v}{\partial z} \end{array} \right. \quad \dots\dots (3.4)$$

および連成系の対称性に基づく次のような変位・応力の対称または逆対称性

$$\left\{ \begin{array}{l} u(-x, z) = u(x, z) \\ w(-x, z) = -w(x, z) \\ \sigma_{xx}(-x, z) = -\sigma_{xx}(x, z) \\ \sigma_{xz}(-x, z) = \sigma_{xz}(x, z) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v(-x, z) = v(x, z) \\ \sigma_{xy}(-x, z) = -\sigma_{xy}(x, z) \end{array} \right. \quad \dots\dots (3.5)$$

ならびに水平面に関する境界条件，すなわち，表面 $[z=0]$ で応力零，基盤面 $[z=1]$ で変位零，そして各層の境界面で変位・応力が連続，という条件をすべて満足するもので， $x \geq 0$ の領域で成立する式である。また，地盤内では無限遠 (x の正方向) へ進行する表面波のみを，構造物内では x の正負両方向へ進行する表面波をともに含むという条件を満足している。

以上の各式において用いた無次元パラメータは次のとおりである。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{変位成分; } \{u, v, w\} = \begin{cases} \frac{1}{V_G} \{U, V, W\} \\ \frac{G}{P} \{U, V, W\} \end{cases}, \quad \text{応力成分; } \sigma_{ij} = \begin{cases} \frac{H}{V_G G} P_{ij}; [\text{基盤振動}] \\ \frac{H}{P} P_{ij}; [\text{頂部加振}] \end{cases} \\ \text{空間座標; } \{x, y, z\} = \frac{1}{H} \{X, Y, Z\}, \quad \text{基礎半巾; } b = \frac{B}{H} \\ \text{振動数; } a_{0v} = \frac{\omega H}{c_{sv}}, \quad \text{wave number; } \zeta = \kappa H \\ \text{ポアソン比; } n_v^2 = \frac{G_v}{\lambda_v + 2G_v} = \left(\frac{c_{sv}}{c_{pv}} \right)^2, \quad \text{剪断剛性; } \mu_v = \frac{G_v}{G} \end{array} \right. \quad \dots\dots (3.6)$$

ここに， V_G , P ; 基盤振動および頂部加振の振巾， H ; 表層地盤の総厚， G ; 剛性の規準量， $c_{pv} = \sqrt{(\lambda_v + 2G_v)/\rho}$ ， $c_{sv} = \sqrt{G_v/\rho}$; 縦波および横波の複素伝播速度， λ_v , G_v ; ラーメの複素常数， ρ ; 密度，である。また， $g(x)$; 地盤または構造物単独系における1次元 SH 波の波動伝達関数， $\{\phi(x), \psi(x), \sigma(x), \tau(x)\}$, $\{\phi(z), \tau(z)\}$; 各単独系における2次元 Rayleigh 波および Love 波を表わす固有関数， A ; 境界条件より定まる未定常数， G, F ; 構造物および地盤を表わす添字， p, q ; 固有関数の次数を表わす添字，である。なお頂部加振のときには $g_0(x) \equiv 0$ となる。また，多層粘弾性地盤に対する $g(x)$ は文献¹⁹⁾ と同じ手法で一般的な解の表現を導くことができる。

3.2 境界条件と固有関数の性質

先に述べたように，基本解 (3.1) および (3.2) 式はこれを構成する各項 (1次元 SH 波の波動伝達関数 $g(x)$ と各モードの表面波を表わす解 $\phi(x)$ etc.) が水平面に関する境界条件を既にすべて満足しているので，残る境界条件は表層地盤と構造物の垂直境界面 $[x=b]$ での連続条件のみとなる。これは次式で与えられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{㉑} \quad g_G + \sum_p A_G^p \phi_G^p = g_F + \sum_q A_F^q \tilde{\phi}_F^q \\ \text{㉒} \quad \sum_p A_G^p \phi_G^p = -\sum_q A_F^q \tilde{\psi}_F^q \\ \text{㉓} \quad \sum_p A_G^p \sigma_G^p = -\sum_q A_F^q \tilde{\sigma}_F^q \\ \text{㉔} \quad \mu_G \dot{g}_G + \sum_p A_G^p \tau_G^p = \mu_F \dot{g}_F + \sum_q A_F^q \tau_F^q \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{㉕} \quad g_G + \sum_p A_G^p \phi_G^p = g_F + \sum_q A_F^q \tilde{\phi}_F^q \\ \dots\dots\dots (3.7) \\ \text{㉖} \quad \sum_p A_G^p \tau_G^p = \sum_q A_F^q \tau_F^q \end{array} \right.$$

ここに

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\phi}_F^q = \phi_F^q C^q, \quad \phi_F^q = \psi_F^q i S^q, \quad \tilde{\sigma}_F^q = \sigma_F^q i S^q, \quad \tau_F^q = \tau_F^q C^q \quad \tilde{\phi}_F^q = \phi_F^q C^q, \quad \tau_F^q = \tau_F^q S^q \\ C^q = \cos(\zeta_F^q b), \quad S^q = \sin(\zeta_F^q b), \quad \cdot = d/dz \end{array} \right\} \dots\dots\dots (3.8)$$

一方、固有関数の直交条件は

$$\int_0^1 [\phi_k^m \sigma_k^n - \psi_k^n \tau_k^m] dz = \delta_{mn} \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \phi_k^m \tau_k^n dz = \delta_{mn}, \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & [m=n] \\ 0 & [m \neq n] \end{cases} \end{array} \right. \dots\dots\dots (3.9)$$

で表わされる。(3.9) 式を導く過程を APPENDIX に示した。

3.3 未定常数の決定法

前節で述べたように未定常数の決定には2通りの方法が考えられる。なお以下の本文中()内に記した式は SH 型の場合、その()の前に記したのは P-SV 型の場合である。

[1] 固有関数の直交条件のみから定める方法 (固有関数展開に解としての完備性があるとき)

連続条件 (3.7) 式において

$$\int_0^1 [\text{㉑} \times \phi_G^r - \text{㉖} \times \tau_G^r] dz \quad \left(\int_0^1 \text{㉕} \times \phi_G^r dz \right)$$

を作り、直交条件 (3.9) 式を $k=G$ において適用すると

$$A_G^r = \sum_q A_F^q B_{GF}^{rq} \quad [r=1, 2, \dots] \dots\dots\dots (3.10)$$

ここに

$$B_{kl}^{mn} = \int_0^1 [-\phi_k^m \sigma_l^n + \psi_l^n \tau_k^m] dz \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{kl}^{mn} = \int_0^1 \phi_k^m \tau_l^n dz \end{array} \right. \dots\dots\dots (3.11)$$

ただし、添字 k, l が F のときは (3.8) 式で新しく定義した固有関数を用いる [以下の (3.13), (3.21) および (3.23) 式でも同様]。

同様に (3.7) 式において

$$\int_0^1 [\text{㉑} \times \tilde{\sigma}_F^s - \text{㉔} \times \psi_F^s] dz \quad \left(\int_0^1 \text{㉕} \times \tau_F^s dz \right)$$

を作り、(3.9) 式を $k=F$ において適用すると

$$A_F^s d^s = E_{FG}^s - \sum_p A_G^p B_{GF}^{ps} \quad [s=1, 2, \dots] \dots\dots\dots (3.12)$$

ここに

$$E_{kl}^m = \int_0^1 [-\sigma_k^m (g_k - g_l) + \psi_k^m (\mu_k \dot{g}_k - \mu_l \dot{g}_l)] dz \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{kl}^m = \int_0^1 \tau_k^m (g_k - g_l) dz \\ d^m = -S^m C^m \end{array} \right. \dots\dots\dots (3.13)$$

(3.10) 式を (3.12) 式に代入し、未定常数 A_G^p を消去すると

$$\sum_q A_F^q (\sum_p B_{GF}^{ps} B_{GF}^{pq}) + A_F^s d^s = E_{FG}^s \quad [s=1, 2, \dots] \dots\dots\dots (3.14)$$

一方、 G および F についての直交条件を適用する連続条件の式を上とは逆にすると、すなわち、(3.7) 式の ㉕ と ㉓ (㉖) に $k=G$ といった直交条件を、残る ㉑ と ㉔ (㉕) に $k=F$ といった直交条件を適用すると、(3.10), (3.12) および (3.14) 式に代わる次のような関係式が得られる。

$$A_G^r = E_{GF}^r - \sum_q A_F^q B_{FG}^{qr} \quad [r=1, 2, \dots] \quad (3.15)$$

$$A_F^s = -\frac{1}{d^s} \sum_p A_G^p B_{FG}^{sp} \quad [s=1, 2, \dots] \quad (3.16)$$

$$\sum_p A_G^p (\sum_q B_{FG}^{qr} B_{FG}^{qp} / d^q) + A_G^r = E_{GF}^r \quad [r=1, 2, \dots] \quad (3.17)$$

さて、無限級数を適当な項数 M で打ち切ると、(3.14) (3.17) 式は M 元連立複素 1 次方程式となるから、これを解いて A_F^q または A_G^p が、この結果を (3.10) または (3.16) 式に代入すると A_G^p または A_F^s が求まるので、未定常数がすべて定まり、(3.1) および (3.2) 式により振動特性の解の表現を得ることができる。打ち切り項数 M は各級数項の収束の程度と (3.7) 式の連続条件を満足する程度により定めればよい。なお連立方程式を構成する係数のマトリックスは対称になる。

[2] 固有関数の直交条件に変分法を併用する方法

(一般に固有関数展開による解の完備性が保障されていないとき)

(3.7) 式の連続条件のうち⑥と③ (⑤) に直交条件 (3.9) 式を適用すると、2 つの未定常数間の関係を与える (3.10) 式が得られるから、残る④と④ (④) の連続条件に変分法を適用する。すなわち、地盤と構造物に生じる応力・変位の差が境界面全体で最小になるよう最小二乗法を適用すると

$$\frac{\partial J}{\partial \operatorname{Re}(A_F^s)} = 2 \sum_{j=1}^s \int_0^1 \operatorname{Re} \left(-\frac{\partial F_j}{\partial A_F^s} F_j^* \right) dz = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial \operatorname{Im}(A_F^s)} = -2i \sum_{j=1}^s \int_0^1 \operatorname{Im} \left(\frac{\partial F_j}{\partial A_F^s} F_j^* \right) dz = 0$$

[s=1, 2, \dots] \quad (3.18a)

すなわち

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial F_j}{\partial A_F^s} F_j^* = 0 \quad [s=1, 2, \dots] \quad (3.18b)$$

