

成層構造をもつ基礎地盤の動特性

小堀 鐸二・南井 良一郎・鈴木 有

DYNAMIC CHARACTERISTICS OF A LAYERED SUB-SOIL GROUND

By *Takuji KOBORI, Ryoichiro MINAI and Tamotsu SUZUKI*

Synopsis

Vibrations of a massless rectangular foundation on a viscoelastic multi-layered medium are investigated for the cases where the vertical, horizontal or rotational exciting force is acting on the foundation. The dynamic characteristics of such foundation-ground system are represented as the form of "Dynamical Ground Compliance" which means the complex transfer function between the foundation displacement and the exciting force. Some numerical examples are shown in graphical form for the three kinds of typical ground models and a model based on the data for an actual soft ground. The effects of surface waves, wave diffusions and dissipations, resonance phenomena and parameters defining the coupled system are examined.

1. ま え が き

1° 研究の目的

構造物が地震動の作用を受けるとき何らかの形でその立地する地盤の影響をうけながら挙動するが、地盤と構造物が共存し連成系を構成することによる振動時の連成効果を一般に“動的相互作用”と呼んでいる。このような動的相互作用の効果を明らかにするには、まず構造物を支持するその周辺地盤——これを“基礎地盤”と呼ぶことにしよう——の動特性を明らかにしなければならない。

ここでは構造物の断面・寸法に較べて基礎部分の根入れが比較的残の場合、言換えると、構造物が直接地表面にのるとみなしうような場合を対象に、その基礎地盤の基本的な動特性を明らかにする。できるだけ実際の状態に近い基礎地盤のモデルを設定し、その地表面上の基礎構造物に各種の加振力が作用する振動問題を波動論に立脚して解析し、基礎の変位応答と加振力の比の形で両者の関係を規定する伝達関数を求める。後に詳述するように、この関数は基礎地盤系の動特性を総括的に表現する基礎資料としての性格をもつと同時に、連成系の定常あるいは非定常ないろいろな振動問題に応用しうる性格をもっているので、これを新しく“Dynamical Ground Compliance”と定義する。本論の目的は、既往の諸研究とは異なる観点と手法によりこの Dynamical Ground Compliance の一般的な解析的表現を導き、いくつかの典型的な層構成の場合について数値解析を行ない、基礎地盤系の動特性に関する基本的な諸性質を把握するとともに、連成系の動的相互作用解明のための基礎資料を得ることにあり、この系列に属する諸研究のひとつの総括を試みようとするねらいをもっている。

2° 既往の研究設定

上部構造に関する研究に較べると、地盤あるいは地盤を含む構造物との連成系の振動特性や応答解析の研究が最近までやや立遅れた状態にあったのは、理論面では地盤を連続体とする境界値問題の数理的取扱いと数値解析上の困難が主因をなしているように思われる。地盤の振動モデルを構成する古典的な方法ではこのような困難を避けるために、地盤と下部構造（地下室や基礎、杭など）を単純なモデルに抽象し、半経験的に特性値を与えて連成系の応答を求める方法が一般によく行なわれてきた。下部構造をひとつの質点に地盤を

バネとダッシュポットに抽象するという全体を 1 自由度系のモデルで模擬する方法や、基礎周辺の一部の土が下部構造と一体になって振動するという考えに基づき、周辺地盤の動的な効果を付加質量として抽象する方法などは、その代表的なものである。しかし、モデルに特性値を与える方法に半経験的な要素が多く合理性を欠くので、このように最初から a priori に単純なモデルを設定してしまうのでは、動的相互作用の効果を定量的に予測することが難しいと思われる。

これに対して、地盤を拡がり境界をもつ連続体としてとらえ、これを構成する媒体を弾性体あるいは粘弾性体と想定し、所謂波動論に基礎をおいてその動特性を明らかにしようとする研究は、地盤モデルの構成においてより進んだ段階の系列にあるといえよう。1936 年の著名な E. Reissner の研究¹⁾²⁾を嚆矢として、地表面上の基礎が垂直・水平・回転・振りの各モードで振動する問題を、2 次元あるいは 3 次元波動論によって解析した研究が、1950 年代から 60 年代にかけて数多く行なわれた。この種の研究が単に基礎構造物の強制振動の問題へ適用されるにとどまらず、地震動の作用を受ける基礎地盤と構造物の動的相互作用を解明する基礎研究としての意義が認識されるようになって [たとえば Y. Sato et al.³⁾] 最近もなおこの系列に属する研究論文が報告されている [たとえば V. A. Veletsos and B. Verbic⁴⁾]。

この種の研究では解析を数理的に取扱いやすい領域に持込むために、ほとんどのものがその対象を完全弾性体からなる半無限地盤上の円形基礎の場合に限定してきた [T. Y. Sung⁵⁾, P. M. Quinlan⁶⁾, I. Toriumi³⁾⁷⁾, R. N. Arnold et al.⁸⁾, G. N. Bycroft⁹⁾, H. Tajimi¹⁰⁾¹¹⁾ など]。しかし、近年の研究のなかには、こうしたモデル化の制約を打破り、基礎と地盤の実情により近いモデルを指向する、いくつかの発展をみることができ。たとえば、いずれも円形基礎の振動問題ではあるが、通常の地盤に存在する地層構造を考慮して、R. N. Arnold, G. N. Bycroft and G. B. Warburton⁸⁾⁹⁾¹²⁾ は剛基盤上の表層地盤を、また J. Kasio¹³⁾ は 2 層構造の場合をそれぞれ対象にしているし、一方、T. M. Lee¹⁴⁾ は地盤を構成する媒体に内部減衰機構を導入し、粘弾性体からなる半無限地盤の場合を扱っている。また、構造物の基礎形状として一般的な長方形基礎の場合を解析した H. Tajimi¹¹⁾ と W. T. Thomson and T. Kobori¹⁵⁾ の研究や、任意形状の場合を扱った J. Elorduy et al.¹⁶⁾ の研究がある。

地表面上の基礎の振動を数理的に厳密に解析すると、境界条件が変位と応力の組合せで表現される所謂混合境界値問題に帰着し、その解析的な解を導くのは一般に極めて困難となる。そこで、上述の諸研究は、文

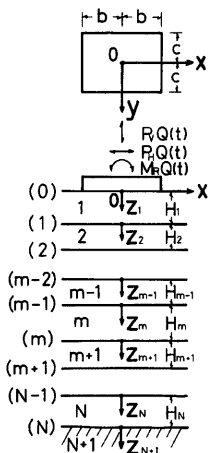


Fig. 1. Geometry of Foundation and Layered Medium.

献⁶⁾ の場合を除き、いずれも基礎下に生じる未知の反力に室内実験の結果などを考慮して、適当な分布形 (たとえば一様分布・三角形分布・放物線分布・剛板の下に静的に生じる反力分布など) を仮定し、地表面の境界条件を応力で統一して記述することにより、混合境界値としての困難を避けるという方法をとってきた。しかし、一方では、E. Reissner and H. F. Sagoci¹⁷⁾¹⁸⁾ によるねじり振動の解析に端を発し、半無限体上のあるいは剛板上にのる単一層上の円筒の振動を混合境界値問題として解析的にできるだけ正当に扱おうとする試みが、応用力学としての興味や機械工学の分野からのアプローチを含めて、最近多くなされている [この研究の系列は J. Bielak の文献¹⁹⁾ に詳しい]。また、工学的な観点から近似値を得ようとする試みもいくつか報告されている [J. Elorduy et al.¹⁶⁾, J. Lysmer²⁰⁾]。

3° 問題の設定

通常構造物の基礎は長方形断面をもっており、その周辺地盤はいくつかの層を成し、各層の境界面はほぼ水平とみなして差支えない場合が多い。また地盤中の層を構成する土には本来何らかの形で内部減衰の機構が存在する。その機構自体は複雑で未知の部分が多く、

統一的な理論モデルを構成しうる段階には至っていないが、波動論的な取扱いを可能とするには、まず“粘弾性”という観点からこれを表現する立場が妥当であろう。このような前提のもとに、本論では、できるだけ現実に近いモデルとして、等質等方な線形粘弾性体で構成され、3次元の揺がりと水平な境界面をもつ成層地盤を想定する。そして、Fig. 1 に示すように、その地表面上の自重の影響を無視した剛体の長方形基礎に、構造物振動の主要なモードである垂直・水平または回転方向の加振力が直接作用する振動問題を解析する。すなわち、W. T. Thomson and T. Kobori¹⁵⁾が扱った、半無限完全弾性地盤の地表面の長方形領域に加振力が一様な分布をもって作用する問題を発展させたものである。

4° 解析手法上の特徴と本論の構成

上に設定した境界値問題の解析は(粘)弾性波動論に立脚し、まず文献¹⁵⁾の手法にしたがい多重フーリエ変換を導入して、3次元粘弾性体に関する運動方程式の基本解を導いた。次に、デジタル・コンピュータによる演算を前提にして、多層地盤の表面波の振動数方程式を構成するために工夫された“Thomson-Haskell 法”²¹⁾を多層地盤の構成式に適用し、その変位・応力の一般解をベクトル・マトリックス表現で求めた。基礎方程式から基本解と一般解を導く過程を第2節に示した。また、地表面の境界条件が混合境界値になる困難を避けるため、ここでも基礎下に生じる圧力分布の形を仮定し、従来用いられてきた分布形をすべて含んだやや一般的な形式で表現した。地表面における境界条件の導入と同じ地表面での変位成分の解の表現を第3節に示した。こうして得られた結果は剛体基礎が地表面に密着するという条件をもはや厳密には満足しないので、基礎面内の一点の変位で基礎の変位を代表する方法や基礎面全体で応答変位を平均する方法など基礎変位の応答評価の方法をいくつか設定した。なお、このような圧力分布形と応答評価法の影響については、数値解析例のなかで量的にも詳しく検討している。最終結果はすべて前述した“Dynamical Ground Compliance”の形で表わすが、その静的な場合の表現をとくに“Static Ground Compliance”と定義する(以下では簡単のため D. G. C. および S. G. C. とそれぞれ略記する)。D. G. C. および S. G. C. の詳しい定義とその一般的な解析的表現を第4節に示した。最後に第5節で、典型的な層構成のいくつかの特別な場合について解の表現を具体的に示すとともに、数値解析例を第6節で扱い、層構成の異なる4つの典型例と実測値を用いてモデル化した具体例についての解析結果をまとめ、表面波の性質とその寄与の程度、減衰機構や共振現象、系を規定する諸種のパラメータや加振型の影響などについて詳しく検討した。

2. 基礎方程式と一般解の表現

2.1 線形粘弾性体の運動方程式とその基本解

直交座標 x, y, z に関する等質等方な粘弾性体の運動方程式は変位ベクトル $\{u, v, w\}$ に対して、次式で表わされる。

$$\left[\lambda_v \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) + \mu_v \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \left\{ \frac{\partial D}{\partial x}, \frac{\partial D}{\partial y}, \frac{\partial D}{\partial z} \right\} + \left[\mu_v \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \{u, v, w\} = \{0, 0, 0\} \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

ここに

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}; \text{ dilatation, } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \text{ ラプラスの演算子 } \dots\dots\dots (2.2)$$

また、 $\lambda_v(\partial/\partial t)$, $\mu_v(\partial/\partial t)$; 線形粘弾性を表わす演算子, ρ ; 密度, t ; 時間, である。上に $\{x, y, t\}$ に関する3重フーリエ変換およびその逆変換

$$\tilde{f}(\beta, \gamma, z, \omega) = \mathfrak{F}^3[f(x, y, z, t)] = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z, t) e^{-i(\beta x + \gamma y + \omega t)} dx dy dt \quad \dots\dots\dots (2.3a)$$

$$f(x, y, z, t) = \mathfrak{F}^{-3}[\tilde{f}(\beta, \gamma, z, \omega)] = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\beta, \gamma, z, \omega) e^{+i(\beta x + \gamma y + \omega t)} d\beta d\gamma d\omega \quad \dots\dots\dots (2.3b)$$

を導入すると、変位および応力成分が次式のように求められる。

$$\begin{cases}
 \bar{u} = \beta(A_1 C_{1z} + B_1 S_{1z}) + (A_2 C_{2z} + B_2 S_{2z}) \\
 \bar{v} = \gamma(A_1 C_{1z} + B_1 S_{1z}) + (A_3 C_{2z} + B_3 S_{2z}) \\
 i\bar{w} = \alpha_1(A_1 S_{1z} + B_1 C_{1z}) + \frac{\beta}{\alpha_2}(A_2 S_{2z} + B_2 C_{2z}) + \frac{\gamma}{\alpha_2}(A_3 S_{2z} + B_3 C_{2z})
 \end{cases} \dots\dots\dots(2.4a)$$

$$\begin{cases}
 \bar{\tau}_{xz} = \mu_v(i\omega) \left[2\alpha_1 \beta(A_1 S_{1z} + B_1 C_{1z}) + \frac{\beta^2 + \alpha_2^2}{\alpha_2}(A_2 S_{2z} + B_2 C_{2z}) + \frac{\beta\gamma}{\alpha_2}(A_3 S_{2z} + B_3 C_{2z}) \right] \\
 \bar{\tau}_{yz} = \mu_v(i\omega) \left[2\alpha_1 \gamma(A_1 S_{1z} + B_1 C_{1z}) + \frac{\beta\gamma}{\alpha_2}(A_2 S_{2z} + B_2 C_{2z}) + \frac{\gamma^2 + \alpha_2^2}{\alpha_2}(A_3 S_{2z} + B_3 C_{2z}) \right] \\
 i\bar{\sigma}_z = \mu_v(i\omega) \left[\{2\alpha_2^2 + \kappa_v^2(\omega)\}(A_1 C_{1z} + B_1 S_{1z}) + 2\beta(A_2 C_{2z} + B_2 S_{2z}) + 2\gamma(A_3 C_{2z} + B_3 S_{2z}) \right]
 \end{cases} \dots\dots\dots(2.4b)$$

ここに

$$\begin{cases}
 C_{1z} = \cosh(\alpha_1 z), \quad C_{2z} = \cosh(\alpha_2 z), \quad S_{1z} = \sinh(\alpha_1 z), \quad S_{2z} = \sinh(\alpha_2 z) \\
 \alpha_1^2 = \beta^2 + \gamma^2 - h_v^2(\omega), \quad \alpha_2^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \kappa_v^2(\omega) \\
 h_v(\omega) = \frac{\omega}{c_{dv}(\omega)}, \quad c_{dv}(\omega) = \sqrt{\frac{\lambda_v(i\omega) + 2\mu_v(i\omega)}{\rho}}, \quad \kappa_v(\omega) = \frac{\omega}{c_{sv}(\omega)}, \quad c_{sv}(\omega) = \sqrt{\frac{\mu_v(\omega)}{\rho}} \\
 \{\lambda_v(i\omega), \mu_v(i\omega)\} = \mathfrak{F}^s \left[\left\{ \lambda_v \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), \mu_v \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right\} \right]; \quad \text{ラ-メの複素定数}
 \end{cases} \dots\dots\dots(2.5)$$

また, $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$; 境界条件より定まる未定定数, である。

2.2 多層粘弾性地盤に対する一般解の表現

第 m 層の媒体に対する運動方程式の基本解を(2.4)式を用いて次のようなマトリックス表示に改める。

$$W_m = Q_m B_m = G_m \bar{Q}_m B_m \quad [m=1, 2, \dots, N+1] \dots\dots\dots(2.6)$$

ここに

$$\begin{cases}
 W_m = \{\bar{u}, \bar{v}, i\bar{w}, \bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}, i\bar{\sigma}_z\}_m^T; \quad \text{変位・応力ベクトル} \\
 B_m = \{A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, A_1\}_m^T; \quad \text{未定定数ベクトル} \\
 Q_m = G_m \bar{Q}_m; \quad \text{係数マトリックス}
 \end{cases} \dots\dots\dots(2.7)$$

また, $G_m; \mu_v(i\omega)$ のみからなる係数ベクトル, T ; 転置ベクトルを意味する記号, である。ここで, 変位・応力ベクトル W に関する記号を

$$\left. \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} (m-1) \\ \downarrow \\ m \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{ } \\ \downarrow \\ z_m \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{ } \\ \downarrow \\ W_m \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{ } \\ \downarrow \\ H_m \end{array} \\
 (m) \quad \begin{array}{c} \text{ } \\ \downarrow \\ z_m \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{ } \\ \downarrow \\ W_m \end{array}
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 W_{m,m-1} = W_m|_{z_m=0} \\
 \text{境界面を表わす添字} \\
 W_{m,m} = W_m|_{z_m=H_m} \\
 \text{層を表わす添字}
 \end{array} \dots\dots\dots(2.8)$$

のように定める。ここに, z_m ; 第 m 層の上境界面を原点に下方を正の向きとする局所鉛直座標, H_m ; 第 m 層の層厚, である。左辺のベクトルで前の添字は層を, 後のそれは境界面を示す。また, 添字がひとつのときはその層内の任意位置のベクトルであることを意味する。

(2.6)式の関係を用いると

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{m,m-1} = C_m B_m \\ W_{m,m} = D_m B_m \end{array} \right. \quad \text{ここに,} \quad \left\{ \begin{array}{l} C_m = Q_m|_{z_m=0} = G_m \bar{C}_m, \quad \bar{C}_m = \bar{Q}_m|_{z_m=0} \\ D_m = Q_m|_{z_m=H_m} = G_m \bar{D}_m, \quad \bar{D}_m = \bar{Q}_m|_{z_m=H_m} \end{array} \right. \dots\dots\dots(2.9)$$

上式より B_m を消去すると

$$W_{m,m} = D_m C_m^{-1} W_{m,m-1}, \quad \text{ここに,} \quad C_m^{-1} = \bar{C}_m^{-1} G_m^{-1} \dots\dots\dots(2.10)$$

いま $(m-1)$ 境界面, すなわち $z_m=0$, で上下 2 層が完全に密着しているとすれば

$$W_{m,m-1} = W_{m-1,m-1} \dots\dots\dots(2.11)$$

なる関係が成立つから(2.10)式は

$$W_{m,m} = E_m W_{m-1,m-1} \dots\dots\dots(2.12)$$

ここに

$$E_m = D_m C_m^{-1} = G_m \bar{E}_m G_m^{-1}, \quad \bar{E}_m = \bar{D}_m \bar{C}_m^{-1} \quad \dots (2.13)$$

(2.12)式を各境界面において繰返し適用すれば

$$W_{N,N} = F_N W_{1,0}, \quad \text{ここに, } F_N = E_N E_{N-1} \cdots E_1 \quad \dots (2.14)$$

最下層（第 $[N+1]$ 層）において半無限体としての境界条件を導入するために、この層の未定常数マトリックス B_{N+1} を求めておく。(2.9)および(2.11)式を参照して(2.14)式を変形すると

$$B_{N+1} = J_N W_{1,0}, \quad \text{ここに, } J_N = C_{N+1}^{-1} F_N \quad \dots (2.15)$$

最下層において応力および変位が無限遠方へのみ伝播するという半無限体としての条件（すなわち、 $z_{N+1} \rightarrow \infty$ で発散する $e^{+\alpha_1 z_{N+1}}$ および $e^{+\alpha_2 z_{N+1}}$ を含む項を除くこと）を導入すると

$$\{A_1, A_2, A_3\}_{N+1} = -\{B_1, B_2, B_3\}_{N+1} \quad \dots (2.16)$$

なる関係が得られるので、これを(2.15)式に代入して整理すれば

$$\begin{bmatrix} B_{N+1}^{(1)} \\ -B_{N+1}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_N^{(1)} J_N^{(2)} \\ J_N^{(3)} J_N^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{1,0}^{(d)} \\ W_{1,0}^{(s)} \end{bmatrix} \quad \dots (2.17)$$

ここに

$$B_{N+1}^{(1)} = \{A_2, A_3, -A_1\}_{N+1}^T, \quad W_{1,0}^{(d)} = \{\bar{u}, \bar{v}, i\bar{w}\}_{1,0}^T, \quad W_{1,0}^{(s)} = \{\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}, i\bar{\sigma}_z\}_{1,0}^T \quad \dots (2.18)$$

また $J_N^{(1)} \sim J_N^{(4)}$; J_N の 3×3 サブ・マトリックスである。

上式より $B_{N+1}^{(1)}$ を消去すると

$$[J_N^{(1)} + J_N^{(3)}] W_{1,0}^{(d)} + [J_N^{(2)} + J_N^{(4)}] W_{1,0}^{(s)} = O \quad \dots (2.19)$$

いまこの系の外力が地表面の応力ベクトルで規定されるとすれば、 $W_{1,0}^{(s)}$ を知って次式により地表面の変位ベクトルが求められる。

$$W_{1,0}^{(d)} = -[J_N^{(1)} + J_N^{(3)}]^{-1} [J_N^{(2)} + J_N^{(4)}] W_{1,0}^{(s)} \quad \dots (2.20)$$

一方、地表面が自由表面、すなわち $W_{1,0}^{(s)} = O$ とすれば、零でない変位ベクトル $W_{1,0}^{(d)}$ が存在するためには、(2.19)式より

$$[J_N^{(1)} + J_N^{(3)}] = 0 \quad \dots (2.21)$$

が成立しなければならない。(2.21)式はこの場合の振動数方程式で、これはまた多層線形粘弾性地盤の表面波の振動数方程式でもある²¹⁾。

次に、既知の $W_{1,0} = \{W_{1,0}^{(d)}, W_{1,0}^{(s)}\}$ を用いて(2.14)式を参照すると、各境界面の変位・応力ベクトルが

$$W_{m,m} = F_m W_{1,0}, \quad \text{ここに, } F_m = E_m E_{m-1} \cdots E_1 \quad [m=1, 2, \dots, N] \quad \dots (2.22)$$

で与えられ、さらに各層内の変位・応力ベクトルは、(2.6)、(2.9)および(2.11)式より

$$W_m = Q_m C_m^{-1} W_{m-1, m-1} \quad [m=1, 2, \dots, N+1] \quad \dots (2.23)$$

から求めることができる。

以上をまとめると、地表面の応力ベクトルが既知の外力として与えられたとき、地層内の任意点における変位・応力ベクトルの一般解を、(2.20)、(2.22)および(2.23)式をすべて含んだ形として次式のように表わすことができる。

$$W_m = Q_m C_m^{-1} E_{m-1} E_{m-2} \cdots E_1 W_{1,0} \quad [m=1, 2, \dots, N+1] \quad \dots (2.24a)$$

あるいは

$$W_m = Q_m T_{m-1} T_{m-2} \cdots T_1 C_1^{-1} W_{1,0} \quad [m=1, 2, \dots, N+1] \quad \dots (2.24b)$$

ここに

$$W_{1,0} = \begin{bmatrix} -[J_N^{(1)} + J_N^{(3)}]^{-1} [J_N^{(2)} + J_N^{(4)}] \\ W_{1,0}^{(s)} \end{bmatrix}, \quad T_m = C_{m+1}^{-1} D_m, \quad E_m = D_m C_m^{-1} \quad \dots (2.25)$$

(2.24a)式は層毎に分類した要素の積で表わした場合、また(2.24b)式は境界面毎の分類で表わした場合である。

なお上の解析中に現われてきた主要なマトリックスのエレメントをAPPENDIX Aに一括して示した。

2.3 特別な層構成の場合の一般解の表現

[1] 最下層の半無限体がない場合——多層板の場合

(2.14)式を変位と応力に関するものに分離して次のように変形する。

$$\begin{bmatrix} W_{N,N}^{(d)} \\ W_{N,N}^{(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_N^{(1)} F_N^{(2)} \\ F_N^{(3)} F_N^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{1,0}^{(d)} \\ W_{1,0}^{(s)} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

板の上下両面の応力ベクトル $W_{1,0}^{(s)}$ および $W_{N,N}^{(s)}$ が既知とすれば、板の上面の変位ベクトルは上の第2行の関係から

$$W_{1,0}^{(d)} = [F_N^{(3)}]^{-1} [W_{N,N}^{(s)} - F_N^{(4)} W_{1,0}^{(s)}] \quad (2.27)$$

で求められる。こうして $W_{1,0}$ が既知になるから、(2.22)および(2.23)式あるいは(2.24)式によって各位置での変位・応力ベクトルが求められる。なお、板の上下両面を自由表面としたときの振動数方程式は

$$|F_N^{(3)}| = 0 \quad (2.28)$$

で与えられる。

[2] 最下層の半無限体が剛体の場合——剛基盤の場合

剛基盤と接する境界面の変位ベクトル $W_{N,N}^{(d)}$ を零ベクトル、また地表面の応力ベクトル $W_{1,0}^{(s)}$ を既知とすれば、(2.26)式の第1行の関係から地表面の変位ベクトルが

$$W_{1,0}^{(d)} = -[F_N^{(1)}]^{-1} F_N^{(2)} W_{1,0}^{(s)} \quad (2.29)$$

のように求められる。こうして地表面の変位・応力ベクトルが既知になるから、[1]の場合と同様にして各位置での変位・応力ベクトルが求められる。なお、地表面を自由表面としたときの振動数方程式は次式で与えられる。

$$|F_N^{(1)}| = 0 \quad (2.30)$$

[3] $(\alpha_1 H)_m, (\alpha_2 H)_m \gg 1$ が成立つ場合——第 m 層の層厚に較べ波長が短い場合

(2.15)式中のマトリックス J_N は層毎に分類した要素の積で表わされたものであるが、これを次のように境界面毎の分類で表わすように変形しておく。

$$J_N = T_{N,m} J_{m-1} \quad (2.31)$$

ここに

$$T_{N,m} = T_N T_{N-1} \dots T_m, \quad J_{m-1} = T_{m-1} T_{m-2} \dots T_1 C_1^{-1}, \quad T_m = C_{m+1}^{-1} D_m \quad (2.32)$$

