

水平力を受ける鉄骨立体骨組の弾塑性性状に関する実験的研究

若林 實・中村 武・井上 明

EXPERIMENTAL STUDIES ON THE ELASTIC-PLASTIC BEHAVIOR OF STEEL SPACE FRAME SUBJECTED TO CONSTANT VERTICAL LOAD AND MONOTONIC AND ALTERNATELY REPEATED HORIZONTAL LOAD

By Minoru WAKABAYASHI, Takeshi NAKAMURA and Akira INOUE

Synopsis

One story, one span and one bay miniature space frame models are tested under constant vertical and monotonically increasing or alternately repeated horizontal loads. Columns of the frames have H-shaped cross section. Parameters in the experiment are put on the magnitude of axial force in columns and horizontal loading direction. Theoretical analysis is also performed using plastic hinge method with spherical interaction equation in yielding under combined actions of axial force, bi-axial bending and twisting in the column.

Three-dimensional behaviors of steel space frame are obtained in the experiment and traced by theoretical analysis. In the analysis, it is confirmed that the torsional rigidity and resistant capacity of column itself do not give large effect on the behavior of space frame.

1. 序

通常の建築構造物は、柱・はり等の線材と仮定できる要素よりなる立体的骨組み構造と考えられる。実際の設計では、これらの立体構造物を平面骨組の集合と見なし適当な平面骨組に分解し、その平面骨組の構内に鉛直力および水平力が作用するものとして解析する場合が多い。

平面骨組に分解し易い、整形な立体骨組構造物においても、外力が骨組に対して3次的に作用する場合が多く、一般に骨組を構成する各部材は、軸方向力、2軸に関する曲げモーメントに加えて振りモーメントを受けることになる。このような場合には立体骨組を平面構造物に分解するのではなく、立体的に取り扱ってやる必要がある。とくに塑性設計の立場からは構造物を3次的にとらえて解析し、立体骨組としての終局耐力、弾塑性領域での変形性状、最大耐力以後の挙動、変形能力等を明らかにしておくが必要になる。

立体骨組の弾塑性解析に関する研究は、部材自身が軸力、2軸曲げを受けた時あるいは軸力、2軸曲げ、振れを同時に受けた時の断面の降伏条件を追跡したもの^{1)~5)}、および立体骨組の弾性あるいは弾塑性解析^{6)~14)}にわけられるが、部材自身の複合応力を受けたときの降伏条件のはん雑さが主な原因で骨組解析はきわめて大きな仮定の下で簡単な骨組に限られている。また繰返し水平力を受けた際の挙動を追跡したものは極めて少い¹¹⁾。立体骨組の挙動を精度よく追跡し、比較的解析の容易な近似解析法の確立のためにはさらに実験的・解析的研究が必要である。

本報告は、文献11)で行なわれた、長方形断面柱4本と剛なはり、屋根板よりなる一層一スパン鉄骨立体骨組小型模型を用いた実験的研究を一步進め、より現実的な柱断面であるH形断面を用いた4本柱よりなる一層一スパン立体骨組に一定の鉛直力および単調あるいは繰返し静的水平力を加えた際の弾塑性挙動を実

驗的，理論的に追跡したものである。なお本実験的研究で用いた実験装置は文献11) で用いられたものを一部改良して用いたものであり，理論解析は文献10) を基礎に文献11) で試みられた解析の一部の条件を変えたものが，骨組の基本性状を追跡するために用いられている。

本実験的研究は昭和 49, 50 年度科学研究費補助金・一般研究 (B), 「繰返し水平力を受ける鉄骨立体骨組の弾塑性性状に関する実験的研究」・(研究代表者・若林實) の補助によって行なわれたものである。

2. 立体骨組の実験

2.1 実験計画

立体骨組の挙動を調べるための実験模型としては，種々の形状，加力方法が考えられるが，ここでは最も単純で，骨組の立体挙動が柱自身の弾塑性挙動および剛接ラーメンの効果のみとして捕えやすい，4本の柱と剛なはりおよび屋根板よりなる柱脚固定の1層1スパンの立体骨組とした。柱断面形は通常の鉄骨構造骨組に最も多く用いられている H 形断面とした。加力方法としては柱に固定荷重による鉛直荷重に相当した一定の鉛直荷重を用えた後，骨組が3次元変形を生じやすい方向に単調あるいは繰返し水平力を加えることとした。

実験に用いた試験体は Fig. 1 に示すような，SS41 材鋼板 (厚さ 10 mm) から機械切削により製作した小型 H 形断面柱 (H-7×7×1.5×1.5) 2本と柱に比して大きな曲げ剛性をもつ長方形断面はりおよび基礎ばりをもつスパン 200mm, 階高 100mm の平面骨組を 150mm の間隔で平行に並べ，これを柱頭部で長方形断面をもつはり2本で溶接結合している。さらに，中央に鉛直力載荷用鋼棒が通る孔 ($\phi 40$ mm)，長辺中央及び隅角部近くに水平力載荷用孔 ($\phi 10$ mm) をもつ厚さ 6mm の屋根板が柱頭およびはりに断続溶接に