ここに

$$\begin{cases} F_1 = g_G - g_F + \sum_p A_G^p \phi_p^p - \sum_q A_F^q \bar{\phi}_F^q, & J = \sum_{j=1}^s \int_0^1 F_j F_j^* dz \\ F_2 = \mu_G \dot{g}_G - \mu_F \dot{g}_F + \sum_p A_G^p \tau_p^p - \sum_q A_F^q \bar{\tau}_F^q, & F_2 = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

また、 Re , Im および $*$ なる記号は複素数の実数部と虚数部および共役複素数をそれぞれ意味する。(3.10) 式の関係 (3.18b) 式に代入して書改めると、 A_F^s に関する次の連立方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} \sum_q A_F^q [S_{FF}^{qs} - \sum_p \{ (B_{GF}^{ps})^* S_{FG}^{qp} + B_{GF}^{pq} (S_{GF}^{ps} - \sum_r (B_{GF}^{rs})^* S_{GG}^{pr}) \}] \\ = -G_{FG}^s - \sum_p (B_{GF}^{ps})^* G_{GF}^p \quad [s=1, 2, \dots] \end{aligned} \quad (3.20)$$

ここに

$$\begin{cases} S_{kl}^{mn} = \int_0^1 [\phi_k^m (\phi_l^n)^* + \tau_k^m (\tau_l^n)^*] dz \\ G_{kl}^m = \int_0^1 [(\phi_k^m)^* (g_k - g_l) + (\tau_k^m)^* (\mu_k \dot{g}_k - \mu_l \dot{g}_l)] dz \end{cases} \quad \begin{cases} S_{kl}^{mn} = \int_0^1 \phi_k^m (\phi_l^n)^* dz \\ G_{kl}^m = \int_0^1 (\phi_k^m)^* (g_k - g_l) dz \end{cases} \quad (3.21)$$

一方、直交条件と変分法を適用する連続条件の式を逆にし、(3.7) 式の④と④ (④) に直交条件 (3.9) 式を残る⑥と③ (⑤) に最小二乗法を用いると、(3.10) および (3.20) 式に代わる (3.15) 式および次式が求められる。

$$\begin{aligned} \sum_q A_F^q [T_{FF}^{qs} - \sum_p \{ (B_{GF}^{ps})^* T_{FG}^{qp} + B_{GF}^{pq} (T_{GF}^{ps} - \sum_r (B_{GF}^{rs})^* T_{GG}^{pr}) \}] \\ = -\sum_p E_{GF}^p \{ T_{GF}^{ps} - \sum_r (B_{GF}^{rs})^* T_{GG}^{pr} \} \quad [s=1, 2, \dots] \end{aligned} \quad (3.22)$$

ここに

$$T_{kl}^{mn} = \int_0^1 [\phi_k^m (\phi_l^n)^* + \sigma_k^m (\sigma_l^n)^*] dz \quad \quad T_{kl}^{mn} = \int_0^1 \tau_k^m (\tau_l^n)^* dz \quad (3.23)$$

したがって、[1] の場合と同様にして、(3.10) と (3.20) 式または (3.15) と (3.22) 式からすべての未

定常数を定めることができ、振動特性の表現式が得られることになる。なおこのとき A_F^q に関する連立方程式 (3.20) または (3.22) 式を構成する係数マトリックスのエレメントを α_{sq} とすれば、次のような関係が成立していることに注意しておこう。

$$\begin{cases} \alpha_{sq} = (\alpha_{qs})^* & \alpha_{ss} = Re(\alpha_{ss}) \\ S_{kl}^{mn} = (S_{lk}^{nm})^*, T_{kl}^{mn} = (T_{lk}^{nm})^*, S_{kk}^{mm} = Re(S_{kk}^{mm}), T_{kk}^{mm} = Re(T_{kk}^{mm}) \end{cases} \quad (3.24)$$

最後に、地盤と構造物が全く同一の構造をもつという特別な場合の連立方程式の性質を検討しておこう。
このとき

$$g_G = g_F, \{\phi_G, \phi_G, \sigma_G, \tau_G\} = \{\phi_F, \phi_F, \sigma_F, \tau_F\}, \zeta_G = \zeta_F, \mu_G = \mu_F \quad (3.25)$$

が成立つから、(3.13) および (3.21) 式より

$$E_{kl}^m = G_{kl}^m = 0 \quad [m=1, 2, \dots] \quad (3.26)$$

となる。したがって、未定常数を定める連立方程式 (3.14), (3.17), (3.20) および (3.22) 式の右辺は零となり、また一般にこれらの式の左辺の係数を作るマトリックスの行列式は零にならないから

$$A_G^p = A_F^q = 0 \quad [p=1, 2, \dots; q=1, 2, \dots] \quad (3.27)$$

が導かれる。よって、このとき連成系の振動特性は各単独系の 1 次元 SH 波の波動伝達関数に一致し、本解法は必要な条件を満たしていることがわかる。

3.4 固有関数展開による解の完備性の検討

本論で設定した問題に対して、固有関数展開による解の完備性があるかどうかを一般的に検討することは困難である。しかし、K. Nakamura¹⁵⁾によれば、単一板内の任意の点に動的な集中応力が作用するときの振動特性は、SH 型および P-SV 型とも normal mode の重ね合わせで表現できることが示されている。すなわち、線形問題に重ね合わせの原理が成立することを考慮すれば、単一板に任意の変形・応力が外力として作用する境界値問題は normal mode の重ね合わせでその解を表現できることがわかる。また、板の中心面に関して逆対称な外力を与えれば、中心面が剛体に密着するという境界条件に等価になる。したがって、上の 2 つの性質を併わせ考えれば、構造物の根入れが基盤にまで達し地盤ともに単一の層からなる場合には、単独系の固有関数展開に解としての完備性が保障されているとしてよいであろう。

3.5 特別な場合の振動特性の解析的表現

ところで、地盤と構造物の対応する固有関数がすべて同じ形の式で表わされる場合には、未定常数を解析的に定めることができる。たとえば、両者ともに同一の成層構造をもち各層の物理常数の分布が互いに相似形になっている場合などはこの条件に当てはまる。とくに、入力的作用方向が SH 型で地盤・構造物ともに単一の層からなる最も基本的で単純な連成系を考えると、その p 次の固有関数は両者ともに、 $\cos\{(p-1/2)\pi z\}$ の定数倍で表わされ、未定常数を定める [1] [2] いずれの方法によっても同一の結果が導かれて、その振動特性の解析的表現は次式のように求められる。

$$\text{基盤振動;} \begin{cases} v_G(x, z) = \frac{\cos(a_{0G}z)}{\cos a_{0G}} + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \gamma_F^p \xi_F^p}{i \cot(\zeta_F^p b) \cdot \xi_G^p - \xi_F^p} \\ \quad \cdot \left[\frac{1}{(\zeta_G^p)^2} - \frac{1}{(\zeta_F^p)^2} \right] \cos(\gamma_F^p z) e^{-i \zeta_G^p (x-b)} \\ v_F(x, z) = \frac{\cos(a_{0F}z)}{\cos a_{0F}} + 2 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^q \gamma_G^q \xi_G^q}{i \tan(\zeta_F^q b) \cdot \xi_F^q + \xi_G^q} \\ \quad \cdot \left[\frac{1}{(\zeta_G^q)^2} - \frac{1}{(\zeta_F^q)^2} \right] \cos(\gamma_G^q z) \frac{\cos(\zeta_F^q x)}{\cos(\zeta_F^q b)} \end{cases} \quad (3.28)$$

$$\text{頂部加振;} \quad \begin{cases} v_G(x, z) = -\frac{2}{\mu_F} \sum_{p=1}^{\infty} i \cot(\zeta_F^p b) \cdot \zeta_F^p \cdot \frac{\cos(\gamma^p z)}{(\zeta_F^p)^2} e^{-\zeta_G^p (x-b)} \\ v_F(x, z) = \frac{1}{\mu_F} \cdot \frac{\sin[a_{0F}(z-1)]}{a_{0F} \cos a_{0F}} \\ \quad - \frac{2}{\mu_F} \sum_{q=1}^{\infty} i \tan(\zeta_F^q b) \cdot \zeta_F^q + \zeta_G^q \cdot \frac{\cos(\gamma^q z)}{(\zeta_F^q)^2} \cdot \frac{\cos(\zeta_F^q x)}{\cos(\zeta_F^q b)} \end{cases} \quad \dots\dots(3.29)$$

剪断応力は上の2つの場合に共通に次式で与えられる。

$$\sigma_{xyk} = \mu_k \frac{\partial v_k(x, z)}{\partial x} \quad [k=G, F] \quad \dots\dots(3.30)$$

ここに

$$\begin{cases} a_{0k} = a_{0v_k}, & (\zeta_k^m)^2 = (a_{0k})^2 - (\gamma^m)^2, & \mu_k = \mu_{v_k} & [k=G, F] \\ \gamma^m = \frac{2m-1}{2}\pi, & \zeta_k^m = \mu_k \zeta_k^m & & [m=1, 2, \dots] \end{cases} \quad \dots\dots(3.31)$$

前項で述べたように、この例は単独系の固有関数の展開による解の完備性が保障されている場合で、得られた結果は厳密解である。

4. 数値解析例

4.1 連成系とパラメータの設定

連成系：数値解析例として、構造物・地盤ともに単一の層からなり、構造物の根入れが基盤にまで達している最も単純で基本的な場合の結果を示そう。前述のように、この例は固有関数展開による解の完備性が保障されている場合である。

内部減衰：地盤・構造物とも Voigt solid と想定すると、領域 k のラーメの複素常数は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \frac{G_{vk}(i\omega)}{\bar{G}} = \frac{G_k + i\omega G_{vk}'}{\bar{G}} = \frac{G_k}{\bar{G}} \left(1 + i a_0 \gamma_{svk} \frac{\bar{c}_s}{c_{sk}}\right) \equiv \mu_k \varphi_{svk}, & n_{vk}^2 = n_k^2 \varphi_{pvk}, \\ \frac{\lambda_{vk}(i\omega) + 2G_{vk}(i\omega)}{\bar{G}} = \frac{(\lambda_k + 2G_k) + i\omega(\lambda_{vk}' + 2G_{vk}')}{\bar{G}} \\ \quad = \frac{\lambda_k + 2G_k}{\bar{G}} \left(1 + i a_0 \gamma_{pvk} \frac{\bar{c}_s}{c_{sk}}\right) \equiv \frac{\mu_k}{n_k^2} \varphi_{pvk} \end{cases} \quad \dots\dots(4.1)$$