さて、 $(\alpha_1 H)_m, (\alpha_2 H)_m \gg 1$ のときには

$$\cosh(\alpha_1 H)_m \simeq \sinh(\alpha_1 H)_m, \quad \cosh(\alpha_2 H)_m \simeq \sinh(\alpha_2 H)_m \quad (2.33)$$

が成立つから、(2.9)式と APPENDIX A により、 D_m したがって T_m の左半分と右半分のエレメントが近似的に互いに等しくなることがわかる。故に(2.31)式を

$$\begin{bmatrix} J_N^{(1)} J_N^{(2)} \\ J_N^{(3)} J_N^{(4)} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} T_{N,m}^{(1)} & T_{N,m}^{(1)} \\ T_{N,m}^{(2)} & T_{N,m}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{m-1}^{(1)} J_{m-1}^{(2)} \\ J_{m-1}^{(3)} J_{m-1}^{(4)} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

のように表わすことができる。これより

$$\begin{cases} J_N^{(1)} + J_N^{(3)} \simeq [T_{N,m}^{(1)} + T_{N,m}^{(2)}] [J_{m-1}^{(1)} + J_{m-1}^{(3)}] \\ J_N^{(2)} + J_N^{(4)} \simeq [T_{N,m}^{(1)} + T_{N,m}^{(2)}] [J_{m-1}^{(2)} + J_{m-1}^{(4)}] \end{cases} \quad (2.35)$$

なる関係が得られるから、これを(2.20)式に代入すると、地表面の変位ベクトルは

$$W_{1,0}^{(d)} \simeq -[J_{m-1}^{(1)} + J_{m-1}^{(3)}]^{-1} [J_{m-1}^{(2)} + J_{m-1}^{(4)}] W_{1,0}^{(s)} \quad (2.36)$$

となる。右辺は(2.20)式において N の代わりに $m-1$ を代入したものに他ならない。すなわち、第 m 層が半無限体になった場合である。言換えると、外力が地表面に与えられる場合、第 m 層で $(\alpha_1 H)_m, (\alpha_2 H)_m \gg 1$ が成立つときには、この層を近似的に半無限体として扱ってそれ以下の層の影響を無視してよいことが

わかる。

[4] $(\alpha_1 H)_m, (\alpha_2 H)_m \ll 1$ が成立つ場合——第 m 層の層厚に較べ波長が短い場合

このとき

$$\cosh(\alpha_1 H)_m \simeq \cosh(\alpha_2 H)_m \simeq 1, \quad \sinh(\alpha_1 H)_m \simeq \sinh(\alpha_2 H)_m \simeq 0 \quad (2.37)$$

が成立つから、(2.13)式と APPENDIX A により E_m は近似的に単位行列になる。したがって、(2.14)式より第 m 層で $(\alpha_1 H)_m, (\alpha_2 H)_m \ll 1$ が成立つときには、この層が無いものとして近似的に扱ってよいことがわかる。

3. 地表面の境界条件と変位成分

3.1 地表面における境界条件の導入

Fig. 1 に示すように、加振力の作用する剛体長方形基礎が地表面にのる場合を想定する。この場合の境界条件は本来変位と応力の組合せで表現され、所謂混合境界値問題に帰着するが、このような数理解析上の困難を避けるため、ここでは振動する剛体基礎を自重の影響を無視して適当な分布形をもつ動的圧力に置換え、地表面の境界条件を応力で統一して記述する方法をとる。

まず、変位・応力ベクトルの表現において時間因子 $Q(t)$ が分離できると仮定し、時間 t に関するそのフーリエ変換を $\bar{Q}(\omega)$ で表わす。すなわち、

$$\bar{Q}(\omega) = \mathfrak{F}_t[Q(t)] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} Q(t) e^{i\omega t} dt \quad (3.1)$$

次に、基礎に作用する加振力の型に対応して、地表面の境界条件を次のようなやや一般的な表現式で仮定する。

[1] 垂直加振 (z 方向) の場合

$$\sigma_z = \begin{cases} 0 & [|x| > b, |y| > c] \\ -P_V R_V(x, y) Q(t) & [|x| \leq b, |y| \leq c] \end{cases}, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (3.2)$$

ここに

$$R_V(x, y) = D_V \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)^{p-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)^{q-\frac{1}{2}}, \quad D_V = \frac{1}{\pi bc} \cdot \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+1/2)\Gamma(q+1/2)} \quad (3.3)$$

また、 D_V ；基礎下の全応力の和が加振力に等しいという条件から定められる常数、 p, q ($> -1/2$)；応力分布の型を決める常数、 P_V ；加振力の振巾、 Γ ；ガンマ関数、である。

(3.2)式の3重フーリエ変換は

$$\tilde{\sigma}_z = -\frac{\bar{Q}(\omega)}{2\pi} P_V \tilde{R}_V(\beta, \gamma), \quad \tilde{\tau}_{xz} = \tilde{\tau}_{yz} = 0 \quad (3.4)$$

ここに

$$\begin{cases} \tilde{R}_V(\beta, \gamma) = \mathfrak{F}^3[R_V(x, y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_V(x, y) e^{i(\beta x + \gamma y)} dx dy = \tilde{R}(\beta, \gamma; p, q) \\ \tilde{R}(\beta, \gamma; p, q) = \frac{2^{p+q}}{(\beta b)^p (\gamma c)^q} \Gamma(p+1) \Gamma(q+1) J_p(\beta b) J_q(\gamma c) \end{cases} \quad (3.5)$$

また、 J_p, J_q ；次数 p および q の第1種ベッセル関数、である。

[2] 水平加振 (x 方向) の場合

(3.2)～(3.5)式において添字 V の代わりに H を代入し、 σ_z と τ_{xz} および $\tilde{\sigma}_z$ と $\tilde{\tau}_{xz}$ の記号変換を行なえば、この場合の境界条件は垂直加振のときの(3.2)～(3.5)式と同じ形で表わすことができる。

[3] 回転加振 (回転軸； y 軸) の場合

$$\sigma_z = \begin{cases} 0 & [|x| > b, |y| > c] \\ -M_R R_R(x, y) Q(t) & [|x| \leq b, |y| \leq c] \end{cases}, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (3.6)$$

ここに

$$R_R(x, y) = D_R x \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)^{p-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)^{q-\frac{1}{2}}, \quad D_R = \frac{2}{\pi b^3 c} \cdot \frac{\Gamma(p+2)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+1/2)\Gamma(q+1/2)} \quad (3.7)$$

また, D_R ; 基礎下の応力による回転軸まわりのモーメントと加振モーメントが等しいという条件より定まる
 常数, M_R ; 加振モーメントの振巾, である。

(3.6)式の 3 重フーリエ変換は

$$\tilde{\sigma}_z = -i \frac{\bar{Q}(\omega)}{2\pi} \cdot \frac{M_R}{b} \tilde{R}_R(\beta, \gamma), \quad \tilde{\tau}_{xz} = \tilde{\tau}_{yz} = 0 \quad (3.8)$$

ここに

$$\tilde{R}_R(\beta, \gamma) = \mathfrak{F}^3[R_R(x, y)] = \tilde{R}(\beta, \gamma; p+1, q) \quad (3.9)$$

以上の諸式において, 既往の諸研究のなかで用いられてきた圧力分布はすべて含まれている。すなわち,

(1) $p=q=1/2$ のとき [一様分布 (uniform distribution)]

$$R_V(x, y) = R_H(x, y) = \frac{1}{4bc}, \quad \tilde{R}_V(\beta, \gamma) = \tilde{R}_H(\beta, \gamma) = S(\beta, \gamma) \quad (3.10a)$$

$$R_R(x, y) = \frac{3}{4b^3c} x, \quad \tilde{R}_R(\beta, \gamma) = \frac{3}{\sin \beta b} S(\beta, \gamma) N(\beta b) \quad (3.10b)$$

(2) $p=q=3/2$ のとき [放物線分布 (parabolic distribution)]

$$\left\{ \begin{aligned} R_V(x, y) &= R_H(x, y) = \frac{9}{16bc} \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \\ \tilde{R}_V(\beta, \gamma) &= \tilde{R}_H(\beta, \gamma) = \frac{9}{(\beta b \cdot \gamma c)^2} N(\beta b) N(\gamma c) \end{aligned} \right. \quad (3.11a)$$

$$R_R(x, y) = \frac{45}{16b^3c} x \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right), \quad \tilde{R}_R(\beta, \gamma) = \frac{45}{(\beta b \cdot \gamma c)^2} M(\beta b) N(\gamma c) \quad (3.11b)$$

(3) $p=q=0$ のとき [静的載荷時に剛基礎下に生じる近似圧力分布 (approximate static rigid base distribution)]

$$\left\{ \begin{aligned} R_V(x, y) &= R_H(x, y) = \frac{1}{\pi^2 bc} \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \tilde{R}_V(\beta, \gamma) &= \tilde{R}_H(\beta, \gamma) = J_0(\beta b) J_0(\gamma c) \end{aligned} \right. \quad (3.12a)$$

$$R_R(x, y) = \frac{2}{\pi^2 b^3 c} x \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \tilde{R}_R(\beta, \gamma) = 2J_1(\beta b) J_0(\gamma c) \quad (3.12b)$$

ここに

$$\left\{ \begin{aligned} S(\beta, \gamma) &= \frac{\sin \beta b \cdot \sin \gamma c}{\beta b \cdot \gamma c}, \quad N(X) = \frac{\sin X}{X} - \cos X \\ M(Y) &= \left(\frac{3}{Y^2} - 1\right) \sin Y - \frac{3}{Y} \cos Y \end{aligned} \right. \quad (3.13)$$

3.2 地表面における変位成分の解の表現

まず, (2.20)式を次のように変形する。

$$W_{1,0}^{(d)} = -K_N W_{1,0}^{(e)} \quad (3.14)$$

ここに

$$K_N = [J_N^{(1)} + J_N^{(3)}]^{-1} [J_N^{(2)} + J_N^{(4)}] \equiv [k_{ij}]_N \quad (3.15)$$

さて, 前項で仮定した地表面における境界条件式(3.4)および(3.8)式を(3.14)式に代入し, (2.3b)式に基づいてこれにフーリエ逆変換をほどこすと, 地表面の変位成分を次式のように表わすことができる。なお,

式中の被積分関数の積分変数 β および γ に関する偶奇の性質を判別して、積分区間の下限を 0 に変換してある。

$$\bar{U}_l(\omega) = P_l \bar{Q}(\omega) \cdot \bar{V}_l(\omega) \quad \dots\dots\dots (3.16 a)$$

あるいは

$$U_l(t) = P_l Q(t) * V_l(t) = P_l \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^t Q(\tau) V_l(t-\tau) d\tau \quad \dots\dots\dots (3.16 b)$$

ここに

$$\bar{U}_l(\omega) = \mathfrak{F}_l[U_l(t)] = \mathfrak{F}_l[\{u, v, w\}_{1,0}^T] \quad \dots\dots\dots (3.17 a)$$

$$\bar{V}_l(\omega) = \mathfrak{F}_l[V_l(t)] = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} S_l \bar{R}_l(\beta, \gamma) d\beta d\gamma \quad \dots\dots\dots (3.17 b)$$

$$S_V = \{-k_{13} \sin x \beta \cdot \cos y \gamma, -k_{23} \cos x \beta \cdot \sin y \gamma, k_{33} \cos x \beta \cdot \cos y \gamma\}^T \quad \dots\dots\dots (3.18 a)$$

$$S_H = \{-k_{11} \cos x \beta \cdot \cos y \gamma, -k_{21} \sin x \beta \cdot \sin y \gamma, k_{31} \sin x \beta \cdot \cos y \gamma\}^T \quad \dots\dots\dots (3.18 b)$$

$$S_R = \frac{1}{b} \{k_{13} \cos x \beta \cdot \cos y \gamma, -k_{23} \sin x \beta \cdot \sin y \gamma, k_{33} \sin x \beta \cdot \cos y \gamma\}^T \quad \dots\dots\dots (3.18 c)$$

また、 $l=V$ [上下加振]、 H [水平加振] または R [回転加振]、 $*$; convolution, を表わす。

4. Dynamical Ground Compliance の定義とその解析的表現

4.1 Dynamical Ground Compliance の定義

(3.16a) 式において $\bar{V}_l(\omega)$ に着目すれば、これは時間 t に関してフーリエ変換された周波数領域 (frequency range) における入出力の比、 $\bar{U}_l(\omega)/P_l \bar{Q}(\omega)$, を表わすから、この系の力-変位間の複素伝達関数になっている。したがって、時間因子を

$$P_l Q(t) = \delta(t) \quad [= \text{ディラックのデルタ関数}] \quad \dots\dots\dots (4.1)$$

とおけば、(3.16b) 式より

$$U_l(t) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} V_l(t) \quad [t \geq 0], \quad U_l(t) = 0 \quad [t < 0] \quad \dots\dots\dots (4.2)$$

これがこの系の衝撃応答 (impulsive response) である。

一方、時間因子を

$$Q(t) = e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (4.3)$$

とおき、そのフーリエ変換

$$Q(\omega') = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\omega')t} dt = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{-\frac{1}{2}} \delta(\omega-\omega') \quad \dots\dots\dots (4.4)$$

を(3.16a)式に代入すると、 $\bar{U}(\omega')$ の逆変換は次式で与えられる。

$$U_l(t) = P_l \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{-\frac{1}{2}} \delta(\omega-\omega') \bar{V}_l(\omega') e^{+i\omega' t} d\omega' = P_l e^{i\omega t} \cdot \bar{V}_l(\omega) \quad \dots\dots\dots (4.5)$$

すなわち、別の見方をすれば、 $\bar{V}_l(\omega)$ は時間因子を $Q(t) = e^{i\omega t}$ とおいたときの加振力に対する変位応答の時間領域 (time domain) における入出力の比、 $U_l(t)/P_l e^{i\omega t}$, でもある。

そこで、とくに基礎の加振方向の変位成分を代表的に表わす複素周波数応答と作用する加振力との比を $V_l(\omega)$ から求めて、これを長方形基礎の "Dynamical Ground Compliance" と定義する (以下 D. G. C. と略記する)。これは stiffness の逆数の元をもち、各加振力に応じた基礎周辺の多層粘弾性地盤 (基礎地盤) の動特性を総合的に表わす力-変位間の複素伝達関数である。したがって、全周波数領域でこの関数を決定できれば、(3.16 b) 式により、任意の非定常な加振力 $P_l Q(t)$ に対する基礎の加振方向の変位応答を求めることができる。

4.2 基礎変位の評価法

ところで、本論の扱いでは基礎下に生じる圧力分布を仮定しているので、その結果得られる基礎下の地表

面の変位はもはや剛な基礎に接するという条件を満足していない。そこで、次に示す 3 つの方法により評価した基礎下の載荷面にあたる地表面の変位を、剛な基礎の加振方向の変位として代表的に採用する。

- 1° 定点評価；載荷面の一定点の変位によって評価する方法
- 2° 単純平均評価；載荷面積全体にわたって各点の位相も含めた複素変位の単純平均をとって評価する方法
- 3° 荷重平均評価；2° の方法において圧力分布を荷重分布とする荷重平均をとって評価する方法

4.3 Dynamical Ground Compliance の解析的表現

前項で述べた基礎変位の評価法を(3.16)式に適用すると、D. G. C. の解析的表現（有次元表示）が次式のように求められる。

[1] 垂直加振

$$\frac{\mathfrak{F}_t[u_0]}{\mathfrak{F}_t[P_V Q(t)]} = \frac{w_0}{P_V e^{i\omega t}} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty k_{33} \tilde{R}_V(\beta, \gamma) d\beta d\gamma \quad \dots\dots\dots (4.6)$$

[2] 水平加振

$$\frac{\mathfrak{F}_t[u_0]}{\mathfrak{F}_t[P_H Q(t)]} = \frac{u_0}{P_H e^{i\omega t}} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty k_{11} \tilde{R}_H(\beta, \gamma) d\beta d\gamma \quad \dots\dots\dots (4.7)$$

[3] 回転加振

$$\frac{\mathfrak{F}_t[\phi_0]}{\mathfrak{F}_t[M_R Q(t)]} = \frac{\phi_0}{M_R e^{i\omega t}} = \frac{1}{\pi^2 b^3} \int_0^\infty \int_0^\infty k_{33} \tilde{R}_R(\beta, \gamma) d\beta d\gamma \quad \dots\dots\dots (4.8)$$

ここに

$$w_0 = \begin{bmatrix} w_{01} \\ w_{02} \\ w_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w|_{x=y=z=0} \\ \frac{1}{4bc} \int_{-b}^b \int_{-c}^c \{w|_{z=0}\} dy dx \\ \int_{-b}^b \int_{-c}^c R_V(x, y) \{w|_{z=0}\} dy dx \end{bmatrix}, \quad \tilde{R}_l(\beta, \gamma) = \begin{bmatrix} 1 \\ S(\beta, \gamma) \\ \tilde{R}_l(\beta, \gamma) \end{bmatrix} \quad [l=V, H] \quad \dots\dots\dots (4.9a)$$

$$u_0 = \begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u|_{x=y=z=0} \\ \frac{1}{4bc} \int_{-b}^b \int_{-c}^c \{u|_{z=0}\} dy dx \\ \int_{-b}^b \int_{-c}^c R_H(x, y) \{u|_{z=0}\} dy dx \end{bmatrix}, \quad \tilde{R}_R(\beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \sin \beta b \\ S_t(\beta b) \frac{\sin \gamma c}{\gamma c} \\ \tilde{R}_R(\beta, \gamma) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4.9b)$$

$$\phi_0 = \begin{bmatrix} \phi_{01} \\ \phi_{02} \\ \phi_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w|_{x=b, y=z=0/b} \\ \frac{1}{4bc} \int_{-b}^b \int_{-c}^c \frac{\{w|_{z=0}\}}{x} dy dx \\ \int_{-b}^b \int_{-c}^c x R_R(x, y) \frac{\{w|_{z=0}\}}{x} dy dx \end{bmatrix}, \quad S_t(\beta b) = \int_0^{\beta b} \frac{\sin \beta x}{\beta x} d(\beta x); \text{ 正弦積分関数 } \quad \dots\dots\dots (4.11)$$

以上のベクトル表現において、各行は、第 1 行；定点評価[1°]，第 2 行；単純平均評価[2°]，第 3 行；荷重平均評価[3°]，の場合をそれぞれ示している。

次に、数値解析の便宜を考えて D. G. C. の解析的表現の無次元化をしておこう。まず(2.5)式中のラーメの複素常数を

$$\begin{cases} \lambda_v(i\omega) + 2\mu_v(i\omega) = \{\lambda(\omega) + 2\mu(\omega)\} + i\{\lambda'(\omega) + 2\mu'(\omega)\} = \{\lambda(\omega) + 2\mu(\omega)\} / g_s(\omega) \quad \dots\dots\dots (4.12) \\ \mu_v(i\omega) = \mu(\omega) + i\mu'(\omega) = \mu(\omega) / g_s(\omega) \end{cases}$$

ここに

$$g_s(\omega) = \left[1 + \frac{\lambda'(\omega) + 2\mu'(\omega)}{\lambda(\omega) + 2\mu(\omega)} \right]^{-1}, \quad g_t(\omega) = \left[1 + i \frac{\mu'(\omega)}{\mu(\omega)} \right]^{-1} \quad \dots\dots\dots (4.13)$$

$\lambda(\omega), \mu(\omega), \lambda'(\omega), \mu'(\omega)$; 実数

のように表わすと、同式中の他の記号は次のようになる。

$$\begin{cases} c_{dv}(i\omega) = c_d(\omega) \{g_d(\omega)\}^{-\frac{1}{2}}, & \begin{cases} h_v(\omega) = h(\omega) \{g_d(\omega)\}^{\frac{1}{2}} \\ c_{sv}(i\omega) = c_s(\omega) \{g_s(\omega)\}^{-\frac{1}{2}}, & \begin{cases} \kappa_v(\omega) = \kappa(\omega) \{g_s(\omega)\}^{\frac{1}{2}} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \quad (4.14)$$

ここに

$$\begin{cases} c_d(\omega) = \left[\frac{\lambda(\omega) + 2\mu(\omega)}{\rho} \right]^{\frac{1}{2}}, & \begin{cases} h(\omega) = \frac{\omega}{c_d(\omega)} \\ c_s(\omega) = \left[\frac{\mu(\omega)}{\rho} \right]^{\frac{1}{2}}, & \begin{cases} \kappa(\omega) = \frac{\omega}{c_s(\omega)} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \quad (4.15)$$

さて、D. G. C. の解析的表現の中に含まれる二重無限積分のうち一方を有限積分にするとともに、式全体の無次元化を行なうため、次の2つの変数変換を導入する。

$$\textcircled{1} \quad \beta = \zeta \cos \theta, \gamma = \zeta \sin \theta \quad \textcircled{2} \quad \zeta / \bar{\kappa} = \xi \quad (4.16)$$

ここに、 $\bar{\kappa}$ は実数で(4.15)式中の $\kappa(\omega)$ の規準量である。

さらに第 m 層のパラメータに関する次の4つの無次元量と振動数に関する2つの無次元量を導入する。

$$\begin{aligned} \mu_m &= \frac{\{\mu(\omega)\}_m}{\bar{\mu}}, \quad n_m = \left\{ \frac{h(\omega)}{\kappa(\omega)} \right\}_m = \left\{ \frac{c_s(\omega)}{c_d(\omega)} \right\}_m = \sqrt{\frac{1-2[\nu(\omega)]_m}{2[1-[\nu(\omega)]_m]}}, \\ \kappa_m &= \frac{\{\kappa(\omega)\}_m}{\bar{\kappa}} = \frac{\bar{c}_s}{\{c_s(\omega)\}_m}, \quad d_m = \frac{\{H\}_m}{\bar{H}} \quad [m=1, 2, \dots, N+1] \end{aligned} \quad (4.17a)$$

$$a_0 = \bar{\kappa} b = \frac{\omega}{\bar{c}_s} b, \quad a_1 = \bar{\kappa} \bar{H} = a_0 \frac{\bar{H}}{b} \quad (4.17b)$$

ここに、 $\bar{\mu}$, $\bar{\rho}$, $\bar{c}_s = \sqrt{\bar{\mu}/\bar{\rho}}$, $\bar{H}$; それぞれラーメの複素常数の実数部、密度、横波速度および層厚の規準量、 $\nu(\omega)$; ラーメの複素常数の実数部より定まるポアソン比、である。また長さの規準量には基礎巾の半巾 b をとる。上式中に $\{ \}$ つきで表わしたものは第 m 層に関するパラメータの有次元量を意味する。(3.15)式中に示すマトリックス K_N の各要素 k_{ij} は $\bar{\kappa}$ に関して (-1) 乗であり、(3.5)および(3.9)式の荷重項は $\bar{\kappa}$ に無関係であることがわかるから、結局 D. G. C. (4.6)~(4.8) 式の無次元表示式は、同じように3つの基礎変位の評価法による結果をひとつのベクトル式で書表わせば次のようになる。なお、以下に示す k'_{ij} は k_{ij} を $\bar{\kappa}$ に関して無次元化したものを意味する。

[1] 垂直加振

$$\frac{\mathfrak{F}_t[w_0]}{\mathfrak{F}_t[P_V Q(t)]} \cdot b \bar{\mu} = \frac{w_0}{P_V e^{i\omega t}} \cdot b \bar{\mu} = \frac{a_0}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \xi k'_{33} \bar{\mathbf{R}}_V(a_0 \xi, \theta) d\xi d\theta \equiv f_{1V} + i f_{2V} \quad (4.18)$$

[2] 水平加振

$$\frac{\mathfrak{F}_t[u_0]}{\mathfrak{F}_t[P_H Q(t)]} \cdot b \bar{\mu} = \frac{u_0}{P_H e^{i\omega t}} \cdot b \bar{\mu} = \frac{a_0}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \xi k'_{11} \bar{\mathbf{R}}_H(a_0 \xi, \theta) d\xi d\theta \equiv f_{1H} + i f_{2H} \quad (4.19)$$

[3] 回転加振

$$\frac{\mathfrak{F}_t[\phi_0]}{\mathfrak{F}_t[M_R Q(t)]} \cdot b^3 \bar{\mu} = \frac{\phi_0}{M_R e^{i\omega t}} \cdot b^3 \bar{\mu} = \frac{a_0}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \xi k'_{33} \bar{\mathbf{R}}_R(a_0 \xi, \theta) d\xi d\theta \equiv f_{1R} + i f_{2R} \quad (4.20)$$

ここに

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}}_l(a_0 \xi, \theta) &= \begin{bmatrix} 1 \\ S(a_0 \xi, \theta) \\ \bar{\mathbf{R}}_l(a_0 \xi, \theta) \end{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_l(a_0 \xi, \theta) \quad [l=V, H] \\ \bar{\mathbf{R}}_R(a_0 \xi, \theta) &= \begin{bmatrix} \sin(a_0 \xi \cos \theta) \\ S_l(a_0 \xi \cos \theta) \frac{\sin(c/b \cdot a_0 \xi \sin \theta)}{c/b \cdot a_0 \xi \sin \theta} \\ \bar{\mathbf{R}}_R(a_0 \xi, \theta) \end{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_R(a_0 \xi, \theta) \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{R}}_l(a_0 \xi, \theta) = \bar{\mathbf{R}}(a_0 \xi, \theta; p, q) \quad [l=V, H], & \bar{\mathbf{R}}_R(a_0 \xi, \theta) = \bar{\mathbf{R}}(a_0 \xi, \theta; p+1, q) \\ \bar{\mathbf{R}}(a_0 \xi, \theta; p, q) = \frac{2^{p+q} \Gamma(p+1) \Gamma(q+1)}{(a_0 \xi \cos \theta)^p (c/b \cdot a_0 \xi \sin \theta)^q} J_p(a_0 \xi \cos \theta) J_q\left(\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta\right) \end{cases} \quad (4.22)$$

$$S(a_0\xi, \theta) = \frac{\sin(a_0\xi \cos\theta) \cdot \sin(c/b \cdot a_0\xi \sin\theta)}{a_0\xi \cos\theta \cdot c/b \cdot a_0\xi \sin\theta} \dots\dots\dots(4.23)$$