ここに

$$\begin{cases} \gamma_{svk} = \frac{c_{sk}}{H} \cdot \frac{G_{vk}'}{G_k}, & \gamma_{pvk} = \frac{c_{sk}}{H} \cdot \frac{\lambda_{vk}' + 2G_{vk}'}{\lambda_k + 2G_k}, & \mu_k = \frac{G_k}{\bar{G}}, & n_k^2 = \frac{G_k}{\lambda_k + 2G_k}, \\ a_0 = \frac{\omega H}{\bar{c}_s}, & c_{sk} = \sqrt{\frac{G_k}{\rho_k}}, & \bar{c}_s = \sqrt{\frac{\bar{G}}{\rho}} & [k=G, F] \end{cases} \quad \dots\dots(4.2)$$

また、 ρ_k ; zone k の密度、 ρ , $\bar{G}$; 密度および剛性の規準量、である。ここでは内部減衰の大きさを規定する量として

$$\gamma_v \equiv \gamma_{pvk} = \gamma_{svk} = 0.1 \quad [k=G, F] \quad \dots\dots(4.3)$$

を仮定した。領域 k の1次元 P 波および SH 波の基本固有振動数に関する減衰定数（臨界減衰比）を h_{pk} および h_{sk} とすれば

$$h_{pk} = \frac{\pi}{4} \gamma_{pvk}, \quad h_{sk} = \frac{\pi}{4} \gamma_{svk} \quad [k=G, F] \quad \dots\dots(4.4)$$

なる関係が成立つから、(4.3) 式の値はそれぞれの基本固有振動数に関して約8%の減衰定数を与えていることになる。

次に、内部減衰機構の相異が振動特性に及ぼす影響を調べるために complex damping の場合を取上げ、計算の簡単な SH 型入力の場合について検討した。土の試料に対する動的な室内実験 [例えば H. B. Seed and I. M. Idriss¹⁶⁾] でも、また原地盤における地震探査 [例えば 嶋・工藤¹⁷⁾] でも、土の等価減衰係数

(複素剛性の虚数部に相当する) は振動数に対する 依存性が小さいという結果が得られており, こうした実験や実測のデータを背景に, 土が示す減衰性は主に応力-歪関係における履歴特性に起因するとして, とくに最近用いられるようになってきた減衰機構のモデルである [例えば A. S. Veletsos and V. V. D. Nair^[9]]. このときラメの複素常数は次式で与えられる。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{G_{vk}(i\omega)}{\bar{G}} &= \frac{G_k + iG_{ek}' \cdot \text{sgn}(\omega)}{\bar{G}} = \frac{G_k}{\bar{G}} \{1 + i\eta_{sek} \cdot \text{sgn}(a_0)\} \equiv \mu_k \varphi_{sek}, \quad n_{vk}^2 = n_k^2 \frac{\varphi_{srk}}{\varphi_{prk}} \\ \frac{\lambda_{vk}(i\omega) + 2G_{vk}(i\omega)}{\bar{G}} &= \frac{(\lambda_k + 2G_k) + i(\lambda_{ek}' + 2G_{ek}') \cdot \text{sgn}(\omega)}{\bar{G}} \dots\dots\dots (4.5) \\ &= \frac{\lambda_k + 2G_k}{\bar{G}} \{1 + i\eta_{pek} \cdot \text{sgn}(a_0)\} \equiv \frac{\mu_k}{n_k^2} \varphi_{pek} \end{aligned} \right.$$

ここに

$$\eta_{sek} = \frac{G_{ek}'}{G_k}, \quad \eta_{pek} = \frac{\lambda_{ek}' + 2G_{ek}'}{\lambda_k + 2G_k} \quad [k=G, F] \dots\dots\dots (4.6)$$

この内部減衰の大きさを規定する量としては, 地盤の1次元SH波の基本固有振動数において, Voigt型とcomplex型の減衰係数がほぼ等しくなるよう次式を仮定した。

$$\eta_c \equiv \eta_{pek} = \eta_{sek} = 0.16 \quad i. e., \quad \eta_c \simeq a_0 \eta_V |_{a_0 = \frac{\pi}{2}} \quad [k=G, F] \dots\dots\dots (4.7)$$

また, 以上の2種の減衰機構を通じて

$$n_k^2 = \frac{1}{3} \quad i. e., \quad \nu_k = \frac{1 - 2n_k^2}{2(1 - n_k^2)} = \frac{1}{4} \dots\dots\dots (4.8)$$

を設定した。ここに ν_k はポアソン比である。

標準ケースと主なパラメータ: まず, 密度, 剛性および伝播速度の規準量として次式を与えた。

$$\bar{\rho} = \rho_G = \rho_F, \quad \bar{G} = G_G, \quad c_s = c_{sG} \dots\dots\dots (4.9)$$

次に, 実在する地盤と構造物の設計時における常数を考慮に入れて, 構造物と地盤の横波速度比と構造物の巾高比について

$$\frac{c_{sF}}{c_{sG}} = 2 \quad (i. e., \quad \frac{G_F}{G_G} = 4), \quad \frac{B}{H} = \frac{1}{4} \dots\dots\dots (4.10)$$

を標準ケースとして設定し, 主としてこの2つのパラメータが連成系の振動特性に及ぼす影響を, 応答の周波数特性(応答曲線)と空間分布について調べた。

図中の記号: 応答曲線を描いた以下の図中の(G)および(F)なる記号は地盤および構造物の単独系の応答を, また縦の細い実線と点線は地盤および構造物の無減衰単独系における1次元SH波の固有振動数位置をそれぞれ示している。

4.2 SH型入力の場合

解の表現: 前節3.5に示したように, この場合の振動特性の解析的表現が(3.28)～(3.30)式で求られている。このとき1次元SH波の波動伝達関数は(3.28)と(3.29)式の右辺の Σ の前の第1項で表わされ, 振動数方程式と固有値 ζ_k^m および正規直交条件を満たす固有関数 $\{\phi_k^m, \tau_k^m\}$ は次式のように与えられる。

$$\left\{ \begin{aligned} \cos \gamma_k &= 0, \quad \zeta_k^m = \sqrt{(a_0 k)^2 - (\gamma^m)^2} \\ \phi_k^m(z) &= \sqrt{\frac{2}{\xi_k^m}} \cos(\gamma^m z), \quad \tau_k^m(z) = \sqrt{2\xi_k^m} \cos(\gamma^m z) \end{aligned} \right. \dots\dots\dots (4.11)$$

ここに

$$(\gamma_k)^2 = (a_0 k)^2 - (\zeta_k^m)^2, \quad \gamma^m = \gamma_G^m = \gamma_F^m = \frac{2m-1}{2} \pi \quad [k=G, F; m=1, 2, \dots] \dots\dots\dots (4.12)$$

解の精度: この場合は固有関数展開による解の完備性が保障され, 厳密解としての表現が求まっているので, その精度は各級数項の収束の程度にのみ依存する。計算結果によれば, 各級数項は一樣収束の性質をも

ち、その収束の早さは入力形式と系内の空間位置、さらに変位量か応力量かによって異なる。一般に基盤振動より頂部加振の場合、また変位量より応力量の場合に収束が遅く、空間位置では表面波の震源になる垂直境界面で最も遅いが、これより離れるにしたがってとくに地盤内で収束の早さが急増する。基盤振動の場合、最大20次の固有関数まで評価したときの垂直境界面における応答量の最終項の大きさは、最も収束の遅いときでも全級数之和の0.01%（変位）および0.1%（応力）以内に収まっており、このとき垂直境界面での連続性には変位応答で有効数字の5桁目に差が生じる程度にすぎず、応力応答は地盤側と構造物側で解が同一の表現に帰着するので数値的には完全に一致する。他方、頂部加振の場合の精度は全体に上記の場合よりオーダーが一つ大きくなる程度である。

〔1〕 基盤振動の場合

1° 応答の空間分布

表面に沿う点での水平変位 v および剪断応力 $\tau = \sigma_{xy}$ の応答曲線を Fig. 4 の上図に示した。また地盤の固有振動数の近傍 [1次; $a_0 = \pi/2$ に対して 1.6, 2次; $a_0 = 3\pi/2$ に対して 4.8] における表面に沿う応答の水平方向の振巾分布を Fig. 2 に、地盤と構造物の境界面に沿う深さ方向の分布を振巾と複素数表示で Fig. 3 に示した。

1) 構造物内の分布性状：基礎構造物がその形状として一般的な巾より背の高いプロポーシオンをもつとき、その等価な剛性が地盤剛性より大きければ、構造物内では水平面内の変位応答にあまり差がみられず、ほぼ一様な応答分布をもっていること、剪断応力は水平面内で中心から端部へむけてほぼ一様に増加し、直線的な分布性状を示すことがわかる。

2) 地盤内の分布性状：変位応答の分布は比較的緩かで、境界面から離れるに従い地盤のみの応答値になだらかに漸近するのに対して、剪断応力は境界面で最大となりその近傍で急変しながら零（地盤のみの値）に収束していく。とくに1次の共振点の近傍で、相互作用によるこの剪断応力の影響が境界面から相当離れ

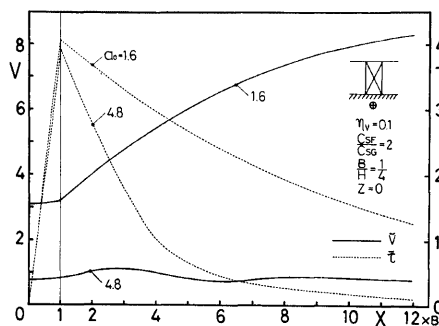


Fig. 2. Distributions at the surface.

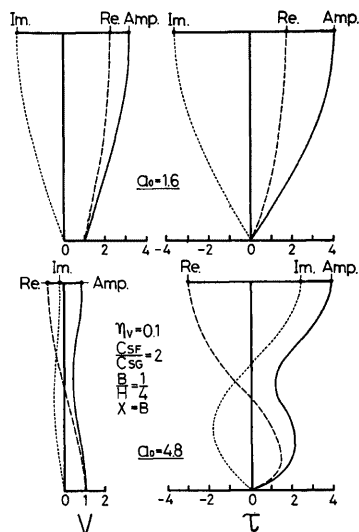


Fig. 3. Distributions at the vertical boundary.

Distributions of displacement and stress, "SH-type" and "base rock excitation".

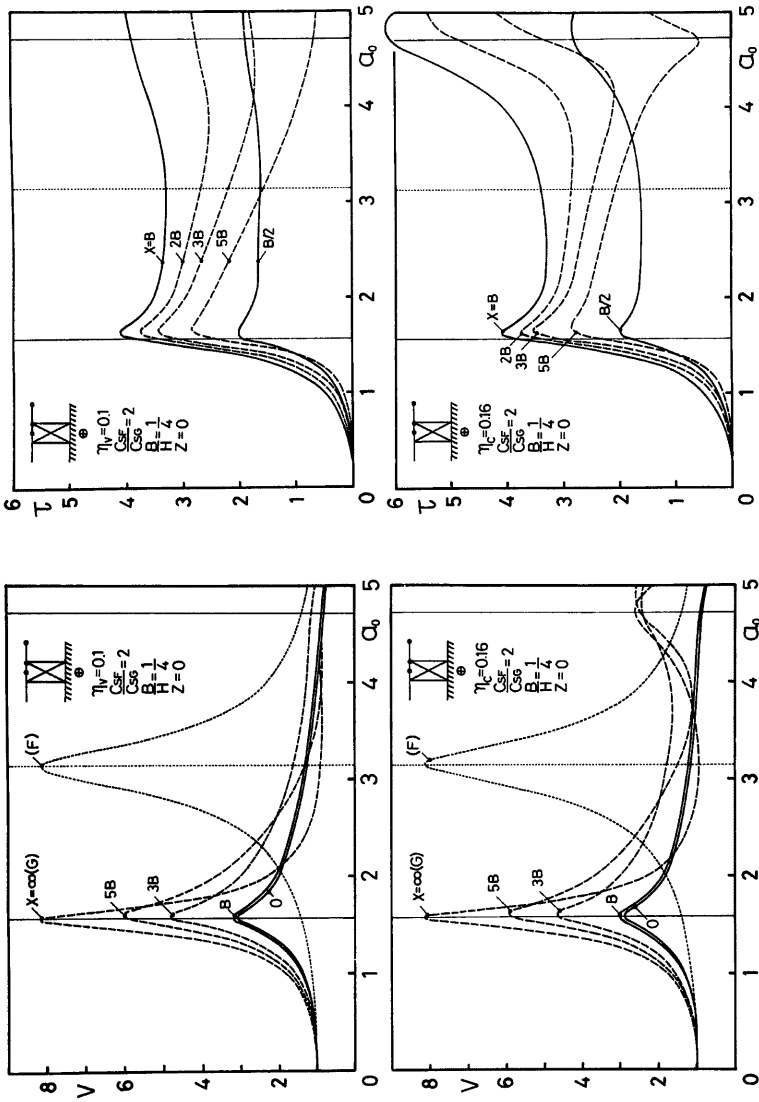


Fig. 4. Effects of position at the surface.
Response curves of displacement and stress, "SH-type" and "base rock excitation".

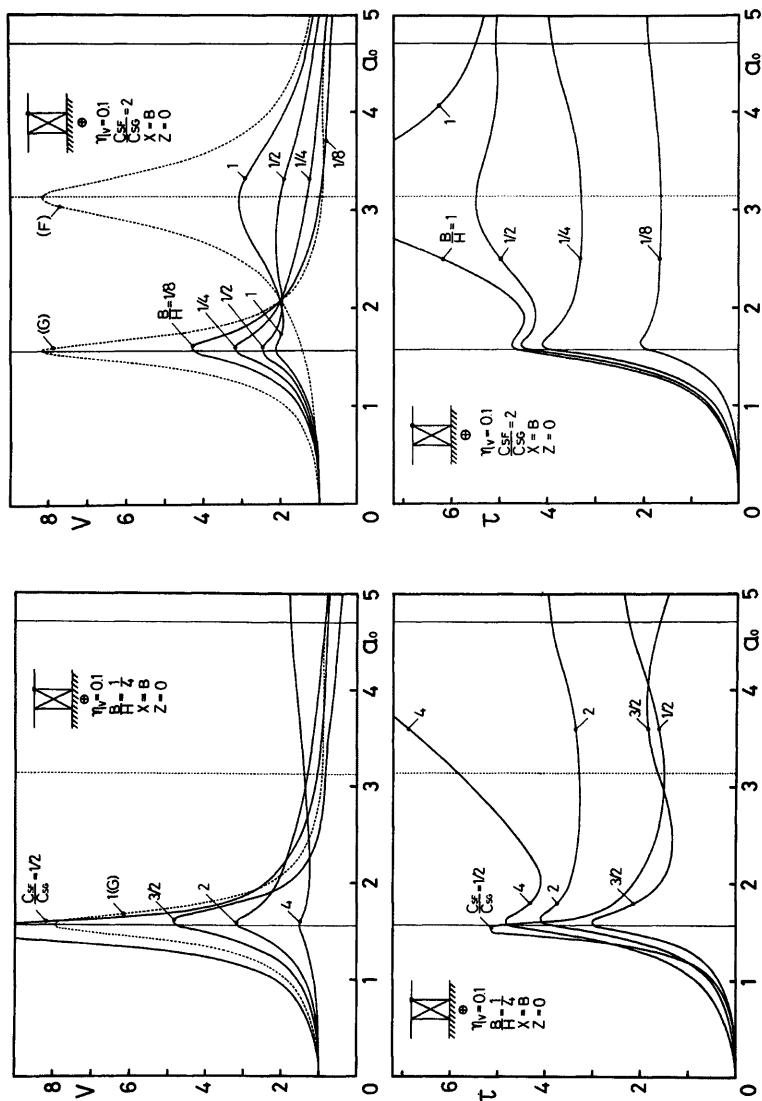


Fig. 5. Effects of stiffness ratio.
Response curves of displacement and stress, "SH-type" and "base rock excitation".

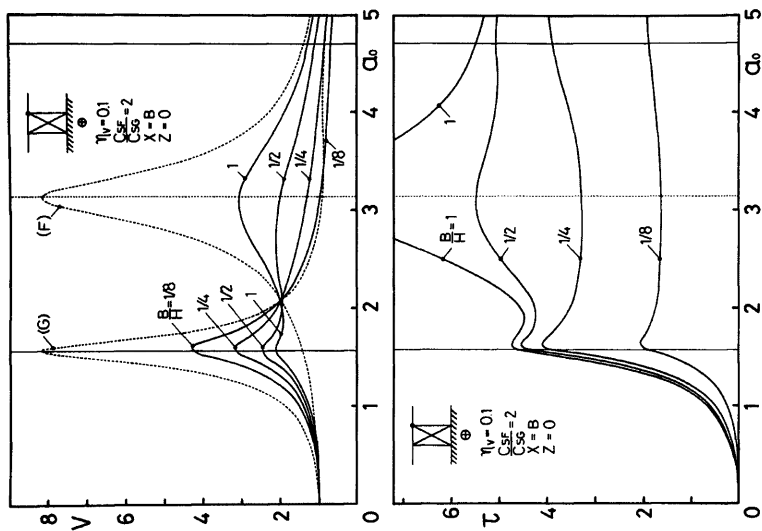


Fig. 6. Effects of width-height ratio.

でも残るのが特徴的である。

3) 境界面内の分布性状：応答の深さ方向の分布は地盤の共振点の近傍でその剪断型の各次のモードにほぼ対応する形状をもち、構造物の振動が地盤の振動特性に支配されている様子がわかる。また剪断応力は一般に境界面の頂部で最大となる。

2° 横波速度比と巾高比の影響

構造物と地盤の横波速度比 C_{sF}/C_{sG} ($=[G_F/G_G]^2$; 剛性比の2乗) および構造物の根入れ巾と高さの比 B/H を変えたときの境界面の頂部における応答曲線をそれぞれ Fig. 5 と Fig. 6 に示した。

1) 変位応答の特徴：背の高いプロポーションの構造物では、両者の剛性比にかかわらず、構造物単独系の固有振動は励起されにくく地盤のみの固有振動が卓越し、剛性比に応じて応答振巾が増減するにすぎない。また、一般に地盤の基本固有振動数の近傍のみに顕著なピークが出現しているが、根入れ巾が高さに比べて相対的に大きくなるとともに、構造物にあってはたとえその剛性が地盤より大きいとしても地盤の特性に強く支配される。

2) 剪断応力応答の特徴：応答曲線の傾向は地盤の基本固有振動数の近傍から応答量が急増し、これより高い振動数域で比較的平坦に近い緩かな変動を描く特性をもっている。この共振点の近傍では地盤より柔い構造物のときに大きな共振々巾をとるが、全般的には剛い構造物が根入れされているほど、そして構造物の根入れ巾が広いほど、境界面に生じる剪断応力は大きい。

[2] 頂部加振の場合

地表面に沿う点での水平変位 v および剪断応力 $\tau = \sigma_{xy}$ の応答曲線を Fig. 9 の上図に、地盤の固有振動数の近傍における応答振巾の空間分布を Fig. 7 (表面に沿う水平方向の分布) と Fig. 8 (境界面に沿う深さ方向の分布) に、また横波速度比と巾高比の影響を示す応答曲線を Fig. 10 と Fig. 11 にそれぞれ示した。

1) 応答の空間分布性状：標準ケースに設定したように構造物が背が高く地盤より剛性の大きい性質をもつときには、構造物内で水平方向にほぼ一様な変位応答の分布をもつこと、深さ方向には変位では直線また

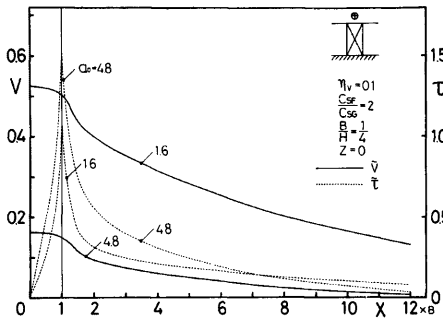


Fig. 7. Distributions at the surface.

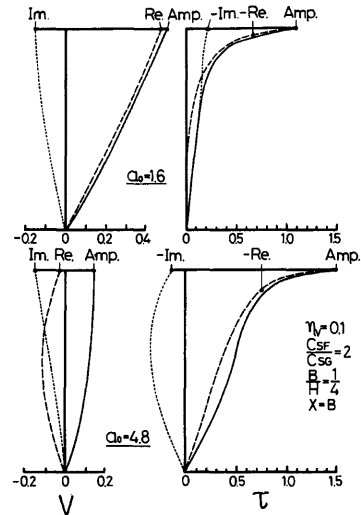


Fig. 8. Distributions at the vertical boundary.

Distributions of displacement and stress, "SH-type" and "surface excitation".