以上の諸式において、(3.10)～(3.12) 式の特別な圧力分布の場合の無次元式は次のように表わされる。

(1) 一様分布 [$p=q=1/2$] のとき

$$\begin{cases} \tilde{R}_V(a_0\xi, \theta) = \tilde{R}_H(a_0\xi, \theta) = S(a_0\xi, \theta) \\ \tilde{R}_R(a_0\xi, \theta) = \frac{3}{\sin(a_0\xi \cos\theta)} S(a_0\xi, \theta) \cdot N(a_0\xi, \theta) \end{cases} \dots\dots\dots(4.24)$$

(2) 放物線分布 [$p=q=3/2$] のとき

$$\begin{cases} \tilde{R}_V(a_0\xi, \theta) = \tilde{R}_H(a_0\xi, \theta) = \frac{9}{(a_0\xi \cos\theta \cdot c/b \cdot a_0\xi \sin\theta)^3} N(a_0\xi \cos\theta) \cdot N(c/b \cdot a_0\xi \sin\theta) \\ \tilde{R}_R(a_0\xi, \theta) = \frac{45}{(a_0\xi \cos\theta \cdot c/b \cdot a_0\xi \sin\theta)^3} M(a_0\xi \cos\theta) \cdot N(c/b \cdot a_0\xi \sin\theta) \end{cases} \dots\dots\dots(4.25)$$

(3) 近似静的剛版分布 [$p=q=0$] のとき

$$\begin{cases} \tilde{R}_V(a_0\xi, \theta) = \tilde{R}_H(a_0\xi, \theta) = J_0(a_0\xi \cos\theta) \cdot J_0(c/b \cdot a_0\xi \sin\theta) \\ \tilde{R}_R(a_0\xi, \theta) = 2J_1(a_0\xi \cos\theta) \cdot J_0(c/b \cdot a_0\xi \sin\theta) \end{cases} \dots\dots\dots(4.26)$$

積分評価の方法とその物理的意味：(4.18)～(4.20) 式の右辺の ξ に関する積分は分岐点および振動数方程式の根として与えられる極を特異点にもつ無限特異積分となるから、複素平面上で評価する。結果は複素数で得られるので、これを $f_{1l} + if_{2l}$ [$l=V, H, R$] の記号で表わすことにする（基礎変位の3種の評価法をすべて含んだそのベクトル表現が $f_{1l} + if_{2l}$ である）。また、これらの特異点は各層の媒体が完全弾性のとき ($g_{am} = g_{sm} = 1, [m=1, 2, \dots, N]$) すべて実軸上に存在するが、粘弾性になると (g_{am}, g_{sm} ; 複素数)、積分平面の第4または第2象限に移行する。したがって、粘弾性の場合には、原点を除き実軸上に特異点が存在しないので、これらの特異積分を正の実軸上で評価しなければならない。一方、完全弾性の場合には、特異点を第1象限側に避けながら正の実軸上で評価しなければならない。結果は特異点（極）をはさむ Cauchy の主値と特異点まわりの留数項の和として表わされることになる。これらの特異点は振動数方程式の解であり、free wave の存在条件を与えるもので、留数項は任意常数の定まった free wave の解、すなわち、表面波によるエネルギーの逸散減衰に起因する項を意味する。留数項を付加した結果得られる合成波は“divergent wave”，言換えると、震源から逸散し無限遠からの反射波を含まない波動、のみから成立ち、径方向の無限遠における境界条件を満足し、物理的な意味をもつことになるのである。

4.4 Statical Ground Compliance の定義とその解析的表現

“Dynamical Ground Compliance” の解析的表現において、振動数 $\omega \rightarrow 0$ の極限値をとくに“Statical Ground Compliance”（以下 S.G.C. と略記する）と定義する。これは各静的荷荷に対する基礎周辺の多層粘弾性地盤（基礎地盤系）の静的剛性（static stiffness）の逆数値である。動的な場合と同じ理由によって、基礎下の地表面の変位が剛な基礎に接するという条件を満足しないので、動的な場合と同じ基礎変位の評価法を採用すると、S.G.C. の有次元表示による解析的表現は次式で与えられる。

[1] 垂直加力；

$$\frac{w_0}{P_V} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \{k_{33}\} s \tilde{R}_V(\beta, \gamma) d\beta d\gamma \dots\dots\dots(4.27)$$

[2] 水平加力；

$$\frac{u_0}{P_H} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \{k_{11}\} s \tilde{R}_H(\beta, \gamma) d\beta d\gamma \dots\dots\dots(4.28)$$

[3] 回転加力；

$$\frac{\phi_0}{M_R} = \frac{1}{\pi^2 b^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \{k_{33}\} s \tilde{R}_R(\beta, \gamma) d\beta d\gamma \dots\dots\dots(4.29)$$

ここに、 $\{k_{ij}\}_s = \{k_{ij}\}_{\omega=0}$ 、また $\tilde{R}_l(\beta, \gamma)$ [$l=V, H, R$] は(4.10) 式で与えられる。

次に, S.G.C. の無次元表示を求めておこう。まず地盤定数を次のように与える。

$$\begin{cases} c_{sv} = \{c_{sv}(i\omega)\}_{s=0}, & c_{dv} = \{c_{dv}(i\omega)\}_{s=0}, & \dots\dots\dots(4.30) \\ \lambda_0 = \{\lambda_0(i\omega)\}_{s=0}, & \mu_0 = \{\mu_0(i\omega)\}_{s=0}, & \nu_0 = \{\nu_0(i\omega)\}_{s=0} \end{cases}$$

さて, S.G.C. の解析的表現の中に含まれる二重無限積分のうち一方を有限積分に変換するとともに, 式全体の無次元化を行なうため, 次の2つの変数変換を導入する。

$$\textcircled{1} \quad \beta = \zeta \cos \theta, \gamma = \zeta \sin \theta, \quad \textcircled{2} \quad \zeta' = \zeta b \quad \dots\dots\dots(4.31)$$

(4.27)~(4.29) 式に含まれるマトリックス $\{K_N\}_{s=0}$ の各要素 $\{k_{ij}\}_s$ は長さの規準量 b に関して (+1) 乗であり, 荷重項は (0) 乗であることがわかるから, 結局 S.G.C. の解析的表現(4.27)~(4.29) 式は次のように無次元化される。

[1] 垂直加力;

$$\frac{w_0}{P_V} \cdot b \bar{u} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \zeta' \{k'_{33}\}_s \tilde{R}_{SV}(\zeta', \theta) d\zeta' d\theta \equiv f_{SV} \quad \dots\dots\dots(4.32)$$

[2] 水平加力;

$$\frac{u_0}{P_H} \cdot b \bar{u} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \zeta' \{k'_{11}\}_s \tilde{R}_{SH}(\zeta', \theta) d\zeta' d\theta \equiv f_{SH} \quad \dots\dots\dots(4.33)$$

[3] 回転加力;

$$\frac{\phi_0}{M_R} \cdot b^3 \bar{u} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \zeta' \{k'_{33}\}_s \tilde{R}_{SR}(\zeta', \theta) d\zeta' d\theta \equiv f_{SR} \quad \dots\dots\dots(4.34)$$

ここに

$$\begin{cases} \tilde{R}_{Sl}(\zeta', \theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ S_s(\zeta', \theta) \\ \tilde{R}_{Sl}(\zeta', \theta) \end{bmatrix} \tilde{R}_{Sl}(\zeta', \theta) \quad [l=V, H] \\ \tilde{R}_{SR}(\zeta', \theta) = \begin{bmatrix} \sin(\zeta' \cos \theta) \\ S_s(\zeta' \cos \theta) \frac{\sin(c/b \cdot \zeta' \sin \theta)}{c/b \cdot \zeta' \sin \theta} \\ \tilde{R}_{SR}(\zeta', \theta) \end{bmatrix} \tilde{R}_{SR}(\zeta', \theta) \end{cases} \quad \dots\dots\dots(4.35)$$

$$\begin{cases} \tilde{R}_{Sl}(\zeta', \theta) = \tilde{R}_s(\zeta', \theta; p, q) \\ = \frac{2^{p+q} \Gamma(p+1) \Gamma(q+1)}{(\zeta' \cos \theta)^p (c/b \cdot \zeta' \sin \theta)^q} J_p(\zeta' \cos \theta) J_q\left(\frac{c}{b} \zeta' \sin \theta\right) \quad [l=V, H] \quad \dots\dots\dots(4.36) \\ \tilde{R}_{SR}(\zeta', \theta) = \tilde{R}_s(\zeta', \theta; p+1, q) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_s(\zeta', \theta) = \frac{\sin(\zeta' \cos \theta) \cdot \sin(c/b \cdot \zeta' \sin \theta)}{\zeta' \cos \theta \cdot c/b \cdot \zeta' \sin \theta} \\ S_s(\zeta' \cos \theta) = \int_0^{\zeta' \cos \theta} \frac{\sin X}{X} dX; \text{ 正弦積分関数} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(4.37)$$

また, $\{k'_{ij}\}_s$ は $\{k_{ij}\}_s$ を b に関して無次元化したものを意味する。 $\{k'_{ij}\}_s$ の計算に必要なマトリックス C_m^{-1} および E_m の各要素の無次元表示を APPENDIX C に一括して示した。

S.G.C. および D.G.C. の間には次の関係式が成立つ。

$$\lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} f_{11} = f_{sl}, \quad \lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} f_{31} = 0 \quad \dots\dots\dots(4.38)$$

なお(4.32)~(4.34)式の右辺の ζ' に関する積分は一般に特異点をもたないので, 正の実軸上での積分が可能である。

4.5 等価係数による Dynamical および Statical Ground Compliance の置換表現

D.G.C. による表現は基礎地盤系の物理的な性質を直観的には把握しにくい。そこで, 従来一般に地盤をバネとダッシュ・ポットの並列結合である Voigt モデルの系に置換する方法がよく行なわれているので, 連続体の動特性として評価された D.G.C., $f_{11} + if_{21}$ [$l=V, H, R$], をこのような不連続系の特性に置換えて,

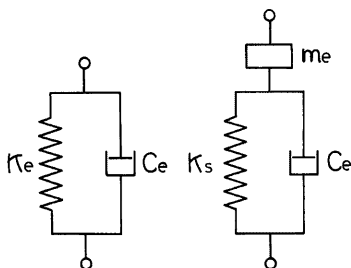


Fig. 2. Two kinds of equivalent model for sub-soil ground.

その等価係数を振動数の関数として求めてみよう。

Fig. 2 に示すような2種のモデルを考える。原系と合わせて3つの系の力-変位間の伝達関数を等しく置くことにより

$$\begin{aligned} f_{1l} + i f_{2l} &= [\kappa_{el} + i a_0 c_{el}]^{-1} \\ &= [(\kappa_{sl} - a_0^2 m_{el}) + i a_0 c_{el}]^{-1} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4.39)$$

が得られるから、これより

$$\begin{aligned} \kappa_{el} &= \kappa_{sl} - a_0^2 m_{el} = \frac{f_{1l}}{f_{1l}^2 + f_{2l}^2}, \\ c_{el} &= \frac{-f_{2l}}{a_0(f_{1l}^2 + f_{2l}^2)} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4.40)$$

いま κ_{sl} が静的な場合の等価剛性、すなわち S. G. C. の逆数に等しい

$$\kappa_{sl} = (\kappa_{el})_{\text{static}} = \frac{1}{(f_{1l})_{\text{static}}} = \frac{1}{f_{sl}} \quad \dots\dots\dots (4.41)$$

とおけば次式が得られる。

$$m_{el} = \frac{\kappa_{sl} - \kappa_{el}}{a_0^2} = \frac{1}{a_0^2} \left\{ \frac{1}{f_{sl}} - \frac{f_{1l}}{f_{1l}^2 + f_{2l}^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.42)$$

以上の関係式によって、 κ_{el} , κ_{sl} (動的) および (静的) 等価剛性係数, c_{el} ; 等価粘性減衰係数, m_{el} : 等価質量あるいは仮性質量, をそれぞれ D. G. C. および S. G. C. から換算することができる。なお、これらの無次元量から有次元量への変換は次式で与えられる。

$$K_{el} = b \bar{\rho} \bar{c}_s^2 \cdot \kappa_{el}, \quad K_{sl} = b \bar{\rho} \bar{c}_s^2 \cdot \kappa_{sl}, \quad C_{el} = b^2 \bar{\rho} \bar{c}_s \cdot c_{el}, \quad M_{el} = b^3 \bar{\rho} \cdot m_{el} \quad [l = V, H] \quad \dots\dots\dots (4.43 a)$$

$$K_{eR} = b^3 \bar{\rho} \bar{c}_s^2 \cdot \kappa_{eR}, \quad K_{sR} = b^3 \bar{\rho} \bar{c}_s^2 \cdot \kappa_{sR}, \quad C_{eR} = b^4 \bar{\rho} \bar{c}_s \cdot c_{eR}, \quad I_{eR} = M_{eR} = b^5 \bar{\rho} \cdot m_{eR} \quad \dots\dots\dots (4.43 b)$$

5. 特別な層構成の場合の Dynamical および Statical Ground Compliance の解析的表現

5.1 半無限地盤

地盤が半無限体からなる場合の解の具体的な表現を無次元表示で以下に示す。この場合の層数は1であるから、層を示す添字はすべて省略して記述する。

A. 振動数方程式

$$F(\xi) = (2\xi^2 - g_s)^2 - 4\xi^2 \sqrt{\xi^2 - n^2} g_d \sqrt{\xi^2 - g_s} = 0; \text{ Rayleigh function } \quad \dots\dots\dots (5.1)$$

B. Statical Ground Compliance

$$\{k'_{11}\} s = \frac{1}{2c/b \cdot (1-n^2)\zeta''}, \quad \{k'_{33}\} s = \frac{1}{c/b \cdot \zeta''} \left\{ \sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{2(1-n^2)} \right\} \quad \dots\dots\dots (5.2)$$

a) とくに {定点评価} のとき

$$\begin{aligned} f_{sv} &= \frac{1}{2\pi^{3/2} c/b \cdot (1-n^2)} \left[\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1/2)} \int_0^{\theta_1} \frac{1}{\cos \theta} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - p, q+1; \left\{ \frac{c}{b} \tan \theta \right\}^2\right) d\theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(q+1)}{c/b \cdot \Gamma(q+1/2)} \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin \theta} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - q, p+1; \left\{ \frac{1}{c/b \cdot \tan \theta} \right\}^2\right) d\theta \right] \quad \dots\dots\dots (5.3a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{sh} &= \frac{1}{\pi^{3/2} c/b} \left[\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1/2)} \int_0^{\theta_1} \frac{1}{\cos \theta} \left\{ \sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{2(1-n^2)} \right\} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - p, q+1; \left\{ \frac{c}{b} \tan \theta \right\}^2\right) d\theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(q+1)}{c/b \cdot \Gamma(q+1/2)} \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin \theta} \left\{ \sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{2(1-n^2)} \right\} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - q, p+1; \left\{ \frac{1}{c/b \cdot \tan \theta} \right\}^2\right) d\theta \right] \\ &\quad \dots\dots\dots (5.3b) \end{aligned}$$

$$f_{sR} = \frac{1}{2\pi^{2/3}c/b \cdot (1-n^2)} \left[\frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(p+3/2)} \int_0^{\theta_1} \frac{1}{\cos\theta} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}-p, q+1; \left\{\frac{c}{b}\tan\theta\right\}^2\right) d\theta \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(q+1)}{c/b \cdot \Gamma(q+1/2)} \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\theta} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-q, p+1; \left\{\frac{1}{c/b \cdot \tan\theta}\right\}^2\right) d\theta \right] \dots\dots\dots (5.3c)$$

ここに

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} \cdot \frac{z^n}{n!} ; \text{ ガウスの超幾何関数} \\ \Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad [\operatorname{Re}(z) > 0] ; \text{ ガンマ関数} \end{array} \right. \dots\dots\dots (5.4)$$

b) とくに {一様分布／定点評価} のとき

$$f_{sV} = \frac{1}{4\pi(1-n^2)} \left[M_1(\theta_1) + \left(\frac{c}{b}\right)^{-1} M_2(\theta_1) \right] \dots\dots\dots (5.5a)$$

$$f_{sH} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1-2n^2}{2(1-n^2)} \left\{ \left(\frac{c}{b}\right)^{-1} \cos\theta_1 - \sin\theta_1 \right\} + M_1(\theta_1) - \frac{1}{2(1-n^2)} \left(\frac{c}{b}\right)^{-1} M_2(\theta_1) \right] \\ \dots\dots\dots (5.5b)$$

$$f_{sR} = \frac{1}{16\pi(1-n^2)} \left[2M_1(\theta_2) + \frac{c}{b} \left(1 - \frac{1}{\cos\theta_2}\right) \right] \dots\dots\dots (5.5c)$$

ここに

$$M_1(\theta) = \log \left| \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} \right|, \quad M_2(\theta) = \log \left| \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \right|, \quad \theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{c}{b} \right)^{-1}, \quad \theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{c}{2b} \right)^{-1} \\ \dots\dots\dots (5.6)$$

C. Dynamical Ground Compliance

$$k'_{33} = g_s^2 \frac{\sqrt{\xi^2 - n^2} g_d}{F(\xi)}, \quad k'_{11} = g_s^2 \left[\frac{\sqrt{\xi^2 - g_s}}{F(\xi)} \cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{g_s \sqrt{\xi^2 - g_s}} \right] \dots\dots\dots (5.7)$$

5.2 剛基盤上の表層地盤

この場合も層数は1であるから、層を示す添字はすべて省略して記述する。

A. 振動数方程式

$$F(\xi) \equiv [4\xi^2(2\xi^2 - g_s) \operatorname{cosech}(\sqrt{\xi^2 - n^2} g_d \cdot a_1) \cdot \operatorname{cosech}(\sqrt{\xi^2 - g_s} \cdot a_1) \\ - \{4\xi^4 + (2\xi^2 - g_s)^2\} \coth(\sqrt{\xi^2 - n^2} g_d \cdot a_1) \cdot \coth(\sqrt{\xi^2 - g_s} \cdot a_1)] \\ \cdot \sqrt{\xi^2 - n^2} g_d \sqrt{\xi^2 - g_s} + \xi^2 \{4(\xi^2 - n^2 g_d)(\xi^2 - g_s) + (2\xi^2 - g_s)^2\} = 0 \\ ; \text{ Rayleigh 波の方程式} \dots\dots\dots (5.8a)$$

$$L(\xi) \equiv \coth(\sqrt{\xi^2 - g_s} \cdot a_1) = 0; \text{ Love 波の方程式} \dots\dots\dots (5.8b)$$

B. Statical Ground Compliance

$$\{k'_{33}\}_s = \frac{(1+n^2) \sinh(H/b \cdot \xi') \cdot \cosh(H/b \cdot \xi') - (1-n^2)(H/b \cdot \xi')}{2\xi' [1 + (1-n^2)\{(1+n^2)\sinh^2(H/b \cdot \xi') + (1-n^2)(H/b \cdot \xi')^2\}]} \dots\dots\dots (5.9a)$$

$$\{k'_{11}\}_s = \frac{1}{2\xi'} \left[\frac{(1+n^2)\sinh(H/b \cdot \xi') \cdot \cosh(H/b \cdot \xi') + (1-n^2)(H/b \cdot \xi')}{1 + (1-n^2)\{(1+n^2)\sinh^2(H/b \cdot \xi') + (1-n^2)(H/b \cdot \xi')^2\}} \right] \dots\dots\dots (5.9b)$$

ここに、 H ；表層の層厚，である。

C. Dynamical Ground Compliance

$$k'_{33} = g_s^2 \frac{\sqrt{\xi^2 - n^2} g_d}{F(\xi)} T_V(\xi) \dots\dots\dots (5.10a)$$

$$k'_{11} = g_s^2 \left[\frac{\sqrt{\xi^2 - g_s}}{F(\xi)} T_H(\xi) \cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{g_s \sqrt{\xi^2 - g_s} \cdot L(\xi)} \right] \dots\dots\dots (5.10b)$$

ここに

$$\begin{cases} T_V(\xi) = \xi^2 \coth(\sqrt{\xi^2 - n^2} g_a a_1) - \sqrt{\xi^2 - n^2} g_a \sqrt{\xi^2 - g_s} \coth(\sqrt{\xi^2 - g_s} a_1) \\ T_H(\xi) = \xi^2 \coth(\sqrt{\xi^2 - g_s} a_1) - \sqrt{\xi^2 - n^2} g_a \sqrt{\xi^2 - g_s} \coth(\sqrt{\xi^2 - n^2} g_a a_1) \end{cases} \quad (5.11)$$

とくに完全弾性の場合は、次に示すように、積分の結果が完全に分離され、Cauchy の主値が実数部を留数項が虚数部を構成し、主値からは虚数部が現われない。この地盤モデルの大きな特徴のひとつである。

[1] 垂直加振

$$\begin{cases} f_{1V} = \frac{a_0}{\pi^2} P \int_0^\infty \frac{\xi \sqrt{\xi^2 - n^2}}{F(\xi)} T_V(\xi) R_{1V}(a_0 \xi) d\xi \\ f_{2V} = -\frac{a_0}{\pi} \sum_k \left[\frac{\xi \sqrt{\xi^2 - n^2}}{dF(\xi)/d\xi} T_V(\xi) R_{1V}(a_0 \xi) \right]_{\xi=\xi_{0k}} \end{cases} \quad (5.12)$$

[2] 水平加振

$$\begin{cases} f_{1H} = \frac{a_0}{\pi^2} P \int_0^\infty \left[\frac{\xi \sqrt{\xi^2 - 1}}{F(\xi)} T_H(\xi) R_{1H1}(a_0 \xi) - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1} L(\xi)} R_{1H2}(a_0 \xi) \right] d\xi \\ f_{2H} = -\frac{a_0}{\pi} \sum_k \left[\frac{\xi \sqrt{\xi^2 - 1}}{dF(\xi)/d\xi} T_H(\xi) R_{1H1}(a_0 \xi) \right]_{\xi=\xi_{0k}} + \frac{a_0}{\pi} \sum_k \left[\frac{R_{1H2}(a_0 \xi)}{a_1} \right]_{\xi=\xi_{0k}} \end{cases} \quad (5.13)$$

[3] 回転加振

$$\begin{cases} f_{1R} = \frac{a_0}{\pi^2} P \int_0^\infty \frac{\xi \sqrt{\xi^2 - n^2}}{F(\xi)} T_V(\xi) R_{1R}(a_0 \xi) d\xi \\ f_{2R} = -\frac{a_0}{\pi} \sum_k \left[\frac{\xi \sqrt{\xi^2 - n^2}}{dF(\xi)/d\xi} T_V(\xi) R_{1R}(a_0 \xi) \right]_{\xi=\xi_{0k}} \end{cases} \quad (5.14)$$

ここに

$$\begin{cases} R_{1l}(a_0 \xi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tilde{R}_l(a_0 \xi, \theta) d\theta \quad [l=V, R] \\ R_{1H1}(a_0 \xi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tilde{R}_H(a_0 \xi, \theta) \cos^2 \theta d\theta, \quad R_{1H2}(a_0 \xi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tilde{R}_H(a_0 \xi, \theta) \sin^2 \theta d\theta \end{cases} \quad (5.15)$$

また、 ξ_{0k} ; Rayleigh 波の振動数方程式、 $F(\xi)=0$ の根、 ξ_{0k}' ; Love 波の振動数方程式、 $L(\xi)=0$ の根、 P ; Cauchy の主値を表わす演算子、を意味する。

6. 数値解析例

6.1 半無限地盤

A. 振動数方程式の解

完全弾性体の場合：Rayleigh 波の振動数方程式(5.1)式の解 ξ_R は $g_a = g_s = 1$ に対して次式で与えられる。

$$\begin{cases} \nu_0 = 1/2 \quad (n^2 = 0, \lambda_0 = \infty) \text{ のとき ; } \xi_R = 1.04678, & c_p = 0.955311 c_{s0} \\ \nu_0 = 1/3 \quad (n^2 = 1/4, \lambda_0 = 2\mu_0) \text{ のとき ; } \xi_R = 1.07236, & c_p = 0.932523 c_{s0} \\ \nu_0 = 1/4 \quad (n^2 = 1/3, \lambda_0 = \mu_0) \text{ のとき ; } \xi_R = \sqrt{3} + \sqrt{3}/2 = 1.08766, & c_p = 0.919405 c_{s0} \\ \nu_0 = 0 \quad (n^2 = 1/2, \lambda_0 = 0) \text{ のとき ; } \xi_R = \sqrt{3} + \sqrt{5}/2 = 1.14412, & c_p = 0.874034 c_{s0} \end{cases} \quad (6.1)$$

ここに

$$\xi_R = \left(\frac{\zeta}{\kappa} \right)_R = \frac{c_{s0}}{c_p}; \text{ Rayleigh pole, } c_p = \left(\frac{\omega}{\zeta} \right)_R; \text{ 位相速度} \quad (6.2)$$

また、 ζ ; wave number, である。

粘弾性体の場合：本節の算例で扱う粘弾性体には、その最も基本的なモデルのひとつであり、従来この種の解析によく用いられてきた Voigt solid を地盤を構成する媒体として選ぶ。このとき次の関係式が成立つ。

$$g_a = \left[1 + i\omega \frac{\lambda' + 2\mu'}{\lambda_0 + 2\mu_0} \right]^{-1} = [1 + ia_0 \eta_a]^{-1}, \quad g_s = \left[1 + i\omega \frac{\mu'}{\mu_0} \right]^{-1} = [1 + ia_0 \eta_s]^{-1} \quad (6.3)$$