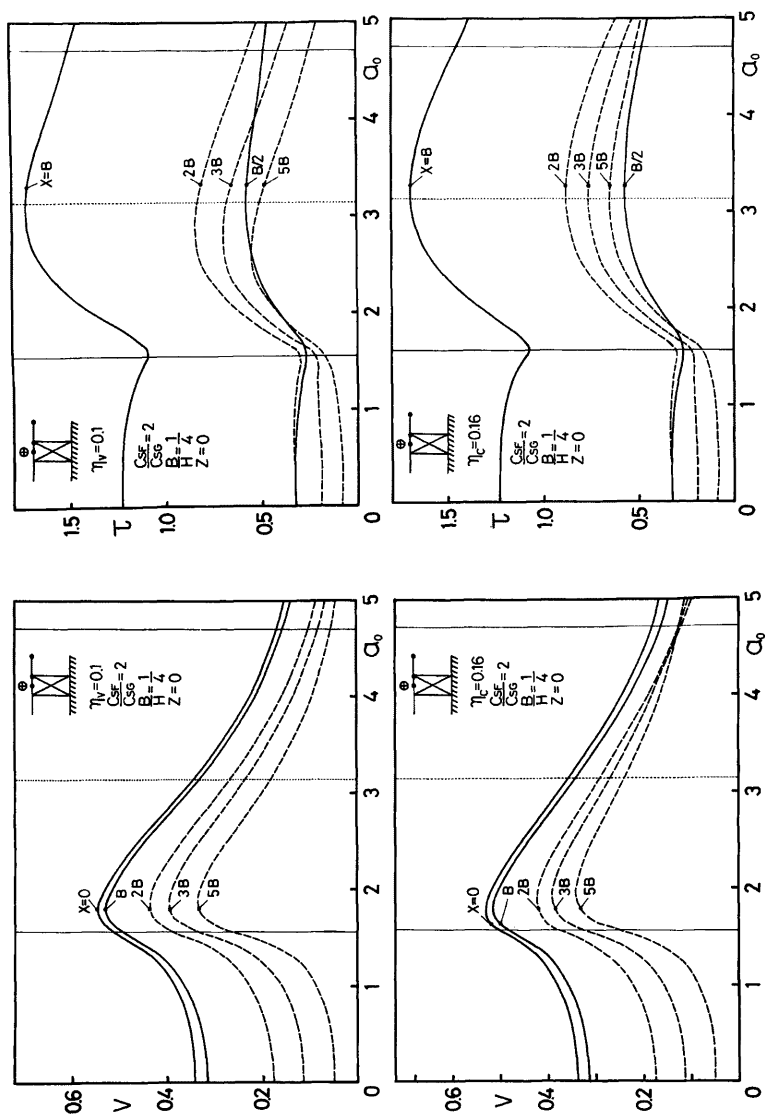


Fig. 9. Effects of the position at the surface.
Response curves of displacement and stress, "SH-type" and "surface excitation".

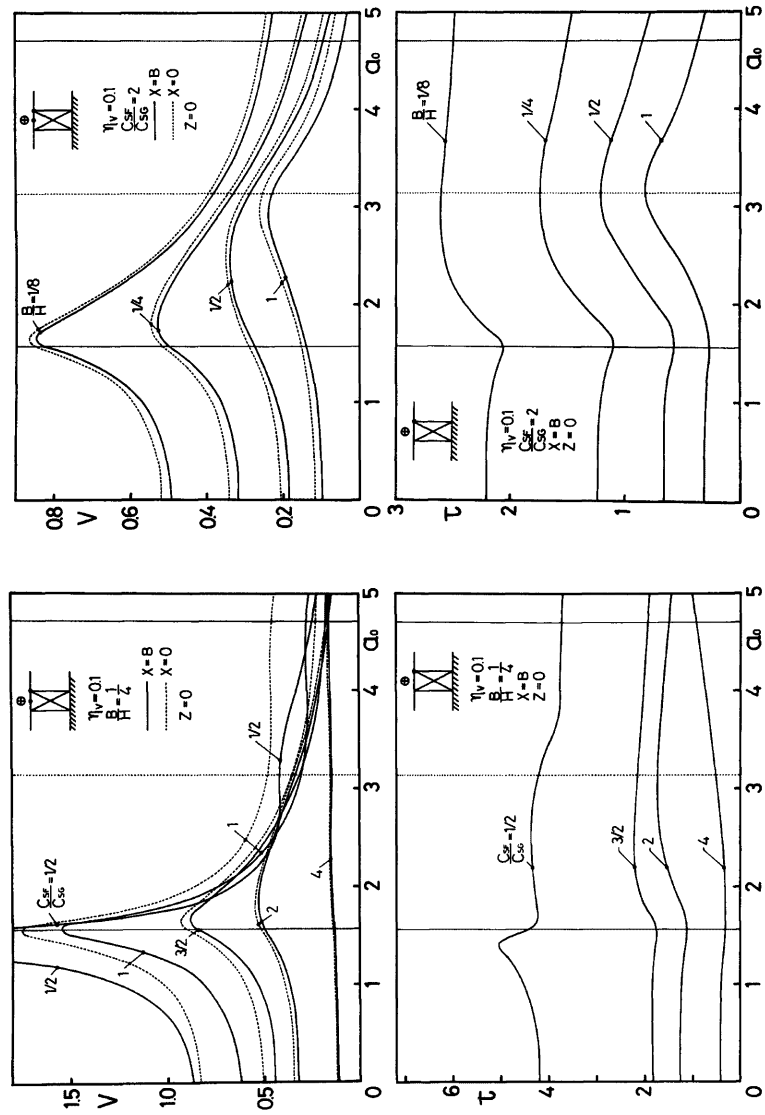


Fig. 10. Effects of stiffness ratio.
Response curves of displacement and stress, "SHI-type" and "surface excitation".

Fig. 11. Effects of width-height ratio.

は放物型に近く、剪断応力では頂部集中型の分布をもち、地盤のみの特性の影響は現われていないことが特徴になっている。

2) 変位応答の特徴：地中構造物の主要な振動特性は先の基盤振動の場合とは大きく異なり、連成系としての固有振動が強く励起され、両者の剛性比や構造物のプロポーションによって系の性質が変わると、共振点の位置やその近傍の挙動がかなり変動する。しかし、一般に巾より背の高い構造物であれば、剛性比が変わっても連成系の共振点が地盤の固有振動数より離れることは比較的少ない。逆に、両者の剛性に差があると巾高比は共振点近傍の挙動に大きな影響を与える。

3) 剪断応力応答の特徴：同様に基盤振動の場合とは異なり、振動数全域でほぼ平坦に近い特性をもち、両者の剛性が近いほどあるいは根入れ巾が狭いほど、この平坦な傾向が強く現われるようである。また変位振巾に最大値を生じる近傍で極小値をとる。構造物が柔いほど、また地盤より剛い構造物の根入れ巾が狭いほど当然変位振巾は大きくかつ生じる剪断応力も大きい。

[3] 減衰機構の異なる場合

Voigt 型とは内部減衰機構の異なる complex damping の場合との比較を標準ケースの応答曲線について Fig. 4 (基盤振動) と Fig. 9 (頂部加振) の上下の図に示してある。

考察：両型の減衰は地盤の基本固有振動数でほぼ等しくなるよう係数の数値が選ばれている。このような条件の下で比較するとき減衰機構の相異が振動特性に及ぼす影響は全般に小さいといえよう。詳細にみると、とくに連成系の 1 次の共振のみが卓越する頂部加振の場合に両者の差は少ないが、基盤振動の場合になると、両型の減衰の大きさに差の現われる地盤の 2 次の固有振動数付近で振動特性とくに剪断応力応答の相異が顕著になっている。このように振動特性として卓越する振動数の近傍で減衰の大きさを合わせておけば、機構が違っても特徴的な差異は生じないことが確認できたので、ここでは Voigt 型の場合の解析を主体にしている。

4.3 P・SV 型入力の場合

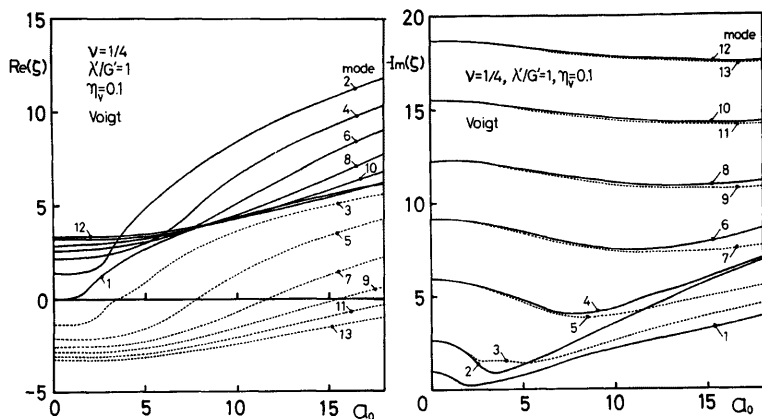
1° 固有値の性質

この場合の無次元振動数方程式は文献²⁰⁾の (5.8a) 式で与えられる。粘弾性地盤の振動数方程式は複素超越方程式となるので、まず無減衰地盤の実固有値を逐次求根法により求め、これを初期値として逐次近似の Newton-Raphson 法によりその固有値を定めた。無次元量の振動数 $a_0 = \omega H/c_s$ (実数) と wave number $\zeta = \kappa H$ (複素数) との関係を与える計算結果を、13 次または 15 次までのモードについて Fig. 12 の (a) [Voigt solid] と (b) [complex damping] に示した。

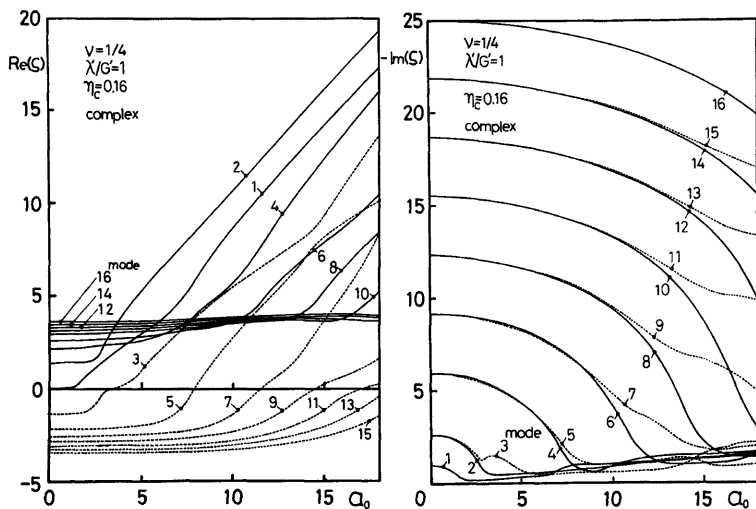
1) 固有値の物理的意味：固有値の wave number はすべて複素数となり、その実数部は波動の空間方向の振動性を、虚数部は波動の進行に伴う内部減衰による振巾の減衰性を表現する量であり、文献²⁰⁾の (6.17) 式によってそれぞれ位相速度 (phase velocity) と減衰常数 (attenuation constant) に関係づけられる。固有値には符号のみ異なる 1 組が常に存在するが、これらは進行方向が互に逆の同じ性質の表面波を意味する。ここでは虚数部が負のもののみを図示している。

2) 固有値の特徴と分類：絶対値最小のものを別にすると、wave number は 2 つずつ組になって現われている。すなわち、振動数 $a_0 = 0$ において虚数部が相等しく実数部の符号のみ異なる 1 組である。次数の分類は減衰性を表わす虚数部で行ない、その絶対値の小さいものから順にモードの番号を付した。図には上記の組を分類し、 $a_0 = 0$ で実数部が正または零なるもの (偶数次と単独に現われる 1 次のモード) を実線で、負なるもの (奇数次のモード) を点線で示している。

3) 減衰機構による相異：内部減衰の機構が違っても上述の固有値の性質は不変である。しかし、振動数のやや高い領域での wave number の振動数依存性の程度が 2 つの機構で異なっている。Voigt 型では振動数の影響が小さく比較的平坦に近い緩やかな特性をもつものに対して、complex 型では依存性が大きく高振動数域ほど相異が顕著になり、位相速度・減衰常数ともに減少する。



(a) The case of Voigt solid.