ここに、 $c_s = c_{s0}$ に選んで

$$a_0 = \frac{\omega b}{c_{s0}}, \quad \eta_a = \frac{c_{s0}}{b} \cdot \frac{\lambda' + 2\mu'}{\lambda_0 + 2\mu_0} = n^2 \left(\frac{\lambda'}{\mu'} + 2 \right) \eta_s, \quad \eta_s = \frac{c_{s0}}{b} \cdot \frac{\mu'}{\mu_0} \quad (6.4)$$

この場合の Rayleigh pole ξ_R から計算した Rayleigh 波の位相速度 c_p と減衰常数 (attenuation constant) α を Fig. 3 に示した。ここに

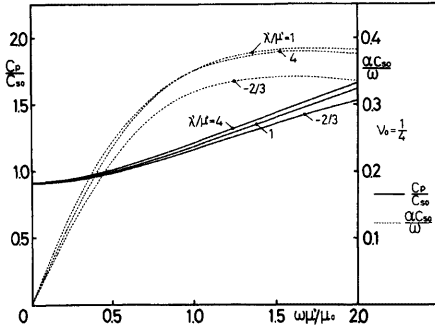


Fig. 3. Phase velocity and attenuation constant of the Rayleigh wave in a viscoelastic half-space.

$$\xi_R = \pm(\xi_1 - i\xi_2), \quad \frac{c_p}{c_{so}} = \frac{1}{\xi_1}, \quad \alpha \frac{c_{so}}{\omega} = \xi_2 \quad (6.5)$$

の関係がある。完全弾性体とは異なり、この場合には wave number または波長によって伝播速度が異なるという所謂分散 (dispersion) の現象が起こる。

B. Statical Ground Compliance

{基礎版下の圧力分布として一様分布/基礎変位の評価法として定点評価}を採用した場合について、基礎半巾 b の代わりに等価半巾 $\bar{b}_i$ [$i = V, H, R$] を用いた S. G. C.

$$\begin{aligned} \bar{f}_{SV} &= \frac{w_0}{P_V} \cdot \bar{b}_V \mu_0, & \bar{f}_{SH} &= \frac{u_0}{P_H} \cdot \bar{b}_H \mu_0, \\ \bar{f}_{SR} &= \frac{\phi}{M_R} \cdot \frac{\bar{b}_R^3 \mu_0}{3} \end{aligned} \quad (6.6)$$

ここに

$$\bar{b}_V = \bar{b}_H = \sqrt{b c}, \quad \bar{b}_R = (b^3 c)^{\frac{1}{3}} \quad (6.7)$$

を Fig. 4 に示した。等価半巾 $\bar{b}_i$ を用いたこれらの図は基礎断面積 [並進の場合] または断面 2 次モーメント [回転の場合] を一定にして、断面形状を変えた場合を比較できるようにしている。図中○印および×印は半径 r の円形基礎の解を換算した結果で、それぞれ断面積および断面 2 次モーメント一定の条件のもとに等価半巾

$$\bar{b}_V = \bar{b}_H = \frac{\sqrt{\pi}}{2} r, \quad \bar{b}_R = \frac{(3\pi)^{\frac{1}{3}}}{2} r \quad (6.8)$$

を求めて、正方形基礎の場合におよんでいる。

図より次のことが考察される。

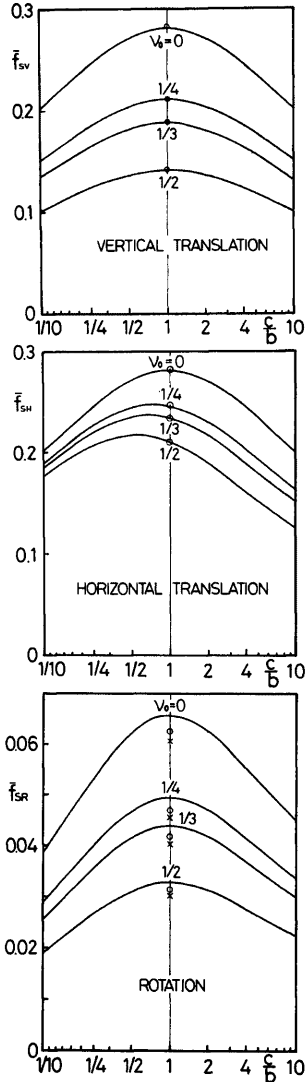


Fig. 4. Statical Ground Compliance of a half-space.

1) 円形と正方形の解の比較：並進の場合，同一の基礎面積をもつように換算すると，両者の解が一致するのに対して，回転の場合には，断面積および断面 2 次モーメントを一定にする 2 種の換算方法ともやや偏りを生じている。

2) 辺長比 c/b の影響：(6.7) 式で定めるような基礎半巾 $\bar{b}_1$ を選ぶことによって，基礎形状による S.G.C. の変化を比較的小さくすることができる。このとき S.G.C. は正方形（垂直および回転の場合）またはその近傍（水平の場合）で最大値をとるような分布になっている。

3) ポアソン比 ν_0 の影響：剪断剛性 μ_0 を固定しもうひとつのラーメの常数 λ_0 を変える場合に相当するこの算例では，垂直・回転で S.G.C. の値自身が $1-\nu_0$ に，水平では $\nu_0=1/2$ のときの値からの増分が $1-\nu_0$ にそれぞれほぼ比例するという結果が得られている。

C. Dynamical Ground Compliance

D.G.C. は加振振動数および基礎の形状と寸法の関数であり，また地層構成と地盤定数（密度，剪断弾性係数，ポアソン比，粘性常数など）に関係する。基礎および地盤に関連するパラメータが D.G.C. に及ぼす影響を以下に示そう。ここで解析の対象にする地盤モデルは，完全弾性体あるいは Voigt solid から成り，[一様分布／定点評価]，正方形基礎 $c/b=1$ ，ポアソン比 $\nu_0=1/4$ ，の組合わせを標準にしている。

1° 粘性係数パラメータ η の影響について

(6.4) 式で定義した縦波および横波に関する粘性係数パラメータ η_d および η_s が等しく，かつ 2 つの粘性常数が等しい場合

$$\eta \equiv \eta_p = \eta_s, \quad \lambda' / \mu' = 1 \quad \dots\dots\dots (6.9)$$

の結果を Fig. 15 (p.199) に点線で示した。ポアソン比 $\nu_0=1/4$ かつ $\lambda' / \mu' = 1$ なる条件は縦波および横波に対する粘性係数がともに等しい，すなわち

$$\frac{\lambda' + 2\mu'}{\lambda_0 + 2\mu_0} = \frac{\mu'}{\mu_0} \quad \dots\dots\dots (6.10)$$

が成立つことを意味する。

1) 虚数部の物理的意味：虚数部は減衰に関係する量である。完全弾性体の場合 $[\eta=0]$ に，媒体が内部減衰機構をもたないにもかかわらず虚数部が現われてくるのは，表面にある震源から波動が無限速に向けて逸散していく現象——所謂エネルギー減衰の存在を意味し，地盤はみかけ上減衰作用を示す。この虚数部は，積分の Cauchy の主値によるものと，Rayleigh pole ε_R まわりの留数項によるものの 2 つの部分から構成されている。前者は実体波による深さ方向への逸散減衰を，後者は Rayleigh 波（表面波）による径方向への逸散減衰をそれぞれ意味している。

2) Rayleigh 波の起り易さ：虚数部中に占める留数項の割合を Rayleigh 波の起り易さを示す一つの尺度と考えると，地盤の応答変位として水平成分の卓越する水平加振より垂直成分の卓越する垂直および回転加振の場合にこの割合の大きいことが特徴になっている。これは Rayleigh 波の振巾分布が水平より垂直方向で大きいこと（例えば，ポアソン比 $\nu_0=1/4$ のときで約 1.47 倍）に関連があると思われる。水平加振では実体波（主として横波）による深さ方向への逸散が，また，垂直および回転加振では Rayleigh 波による径方向への逸散がそれぞれ卓越するのである。

3) 内部減衰の大きさと振動数の影響：Voigt solid の場合，粘性係数パラメータ η の増加は D.G.C. の曲線を低振動数側へ移行させる。すなわち，媒体の内部減衰性が増すと D.G.C. は振動数の影響を受けやすいことがわかる。

次に，Fig. 15 の結果を 4.5 で述べた不連続系の等価係数によって換算し，振動数パラメータ a_0 の関数として Fig. 16 (p.200) の点線 $[\kappa_{el}, c_{el}]$ および Fig. 5 $[m_{el}]$ に示した。

1) 等価剛性 κ_{el} の特徴：加振型の種類にかかわらず振動数とともにほぼ単調に減少する傾向を示している。その減少の程度は地盤の内部減衰の大きさを表わすパラメータ η が大きいほど著しい。振動数の増大とともに，内部減衰作用の影響が地盤剛性の低下として現われてくるのである。とくに回転加振の場合，

相当ひろい低振動数域にわたって η による等価剛性の変化がほとんどみられないのが特徴である。

2) 等価質量 m_{ei} の特徴：並進の場合、剛性 κ_{ei} の低下の割合は振動数パラメータ a_0 の2乗にほぼ比例しているの、これを静的剛性 κ_{ei} と等価質量 m_{ei} に置換えてみる。高振動数域でいくらかの変動はみられるものの、対象としている領域で等価質量 m_{ei} が振動数に無関係にほぼ一定値をとる傾向が認められる。さらに、内部減衰作用の効果をみると、粘弾性地盤の等価質量はみかけ上完全弾性のときの値にパラメータ η にほぼ比例する増分を加えた形とみなして差支えない。一方、回転加振の場合は結果が異なり、等価質量 m_{eR} は振動数とともに低減する傾向を示し、また並進のときほど内部減衰作用の影響が大きく現われてはいない。

3) 等価粘性減衰係数 c_{ei} の特徴：並進の場合には、振動数および内部減衰作用に関しては、上述の等価質量と同じ性状を示す。すなわち、係数 c_{ei} が振動数に無関係に一定値をとり、粘弾性地盤の係数はみかけ上完全弾性のときの値にパラメータ η にほぼ比例する増分を加えた形になっている。一方、回転の場合、内部減衰作用の効果については並進のときと変わらないが、係数 c_{eR} は振動数とともに漸増する。とくに低振動数域では完全弾性地盤の係数が極めて小さく、このような領域では内部減衰作用の効果が著しく現われるという特徴をもつ。

4) 逸散減衰と内部減衰の関係：D. G. C. の解析的表現において、波動の逸散による dissipative な減衰と内部減衰機構に基づく dissipative な減衰を区別することはできない。しかし、計算結果によれば、地盤の示す減衰量はみかけ上完全弾性地盤のさいに生じる逸散減衰に媒質の内部減衰によるものを加えた形になっており、さらに後者は内部減衰作用の大きさを規定するパラメータ η にほぼ比例することがわかる。

5) 従来の不連続系地盤モデルの妥当性：一般的にいえば、等価係数の値が振動数によって変動するという結果は、従来の定数の係数をもつ単純な不連続系モデルのひとつの欠陥を示しているのであるが、上述の解析のように振動数にほぼ独立とみなしうる場合も存在する。通常の構造物、地盤および地震波では一般に振動数パラメータが $0 < a_0 < 2$ の領域に入るので、と

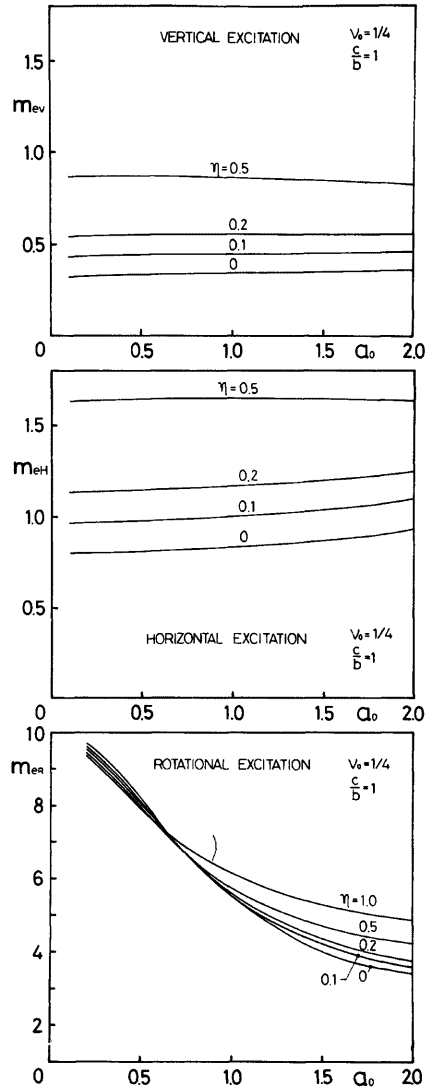


Fig. 5. Equivalent mass of a viscoelastic half-space for various viscosity coefficients, η .

くに並進振動を対象にする場合には Fig. 2 の右のようなモデルが有効であり、基礎の形状・寸法と地盤定数によって、等価な静的剛性、質量および粘性減衰係数の値を与えることが可能である。

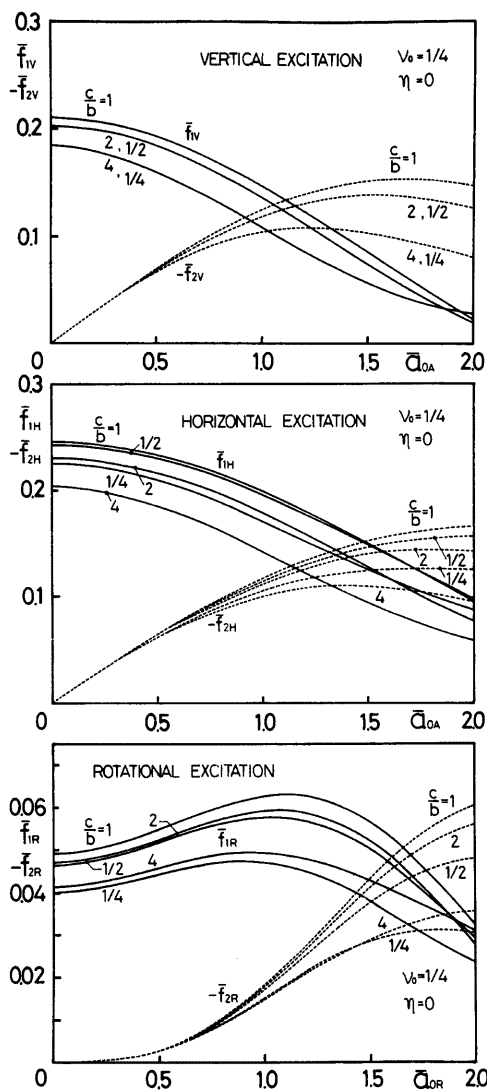


Fig. 6. Dynamical Ground Compliance of an elastic half-space for various shape parameters, c/b .

2° 辺長比 c/b の影響について

標準ケースについて、基礎断面積一定〔並進に対して〕および断面2次モーメント一定〔回転に対して〕の条件のもとに、辺長比 c/b を変えたときの結果を Fig. 6 に示した。ここで図の横軸は次式で与えられる。

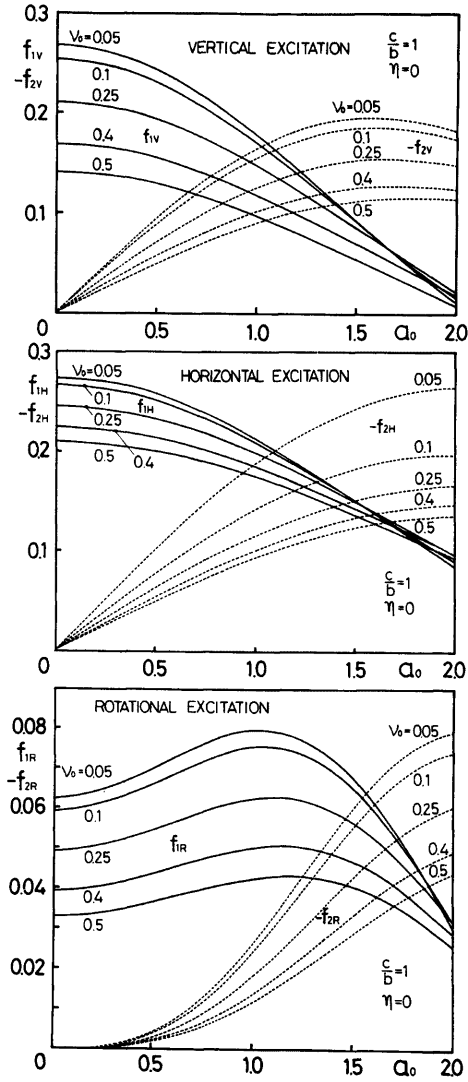


Fig. 7. Dynamical Ground Compliance of an elastic half-space for various Poisson's ratio, ν_0 .

$$\bar{a}_{0A} = \frac{\omega}{c_{s0}} \bar{b}_V = \frac{\omega}{c_{s0}} \bar{b}_H = \frac{\omega}{c_{s0}} \sqrt{bc}, \quad \bar{a}_{0R} = \frac{\omega}{c_{s0}} \bar{b}_R = \frac{\omega}{c_{s0}} (b^2 c)^{\frac{1}{4}} \quad \dots \dots \dots (6.11)$$

1) 等価半巾と S.G.C. による規準化: 上記のような等価半巾 $\bar{b}_i$ を採用すると, 3 種の加振型を通じて, 振動数パラメータ a_0 の変化に対して D.G.C. がほぼ同じような定性的傾向をもつようになる。辺長比 $c/b = 1/2 \sim 2$ 程度の範囲であれば, さらに定量的にもほぼ一致する。ただしもっと細長い断面形になると, 量的にはやや偏りがみられるようになる。ここで定義されている D.G.C. を S.G.C. の値 $\bar{f}_{si}$ で規準化すれば, c/b の変化に対する量的な一致はさらに改善される。

2) 正方形または円形の解からの換算: 言換えると, 極端に細長い断面形の場合を除けば, 断面積 [並進] または断面 2 次モーメント [回転] 一定という条件の下では, 辺長比 c/b は規準化された D.G.C. ($\bar{f}_{11} + i\bar{f}_{22}$)/ $\bar{f}_{si}$ に対してそれほど大きな影響を与えるパラメータではないこと, そして, 長方形の場合の D.G.C. は S.G.C. を媒介にして正方形あるいは円形の解から近似的に換算可能なこと, がわかる。

3° ポアソン比 ν_0 の影響について

標準ケースについて, ポアソン比 ν_0 を変えたときの結果を Fig. 7 に示した。

1) 一般的な特徴: ポアソン比 ν_0 はそのとりうる全領域を考慮しても D.G.C. の定性的な性状を変えるほどのパラメータではないが, 量的には相当大的な影響を与える。図のケースは剪断剛性 μ_0 を固定しようひとつのラメの常数 λ_0 を変える場合に相当するので, ポアソン比の影響は縦波の卓越する垂直・回転加振のときに顕著に現われている。

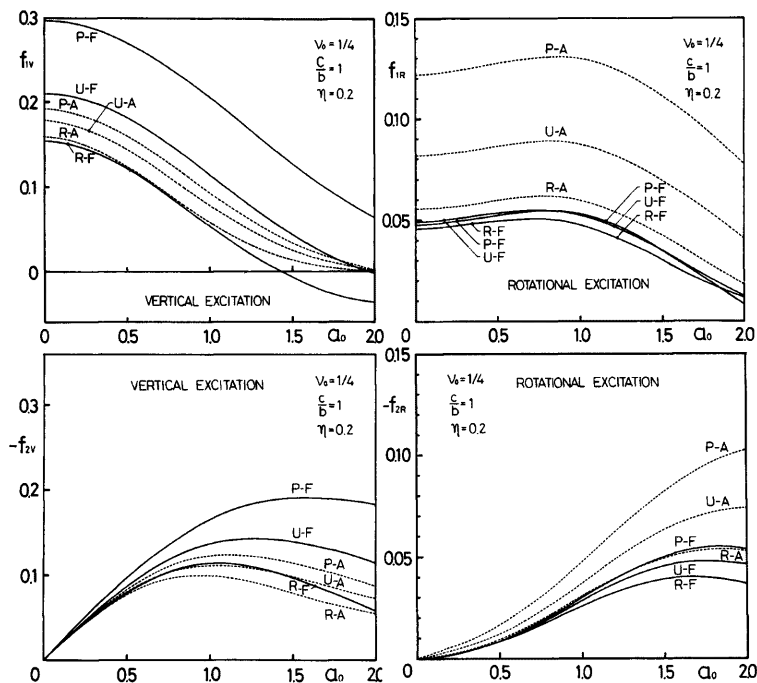


Fig. 8. Dynamical Ground Compliance of a viscoelastic half-space for various combinations of pressure distribution and estimation of foundation displacement.

2) S.G.C. による規準化と換算： $\bar{f}_{si}$ で全体を規準化すれば、D.G.C. の値がかなりよく一致するので、特定のポアソン比に対する解から任意の値のときの D.G.C. を S.G.C. を媒介にして近似的に換算することができる。

4° 基礎版下の圧力分布形と基礎変位の評価法の影響について

粘弾性地盤で垂直および回転加振の場合について、基礎版下の3種の圧力分布形と基礎変位の2種の評価法とを組合わせた結果を Fig. 8 に示した。図中の記号は次の略号を意味する。

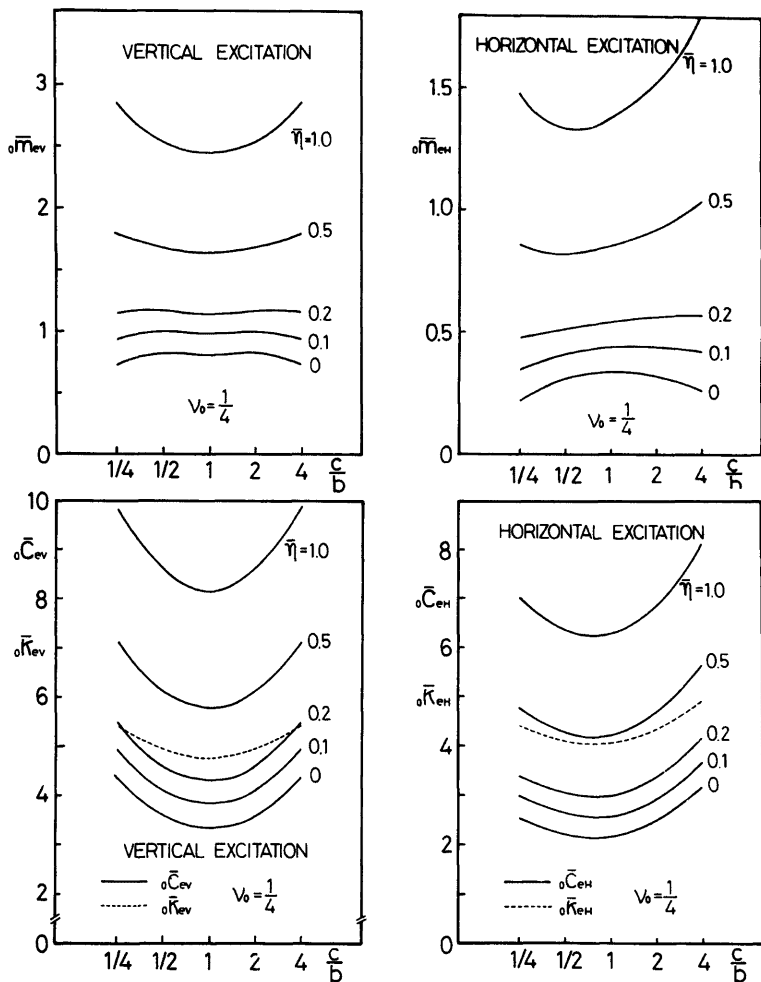


Fig. 9. Equivalent coefficients of a viscoelastic half-space for various viscosity coefficients, η .

- 圧力分布形 $\begin{cases} P; \text{parabolic distribution (放物線分布)} \\ U; \text{uniform distribution (一様分布)} \\ R; \text{approximate static rigid base distribution (近似静的剛版分布)} \end{cases}$
- 変位評価法 $\begin{cases} F; \text{fixed point estimation (定点評価)} \\ A; \text{simple average estimation (単純平均評価)} \end{cases}$

1) 垂直加振の場合の特徴: $R \rightarrow U \rightarrow P$ の順序で圧力分布が中央に集中する形のもののほど, D.G.C. すなわち同一加振力に対する複素変位応答が大きく現われる。基礎中心の変位で評価する定点評価のとき圧力分布形による差は著しいが, 平均評価を行なうとその差が少なくなり, 結果がかなり接近する。

2) 回転加振の場合の特徴: 各点の垂直変位から算定した割線回転角を平均する平均評価のときに, 上と同じ $R \rightarrow U \rightarrow P$ の順序で圧力分布形による差が相当大きく現われる。一方, 端部の垂直変位から算定する定点評価ではその差が少なくなり, 評価法の効果に関して垂直加振のときは逆の結果が得られる。

3) 仮定の重要性: このように基礎下の圧力分布形と基礎変位の評価法は D.G.C. の定性的な性質を変えるものではないが, 定量的にはともに結果にかなり大きな影響を与える因子であるから, 基礎および土の材料の性質や接触状態に応じた適切な選択が必要である。

5° 並進型加振の場合の等価係数について

以上みてきたように, 並進型加振の D.G.C. に限れば, 不連続系モデルの等価係数が通常の領域でほぼ振動数に無関係な定数として換算される。そこで, 振動数パラメータ $0 \leq \bar{\omega}_0 \leq 2$ の範囲で, 平均操作によって定数値として換算した標準ケースの等価剛性 ${}_0k_{el}$, 等価粘性減衰係数 ${}_0c_{el}$ および等価質量 ${}_0\bar{m}_{el}$ [$l = V, H$] を Fig. 9 に示した。これらの結果によれば, ${}_0c_{el}$ および ${}_0\bar{m}_{el}$ は粘性係数パラメータ η の 1 次関数として近似的に表わすことができる。すなわち,

$$\begin{cases} {}_0c_{el} \simeq a_{cl} + b_{cl} \cdot \eta \\ {}_0\bar{m}_{el} \simeq a_{ml} + b_{ml} \cdot \eta \end{cases} \quad [l = V, H], \quad \eta = \frac{c_{s0}}{\sqrt{bc}} \cdot \frac{\mu'}{\mu_0} \quad \dots\dots\dots (6.12)$$

関数形を定める 4 つの係数を辺長比 c/b について示したのが Fig. 10 である。

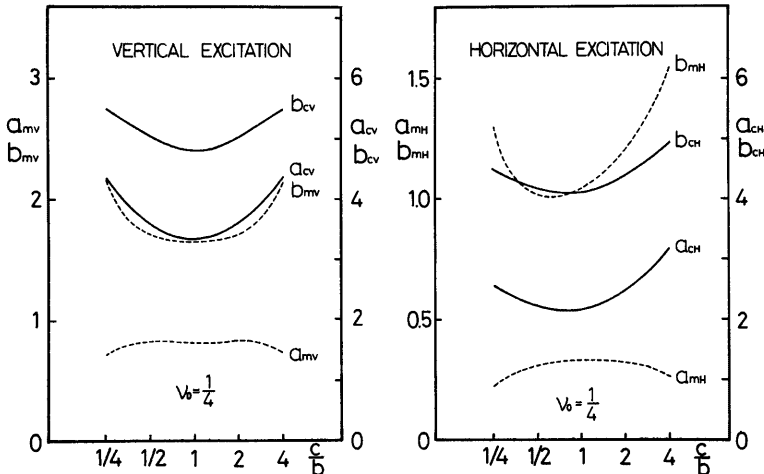


Fig. 10. Coefficients of eq. (6.12).