(b) The case of complex damping.

Fig. 12. Complex wave number of the Rayleigh waves in a viscoelastic stratum.

2° 解法と解の精度

この場合は固有関数展開による解の完備性が保障されてはいても、*SH* 型の例のように振動特性の表現を解析的に求めることはできないから、未定常数に関する複素連立方程式を解いて数値的に解を定めなければならない。したがって、解の精度は各級数項の収束と垂直境界面での連続性の程度により判断する必要がある。以下の算例ではすべて基盤振動の場合を示すが、計算結果によれば、解の精度についての条件や性質は *SH* 型の場合と変わらないが、収束の程度は全体に遅くなっている。直交条件のみの適用 (計算法[1]) によ

って最大15次のモードまで評価したとき、変位に関して級数の収束は前と同じ定義で0.1%以内、境界面の連続性は1%以内に収まっている。これに対して、応力については級数項の収束がやや遅く連続性の精度がおちるので、直交条件に加えて応力の連続条件に変分法を適用する計算によったところ、変位の応答値は前の方法による結果とほぼ変わらず、全体の解の精度は2つの指標ともに1%程度に押えられた。

3° 応答の空間分布と応答曲線の全般的な傾向

表面に沿う点での水平変位 u と垂直変位 w および層の中央を通る水平面内の点での垂直応力 $\sigma = \sigma_{xx}$ と剪断応力 $\tau = \sigma_{xz}$ の応答曲線を Fig. 15 に、地盤の固有振動数の近傍での変位応答の空間分布を Fig. 13 (表面に沿う水平方向) と Fig. 14 (境界面に沿う深さ方向) に示した。

1) 変位応答の分布性状：地盤の固有振動数の近傍における深さ方向の水平変位の分布は剪断型の振動モードに近く、地盤の固有振動に支配されていることがわかるが、垂直変位の分布は異なり、1次・2次とも深さ方向にほぼ一様に近い形状をもっている。一方、水平変位の水平面内の分布は構造物内でほぼ一様で地盤内でも変動が比較的小さく、境界面から離れると地盤のみの特性に漸近する。垂直変位は構造物中ではほぼ直線的に変形し、境界面の近傍の周辺地盤で大きく変動したあと零に収束していく。構造物内に生じる変位応答の空間分布を総合すると、構造物の等価な剛性が地盤のそれより大きい領域では、構造物は1次元連続体の剪断変形と曲げ変形を組合わせたような変形状態を示すことがわかる。

2) 変位の応答曲線の特徴：水平変位の応答曲線は SH 型の変位応答と大変よく似た傾向を示しており、地盤に固有な特性の影響を強く受けていることがこの図からもわかる。一方、垂直変位は SH 型の剪断応力の特性に近く、水平変位と同様に地盤の基本固有振動数の近傍に顕著なピークをもっているが、内部減衰作用の大きい高振動数域になっても応答値の減衰が遅く、地盤の高次の固有振動数の近傍でとくに構造物と周辺地盤の応答にピークの生起する点が、水平変位の性質とは異なるところである。相互作用の結果として生じる垂直変位の大きさは1次の共振点の近傍では水平変位よりオーダーが1つ小さいが、このように高振動数域では減衰が遅いので両者の大きさが接近し垂直変位の影響を無視できなくなる。また、地盤に生じる垂直変位の応答曲線でやや顕著に現われている $a_0=2.8$ 近傍のピークは、地盤の縦振動の基本固有振動数に相

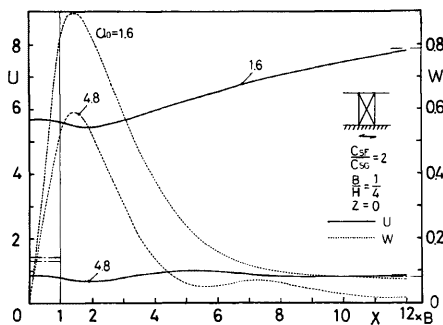


Fig. 13. Distributions at the surface.

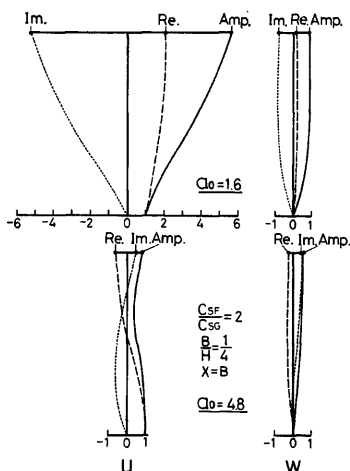


Fig. 14. Distributions at the vertical boundary.

Distributions of displacements, "P-SV-type" and "bed rock excitation".

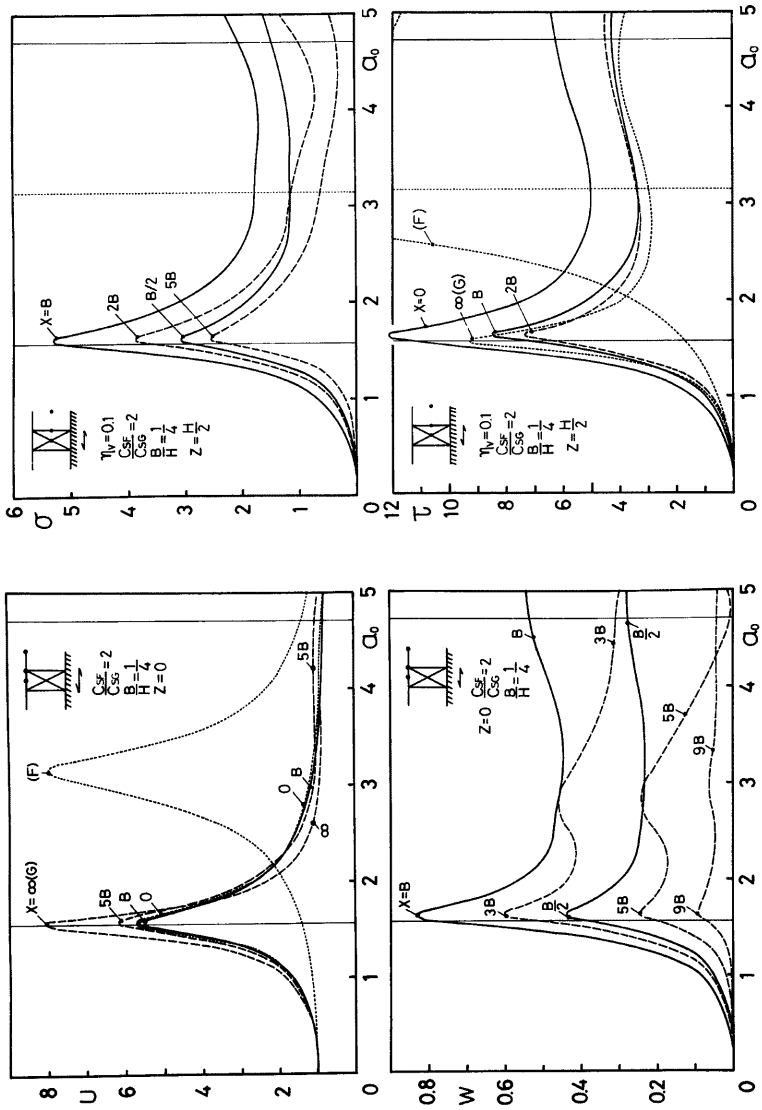


Fig. 15. Effects of position.
Response curves, "P-SV-type" and "bed rock excitation".

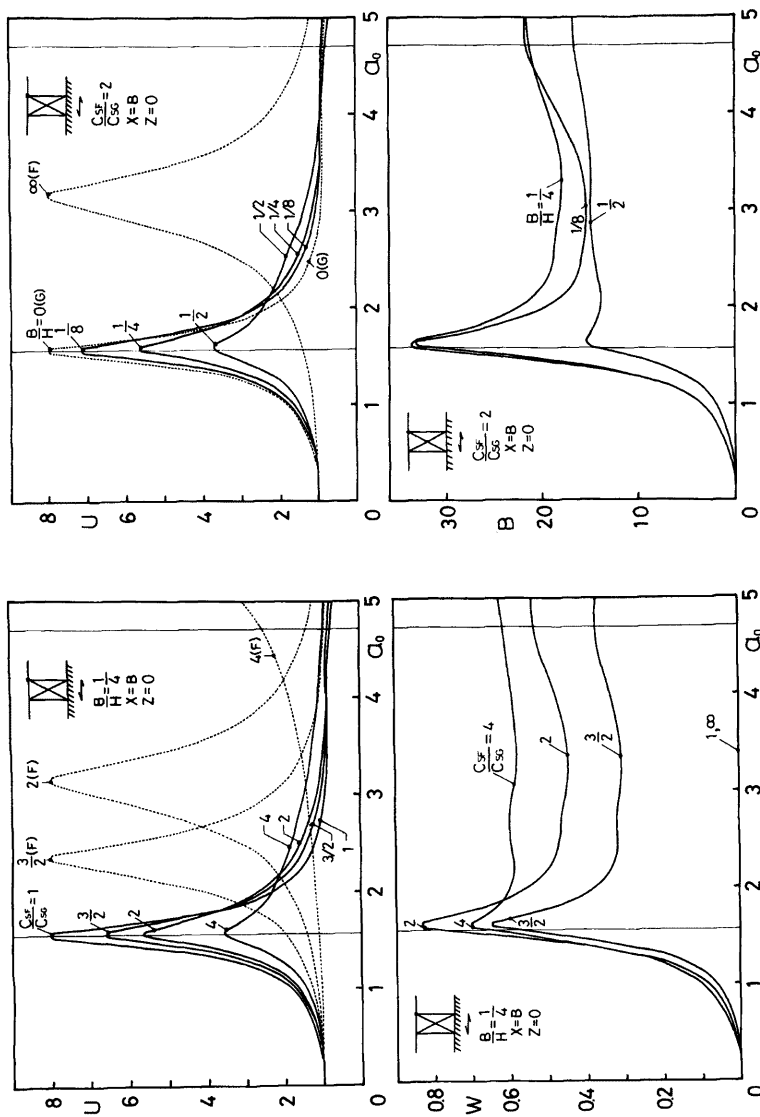


Fig. 16. Effects of stiffness ratio on displacements. Response curves, "P-SV-type" and "bed rock excitation".