地盤定数と基礎の形状・寸法を知り、 η と c/b を与えれば、無次元等価係数として Fig. 9 から ${}_0\bar{K}_{el}$ が、Fig. 10 と (6.12) 式から ${}_0\bar{C}_{el}$ と ${}_0\bar{M}_{el}$ が算定できるので、(4.43a) 式を参照すると

$${}_0\bar{K}_{el} = \sqrt{bc} \rho c_{s0} {}_0\bar{K}_{el}, \quad {}_0\bar{C}_{el} = bc \rho c_{s0} {}_0\bar{C}_{el}, \quad {}_0\bar{M}_{el} = (\sqrt{bc})^3 \rho {}_0\bar{M}_{el} \quad [l = V, H] \quad \dots (6.13)$$

より、等価係数の有次元量をポアソン比 $\nu_0 = 1/4$ の場合について定めることができる。他のポアソン比のときには、いま得られた値に (5.5) 式または Fig. 4 を用いて算定される $(f_{s1})/(f_{s1})_{\nu_0=1/4}$ を乗じれば近似的に求められる。

6.2 剛基盤上の表層地盤

A. 振動数方程式の解

(5.8) 式の振動数方程式のなかで、Voigt solid としての粘弾性の性質を表わす記号をここでは次のように定める。

$$g_d = \frac{1}{1 + i\eta_{H1}a_1}, \quad g_s = \frac{1}{1 + i\eta_{H2}a_1} \quad \dots (6.14)$$

ここに

$$\eta_{H1} = \frac{c_{s0}}{H} \cdot \frac{\lambda' + 2\mu'}{\lambda_0 + 2\mu_0} = n^2 \left(\frac{\lambda'}{\mu'} + 2 \right) \eta_{H2}, \quad \eta_{H2} = \frac{c_{s0}}{H} \cdot \frac{\mu'}{\mu_0}, \quad a_1 = \frac{\omega}{c_{s0}} H \quad \dots (6.15)$$

一般に (5.8) 式は無限個の複素根をもっているのを、これを

$$\xi_{0k} = R(\xi_{0k}) + iI(\xi_{0k}) \quad [k=1, 2, \dots] \quad \dots (6.16)$$

で表わす。ここに、 R, I ；実数部および虚数部を意味する演算子、である。その実数部は完全弾性の媒体内を伝播する横波の速度 c_{s0} と Rayleigh 波あるいは Love 波のあるモードの位相速度 (phase velocity) c_p との比を与え、虚数部はそのモードの波の単位伝播距離についての振巾の減衰常数 (attenuation constant) α を与える。なお、完全弾性の場合 $[\eta_{H1} = \eta_{H2} = 0]$ には (5.8) 式は有限個の実根をもつようになる。

完全弾性のとき原方程式は実数値関数となり、関数値の符号の変化を逐次調べながら進む近似求根法によって比較的簡単に実根を求めうが、粘弾性のときには双曲線関数を含む複素超越方程式となって、その複素根を得るのは容易ではない。ここでは完全弾性の解を初期値とする Newton-Raphson 法 (逐次近似法) を適用して解を求めた。

振動数方程式の解が求められると、これより下記の諸量を各々右端に示す無次元量として計算することができる。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{attenuation constant} & \alpha = I(\xi_{0k}) \quad ; \quad \frac{\alpha}{\omega} c_{s0} = I(\xi_{0k}) \\ \text{wave number} & R(\xi_{0k}) \quad ; \quad R(\xi_{0k})H = R(\xi_{0k})a_1 \\ \text{Hamiltonian} & \omega = \omega(R(\xi_{0k})) \quad ; \quad \omega \frac{H}{c_{s0}} = a_1(R(\xi_{0k})H) \\ \text{phase velocity} & c_p = \frac{\omega}{R(\xi_{0k})} \quad ; \quad \frac{c_p}{c_{s0}} = \frac{1}{R(\xi_{0k})} \\ \text{group velocity} & c_g = \frac{d\omega}{dR(\xi_{0k})} \quad ; \quad \frac{c_g}{c_{s0}} = \frac{da_1}{d[R(\xi_{0k})H]} \end{array} \right. \quad \dots (6.17)$$

ここに

$$R(\xi_{0k}) = \frac{\omega}{c_{s0}} R(\xi_{0k}), \quad I(\xi_{0k}) = \frac{\omega}{c_{s0}} I(\xi_{0k}) \quad \dots (6.18)$$

表層のポアソン比 $\nu_0 = 1/4$ ($n^2 = 1/3$) かつ $\lambda'/\mu' = 1$ のときの計算結果を、Rayleigh 波の 5 つのモードおよび Love 波の 3 つのモードについて Figs. 11~13 に示した。方程式の形から一つの複素根 ξ_{0k} に対して argument に π だけ差のあるもう一つの根 $-\xi_{0k}$ が存在することがわかるが、ここでは $-\pi \leq \arg(\xi_{0k}) \leq \pi$ を満たすもののみを示した。Fig. 11 は、複素根の実数部および虚数部を振動数 ω と層厚 H に比例する

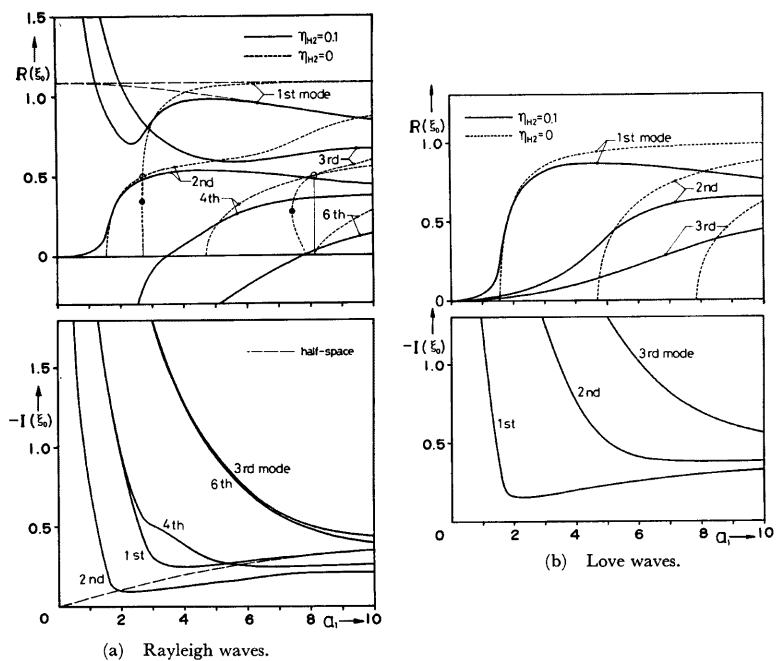


Fig. 11. Roots of the frequency equation of a stratum, $\nu_0=1/4$ and $\lambda'/\mu'=1$.

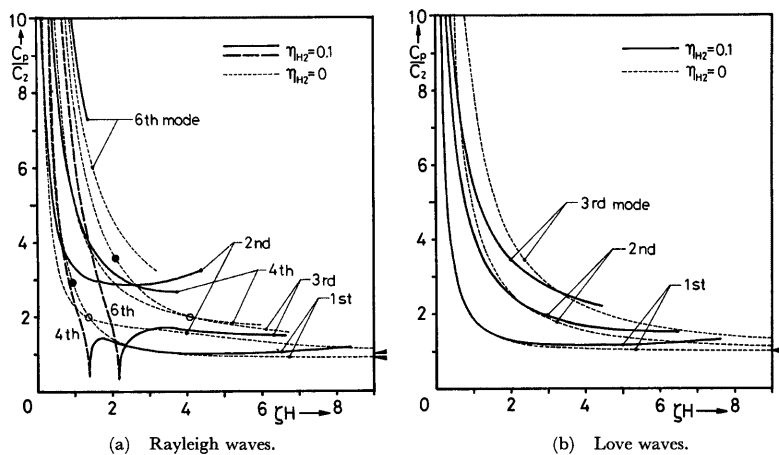


Fig. 12. Phase velocity of surface waves in a stratum, $\nu_0=1/4$ and $\lambda'/\mu'=1$.

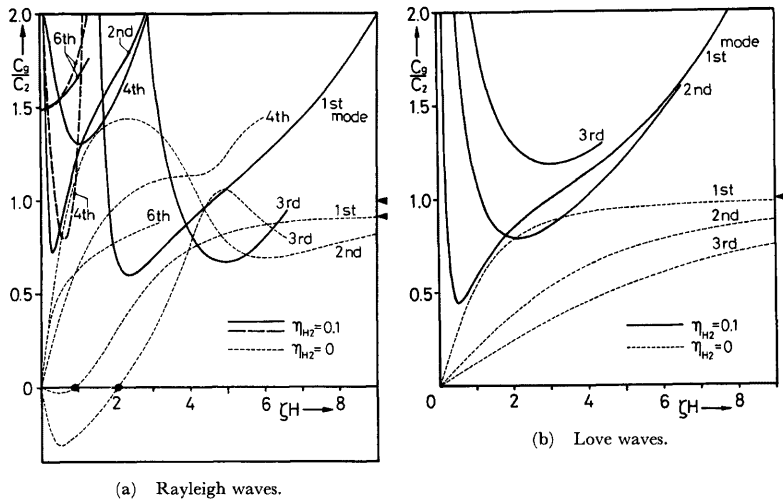


Fig. 13. Group velocity of surface waves in a stratum, $\nu_0=1/4$ and $\lambda'/\mu'=1$.

パラメータ a_1 の関数として図示したものである。図中点線は完全弾性層地盤の解を、破線は半無限粘弾性地盤（このとき Love 波は存在しない）を表わしている。また、Fig. 12 は位相速度 c_p を、Fig. 13 は群速度（group velocity） c_g を、それぞれ横波速度 c_{s0} に対する比の形で、層厚 H と wave number $R(\zeta_{0k})$ [以下本節ではこれを ζ と略記する] との積を横軸にとって図示したものである。図中点線は完全弾性層地盤の解を示す。Fig. 12 (a) 中の破線は第3象限にあるものを第1象限に、Fig. 13 (a) 中の破線は第2象限にあるものを第1象限にそれぞれ移して示したものを意味している。

これらの図より表面波の性質に関して次のようなことがわかる。

1° Rayleigh 波の性質について

1) 分散性：前節 6.1 の半無限地盤とは異なり、層地盤になると、完全弾性・粘弾性にかかわらずともに wave number あるいは波長によって速度が異なるという所謂分散（dispersion）の現象がみられ、かつ無数のモードの波が存在しうる。

2) 完全弾性の場合の特徴：Fig. 11 (a) にみるように、層厚と振動数の積に比例するパラメータ a_1 とともに実根 ξ_{0k} の数が増し、現われる Rayleigh 波のモードが多くなるが、実根が存在しないような、言換えると Rayleigh 波が全く現われないような a_1 の領域 $0 < a_1 < a_{1cr}$ が存在する。ここに $a_{1cr} = \pi/2$ で、これは層厚に等しい長さをもつ一端固定・他端自由な棒の剪断振動の基本固有振動数 $\omega_{cr} = \pi\sqrt{\mu_0/\rho}/2H$ に対応する値である。また、 a_1 あるいは ζH が増加すると、1 次モードの位相速度および群速度は半無限地盤の Rayleigh 波の速度に、その他のモードではともに横波の速度に近づくことがわかる。

3) 粘弾性の場合の特徴：Fig. 11 (a) に示されるように、完全弾性るとき Rayleigh 波が現われなかった a_1 の小さい領域も含めて、全領域であらゆるモードの波が存在しうる。しかし、各モードともに、完全弾性るときにそのモードの Rayleigh 波が存在しない a_1 の領域では、虚数部 $I(\xi_{0k})$ すなわち減衰常数 α が a_1 の減少とともに急速に増大しているので、このような a_1 の小さい領域では、これらのモードの Rayleigh 波は伝播中にすぐ消滅し地盤の特性に及ぼす影響は小さいと考えられる。また、完全弾性るとき、位相および群速度はあらゆるモードについて ζH の全領域で存在するのに対して、粘弾性になると様相が異なり、奇数次のモードには位相および群速度がともに存在しないような ζH の領域 $0 < \zeta H < (\zeta H)_{k,cr}$ が現わ

れてくる。

4) 重複根の性質と棒の固有振動数との対応：完全弾性のときには次のような 2 種類の重複根が存在する。

③ 同じモードのなかで重複根をもつ場合——それらのモードの群速度が零になるとき [図中●印の点]

④ 異なるモードの間で重複根をもつ場合——それらのモードの位相速度が等しくなるとき [図中○印の点]

後者の場合の位相速度は横波速度 c_{s0} のちょうど 2 倍で、しかもそのときの a_1 はあるモードで $\xi_{0k}=0$ となる a_1 の値に一致している。例えば Fig. 11 (a) において、1 次および 2 次のモード (または 3 次および 4 次のモード) の間に重複根が生じているときの a_1 は、1 次のモード (または 6 次のモード) の $\xi_{0k}=0$ における a_1 の値に等しい。さらに、これらの a_1 は層厚に等しい長さをもち表層の境界条件に対応する一端固定・他端自由な棒の縦振動の固有振動数に一致している [$a_1=(2m+1)/2n, m, n$; 整数]。また同図において、各モードの分散曲線が横軸と交わるのは wave number $\zeta=0$ の点で、波長が無限大の場合である。この点の a_1 から算出した振動数は、層厚に等しい長さをもち一端固定・他端自由という同じ境界条件をもつ棒の、縦振動および剪断振動の固有振動数に一致し、これらはまた後述 (p.195) の第①種の共振振動数に相当する。

2° Love 波の性質について

1) 分散性：Rayleigh 波と同じように、完全弾性および粘弾性のいずれの地盤でも分散の現象がみられ、かつ無数のモードの波が存在しうる。

2) 完全弾性の場合の特徴： a_1 の変化に伴う実根 ξ_{0k} の傾向は Rayleigh 波のそれと同様で、やはり Love 波が全く存在しないような a_1 の領域 $0 < a_1 < a_{1cr}$ が現われ、この a_{1cr} は Rayleigh 波のときと同じ値をとる。位相速度は横波速度より常に大きく、 a_1 あるいは ζH の単調な減少関数になっているが、群速度は逆に単調な増加関数で横波速度より常に小さい。 a_1 あるいは ζH の増加とともにこれら 2 つの速度はともに横波速度に近づく。

3) 粘弾性の場合の特徴：Fig. 11 (b) に示されるように、Rayleigh 波のときと同様に a_1 の全領域であらゆるモードの Love 波が存在しうる。しかし、この場合には複素根が第 4 象限に入るようなことは起らない。また、 a_1 の減少に伴う虚数部の挙動も Rayleigh 波のときと同様で、各モードともに、完全弾性のときにそのモードの Love 波が存在しない a_1 の領域で、減衰常数 α が急速に増大しているため、そのモードの波動が地盤の特性に及ぼす影響は少ないと考えられる。なお、Rayleigh 波のときとは異なり、位相および群速度が存在しないような ζH の領域はこの場合には現われない。

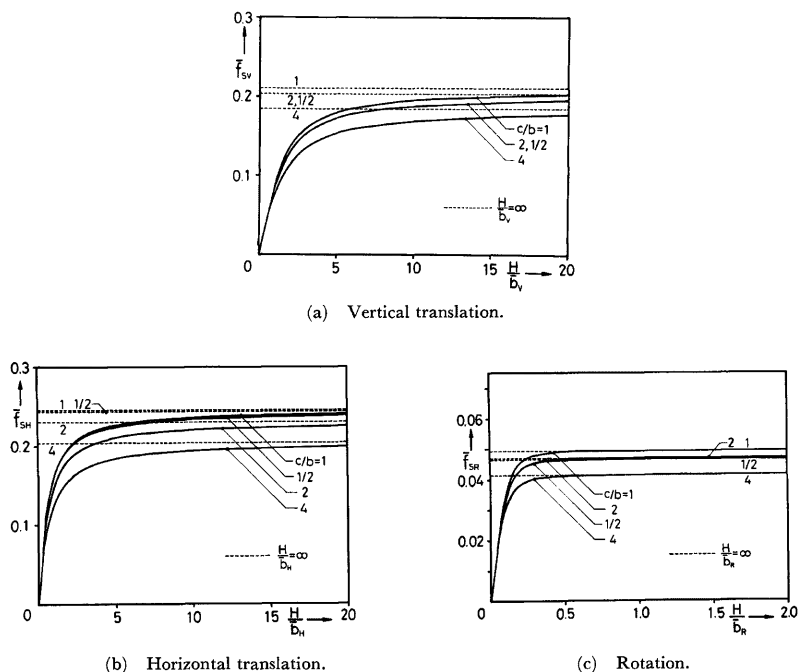
4) 棒の固有振動数との対応：完全弾性のとき、 $\xi_{0k}=0$ すなわち wave number $\zeta=0$ あるいは波長が無限大になる a_1 の値 [$a_1=(2m+1)/2, m$; 整数] から算出した振動数は、層厚に等しい長さをもつ一端固定・他端自由な棒の剪断振動の固有振動数に一致する。なお、Rayleigh 波にみられるような重複根は Love 波には存在しない。

B. Static Ground Compliance

{一様分布/定点评価}を採用し、表層のポアソン比 $\nu_0=1/4$ で、3 種の加力型に対して (6.7) 式で定義した等価半巾 $\bar{b}_i$ [$i=V, H, R$] を用いた場合の S.G.C. を Fig. 14 に示した。図中の点線は半無限地盤の解である。

1) 層厚と基礎巾の比の影響：全体を通じての傾向として、 $H/\bar{b}_i$ が 0~3 程度の層厚の小さい範囲で、S.G.C. の値が急速に大きくなり、さらに層厚が増加すると基礎の及ぼす影響が次第に少なくなって、半無限地盤の解へ漸近する。この層厚の増加による半無限状態への収束の早さは、2 つの並進型加力の間にほとんど差がなく収束はかなり遅いものに対して、回転型で極めて早いのが特徴であり、 $H/\bar{b}_i$ が 4 程度すなわち平均基礎巾の 2 倍程度の層厚になれば、半無限地盤の解にほぼ一致する。

2) 基礎断面積または断面 2 次モーメントの影響：S.G.C. を無次元量として表わした Fig. 14 によれば、 $H/\bar{b}_i$ の小さいところではほぼ直線的に増加し、また $H/\bar{b}_i$ の大きいところではほぼ一定とみなしうる。そ

Fig. 14. Static Ground Compliance of a stratum for various shape parameters, c/b . ($\nu_0=1/4$.)

ここで、 $\bar{f}_{st}$ の無次元式 [(6.6)式] を参照すると、基礎断面の形状が不変のとき、S.G.C. の有次元量と基礎断面積（または断面2次モーメント）との間に次のような関係が近似的に成立っていることがわかる。すなわち、基礎巾に比べて層厚が小さく図の直線関係が成立つような範囲にあるときは、並進型では基礎断面積に、回転型では断面2次モーメント（断面積ではその2乗）にそれぞれ逆比例し、また層厚が大きく半無限地盤とみなしうようなとき、並進型では基礎断面積の平方根に、回転型では断面2次モーメントの3/4乗（断面積では3/2乗）にそれぞれ比例するという近似的な関係がある。なお $\bar{e}_{st}=1/\bar{f}_{st}$ であるから、この系の静的剛性について考えると上述の逆数の関係が成立する。

3) 基礎断面形の影響：断面積 [並進] または断面2次モーメント [回転] を一定に保つとき、断面形の変化に伴う S.G.C. の傾向は前節の半無限地盤のときと変わらない。ただし、平均基礎巾に比べて表層が比較的薄い地盤では各加力型とも断面形による差が少ない。

C. Dynamical Ground Compliance

1° 共振現象について

ここで扱った層を成す地盤について半無限地盤と異なる主要な特徴のひとつは、表層の両境界面における波動の完全反射の現象に起因する共振現象の存在である。

1) 完全弾性の場合の特徴：共振振巾が発散する次の3種の共振振動数が存在する。

第①種： $\xi=0$ の近傍で D.G.C. を表わす積分が発散する場合——層厚に等しい長さをもつ棒の固有振動数に一致するとき

[1] 垂直加振

$$a_1 = \frac{2m+1}{2n} \pi \quad \text{あるいは} \quad \omega = \frac{2m+1}{2H} \pi \sqrt{\frac{1}{\rho} \cdot \frac{(1-\nu_0)E}{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)}} \quad \dots\dots\dots (6.19)$$

；表層の層厚に等しい長さの一端固定・他端自由な棒の縦振動の固有振動数

[2] 水平加振

$$a_1 = \frac{2m+1}{2} \pi \quad \text{あるいは} \quad \omega = \frac{2m+1}{2H} \pi \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} \quad \dots\dots\dots (6.20)$$

；上と同じ棒の剪断振動の固有振動数

[3] 回転加振 なし

ここに、 E_0 ；ヤング係数， m ；整数，である。

上記の關係が成立つとき， ξ を正の微小量にとれば，たとえば垂直加振の場合の(6.19)式を用いると

$$\left[\coth(\sqrt{\xi^2 - n^2} a_1) \right]_{a_1 = \frac{2m+1}{2n} \pi} \simeq -i \cot \left\{ \frac{2m+1}{2} \pi \left(1 - \frac{\xi^2}{2n^2} \right) \right\} \simeq -i \frac{2m+1}{2} \pi \cdot \frac{\xi^2}{2n^2} \quad \dots\dots\dots (6.21)$$

のように変形できるから，(5.8a)式の $F(\xi)$ は ξ^{-2} のオーダーになる。ここで $\varepsilon_1 > \varepsilon > 0$ という2つの正の微小量を取り，D.G.C.の解析的表現(5.12)式を変形すると次式が導かれる。

$$f_{1V} = \frac{a_0}{\pi^2} \left[\frac{c \left(\frac{2m+1}{2} \pi \frac{b}{H} \right)^2 \cot \frac{2m+1}{2n} \pi}{(4n^2+1) + \frac{2m+1}{4n} \pi \cot \frac{2m+1}{2n} \pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_1} \frac{d\xi}{\xi} \right] + P \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \frac{\xi \sqrt{\xi^2 - n^2}}{F(\xi)} T_V(\xi) \mathbf{R}_{1V}(a_0 \xi) d\xi \right] \quad \dots\dots\dots (6.22)$$

上の積分の第1項は発散するから，(6.19)式の關係が成立つときD.G.C.の実数部 $f_{1V} \rightarrow \infty$ となる共振現象が起こる。同様な計算によって，水平加振の場合も(6.20)式の關係が成立つとき(5.13)式の f_{1H} の積分が $\xi=0$ の近傍で発散することがわかる。これらの共振振動数はすべてパラメータ n と $a_1 = a_0 \cdot H/b = \omega H/c_{s0}$ の値によってのみ求まるから，層厚 H と地盤定数（密度 ρ ，剪断弾性係数 μ_0 およびポアソン比 ν_0 ）のみの関数となり，基礎の形状や寸法には無關係に定まる。またこの共振振動数は，振動数方程式の解の項で述べたように， $\xi=0$ すなわち wave number $\zeta=0$ あるいは波長無限大のときの Rayleigh 波および Love の振動数方程式(5.8)式の解に一致する。

第②種；振動数方程式 $F(\xi)=0$ が同じモードのなかで重複根をもつ場合——そのモードの群速度が零になるとき

第③種；振動数方程式 $F(\xi)=0$ が異なるモードの間で重複根をもつ場合——それらのモードの位相速度が等しくなるとき

A項で述べたように，Rayleigh 波の振動数方程式 $F(\xi)=0$ は上記のような2種の2次の重複根をもっている。このとき $F(\xi_{0k}) = [dF(\xi)/d\xi]_{\xi=\xi_{0k}} = 0$ が成立つので，D.G.C.の解析的表現(5.12)～(5.14)式を参

Table 1. The values of frequency parameter a_0 at resonant frequencies within $0 \leq a_0 \leq 2$.

the kind of resonant frequency	H/b	type of excitation		
		vertical	horizontal	rotational
①	1	—	1.5708	—
	2	1.3603	0.7854	—
	4	0.6802	0.3927, 1.1781, 1.9635	—
②	1	—	—	—
	2	—	1.3506	—
	4	0.6753	—	1.8637
③	1	—	—	—
	2	—	1.3603	—
	4	—	0.6802	—