当するところで、垂直変位の大きい表面波のモードが卓越するところであろう。

3) 応力の応答曲線の特徴：垂直・剪断応力とも互いによく似た応答特性をもち、*SH* 型の剪断応力のときと共通する傾向をもっている。剪断応力は構造物内でやや独自の特徴がみられるものの、大勢は地盤に固有な特性にほとんど支配されているのに対して、相互作用の結果として生起する垂直応力の大きさは剪断応力に匹敵するオーダーをもちその影響を無視できないこと、またこれは垂直境界面で最大となり、境界面より離れても相当遠くまで相互作用の影響として伝わっていくことに注意しなければならない。

4) 横波速度比と巾高比の影響

横波速度比 c_{sF}/c_{sG} と巾高比 B/H が垂直境界面の変位の応答曲線に及ぼす影響をそれぞれ Fig. 16 と Fig. 17 に示した。ただし Fig. 17 で垂直変位を表す図の縦軸には構造物の上端部 $\{X=B, Z=0\}$ の点の変位を基礎半巾 B で除した平均回転角の無次元量 $\theta = W/B \cdot H/V_g$ をとっている。

1) 水平変位の性質：先に述べた応答の空間分布やこれらのパラメータの影響を含め、全体を通じて *SH* 型のときの水平変位と極めてよく似た性質をもっている。したがって、4.2 で変位に関して述べた特徴がこの場合もほとんどそのままではまる。

2) 垂直変位の性質：構造物の剛性が低いほど生じるその垂直変位が大きい、共振巾巾ではやや様相を異にし、これを最大にするような地盤と構造物の剛性比が存在する。また一般に根入れ巾の広い構造物ほどその端部に生じる垂直変位は大きい、図示のような平均回転角という見方をするこれを最大にするような構造物の巾高比が存在する。

5. む す び

本章の前半は、多層粘弾性地盤中に根入れされた粘弾性の成層連続体に抽象した基礎構造物を対象に、その振動特性を求める解析法を論じたものである。振動特性の表現において、構造物系と地盤系の 1 次元 *SH* 波の波動伝達関数を定常解におき、各系での表面波を意味する固有関数展開によって相互作用の効果を表わし、基礎方程式と連成系の水平面に關わる境界条件を予め満足させる。そして、このような展開による解の完備性の有無に応じて、残る垂直根入れ面での連続条件を満たすよう、固有関数の直交性を適用して原理的には厳密解が得られる方法とさらに変分法を併用する近似解法の 2 つを提示した。後半では地盤・構造物とも単一の層からなる基本的な層構成の例について、厳密解としての振動特性の解析的な表現が導かれる *SH* 型入力の場合と、連立方程式を解いて数値的に解を定める *P-SV* 型入力の場合を扱い、本解法の有用性を示した。数値解析から得られた結論を要約すると次のようになる。

1) *SH* 型、*P-SV* 型に共通する特徴について

まず、基盤振動と頂部加振とは振動特性が全く異なる。基盤振動の場合には、一般に構造物の特性は励起されにくく、地盤固有の特性が卓越する。構造物のプロポーションや地盤との剛性比が変わっても共振点の位置はほとんど変わらず、振巾の大きさが系の性質に応じて増減するだけである。ただ根入れ巾が広がると構造物に固有の特性が現われるようになる。一方頂部加振の場合では、連成系としての特性が強く励起され、系の性質を定めるパラメータの値によって応答特性が大きく変動する。次に、相互作用の効果は 1 次の共振点の近傍で最も強く現われ、構造物との境界面から相当離れた地盤内にもこの影響が伝播している。振動数の高い領域に入るとともにこの効果は次第に小さくなり、また地盤の内部減衰作用が顕著になるため構造物の周辺から離れた地盤へは伝播しないようになる。最後に、応答曲線の形状や性質には *SH* 型と *P-SV* 型の間にある種の共通性がみられる。たとえば *SH* 型の変位応答と *P-SV* 型の水平変位の間や面型の応力応答の間には類似の性状を認めることができる。

2) *SH* 型の場合の特徴について

実際に建設される基礎構造物の性状として一般的な巾より背が高くその等価な剛性が地盤剛性より大きいような場合については、構造物内に生じる変位応答は水平方向にほぼ一様な分布をもち、深さ方向には純剪

断型の分布に近いので、構造物を1次元の剪断型連続体としてモデル化することが可能であろう。相互作用の結果として生じる構造物の垂直面に作用する剪断応力（土圧応力）は入力形式によって性質を異にし、基盤振動の場合には構造物が剛なほどまた根入れ巾が広いほど大きいのが、頂部加振ではこの傾向が逆になる。

3) $P\cdot SV$ 型の場合の特徴について

2)の項で述べたような通常みられる基礎構造物にあっては、構造物内に生じる水平変位の分布は水平方向にほぼ一様、垂直変位の分布は直線形に近いので、1次元の曲げ剪断型連続体としての構造物のモデル化が可能であろう。文献^{5)~7)}の系列の研究で無視されている垂直変位に注目すると、これは相互作用の結果として生じるものであり、1次の共振点の近傍では水平変位よりオーダーがひとつ小さいが、高振動数域では減衰の程度が少ないので両者の大きさが近接し、その影響を無視できなくなる。また同じく相互作用の結果として現われる構造物の垂直境界面に働く垂直応力は剪断応力と同じオーダーを持ち、連成系の応答に重要な役割を果たしている。

4) 減衰機構による相異について

複素剛性の虚数部が振動数に比例する Voigt 型と常数になる complex 型の応答特性の比較によれば、連成系の主要な共振点の近傍で減衰係数の大きさを一致させておけば、両型の振動特性の間に特徴的な相異は生じない。これは主として内部減衰より散逸減衰の効果が系の特性を強く支配しているからであろう。しかし、減衰性の大きさの異なる振動数の高い領域になお顕著な共振現象が現われるときには減衰機構による応答特性の相異が無視できなくなる。

5) 2次元 Rayleigh 波の固有値の性質について

Rayleigh 波の減衰性を表わす wave number の虚数部の大きさによってモード次数の分類を行なうと、固有値すなわち振動数の関数として表現される wave number がある規則性をもって組になって現われる。上述の減衰機構が異なってもこのような固有値の特性は変わらないが、wave number の振動数依存性に差が生じ、とくに高振動数領域では機構による相異が顕著になる。

参 考 文 献

- 1) Lysmer, J. and R. L. Kuhlemeyer: Finite Dynamic Model for Infinite Media, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 95, No. EM4, 1969, pp. 859-877.
- 2) Lysmer, J. and L. A. Drake: A Finite Element Method for Seismology, Methods in Computational Physics (Edited by B. A. Bolt et al.), Academic Press, 1972, pp. 181-216.
- 3) Kausel, E., J. M. Roësset and G. Waas: Dynamic Analysis of Footings on Layered Media, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 101, No. EM5, 1975, pp. 679-693.
- 4) 清水信行・田治見宏・山本鎮男・河田淑治・桑折能彦：薄層要素による地中深く埋めこまれた原子炉建物の地震応答解析，第4回日本地震工学シンポジウム講演集，1975，pp. 297-304.
- 5) 田治見宏：深い基礎を有する構造物の地震応答について，日本地震工学シンポジウム講演集，1966，pp. 255-260.
- 6) Goto, H., K. Toki and T. Akiyoshi: Vibrational Analysis of Foundation Structures with Elliptic Cross Sections in Elastic Ground, Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, Vol. 18, Part 1, No. 134, 1968, pp. 59-88.
- 7) 三浦賢治：長方形に近い断面をもつ地中基礎構造物の振動特性について（その1），日本建築学会論文報告集，第232号，1975，pp. 71-79.
- 8) Thau, S. A. and A. Umek: Transient Response of a Buried Foundation to Antiplane Shear Waves, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 40, No. 4, 1973, pp. 1061-1066.
- 9) Thau, S. A. and A. Umek: Coupled Rocking and Translating Vibrations of a Buried Foundation, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 41, No. 3, 1974, pp. 697-702.
- 10) Luco, J. E.: Dynamic Interaction of a Shear Wall with the Soil, Journal of the Engineering Mecha-

- tics Division, ASCE, Vol. 95, No. EM2, 1969, pp. 333-346.
- 11) Trifnac, M. D.: Interaction of a Shear Wall with the Soil for Incident Plane SH-Waves, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 62, No. 1, 1972, pp. 63-83.
 - 12) Novak, M. and K. Sacks: Torsional and Coupled Vibrations of Embedded Footings, International Journal of Engineering Mechanics and Structural Dynamics, Vol. 2, No. 1, 1973, pp. 11-33.
 - 13) Alsop, L. E.: Transmission and Reflection of Love Waves at a Vertical Discontinuity, Journal of Geophysical Research, Vol. 71, No. 16, 1966, pp. 3969-3984.
 - 14) McGarr, A. and L. E. Alsop: Transmission and Reflection of Rayleigh Waves at Vertical Boundaries, Journal of Geophysical Research, Vol. 72, No. 8, 1967, pp. 2169-2180.
 - 15) Nakamura, K.: Normal Mode Waves in an Elastic Plate, I, II, III, Sci. Rep. Tohoku Univ., Ser. 5, Vol. 12, No. 3, 1961, pp. 149-158, 214-251.
 - 16) Seed, H. B. and I. M. Idriss: Soil Moduli and Damping Factors for Dynamic Response Analysis, Report No. EERC 70-10, University of California, Berkeley, 1970.
 - 17) 嶋 悦三・工藤一嘉: 軟弱な地層における S 波の減衰, 第3回日本地震工学シンポジウム講演集, 1970, pp. 269-276.
 - 18) Veletsos, A. S. and V. V. D. Nair: Seismic Interaction of Structures on Hysteretic Foundations, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 101, No. ST1, 1975, pp. 109-129.
 - 19) 小堀鐸二・南井良一郎・鈴木 有: 不均質粘弾性地盤の波動伝達特性について, 京都大学防災研究所年報, 第13号 A, 1970, pp. 213-232.
 - 20) 小堀鐸二・南井良一郎・鈴木 有: 成層構造をもつ基礎地盤の動特性, 京都大学防災研究所年報, 第19号 B, 1976, pp. 167-217.