照すると、この根の近傍ではその虚数部が発散する。また一般に Cauchy の主値も発散するので、 $f_{12}f_{31} \rightarrow \infty$ となる共振現象が生じる。Fig. 11～13 の●印および○印がそれぞれ第②種および第③種の共振振動数の位置を表わし、これらはどの加振型にも共通し、振動数と層厚の間に特定の関係が成立つときに生じる。

これら3種の共振振動数のうち、 $0 \leq a_0 \leq 2$ の範囲に現れてくるものを a_0 の値で示せば Table 1 のようになる。なお、第③種の共振振動数と垂直加振のときの第①種のそれが一致するのは興味深い現象である。

2) 粘弾性の場合：媒質自身のもつ内部減衰作用によって共振振巾は有限となるが、その共振振動数を解析的に表現するのは困難である。

2° 減衰機構について

1) 完全弾性の場合の特徴：(5.12)～(5.14) 式に示されるように、Cauchy の主値には虚数部がなく、D.G.C. の虚数部は各モードの表面波に関する留数項の和のみとなる。すなわち、エネルギー減衰は表面波によって径方向にのみ起こり、剛な基盤の境界面で波動が完全反射するため深さ方向には起こりえないのである。振動数が増して一つの共振点を越えると新たに高次のモードの表面波が現われてきて、この共振点の高振動数側での近傍でエネルギー減衰の量が増加する。また Fig. 11 によれば、A 項で述べたところにより、振動数方程式に実根が存在しないような a_1 の領域 $0 < a_1 < a_{1cr}$ が、2種の表面波に共通に存在する。したがって、完全弾性層地盤の場合、最初の共振点に至るまでの低振動数域において表面波が存在せず、虚数部は零となり、地盤は減衰作用を全く示さない。

2) 粘弾性の場合の特徴：振動数方程式の根はすべて複素数となり、 $\text{Im}(\xi_{0k}) \leq 0$ とすれば積分平面上の第3または第4象限に入る。実軸上には特異点が存在しないので、この軸上で積分の評価を行なうのが便利であるが、その結果は完全弾性のときのように Cauchy の主値と留数項の和という分離された形では得られない。しかし、複素平面上で適当な積分路を選べばこの2つの和の形に分離することは可能である。ところで、D.G.C. の解析的表現に含まれる無限積分は、あらゆる wave number の波が関与する量の総和を求めるという意味をもっている。完全弾性のときには、wave number がある定まった値のときのみ虚数部が存在したのに対して、この場合には内部減衰作用が加わるので、あらゆる wave number のとき常に虚数部が現われる。さらに留数項は一般に複素数となる。したがって、D.G.C. をこのように表面波による波動の逸散および消散に関係する留数項と、実体波の逸散および消散に関係する Cauchy の主値とに形式的に分離することはできても、波動の逸散による減衰 (diffusion) と媒質自身のもつ消散作用による減衰 (dissipation) とに物理的に区別して対応づけることはできない。しかし、数値的な表現においては、みかけ上、完全弾性のときに生じる波動の逸散による減衰に、消散による減衰を加えた形にすることができ、後者の減衰量は一般に内部減衰作用の大きさを規定する粘性係数パラメータ η とともに増加する。

3) 加振型と生成される表面波の種類：層を成す地盤では完全弾性のときにもまた粘弾性のときにも、Rayleigh 波および Love 波という2種の表面波が存在しうる。しかし、外力として与える基礎下の圧力分布の作用方向に対応して、垂直および回転加振では Rayleigh 波のみを生じるが、水平加振の場合は Love 波がさらに付加わって2種の表面波がともに存在する。ここにこの水平加振型の他と異なる特徴がある。

3° 粘性係数パラメータ η の影響について

以下本節に示す算例では、{一様分布/定点評価}、表層のポアソン比 $\nu_0 = 1/4$ 、粘性常数比 $\lambda'/\mu' = 1$ 、正方形基礎 $c/b = 1$ を標準ケースとする。このとき縦波と横波に関する粘性係数が等しくなる [(6.10) 式参照]。

Fig. 15 に、 $H/b = 4$ の場合について、粘性係数パラメータ $\eta = \eta_a = \eta_s$ が D.G.C. に及ぼす影響を実線で示した。図中の点線は半無限地盤のときの解、縦の細い実線は完全弾性の場合の共振振動数の位置を表わし、その上端に記した① k [$k = 1, 2, 3$] なる記号は H/b または $H/\bar{b}_i$ が k なる値をとるときの共振点の位置と種類① (1°の項を参照) を示す。以下本節ではこの表記法にしたがう。

1) 共振点近傍の性質：完全弾性のとき① k で示す共振点で振巾が無限大に発散するが、粘弾性になると内部減衰作用によって共振振巾は有限となり、粘性係数パラメータ η の増加とともに共振点付近の変動が

緩かになって、共振点は次第に低振動数側へ移行する。ここで設定した Voigt 型のモデルでは、内部減衰作用の効果が粘性係数と振動数に関する 2 つのパラメータの積 ηa_0 に比例するので、振動数が大きくなるほどその効果は著しく現われる。したがって、高振動数域に入るとともに、共振振巾の山が次第に平坦化され遂には消滅し、とくに最低次の共振振巾が顕著に現われている。

2) 内部減衰作用の効果: ηa_0 が大きくなると層地盤の解が半無限地盤の解に近づくことがわかる。このような領域では、地表面にある加振力の作用する震源から生成された波動は、内部減衰作用のため基盤に到達する以前にほとんど消滅し、そこからの反射波が D.G.C. を定義している位置の震源に及ぼす影響が小さくなるからである。この減衰作用は、垂直および回転加振よりも水平加振の場合に効果が大きく現われ、半無限地盤の解への収束が早いという特徴がみられる。この理由として、①水平加振の場合にのみ Love 波が生起し、その減衰常数 α は一般に Rayleigh 波より大きいこと、②他の 2 つの加振型とは異なり、この加振型は横波を誘発しやすい形式で、横波は縦波より波長が短く、基盤の影響を受けにくいこと、また ηa_0 が大きいほど 2 種の実体波の波長の差は大きくなること、があげられる。

3) 消散と逸散の減衰機構: 完全弾性のとき表面波が全く存在しないような振動数域にも、粘弾性の場合になると表面波が現われ、波動の逸散と消散現象による 2 つの減衰機構が共存する。しかし、このような低振動数域では、各モードとも減衰常数 α が極めて大きく、波動の進行とともに表面波は直ちに消滅してしまうので、消散による減衰機構が極めて優勢であり、波動の逸散に起因する減衰量はやはり少ない。このように最初の共振点に至る低振動数域において、虚数部で示される減衰のうち、波動の逸散に起因するエネルギー減衰が極めて少ないあるいは全く存在しないことは、共振現象の存在とともに、層を成す地盤が半無限地盤と異なる主要な特徴のひとつである。

次に、Fig. 15 の値を Fig. 2 の左の不連続系モデルの等価係数で置換表現した結果を Fig. 16 に示した。

1) 共振点近傍の性質: 層地盤に固有な共振現象の存在によって、共振点近傍の高振動数側で等価剛性 κ_{el} の低下が、また最初の共振点近傍は例外として、低振動数側で等価粘性減衰係数 c_{el} の低下がみられる。これらの局所的な低下は粘性係数パラメータ η の小さいものほど著しく、完全弾性になると少なくともひとつの等価係数が共振点で零になる。そして、 ηa_0 の増加とともに、このような局所的な低下の傾向はその位置を共振点から離れる方向に移しつつ次第に消滅し、半無限地盤の解に近づく。

2) 減衰機構と等価粘性減衰係数: 内部減衰作用が優勢な最初の共振点に至る低振動数域において、粘性減衰係数 c_{el} がほぼ平坦であることが、3 種の加振型を通じての特徴である。3 種の加振型とも、最初の共振点の近傍では a_0 とともに c_{el} が急増する。これより高い振動数域に入ると、表面波の逸散による減衰作用が顕著になるため、地盤の示す減衰性が大きく現われてくるのであろう。そして、 ηa_0 が大きい領域になると、半無限地盤にみられるように、回転加振では緩かな増加関数の傾向を、並進型ではほぼ平坦な傾向を示すようになる。

3) 不連続系による従来の基礎地盤モデルとの対比: このように、連続体として扱った基礎地盤の動特性に関して、とくに層をなす地盤の場合に、共振点の近傍で振動数による等価係数の変動が強く現われていることは、地盤を簡単なモデルに抽象するさいに、モデルに付与する特性値を振動数に無関係な定数として与える方法の欠陥を示すものである。

4° 層厚と基礎巾の比 H/b の影響について

標準ケースで $\eta=0.5$ の場合について、層厚と基礎巾の比 H/b の及ぼす影響を Fig. 17 に示した。

1) 加振型による特徴: D.G.C. は基礎地盤の動特性を地表面における加振位置での変位応答という集約された形で捉えようとするものである。したがって、基礎巾に比べて表層の層厚が相対的に大きくなると、波動の逸散と消散現象のために基盤からの反射波が加振位置に及ぼす影響は小さくなるので、層地盤の解は半無限地盤の解に近接する。この H/b の増加による半無限地盤の解への収束の程度は、並進型の加振に較べると回転の場合に著しく早いことが特徴的である。しかし、前項 3° 前半の 2) で述べたように、内部減衰作用の効果と波長の効果が水平加振の場合に大きく現われるため、 ηa_0 の大きい領域になると、他の 2 つの加

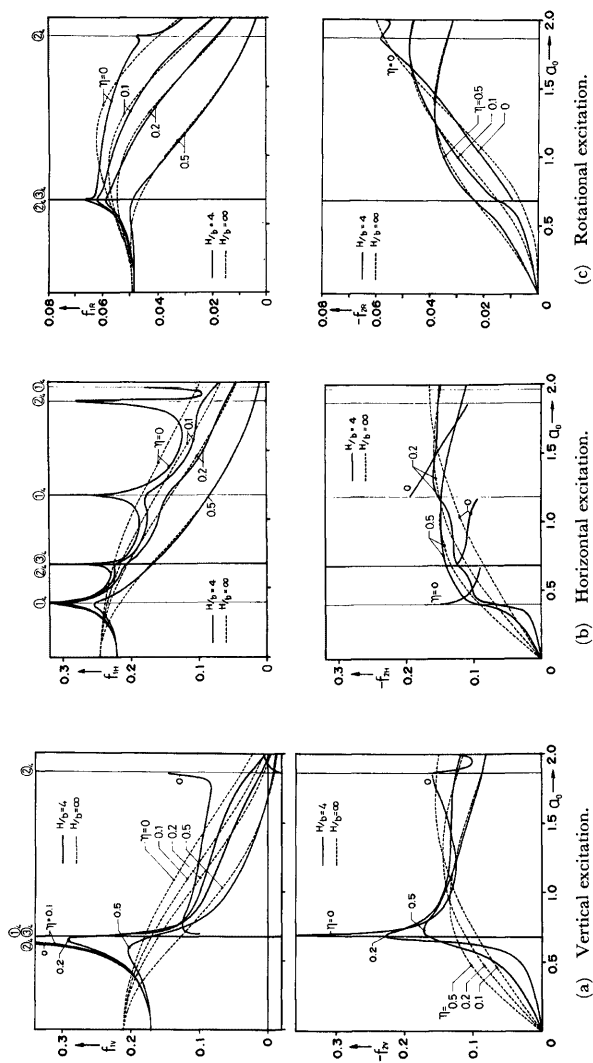


Fig. 15. Dynamical Ground Compliance of a stratum and a half-space for various viscosity coefficients, η .
($c/b=1$, $\nu_0=1/4$, $\chi'/\mu'=1$ and $H/b=4$ and ∞ .)

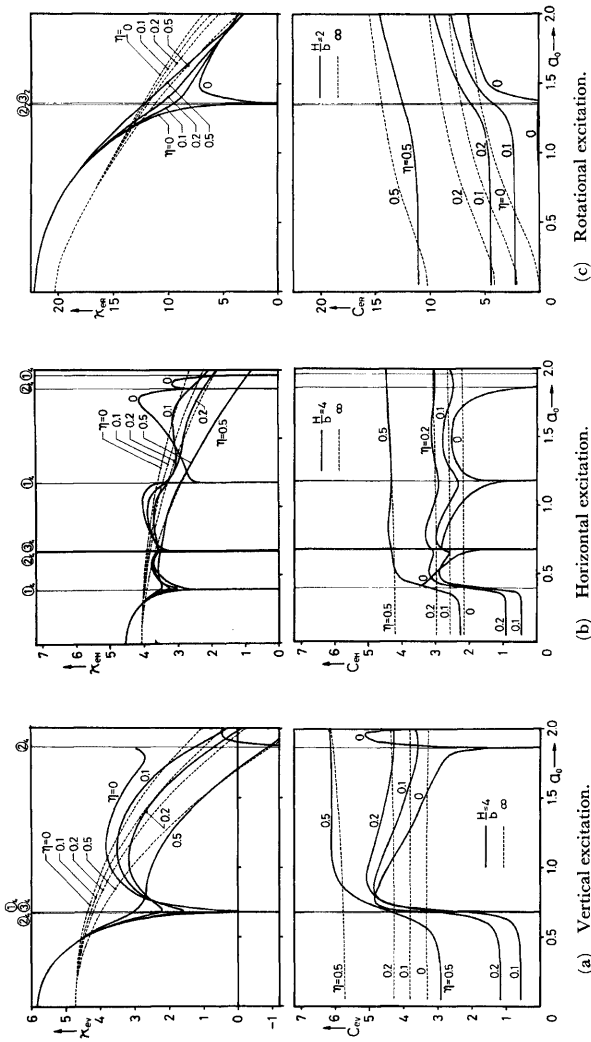


Fig. 16. Equivalent coefficients of a stratum and a half-space for various viscosity coefficients, η .
($c/b=1$, $\nu_0=1/4$, $\lambda'/\mu'=1$ and $H/b=4$ and ∞ .)

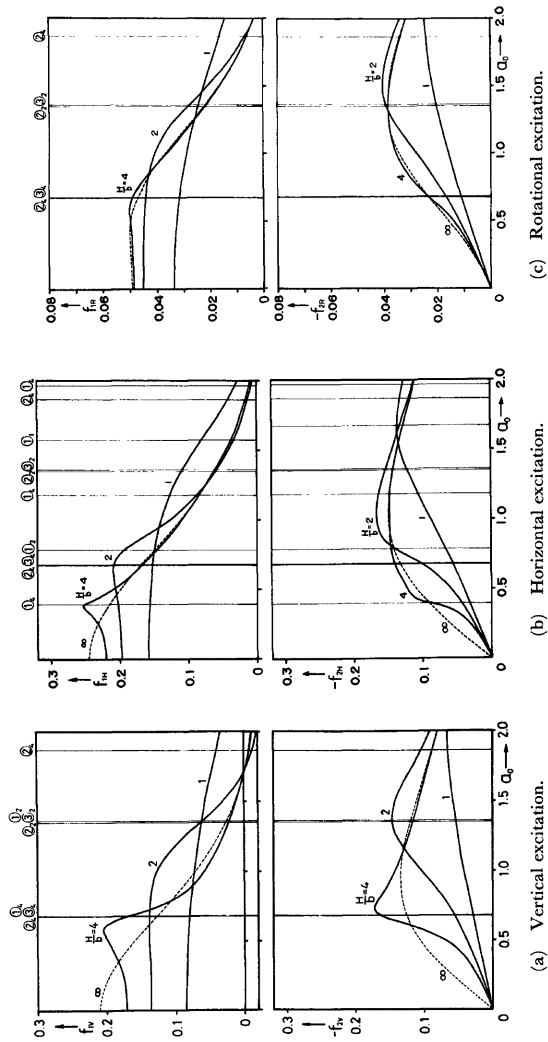


Fig. 17. Dynamical Ground Compliance of a stratum and a half-space for various thickness-width ratio, H/b .
($c/b=1$, $\nu_0=1/4$, $\lambda'/\mu'=1$ and $\eta=0.5$.)

振型より水平加振の方が早く収束するようになる。

② 加振型による相異が生じる理由：基礎下の載荷面に仮定した加振方向の圧力が、基盤からの影響を累積的な形で受けやすい一様分布の並進型加振の場合と、全体として打消し合うような効果をもつと考えられる、軸に関して逆対称な分布の回転加振の場合の違いによるのであろう。

5° 層地盤と半無限地盤との比較について

以上いくつかの観点から S.G.C. および D.G.C. のもつ特性を検討してきたが、最後に層地盤と半無限地盤の比較という観点からこれまでの結果をまとめてみよう。

1) 半無限地盤とは異なる層地盤の特徴：層地盤の示す動特性が半無限地盤と異なる主要な特徴として、

① 層厚と地盤常数の関数である数種の共振振動数が存在し、粘弾性のときには内部減衰作用のため有限な共振振巾が、完全弾性になると剛な基盤の存在のため無限大に発散すること

② 最初の共振点に至るまでの低振動数域で、波動の逸散によるエネルギー減衰が極めて少ない（粘弾性のとき）かあるいは全く存在しない（完全弾性のとき）こと

をあげることができる。

2) 層地盤の解が半無限地盤の解に近接する条件：ところが、基礎巾に較べて層厚が大きくなると、波動の逸散による地盤のみかけの減衰作用が少ないような振動数域が狭くなり、同時に共振点付近の変動も鋭いピークをもつようになってこの山の巾も狭くなる。さらに、内部減衰作用が大きくなると、共振振巾の山は平坦化され、低振動数域でもこの波動の消散による減衰の占める割合が大きくなる。このように H/b と η が大きくなるとともに、波動の逸散と消散現象が相俟って基盤の及ぼす影響は小さくなり、層地盤の D.G.C. が全振動数域で半無限地盤の解に近接するのである。

3) 加振型による相異：前項までにみてきたように、① 基礎巾に対する層厚の比の増加による半無限地盤の解への収束は、2つの並進型に較べると回転加振の場合に極めて早いこと、そして、② 媒質自身のもつ内部減衰作用は、縦波を誘発しやすい垂直および回転加振より、横波を誘発しやすい水平加振の場合にその効果が大きいこと、が特徴的に現われている。それ故、同一の H/b の値に対して、低振動数域では回転加振の収束が圧倒的に早い、この減衰作用の効果が粘性係数と振動数の積に比例するので、高振動数域になると水平加振の方が早く収束するようになる。

4) 層地盤を半無限地盤として扱える条件：したがって、 ηa_0 が大きい領域では H/b の値がある程度小さくても、層地盤を半無限地盤として扱っても差支えないが、とくに低振動数域を対象とするときには、 H/b の値が相当大きくならないと半無限地盤として扱えないように思われる。低振動数域まで含めて層地盤を半無限地盤として扱う H/b の下限値は、種々のパラメータに対する S.G.C. および D.G.C. の数値解の性状から判断して、垂直および水平加振の場合で H/b_i が 10 程度、回転加振の場合で 4 程度、すなわち基礎断面を断面積あるいは断面 2 次モーメントの等しい正方形に換算したときに、その基礎巾に対する層厚の比がそれぞれ 5 および 2 程度として工学的には差支えないものと考えられる。

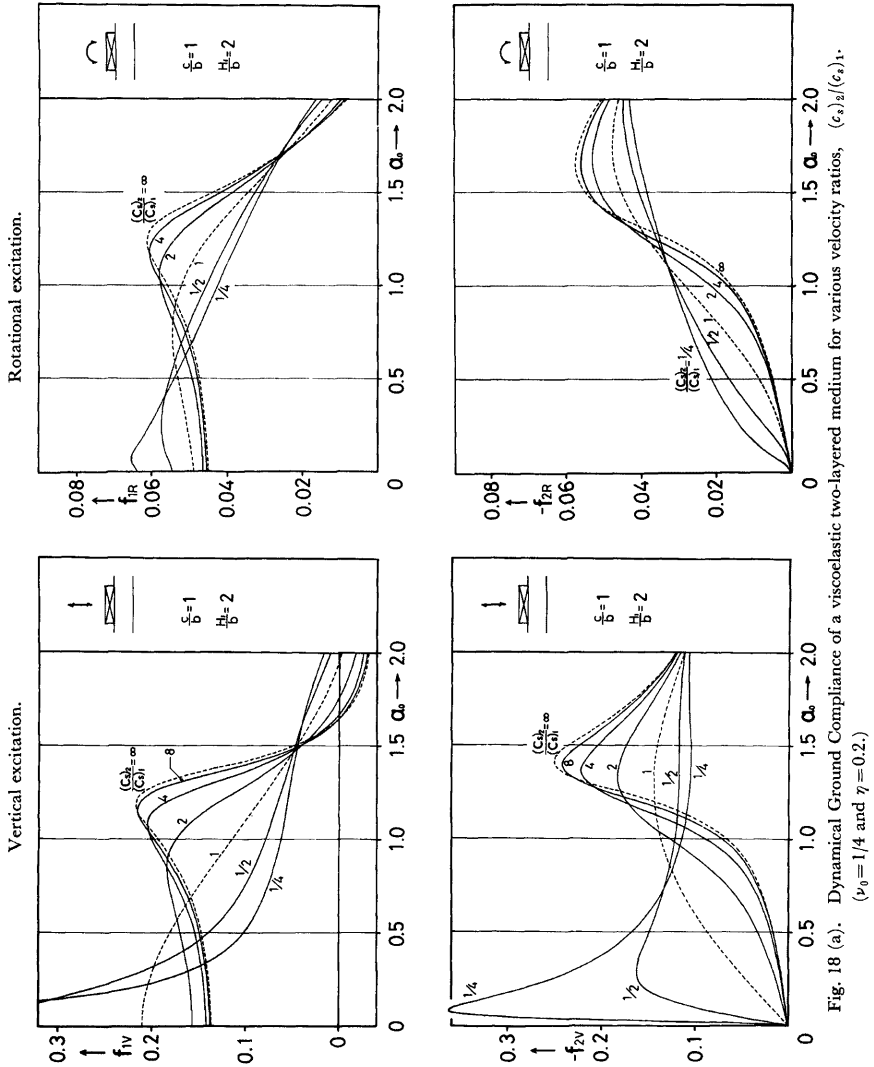
6.3 2 層地盤

各層とも Voigt solid からなり下の Table 2 に示すような常数をもつ 2 層地盤について、垂直および回

Table 2. Constants of the viscoelastic two-layered medium considered.

m	$(\rho)_m$	$(\nu_0)_m$	$(\lambda'/\mu')_m$	$(\eta_a)_m$	$(\eta_s)_m$
1	ρ	1/4	1	η	η
2	ρ	1/4	1	η	η

転加振に対する D.G.C. を計算した。計算の標準ケースを設定し、このなかで特定のパラメータのみを変化させ、そのパラメータが D.G.C. に及ぼす影響を解析した。ここに“標準ケース”とは



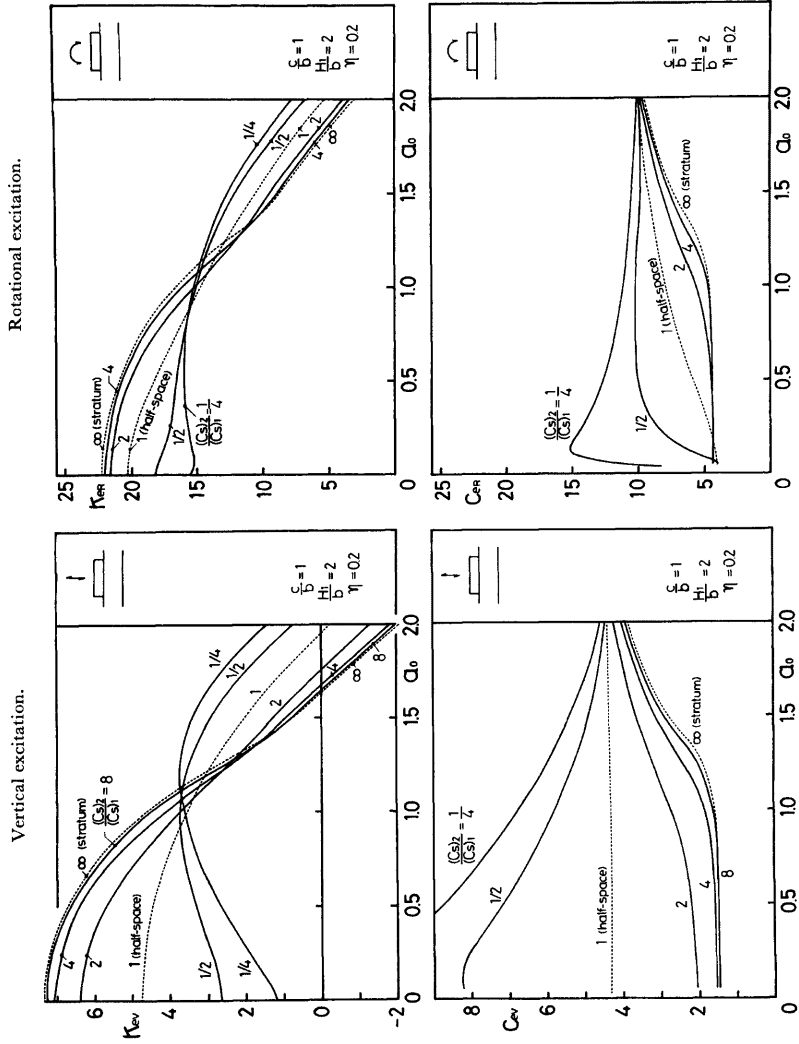


Fig. 18 (b). Equivalent coefficients of a viscoelastic two-layered medium for various velocity ratios, $(c_{s0})_2/(c_{s0})_1$. ($\nu_0 = 1/4$ and $\eta = 0.2$.)