APPENDIX 固有関数の直交性

[1] SH 型の場合

$\{v, a_{yz}\}$ に関する m 次の固有関数 $\{\phi^m(z), \sigma^m(z)\}e^{i(a_{00}t - \zeta^m z)}$ は (3.3) および (3.4) 式から構成される次の無次元運動方程式を満足する。

$$\frac{d\sigma^m}{dz} + \mu_v \{a_{00}^2 - (\zeta^m)^2\} \phi^m = 0, \quad \sigma^m = \mu_v \frac{d\phi^m}{dz} \quad \dots\dots\dots (A. 1)$$

n 次の固有関数についても同様の式が成立つから, 前者に ϕ^n , 後者に ϕ^m を乗じて両者の差をつくると

$$\frac{d}{dz} \{ \sigma^m \phi^n - \sigma^n \phi^m \} = \{ (\zeta^m)^2 - (\zeta^n)^2 \} \mu_v \phi^m \phi^n \quad \dots\dots\dots (A. 2)$$

両辺を z について地表面から基盤面まで積分すれば, 左辺の関数は連続であるから

$$\left[\sigma^m \phi^n - \sigma^n \phi^m \right]_0^1 = \{ (\zeta^m)^2 - (\zeta^n)^2 \} \int_0^1 \mu_v \phi^m \phi^n dz \quad \dots\dots\dots (A. 3)$$

ところが, 境界値問題として与えられた条件より

$$\sigma^r|_{z=0} = \phi^r|_{z=1} = 0 \quad [r = m, n] \quad \dots\dots\dots (A. 4)$$

が成立つから左辺の積分は零となり, $m \neq n$ のとき次の関係が得られる。

$$\int_0^1 \mu_v \phi^m \phi^n dz = 0 \quad [m \neq n] \quad \dots\dots\dots (A. 5)$$

ここで σ_{yz} に関する固有関数 $\tau^r(z) = -i\zeta^r \mu_v \phi^r(z)$ を用いて固有関数 ϕ^r を

$$-i\zeta^r \int_0^1 \mu_v (\phi^r)^2 dz = \int_0^1 \phi^r \tau^r dz = 1 \quad [r = 1, 2, \dots] \quad \dots\dots\dots (A. 6)$$

のように規格化すると, 固有関数は次の正規直交条件を満足する。

$$\int_0^1 \phi^m \tau^n dz = \delta_{mn} \quad [\delta_{mn}; \text{クロネッカーのデルタ}] \quad \dots\dots\dots (A. 7)$$

[2] P・SV 型の場合

$\{u, w\}$ に関する m 次の固有関数 $\{\phi^m(z), \psi^m(z)\}e^{i(a_{00}t - \zeta^m z)}$ は (3.3) および (3.4) 式から構成されるマ

トリックス表現の次の無次元運動方程式を満足する。

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dz^2} & -\left(\frac{1}{n_v^2}-1\right)i\zeta^m \frac{d^2}{dz^2} \\ -\left(\frac{1}{n_v^2}-1\right)i\zeta^m \frac{d}{dz} & \frac{1}{n_v^2} \cdot \frac{d^2}{dz^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^m \\ \psi^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(\zeta^m)^2}{n_v^2} - a_{0v}^2 & 0 \\ 0 & (\zeta^m)^2 - a_{0v}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^m \\ \psi^m \end{bmatrix} \quad (\text{A. 8a})$$

$$i. e., A^m C^m = B^m C^m \quad (\text{A. 8b})$$

n 次の固有関数についても同様の式が成立つから、この2式より次式をつくる。

$$(C^m)^T A^n C^n - (C^n)^T A^m C^m = (C^m)^T B^n C^n - (C^n)^T B^m C^m \quad (\text{A. 9})$$

ここに T は転置行列を意味する。左辺と右辺の表現を (A. 8) 式より具体的に求めると

$$(C^m)^T A^n C^n - (C^n)^T A^m C^m = \left\{ (\zeta^n)^2 - (\zeta^m)^2 \right\} \left\{ \frac{1}{n_v^2} \phi^m \phi^n + \psi^m \psi^n \right\} \quad (\text{A. 10a})$$

$$\begin{aligned} (C^m)^T B^n C^n - (C^n)^T B^m C^m &= \left(\phi^m \frac{d^2 \phi^n}{dz^2} - \phi^n \frac{d^2 \phi^m}{dz^2} \right) + \frac{1}{n_v^2} \left(\phi^m \frac{d^2 \psi^n}{dz^2} - \phi^n \frac{d^2 \psi^m}{dz^2} \right) \\ &\quad - i \left(\frac{1}{n_v^2} - 1 \right) \left\{ \zeta^n \left(\phi^m \frac{d \psi^n}{dz} + \psi^m \frac{d \phi^n}{dz} \right) - \zeta^m \left(\phi^n \frac{d \psi^m}{dz} + \psi^n \frac{d \phi^m}{dz} \right) \right\} \quad (\text{A. 10b}) \end{aligned}$$

さて $\{\sigma_{xz}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}\}$ に関する m 次の固有関数を $\{\sigma, \varepsilon, \tau\} e^{i(a_{0v}t - \zeta^m z)}$ とすれば

$$\begin{aligned} (C^m)^T A^n C^n - (C^n)^T A^m C^m &= \frac{1}{\mu_v} \cdot \frac{d}{dz} \left(\phi^m \tau^n - \phi^n \tau^m + \psi^m \varepsilon^n - \psi^n \varepsilon^m \right) \\ &\quad - i(\zeta^m + \zeta^n) \left\{ \left(\frac{1}{n_v^2} - 2 \right) \left(\phi^m \frac{d \psi^n}{dz} - \phi^n \frac{d \psi^m}{dz} \right) + \left(\psi^m \frac{d \phi^n}{dz} - \psi^n \frac{d \phi^m}{dz} \right) \right\} \quad (\text{A. 11}) \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^r}{\mu_v} &= -\frac{i\zeta^r}{n_v^2} \phi^r + \left(\frac{1}{n_v^2} - 2 \right) \frac{d \psi^r}{dz}, \quad \frac{\varepsilon^r}{\mu_v} = \frac{1}{n_v^2} \cdot \frac{d \phi^r}{dz} - \left(\frac{1}{n_v^2} - 2 \right) i \zeta^r \phi^r, \\ \frac{\tau^r}{\mu_v} &= \frac{d \phi^r}{dz} - i \zeta^r \psi^r \quad [r = m, n] \quad (\text{A. 12}) \end{aligned}$$

なる関係が得られるから、(A. 10)～(A. 12) 式を (A. 9) 式に代入すると次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (\phi^m \tau^n - \phi^n \tau^m + \psi^m \varepsilon^n - \psi^n \varepsilon^m) - i(\zeta^m + \zeta^n) (\phi^m \sigma^n - \phi^n \sigma^m + \psi^m \tau^n - \psi^n \tau^m) \\ = \mu_v [\{ (C^m)^T A^n C^n - (C^n)^T A^m C^m \} - \{ (C^m)^T B^n C^n - (C^n)^T B^m C^m \}] = 0 \quad (\text{A. 13}) \end{aligned}$$

上式を地表面から基盤面まで積分すると、左辺第1項の () 内の関数は連続であるから

$$\left[\phi^m \tau^n - \phi^n \tau^m + \psi^m \varepsilon^n - \psi^n \varepsilon^m \right]_0^1 = i(\zeta^m + \zeta^n) \int_0^1 [\phi^m \sigma^n - \phi^n \sigma^m + \psi^m \tau^n - \psi^n \tau^m] dz \quad (\text{A. 14})$$

また与えられた境界値問題から

$$\{\varepsilon^r, \tau^r\}_{r=0} = \{\phi^r, \psi^r\}_{r=1} = \{0, 0\} \quad [r = m, n] \quad (\text{A. 15})$$

が成立つから左辺の積分は零となり、 $\zeta^m \neq -\zeta^n$ のとき次の関係が得られる。

$$\int_0^1 [\phi^m \sigma^n - \phi^n \sigma^m + \psi^m \tau^n - \psi^n \tau^m] dz = 0 \quad [\zeta^m \neq -\zeta^n] \quad (\text{A. 16})$$

一方、(A. 8a) 式において ζ^m と ϕ^m にマイナスイ号を付しても (3.3) と (3.4) の原方程式と同じものに帰着するから、これを

$$\bar{A}^m \bar{C}^m = \bar{B}^m \bar{C}^m \quad (\text{A. 17})$$

で表わし、上式と (A. 8b) 式から

$$(\bar{C}^m)^T \bar{A}^n \bar{C}^n - (C^n)^T \bar{A}^m \bar{C}^m = (\bar{C}^m)^T \bar{B}^n \bar{C}^n - (C^n)^T \bar{B}^m \bar{C}^m \quad (\text{A. 18})$$

をつくると、前と同様な過程にしたがって次の関数式を導くことができる。

$$\int_0^1 [\phi^m \sigma^n + \phi^n \sigma^m - \psi^m \tau^n - \psi^n \tau^m] dz = 0 \quad [\zeta^m \neq \zeta^n] \quad (\text{A. 19})$$

$\zeta^m \neq \pm \zeta^n$ の条件のもとで (A. 16) と (A. 19) 式の和をとると

$$\int_0^1 [\phi^m \sigma^n - \phi^n \sigma^m] dz = 0 \quad [\zeta^m \neq \pm \zeta^n] \dots\dots\dots (A. 20)$$

ここで固有関数の規格化を

$$\int_0^1 [\phi^r \sigma^r - \phi^r \sigma^r] dz = 1 \quad [r=1, 2, \dots] \dots\dots\dots (A. 21)$$

のように行なえば、一般に固有値は $\pm \zeta^m$ なる形をもって出現するから、固有関数は次の正規直交条件を満足する。

$$\int_0^1 [\phi^m \sigma^n - \phi^n \sigma^m] dz = \delta_{mn} \dots\dots\dots (A. 22)$$