粘性係数パラメータ	$\eta=0.2$
表層の層厚と基礎巾の比	$H/b=2$
上下2層の伝播速度比	$(c_{s0})_2/(c_{s0})_1=(c_{d0})_2/(c_{d0})_1=2$
基礎断面形	$c/b=1$ [正方形]
圧力分布と基礎変位評価法	{一様分布/定点評価}

の組合せをいう。なお規準量には表層の諸量を用いた。

1° 2層の速度比の影響について

標準ケースにおいて、上下2層の速度比すなわち剛性比を種々変えた結果および不連続系モデルの等価係数によるその置換表現を Fig. 18 に示した。図中点線で示した速度比=1は半無限地盤の場合(6.1参照)に、また速度比=∞は剛基盤上の表層地盤の場合(6.2参照)に相当する。

1) 全般的な性状：図のパラメータは表層の速度(または剛性)を一定にして下層の速度(または剛性)を変える場合を意味するが、半無限地盤のときを境にして、下層の速度が表層のそれより大きい小さいかによって D.G.C. の性状が異なっている。

2) 下層の速度が表層より小さいときの特徴：速度比が小さくなるとともに地盤全体の剛性が低下し、系の固有振動数が媒質のもつ内部減衰作用の小さい低振動数域に移行して、この振動数の近傍で顕著な固有振動が励起され、地盤の等価剛性の低下と等価粘性減衰係数の増加が認められる。この共振現象はとくに垂直加振の場合に著しく現われている。速度比が零に近づくとき、結果は表層のみからなる板の解に漸近する。

3) 下層の速度が表層より大きいときの特徴：逆に速度比が大きくなると、剛い基盤層からの反射波の影響を受けて、より高い振動数域で明瞭な共振現象が現われ、剛基盤上の表層地盤の解に漸近する。このことは、下層の速度が表層に較べて相対的に大きいとき、2層地盤が 6.2 で扱った典型モデルのひとつ——剛基盤上の表層地盤として近似的に扱えることを意味する。計算結果によれば、2層の速度の間に垂直加振で8倍程度、回転加振では収束が早く4倍程度の違いがあれば、このような近似的取扱いを可能とすることがわかる。

4) 等価係数の性状：地盤の等価剛性は低振動数域と高振動数域で性状を異にし、速度比による等価剛性の大小関係が2つの領域で逆転していることが注目される。一方、等価粘性減衰係数は速度比=1を境にして全く様相を異にし、下層の速度が表層より大きい(あるいは小さい)とき半無限地盤の値より常に小さく(あるいは大きく)、また振動数の増加とともに半無限地盤の解に漸近する。

5) 半無限地盤として扱ったときとの差異：問題の扱いを単純化するため、このような層地盤を近似的に表層の定数をもつ半無限地盤とみなすことがしばしば行なわれる。このような扱いをすると、下層の剛性が表層より小さい場合には、低振動数域で地盤の剛性を過大に、高振動数域の剛性と等価な減衰量の大きさを過小に評価することになる。また、2層の剛性の大小関係が逆になると、上とは逆の評価を行なうことになるので、注意を要する。

2° 表層の層厚と基礎巾の比 H/b の影響について

標準ケースにおいて、 H/b を変えた場合の D.G.C. およびその等価係数を Fig. 19 に示した。この図は基礎巾を固定して表層の層厚を変える場合に相当し、図中の点線は $H/b=\infty$ 、すなわち半無限地盤のときを意味する。

1) 表層の層厚が基礎巾に比べて大きいときの特徴：波動の逸散と消散による減衰作用が相俟って、下層からの反射波の影響が少なくなり、層地盤の D.G.C. は表層の常数をもつ半無限地盤の解に漸近する。この収束の程度は回転加振のときに極めて早いことが特徴である。また、とくに高振動数域では、波長の短くなる効果と Voigt solid の内部減衰作用が大きくなる効果のため、半無限地盤の場合に漸近する傾向が強く現われている。しかし、系の固有振動数が全体に低くなるので、減衰作用の小さい低振動数域に1次の固有振動による局所的な変動が残る。

2) 表層を半無限地盤として扱える条件：このように基礎巾との相対的な関係で表層の層厚が大きいとき

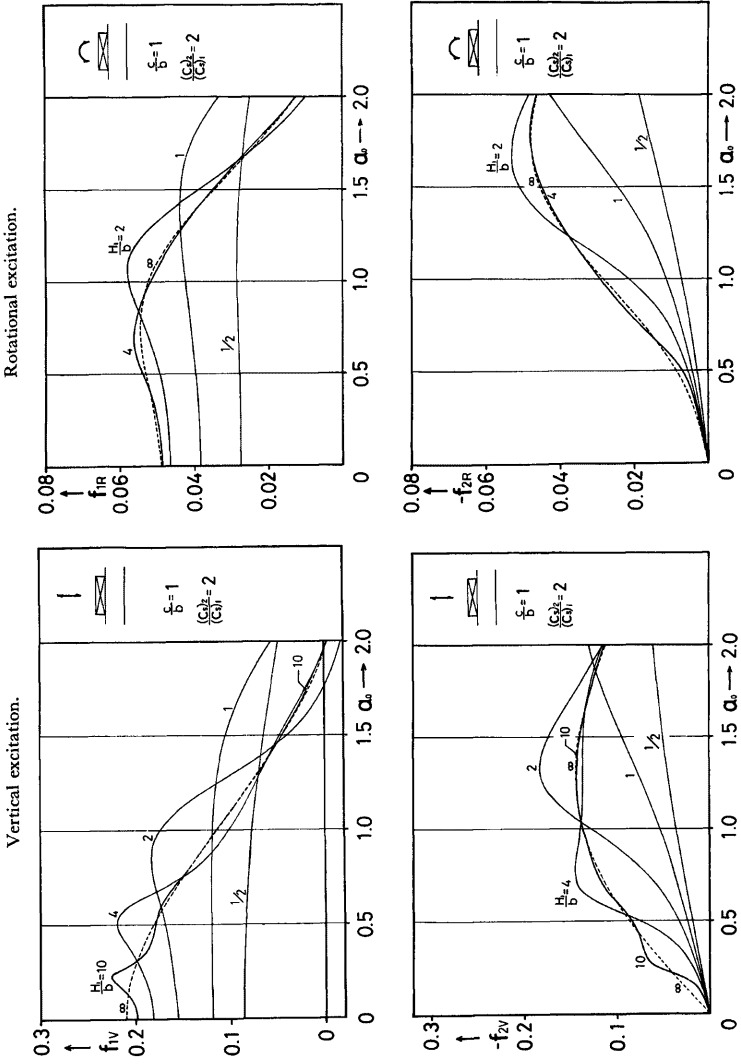


Fig. 19 (a). Dynamical Ground Compliance of a viscoelastic two-layered medium for various thickness-width ratios, H/b . ($\nu_0 = 1/4$ and $\eta = 0.2$.)

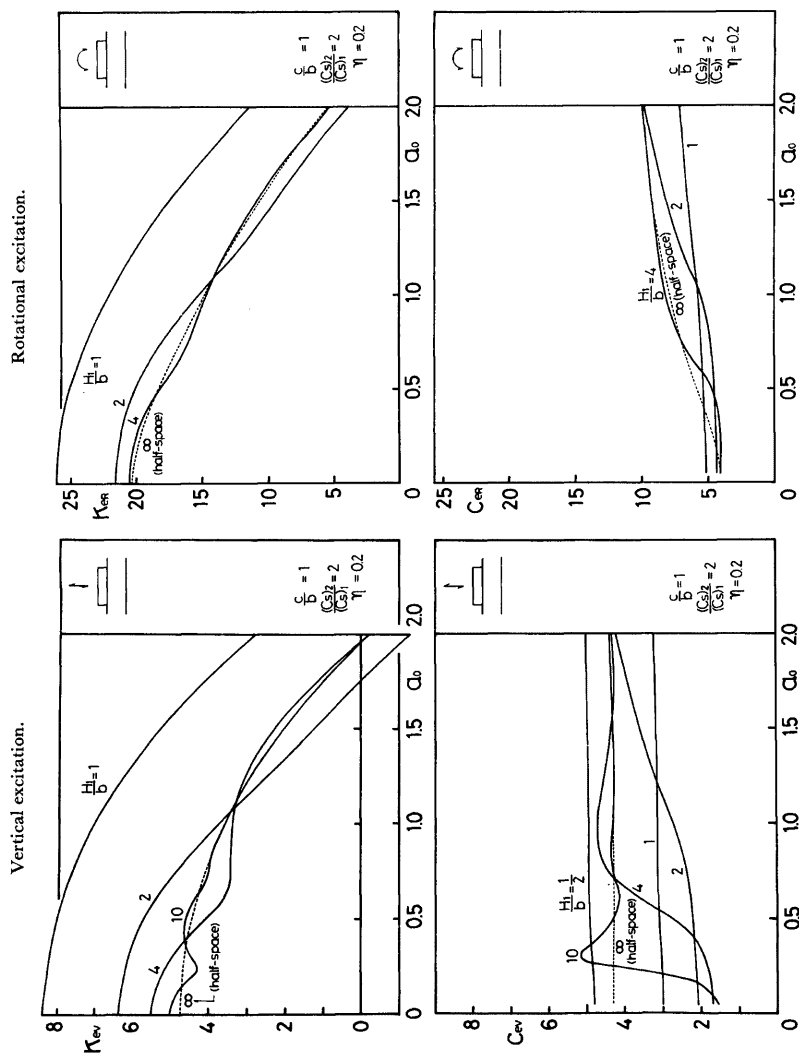


Fig. 19 (b). Equivalent coefficients of a viscoelastic two-layered medium for various thickness-width ratios, H/b . ($\nu_0 = 1/4$ and $\eta = 0.2$.)

には、層地盤を近似的に表層の常数をもつ半無限地盤として扱うことができる。こうした扱いが可能な層厚と基礎半巾との比の限界値が、垂直加振のとき $H/\bar{b}_1 \approx 10$ 、回転加振のとき $H/\bar{b}_1 \approx 4$ 程度で与えられるという 6.2 (剛基盤上の表層地盤の場合) で述べた結論は、この2層地盤のモデルの場合にもほぼ成立することが認められる。

3) 基礎巾に較べて層厚が小さいときの特徴：表層の影響が少なくなり、系の固有振動数が減衰作用の大きい高振動数域に移行するので、共振現象もほとんど消滅し、下層の常数をもつ半無限地盤の解に漸近する。

4) 等価剛性の性質：半無限地盤のときと同様に全般的に漸減の傾向をもっているが、 H/b が大きくなると、共振点が内部減衰作用の小さい低振動数域に移行するので、この共振現象のため、とくに垂直加振で剛性の局所的な低下が比較的顕著に現われている。

5) 等価粘性減衰係数の性質：表層が薄いときには図の振動数域全般に、表層が厚いときにはごく低振動数域を除いて、半無限地盤のときと同様な平坦に近い〔垂直加振〕または漸増〔回転加振〕の傾向をもっている。また、6.2 の剛基盤の場合と同様に、最初の共振点に至る低振動数域で減衰量の少ないことが特徴になっている。等価係数の局所的な変動を示すこの最初の共振点の近傍で、減衰係数の急激な増加がみられるのは、6.2 の解析から判断して、表面波による逸散および消散減衰の増加によるものと考えられる。

6) 半無限地盤として扱ったときとの差異：表層の厚い場合にこれを半無限地盤として扱うと、とくに低振動数域で地盤の示す減衰量をかなり過大評価することになる。逆に表層の薄い場合、これを無視して下層を半無限地盤として扱うと、上下2層の剛性比の大または小の關係に応じて、地盤剛性を過小または過大に評価し、同じく伝播速度比の大小關係に応じて減衰量を過小または過大に評価することになる。

以上1°および2°の場合を通じて、垂直および回転加振の比較に関して次のような共通した特徴がある。

1) 加振型による相異：両者の D.G.C. を比較すると全体としてよく似た性状をもっているが、④垂直加振では、低振動数域に共振現象が現われる場合極めて顕著である、⑤回転加振では、極限状態への収束、すなわち、速度比による剛基盤へのそして基礎巾と層厚比による半無限地盤への収束が極めて早く、またこれらのパラメータによる D.G.C. の変動が少なく、というそれぞれの特徴をもっている。

2) 加振型による特徴が生まれる原因：④仮定された基礎下の圧力分布の形から、垂直加振では地盤内において加振力の効果が累積する傾向に、また回転加振ではそれが打消し合う傾向にあること、⑤加振力によって供給されるエネルギーが垂直加振では下方に、また回転加振では径方向に逸散しやすいこと、が原因として考えられる。その結果、下層の性質に敏感な垂直加振の特性と、逆にこれに鈍感で極限状態への収束が早い回転加振の特性が現われてくるのであろう。

なお、粘性係数パラメータ η や基礎断面形 c/b 、基礎版下の圧力分布と基礎変位の応答評価法などの影響を示した図は省略するが、結果を総括すると、垂直・回転の両加振の場合に置換系の等価剛性がかなり広い振動数域でパラメータ η の影響を受けにくいという点、が前節までの結果と異なる程度である。本節で扱った層地盤についても半無限地盤のときの性質がほとんどそのまま保持されており、6.1 で得られたこれらのパラメータや仮定の影響に関する検討結果はかなりの普遍性をもつと考えてよいであろう。

6.4 地盤定数の実測値を使用した場合

ここでは地層構成が明らかにされ地盤定数が実測されている実際の多層地盤について、いくつかの地盤モデルを設定し、基礎地盤の動特性がこうしたモデル化によってどのような影響を受けるかを解析し、併わせて 6.1～6.3 に示した典型化された地盤モデルに対するパラメトリックな解析結果の妥当性を検討する。なお、ここでは振動型の単純な垂直加振の場合に議論を限定する。

対象に選んだのは大阪市森之宮の一地点で、現地ボーリング・土質試験・標準貫入試験および弾性波探査から得られた地層構成・地盤定数を Table 3 に示す。地表から -28m までを便宜上4つの地層〔第①～第④媒体〕に区分し、これらを組合わせて、④から①の4種の地盤モデルを想定した。設定された4つの地層の地盤常数にはその該当部分の測定値の平均値を採用したが、密度、 P 波および S 波速度に関する結果を

Table 3. Soil layers, grond constants and ground models.

深度	地質	N 値	密度	P波速度	S波速度	ポアソン比	地盤定数	①モデル	②モデル	③モデル	④モデル
0	粘土	0	ρ [ton/m ³]	C_p [m/sec]	C_s [m/sec]		①		15M ↑		15M ↑
5	シルト	10	1.53		100	0.494	15M		$\rho=1.53$ $C_p=900$ $C_s=150$		$\rho=1.53$ $C_p=900$ $C_s=150$
10	粘土	20	1.66	900	80	0.496	第②媒体	$\rho=1.53$ $C_p=900$ $C_s=100$	$\rho=1.53$ $C_p=900$ $C_s=100$	$\rho=1.60$ $C_p=900$ $C_s=100$	$\rho=1.60$ $C_p=900$ $C_s=100$
15	シルト	30	1.71		115	0.492	18M				
20	粘土	40	1.85	500	210	0.393	③			$\rho=1.80$ $C_p=500$ $C_s=210$	$\rho=1.80$ $C_p=500$ $C_s=210$
25	砂	50	2.00		380	0.444	24M				
30	砂	60	1.85	1200	380	0.473	④				
35	砂	70	1.85		380	0.473	28M				

Table 3 の左半分に示した。なお、第①媒体に当る部分には地盤定数の直接の測定値がないので、柱状図・N 値・表面波速度の実測値等より推定した。

地盤の内部減衰については、本調査にもまた既往の実測的研究にもこれを推定するだけの資料が得られていないので、ここでは

- ①媒体はすべて Voigt solid からなる
- ②各層において縦波と横波に関する粘性係数が等しい [$\eta \equiv \eta_p = \eta_s$]
- ③粘性係数は各層共通である。

という3つの仮定をおくことにした。内部減衰作用の小さい場合の特性を明らかにすると立場から、粘性係数の無次元量として、 $\eta=0.05$ 、を a priori に与えた。なお、内部減衰作用の効果を比較するため、上記の⑧—モデルで $\eta=0.2$ の場合を計算している [⑧₁—モデル； $\eta=0.05$ 、⑧₂—モデル； $\eta=0.2$]。

基礎には $2m \times 2m$ の正方形基礎を設定して、規準量には表層部分の定数、 $\rho=1.53\text{ton/m}^3$ 、 $c_s=100\text{m/sec}$ 、をとった。〔一様分布／定点評価〕の場合について、D. G. C. の等価係数による表現を Fig. 20 に示した。

1) ① ⑧₁—モデルの比較 [Fig. 20 (a)]

①—モデルにおいて第④媒体を考慮したケースを検討した結果、その影響は非常に小さいことが認められたので、設定された地層構成に最も忠実なのが①—モデル、これより第③媒体を省略したのが⑧—モデルになる。

⑧₁—モデルには成層地盤としての固有振動の存在が明瞭でなく、半無限地盤に近い性状を示すのに対して、①—モデルになると、性質の大きく異なる第③媒体が存在するため、これに起因する成層地盤に固有な特性の影響が、波長が長く内部減衰作用が小さい低振動数域に、動特性の局所的な変動として顕著に現われている。これらの影響は1次および2次振動まで読みとることができる。とくに1次振動の付近で等価剛性 k_{er} が局所的に低下し、等価粘性減衰係数 c_{er} が急増しているのが目立つ。6.2 の解析によれば、後者の変動は振動数の増加とともに現われてくるいくつかのモードの表面波による逸散減衰の増大に起因すると推測される。さらに振動数が高くなると、内部減衰作用と波長の効果が相俟って第③媒体の影響は小さくなり、動特性は振動数に関して全般に緩かな変動を繰返しながら次第に滑かになる。以上の傾向は6.2~6.3 のパラメトリックな理論計算にもみられたものである。

成層地盤の1次振動の影響が現われている部分を除くと、①と⑧₁の両モデルで動特性はほぼ一致し、基

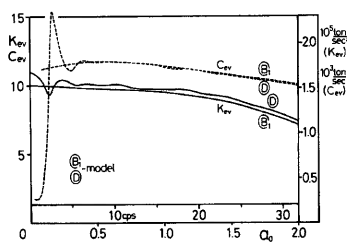
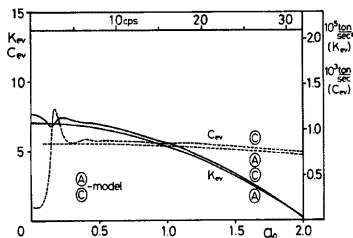
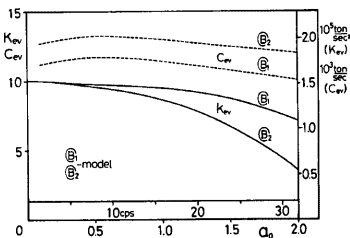
(a) B_1 - and B_2 - models.(b) A - and C - models.(c) B_1 - and B_2 - models.

Fig. 20. Equivalent coefficients of actual ground models.

礫巾に較べて相当深い位置にある第③媒体の影響は総体的に小さいことがわかる。ただし、第①媒体の常数は両モデルとも共通であるが、第②媒体に対応する地層の密度の選び方が多少異なるので、両者の間に少し差異が残っている。

2) A ③—モデルの比較 [Fig. 20 (b)]

B_1 と B_2 のモデルでそれぞれ第①媒体を省略したのが A と C のモデルである。この場合にも、 B_1 ③と同様な上述の相互関係が認められる。しかし、 B_1 ③の場合とは異なり、第①媒体に対応する表層部分をも含めて A と C で密度の選び方に差があるので、両者の動特性の差異がやや大きく残っている。また、 B_1 ③の場合に較べると、表層部分の横波速度が小さいため、 A と C では地盤の剛性・減衰性ともかなり小さくなっており、剛性 K_{ev} の振動数による低下も著しい。このように動特性に及ぼす表層部分の影響が大きいたことがわかる。

3) B_1 B_2 —モデルの比較 [Fig. 20 (c)]

この2つのモデルは内部減衰の大きさが及ぼす効果を比較するためのものである。粘性係数パラメータ η の増加は、剛性 K_{ev} の振動数による低下を大きくするとともに、減衰係数について、 $c_{ev} \approx (\text{逸散減衰によるもの}) + (\text{内部減衰によるもの})$ 、かつ、 $(\text{内部減衰によるもの}) \approx \eta \times \text{定数}$ 、という近似的な関係式がこの振動数範囲でもみかけ上成立するようである。また、内部減衰に較べると逸散減衰の占める割合が圧倒的に優勢なことがわかる。このように粘性係数パラメータ η の効果についても 6.1~6.3 の典型例に対する計算結果の傾向と一致する。

4) 全般的な特徴

全体を通じて、成層地盤の固有振動の影響が局部的に強く現われる部分を除くと、減衰係数 c_{ev} は振動数パラメータ α_0 に関してほぼ一定、剛性 K_{ev} は α_0^2 にほぼ比例して低下するという半無限地盤にみられる特徴が認められる。ところで、4つの地盤モデルは、まず、第①と第②媒体の性質の差が小さくこの2つの層

で層区分が明瞭でないこと、次に、性質の大きく異なる第③媒体までの深度が基礎巾に較べて大きいため、成層地盤の優勢な固有振動が波長が長く内部減衰作用の小さい低振動数域にのみ存在すること、という2つの特徴がある。この特徴が組合わさった結果、局所的な動特性の変動を示す低振動数域を除くと、半無限地盤に近い特性が得られたのであろう。

基礎地盤の動特性に関して、④半無限体に近い地盤構成のときの等価係数の性状、⑤基礎巾と層厚の相対的な関係が及ぼす影響、⑥成層地盤としての固有振動の影響の現われ方、⑦内部減衰作用および波長の効果、などの点で、典型化された地盤モデルに対する6.1～6.3のパラメトリックな計算結果と一致する傾向が、本節の実測値に基づく地盤モデルについても導かれた。

7. む す び

主要な結論は次のとおりである。

1) D.G.C. および S.G.C. の定義とその物理的意味について

本章で定義した Dynamical Ground Compliance (D.G.C.) とは、地表面上の質量の影響を無視した基礎に加振力が作用するとき、時間に関してフーリエ変換された frequency range における、あるいは時間因子を $e^{i\omega t}$ とおいた time domain における、基礎の加振方向の変位応答を加振力との比の形で表現したものである。これは stiffness の逆数の元をもち、構造物周辺の基礎地盤系の動特性を総括的に表わす力一変位間の複素伝達関数である。その静的な場合、すなわち、加振振動数を零にとった極限値をとくに Statical Ground Compliance (S.G.C.) と定義する。D.G.C. の性質によって構造物を支持する周辺地盤の動力学的な特性を知りうるとともに、上部構造物系の伝達関数にこれを接続すれば、地盤を介して入射する任意の非定常な地震動に対して連成系の応答解析を行なうことが原理的に可能になる²²⁾。このように D.G.C. は多層粘弾性地盤に関する基礎資料としての性格と広い応用性を兼ね備えたものである。

2) 減衰機構について

D.G.C. は一般に複素数となるが、その虚数部は地盤構造に基づく波動の逸散による減衰と媒体の内部減衰作用に基づく波動の消散による減衰を表わす。この虚数部は一般に表面波に関する振動数方程式の根まわりの留数項とこれをはさむ Cauchy の主値から成立っており、前者は表面波による主として径方向への減衰を、後者は実体波による主として深さ方向への減衰を意味する。逸散減衰と消散減衰を D.G.C. の解析的表現において区別することはできないが、数値的な表現においては完全弾性のときに生じる逸散減衰に消散による減衰を加えた形にすることができ、とくに Voigt solid からなる半無限地盤では、消散による減衰量は媒体の粘性係数にほぼ比例する。また、層地盤のときには、次項で述べる最初の共振点に至る低振動数域に於いて逸散減衰が少ないかあるいは全く存在しないことが、半無限地盤と異なる大きな特徴のひとつになっている。さらに、この共振点近傍での地盤の減衰量の急激な増加は主として1次モードの表面波の逸散減衰に起因する。

3) 共振現象について

層地盤が半無限地盤と異なるいまひとつの大きな特徴は、地盤構造と地盤定数から定まる共振振動数の存在である。とくに剛基盤上の完全弾性層では、棒の固有振動数に対応するもの1種および振動数方程式が2次の重複固有値をもつもの2種の計3種の共振振動数が存在する。地盤を構成する媒体に Voigt solid を選ぶとき、内部減衰作用の効果が媒体の粘性係数と振動数の積に比例するので、粘性係数の増加とともに共振点付近の振巾変動が緩かになって低振動数側へ移行し、かつ高次の共振点ほど振巾の変動が平坦化されて、共振現象は遂にはみかけ上消滅する。

4) 層地盤が半無限地盤の状態に近接する条件について

地表にある震源位置の変位応答として定義される D.G.C. には、地表付近の地層の性質ほど強く影響を与えるのであるから、この近接条件として、①基礎巾に対する表層の層厚比の効果、②内部減衰作用の効果、③波長の効果、という3つの要素をあげることができる。すなわち、基礎巾に比べて表層の層厚が大きいほ

ど、また内部減衰作用の程度を規定する粘性係数(そして Voigt solid では振動数)が大きいほど、さらに、生成される波動の波長が短い振動数の高い領域ほど、表層より下の地層が D.G.C. に及ぼす影響は少なくなり層地盤の動特性が表層の定数をもつ半無限地盤の場合に近接するのである。言換えると、基礎巾に対する層厚の比がそれほど大きくないときには、粘性係数と振動数が大きいような領域で、またこの比の値がある程度大きくなるとすべての振動数域で、層地盤を半無限地盤として近似的に扱うことができる。このような扱いの可能な場合は、並進型の加振で面積の等しい正方形基礎に換算してその基礎巾の 5 倍程度以上、また回転加振で断面 2 次モーメントの等しい正方形基礎に換算して 2 倍程度以上の層厚があるときである。

5) 基礎と地盤の性質を規定するパラメータの影響について

①ポアソン比、②基礎断面形状、③基礎版下の圧力分布形、④基礎変位の評価法という 4 つのパラメータは、D.G.C. および S.G.C. の全般的、定性的な性状を著しく変えるほどのものでないが、定量的には相当大きな影響を与える場合がある。しかし、各層の値がほぼ共通なポアソン比については、D.G.C. を S.G.C. で規準化することによって、また極端に細長いものを除いた基礎形状については、断面積〔並進の場合〕または断面 2 次モーメント〔回転の場合〕一定の条件のもとに、D.G.C. を S.G.C. で規準化することによって、通常の振動数域で定量的にも結果をほぼ一致させることができる。言換えると、標準ケースに設定したポアソン比 $\nu_0=1/4$ 、および正方形基礎の解から、他のポアソン比または基礎形状の場合に対する D.G.C. を近似的に換算することが可能である。なお、圧力分布形と基礎変位評価法については、基礎および土の材料の性質や両者の接触状態に応じた適切な選択が必要となろう。

6) 加振型による相異について

第 1 に、生成される表面波と減衰機構に相異がみられる。すなわち、まず半無限地盤のとき、表面波(この場合は Rayleigh 波のみ)によるエネルギー減衰の占める割合が水平加振の場合に少ないこと、次に層地盤のとき、垂直および回転加振では Rayleigh 波が生成し水平加振の場合にのみ Love 波が付加わること、が特徴になっている。第 2 の相異点は半無限地盤の状態への収束の早さである。すなわち、表面波の寄与と波長の効果に関連して媒体の内部減衰作用の効果が水平加振の場合に強く現われ、粘性係数と振動数の大きい領域では水平加振の収束が比較的早いこと、また回転加振では基礎から離れた下層の影響に鈍感なので、基礎巾に対する表層の層厚比の増加による収束がこの加振型の場合に著しく早いこと、が特徴になっている。

7) 地盤定数の実測値によって構成した地盤モデルとの対比について

地層構成と地盤定数の明らかな実際の地盤をモデル化した場合に本理論を適用すると、典型化されたいくつかの地盤モデルに対するパラメトリックな計算結果と定性的に大変よく一致する傾向が得られた。したがって、上述の主要な諸性質は工学的にもかなりの普遍性をもつと考えてよいであろう。

8) 従来の地盤モデルの適用限界について

従来一般に基礎地盤の動特性をバネとダッシュボットの並列結合である Voigt モデルという不連続系で表現する方法がよく行われてきた。粘弾性媒体と想定した基礎地盤の動特性を Voigt モデルの等価係数で表現してみると、振動数による係数の変動が強く現われてくることは、モデルに付与する特性値を振動数に独立な定数として与える従来の方法のひとつの欠陥を示すものである。とくに内部減衰の少ない層地盤の共振点の近傍でこの傾向が著しく現われている。しかし、近似的に半無限体とみなしうような基礎地盤で並進振動のみを対象とするときには、Voigt モデルに質量を付加した系の等価係数が通常の振動数域でほぼ平坦となるので、これらの等価係数を地盤定数と基礎の形状・寸法から振動数に独立な定数として近似的に定めることが可能である。明瞭な層構造をもつ地盤にあってはこうした扱いが可能な条件は 4) で述べたように表層の層厚が面積の等しい等価な正方形基礎巾のおよそ 5 倍以上になる場合である。

参 考 文 献

- 1) Reissner, E.: Stationäre, axialsymmetrische, durch eine schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraums, Ingenieur-Archiv, Vol. VII, 1936, pp. 381-396.
 - 2) Reissner, E.: Freie und erzwungene Torsionsschwingungen des elastischen Halbraums, Ingenieur-Archiv, Vol. VIII, 1937, pp. 229-245.
 - 3) Toriumi, I., Y. Sato and R. Yamaguchi: Vibrations in Foundation, Structure and its Vicinity on the Elastic Ground, Proceedings of the Second World Conference on Earthquake Engineering, 1960, pp. 1413-1429.
 - 4) Veletosos, A. S. and B. Vercic: Basic Response Functions for Elastic Foundation, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 100, No. EM2, 1974, pp. 189-202.
 - 5) Sung, T. Y.: Vibrations in Semi-Infinite Soils due to Periodic Surface Loading, ASTM Symposium on Dynamic Testing of Soils, ASTM Special Technical Publication, No. 156, 1953, pp. 35-63.
 - 6) Quinlan, P. M.: The Elastic Theory of Soil Dynamics, ASTM Symposium on Dynamic Testing of Soils, ASTM Special Technical Publication, No. 156, 1953, pp. 3-34.
 - 7) Toriumi, I.: Vibrations in Foundations of Machines, Technology Reports of the Osaka University, Vol. 5, No. 146, 1955, pp. 103-126.
 - 8) Arnold, R. N., G. N. Bycroft and G. B. Warburton: Forced Vibrations of a Body on an Infinite Elastic Solid, Journal of Applied Mechanics, Vol. 22, 1955, pp. 391-400.
 - 9) Bycroft, G. N.: Forced Vibrations of a Rigid Circular Plate on a Semi-Infinite Elastic Space and on an Elastic Stratum, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 248, Series, A, 1956, pp. 327-368.
 - 10) Tajimi, H.: Dissipation Dampings of Vibrational Systems on the Elastic Ground, Proceedings of the Seventh Japan National Congress for Applied Mechanics, 1958, pp. 351-354.
 - 11) 田治見宏：耐震理論に関する基礎的研究，東京大学生産技術研究所報告，第8巻，第9号，1959，pp. 170-215.
 - 12) Warburton, G. B.: Forced Vibration of a Body on an Elastic Stratum, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 24, 1957, pp. 55-58.
 - 13) Kashio, J.: Steady State Response of a Circular Disk Resting on a Layered Medium, ph. D. Thesis presented to Rice University, 1970.
 - 14) Lee T. M.: Surface Vibration of a Semi-Infinite Viscoelastic Medium, Proceedings, International Symposium on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials, University of New Mexico, 1967, pp. 123-138.
 - 15) Thomson, W. T. and T. Kobori: Dynamical Compliance of Rectangular Foundations on an Elastic Half-Space, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 30, Series E, No. 4, 1963, pp. 579-584.
 - 16) Elorduy, J., J. A. Nieto and E. M. Szekely: Dynamic Response of Bases of Arbitrary Shape Subjected to Periodic Vertical Loading, Proceedings, International Symposium on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials, University of New Mexico, 1967, pp. 105-121.
 - 17) Reissner, E. and Sagoci, H. F.: Forced Torsional Oscillations of an Elastic Half-Space. I, Journal of Applied Physics, Vol. 15, 1944, pp. 652-654.
 - 18) Sagoci, H. F.: Forced Torsional Oscillations of an Elastic Half-Space. II, Journal of Applied Physics, Vol. 15, 1944, pp. 655-662.
 - 19) Bielak, J.: Earthquake Response of Building-Foundation Systems, ph. D. Thesis presented to California Institute of Technology, 1971.
- [基礎と地盤が密着する混合境界値問題として扱った厳密解としての剛体基礎の D. G. C. に関する研究の系列はこの論文の参考文献に詳しい]

- 20) Lysmer, J.: Vertical Motion of Rigid Footings, Contract Report No. 3-115, U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, Corps of Engineers, Vicksburg, Mississippi, 1965.
- 21) Haskell, N. A.: The Dispersion of Surface Waves of Multi-Layered Media, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 43, No. 1, 1953, pp. 17-34.
- 22) Kobori, T., R. Minai, and Y. Inoue: On Earthquake Response of Elasto-Plastic Structure Considering Ground Characteristics, Proceedings of the Fourth World Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile, Vol. III, A-6, 1969, pp. 117-132.

APPENDIX 主要なマトリックスの要素

A. 動的な場合——有次元表示

$$Q_m = \begin{bmatrix} C_{2z} & 0 & \beta S_{1z} & S_{2z} & 0 & \beta C_{1z} \\ 0 & C_{3z} & \gamma S_{1z} & 0 & S_{2z} & \gamma C_{1z} \\ \frac{\beta}{\alpha_2} S_{2z} & \frac{\gamma}{\alpha_2} S_{2z} & \alpha_1 C_{1z} & \frac{\beta}{\alpha_2} C_{2z} & \frac{\gamma}{\alpha_2} C_{2z} & \alpha_1 S_{1z} \\ \frac{\beta^2 + \alpha_2^2}{\alpha_2} S_{2z} & \frac{\beta\gamma}{\alpha_2} S_{2z} & 2\alpha_1 \beta C_{1z} & \frac{\beta^2 + \alpha_2^2}{\alpha_2} C_{2z} & \frac{\beta\gamma}{\alpha_2} C_{2z} & 2\alpha_1 \beta S_{1z} \\ \frac{\beta\gamma}{\alpha_2} S_{2z} & \frac{\gamma^2 + \alpha_2^2}{\alpha_2} S_{2z} & 2\alpha_1 \gamma C_{1z} & \frac{\beta\gamma}{\alpha_2} C_{2z} & \frac{\gamma^2 + \alpha_2^2}{\alpha_2} C_{2z} & 2\alpha_1 \gamma S_{1z} \\ 2\beta C_{2z} & 2\gamma C_{2z} & (2\alpha_2^2 + \kappa_v^2) S_{1z} & 2\beta S_{2z} & 2\gamma S_{2z} & (2\alpha_2^2 + \kappa_v^2) C_{1z} \end{bmatrix}_m \quad \dots\dots(A. 1)$$

ここに

$$S_{1z} = \sinh(\alpha_1 z), \quad S_{2z} = \sinh(\alpha_2 z), \quad C_{1z} = \cosh(\alpha_1 z), \quad C_{2z} = \cosh(\alpha_2 z) \quad \dots\dots(A. 2)$$

$$G_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_v^{-1} \end{bmatrix}_m \quad \dots\dots(A. 3) \quad G_m^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_v^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_v^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_v^{-1} \end{bmatrix}_m \quad \dots\dots(A. 4)$$

$$\bar{C}_m^{-1} = \frac{1}{\{\kappa_v\}_m^2} \begin{bmatrix} \kappa_v^2 - 2\beta^2 & -2\beta\gamma & 0 & 0 & 0 & \beta \\ -\beta\gamma & \kappa_v^2 - 2\gamma^2 & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & -\frac{2\alpha_2^2 + \kappa_v^2}{\alpha_1} & \frac{\beta}{\alpha_1} & \frac{\gamma}{\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha_2\beta & \frac{\kappa_v^2 - \beta^2}{\alpha_2} & -\frac{\beta\gamma}{\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha_2\gamma & -\frac{\beta\gamma}{\alpha_2} & \frac{\kappa_v^2 - \gamma^2}{\alpha_2} & 0 \\ 2\beta & 2\gamma & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_m \quad \dots\dots(A. 5)$$

$$\bar{E}_m = \{\kappa_v\}_m^{-2} [e_{ij}]_m \quad \dots\dots(A. 6)$$

ここに [以下の e_{ij} の式では層を表わす添字 m を省略して表示する]

$$\begin{cases} e_{11} = e_{44} = 2\beta^2(C_1 - C_2) + \kappa_v^2 C_2 & e_{22} = e_{55} = 2\gamma^2(C_1 - C_2) + \kappa_v^2 C_2 \\ e_{12} = e_{31} = e_{45} = e_{54} = 2\beta\gamma(C_1 - C_2) & e_{33} = e_{66} = -(2\alpha_2^2 + \kappa_v^2)C_1 + 2(\alpha_2^2 + \kappa_v^2)C_2 \\ e_{13} = -e_{64} = \frac{\beta}{\alpha_1} \{-(2\alpha_2^2 + \kappa_v^2)S_1 + 2\alpha_1\alpha_2 S_2\} & e_{23} = -e_{65} = \frac{\gamma}{\alpha_1} \{-(2\alpha_2^2 + \kappa_v^2)S_1 + 2\alpha_1\alpha_2 S_2\} \\ e_{31} = -e_{46} = \frac{\beta}{\alpha_2} \{2\alpha_1\alpha_2 S_1 - (2\alpha_2^2 + \kappa_v^2)S_2\} & e_{32} = -e_{56} = \frac{\gamma}{\alpha_2} \{2\alpha_1\alpha_2 S_1 - (2\alpha_2^2 + \kappa_v^2)S_2\} \end{cases}$$

$$\begin{cases}
e_{14} = \beta^2 \left(\frac{S_1 - S_2}{\alpha_1} \right) + \frac{\kappa_v^2}{\alpha_2} S_2 & e_{25} = \gamma^2 \left(\frac{S_1 - S_2}{\alpha_1} \right) + \frac{\kappa_v^2}{\alpha_2} S_2 \\
e_{15} = e_{24} = \beta \gamma \left(\frac{S_1 - S_2}{\alpha_1} \right) & e_{48} = e_{51} = \frac{\beta \gamma}{\alpha_2} \{ 4\alpha_1 \alpha_2 S_1 - (4\alpha_2^2 + \kappa_v^2) \} S_2 \\
e_{34} = -e_{16} = \beta (C_1 - C_2) & e_{35} = -e_{26} = \gamma (C_1 - C_2) \\
e_{41} = \frac{1}{\alpha_2} [4\alpha_1 \alpha_2 \beta^2 S_1 + \{ \gamma^2 (4\alpha_2^2 + \kappa_v^2) - (2\alpha_2^2 + \kappa_v^2)^2 \} S_2] \\
e_{52} = \frac{1}{\alpha_2} [4\alpha_1 \alpha_2 \gamma^2 S_1 + \{ \beta^2 (4\alpha_2^2 + \kappa_v^2) - (2\alpha_2^2 + \kappa_v^2)^2 \} S_2] \\
e_{61} = -e_{43} = 2\beta (2\alpha_2^2 + \kappa_v^2) (C_1 - C_2) & e_{62} = -e_{53} = 2\gamma (2\alpha_2^2 + \kappa_v^2) (C_1 - C_2) \\
e_{36} = -\alpha_1 S_1 + \frac{\alpha_2^2 + \kappa_v^2}{\alpha_2} S_2 & e_{63} = -\frac{(2\alpha_2^2 + \kappa_v^2)^2}{\alpha_2} S_1 + 4\alpha_1 (\alpha_2^2 + \kappa_v^2) S_2
\end{cases} \dots\dots\dots (A. 7)$$

また

$$C_1 = \cosh(\alpha_1 H), \quad C_2 = \cosh(\alpha_2 H), \quad S_1 = \sinh(\alpha_1 H), \quad S_2 = \sinh(\alpha_2 H) \dots\dots\dots (A. 8)$$

B. 動的な場合——無次元表示

$$C_m^{-1} = \frac{1}{\kappa_m^2 g_{sm}} [c_{ij}]_m G_m^{-1} \dots\dots\dots (A. 9)$$

ここに

$$\begin{cases}
c_{11} = \kappa_m^2 g_{sm} - 2(\xi \cos \theta)^2 & c_{22} = \kappa_m^2 g_{sm} - 2(\xi \sin \theta)^2 \\
c_{16} = 2c_{61} = \frac{\xi \cos \theta}{\bar{\kappa}} & c_{26} = 2c_{62} = \frac{\xi \sin \theta}{\bar{\kappa}} \\
c_{12} = c_{21} = -2(\xi \cos \theta)(\xi \sin \theta) & c_{33} = -\frac{\xi^2 + f_{sm}^2}{f_{dm}} \cdot \frac{1}{\bar{\kappa}} \\
c_{44} = \frac{\kappa_m^2 g_{sm} - (\xi \cos \theta)^2}{f_{sm}} \cdot \frac{1}{\bar{\kappa}} & c_{55} = \frac{\kappa_m^2 g_{sm} - (\xi \sin \theta)^2}{f_{sm}} \cdot \frac{1}{\bar{\kappa}} \dots\dots\dots (A. 10) \\
c_{34} = \frac{\xi \cos \theta}{f_{sm}} \cdot \frac{1}{\bar{\kappa}^2} & c_{35} = \frac{\xi \sin \theta}{f_{sm}} \cdot \frac{1}{\bar{\kappa}^2} \\
c_{43} = 2f_{sm}(\xi \cos \theta) & c_{53} = 2f_{sm}(\xi \sin \theta) \\
c_{45} = c_{54} = -\frac{(\xi \cos \theta)(\xi \sin \theta)}{f_{sm}} \cdot \frac{1}{\bar{\kappa}} & c_{66} = -\frac{1}{\bar{\kappa}^2}
\end{cases}$$

また

$$f_{dm} = \sqrt{\bar{\kappa}^2 - n_m^2 \kappa_m^2 g_{dm}}, \quad f_{sm} = \sqrt{\bar{\kappa}^2 - \kappa_m^2 g_{sm}} \dots\dots\dots (A. 11)$$

なおその他の要素はすべて零である。

$$G_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_m / g_{sm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_m / g_{sm} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_m / g_{sm} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A. 12)$$

$$G_m^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{sm} / \mu_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{sm} / \mu_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{sm} / \mu_m \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A. 13)$$

$$E_m = \frac{1}{\kappa_m^2 g_{sm}} G_m [e_{ij}]_m G_m^{-1} \dots\dots\dots (A. 14)$$

こゝに

$$\begin{cases}
 e_{11}=e_{44}=2(\xi \cos \theta)^2(C_{1m}-C_{2m})+\kappa_m^2 g_{sm} C_{2m} & e_{22}=e_{55}=2(\xi \sin \theta)^2(C_{1m}-C_{2m})+\kappa_m^2 g_{sm} C_{2m} \\
 e_{12}=e_{21}=e_{45}=e_{54}=2(\xi \cos \theta)(\xi \sin \theta)(C_{1m}-C_{2m}) \\
 e_{13}=-e_{64}=(\xi \cos \theta)\left(-\frac{\xi^2+f_{sm}^2}{f_{dm}} S_{1m}+2 f_{sm} S_{2m}\right) & e_{31}=-e_{46}=(\xi \cos \theta)\left(2 f_{dm} S_{1m}-\frac{\xi^2+f_{sm}^2}{f_{sm}} S_{2m}\right) \\
 e_{23}=-e_{65}=\tan \theta \cdot e_{13} & e_{32}=-e_{56}=\tan \theta \cdot e_{31} \\
 e_{33}=e_{66}=-\left(\xi^2+f_{sm}^2\right) C_{1m}+2 \xi^2 C_{2m} \\
 e_{14}=\left[(\xi \cos \theta)^2\left(\frac{S_{1m}}{f_{dm}}-\frac{S_{2m}}{f_{sm}}\right)+\frac{\kappa_m^2 g_{sm}}{f_{sm}}\right] \cdot \frac{1}{\kappa} & e_{25}=\left[(\xi \sin \theta)^2\left(\frac{S_{1m}}{f_{dm}}-\frac{S_{2m}}{f_{sm}}\right)+\frac{\kappa_m^2 g_{sm}}{f_{sm}}\right] \cdot \frac{1}{\kappa} \\
 e_{15}=e_{24}=\left[(\xi \cos \theta)(\xi \sin \theta)\left(\frac{S_{1m}}{f_{dm}}-\frac{S_{2m}}{f_{sm}}\right)\right] \cdot \frac{1}{\kappa} & e_{34}=-e_{16}=[(\xi \cos \theta)(C_{1m}-C_{2m})] \cdot \frac{1}{\kappa} \\
 e_{41}=\left[4(\xi \cos \theta)^2 f_{dm} S_{1m}+\left\{(\xi^2+3 f_{sm}^2)(\xi \sin \theta)^2-(\xi^2+f_{sm}^2)\right\} \frac{S_{2m}}{f_{sm}}\right] \cdot \bar{\kappa} \\
 e_{52}=\left[4(\xi \sin \theta)^2 f_{dm} S_{1m}+\left\{(\xi^2+3 f_{sm}^2)(\xi \cos \theta)^2-(\xi^2+f_{sm}^2)\right\} \frac{S_{2m}}{f_{sm}}\right] \cdot \bar{\kappa} \\
 e_{42}=e_{51}=(\xi \cos \theta)(\xi \sin \theta)\left[4 f_{dm} S_{1m}-(\xi^2+3 f_{sm}^2) \frac{S_{2m}}{f_{sm}}\right] \cdot \bar{\kappa} \\
 e_{61}=-e_{43}=[2(\xi \cos \theta)(\xi^2+f_{sm}^2)(C_{1m}-C_{2m})] \cdot \bar{\kappa} \\
 e_{35}=-e_{26}=\tan \theta \cdot e_{34} & e_{62}=-e_{53}=\tan \theta \cdot e_{61} \\
 e_{36}=\left[-f_{dm} S_{1m}+\frac{\xi^2}{f_{sm}} S_{2m}\right] \cdot \frac{1}{\kappa} & e_{63}=\left[-\frac{(\xi^2+f_{sm}^2)^2}{f_{dm}} S_{1m}+4 \xi^2 f_{sm} S_{2m}\right] \cdot \bar{\kappa} \\
 & \dots\dots\dots(A. 15)
 \end{cases}$$

また

$$\begin{cases}
 C_{1m}=\cosh \left(f_{dm} a_1 d_m\right), \quad C_{2m}=\cosh \left(f_{sm} a_1 d_m\right) \\
 S_{1m}=\sinh \left(f_{dm} a_1 d_m\right), \quad S_{2m}=\sinh \left(f_{sm} a_1 d_m\right)
 \end{cases} \dots\dots\dots(A. 16)$$

C. 静的な場合——無次元表示

$$\bar{C}_m^{-1}=\frac{1-n_m^2}{2} \begin{bmatrix} \frac{2}{1-n_m^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{1-n_m^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \cos \theta \cdot \frac{b}{\zeta'} & \sin \theta \cdot \frac{b}{\zeta'} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2 n_m^2}{1-n_m^2} \cos \theta \left(\sin^2 \theta+\frac{1+n_m^2}{1-n_m^2}\right) \frac{b}{\zeta'} & -\cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \frac{b}{\zeta'} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2 n_m^2}{1-n_m^2} \sin \theta & -\cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \frac{b}{\zeta'} & \left(\cos^2 \theta+\frac{1+n_m^2}{1-n_m^2}\right) \frac{b}{\zeta'} & 0 \\ 2 \cos \theta & 2 \sin \theta & 0 & 0 & 0 & -\frac{b}{\zeta'} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(A. 17)$$

$$G_m=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_{0m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{0m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{0m} \end{bmatrix} \dots(A. 18) \quad G_m^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\mu_{0m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mu_{0m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mu_{0m} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(A. 19)$$

$$\bar{E}_m=\frac{1-n_m^2}{2}\left[e_{ij}\right]_m \dots\dots\dots(A. 20)$$

ここに

$$\begin{cases}
 e_{11}=e_{44}=2\left(\frac{C}{1-n_m^2}+\zeta'\cos^2\theta\cdot d_m'S\right) & e_{22}=e_{55}=2\left(\frac{C}{1-n_m^2}+\zeta'\sin^2\theta\cdot d_m'S\right) \\
 e_{12}=e_{21}=e_{45}=e_{54}=2\zeta'\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot d_m'S & e_{33}=e_{66}=2\left(\frac{C}{1-n_m^2}-\zeta'd_m'S\right) \\
 e_{13}=-e_{64}=-2\cos\theta\left(\zeta'd_m'C+\frac{n_m^2}{1-n_m^2}S\right) & e_{23}=-e_{65}=-2\sin\theta\left(\zeta'd_m'C+\frac{n_m^2}{1-n_m^2}S\right) \\
 e_{31}=-e_{46}=2\cos\theta\left(\zeta'd_m'C-\frac{n_m^2}{1-n_m^2}S\right) & e_{32}=-e_{56}=2\sin\theta\left(\zeta'd_m'C-\frac{n_m^2}{1-n_m^2}S\right) \\
 e_{14}=\left[\cos^2\theta\cdot d_m'C+\left(\sin^2\theta+\frac{1+n_m^2}{1-n_m^2}\right)\frac{S}{\zeta'}\right]\cdot b & e_{25}=\left[\sin^2\theta\cdot d_m'C+\left(\cos^2\theta+\frac{1+n_m^2}{1-n_m^2}\right)\frac{S}{\zeta'}\right]\cdot b \\
 e_{15}=e_{24}=\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot\left(d_m'C-\frac{S}{\zeta'}\right)\cdot b & e_{42}=e_{31}=2(\zeta')^2\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot\left\{2d_m'C+\frac{1-2n_m^2}{1-n_m^2}\cdot\frac{S}{\zeta'}\right\}\cdot\frac{1}{b} \\
 e_{34}=-e_{16}=\cos\theta\cdot d_m'S\cdot b & e_{35}=-e_{26}=\sin\theta\cdot d_m'S\cdot b \\
 e_{41}=\left[4\cos^2\theta\cdot d_m'C+\frac{2}{1-n_m^2}\zeta'\{(1-2n_m^2)\cos^2\theta+1\}S\right]\cdot\frac{1}{b} & \\
 e_{52}=\left[4\sin^2\theta\cdot d_m'C+\frac{2}{1-n_m^2}\zeta'\{(1-2n_m^2)\sin^2\theta+1\}S\right]\cdot\frac{1}{b} & \\
 e_{61}=-e_{43}=4(\zeta')^2\cos\theta\cdot d_m'S\cdot\frac{1}{b} & e_{62}=-e_{53}=4(\zeta')^2\sin\theta\cdot d_m'S\cdot\frac{1}{b} \\
 e_{36}=\left[-d_m'C+\frac{1+n_m^2}{1-n_m^2}\cdot\frac{S}{\zeta'}\right]\cdot b & e_{63}=4\zeta'(-\zeta'd_m'C+S)\cdot\frac{1}{b}
 \end{cases}
 \dots\dots\dots(A. 21)$$

また

$$S=\sinh(\zeta'd_m'), \quad C=\cosh(\zeta'd_m'), \quad \zeta'=\zeta b, \quad d_m'=\frac{H}{b}d_m=\frac{\{H\}_m}{b} \quad \dots\dots\dots(A. 22)$$