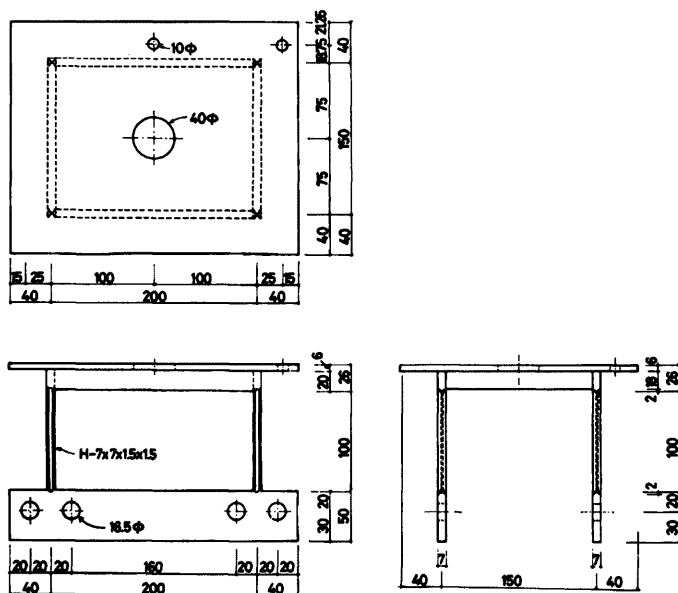


Fig. 1. Test Specimen.

よって接合されている。

実験変数としては、水平力の载荷方向、水平力の加力の単調载荷、繰返し载荷の別、鉛直荷重による柱の

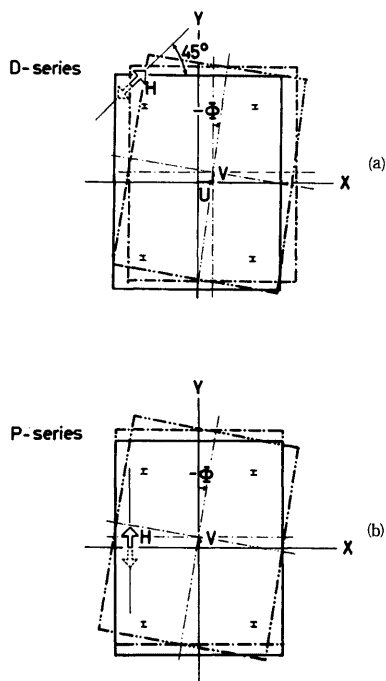


Fig. 2. Loading Direction.

Table 1. Dimension and Properties of Column Section.

Specimer	Loading Angle θ	Axial Force P/P_0	Dimensions (mm)				Yield Axial Force (kg) P_0	Full-plastic Moment (kg·mm)		
			H	B	t_w	t_f		M_{x0}	M_{y0}	M_{z0}
DM 15	$\frac{\pi}{4}$	0.159	6.92	6.88	1.32	1.46	813	1941	1141	1003
DM 35	$-\frac{\pi}{4}$	0.357	6.69	6.69	1.30	1.19	700	1619	925	822
DC 35	$-\frac{\pi}{4}$ ($\pi/4$)	0.331	6.88	6.86	1.24	1.31	756	1810	1055	939
DM 50	$-\frac{\pi}{4}$	0.492	6.83	6.80	1.38	1.29	761	1782	1035	912
DC 50	$-\frac{\pi}{4}$ ($\pi/4$)	0.509	6.79	6.86	1.24	1.27	738	1745	1024	902
PM 15	$-\frac{\pi}{2}$	0.163	6.92	6.88	1.46	1.32	793	1870	1089	954
PM 35	$-\frac{\pi}{2}$	0.327	7.05	6.93	1.57	1.38	861	1997	1163	1017
PC 35	$-\frac{\pi}{2}$ ($\pi/2$)	0.332	7.01	6.91	1.50	1.38	827	1965	1148	1007

軸力の大きさがとられた。水平力の載荷方向は屋根板隅角部で骨組構面と45°をなす方向に加力するもの(Dシリーズ)と屋根板長辺の中央位置で骨組の一構面に平行に、骨組の柱が一次的には断面強軸に曲げを受ける方向に加力するもの(Pシリーズ)とした。水平力の加力は単調載荷(M)、交番繰返し載荷(C)とし、鉛直荷重による柱軸力は柱断面の降伏軸力の15%(表示15)、35%(表示35)および50%(表示50)の3種類とした。試験体数はこれらの実験変数の適当な組合せによる合計8個である。試験体名は実験変数を表す記号の組合せで表示され、例えばDC35は45°方向繰返し水平加力で鉛直荷重による柱圧縮軸力が降伏軸力の35%の大きさと与えられる試験体を示す。試験体への水平力(H)の加力方向、位置および試験体の変位方向を代表する屋根板中央点の変位 U, V, ϕ の方向をFig. 2に示す。試験体の断面実験寸法および素材の引張試験により得た降伏応力度を用いて計算された柱断面の降伏軸力(P_0)、2軸に関する曲げおよび捩れに関する全塑性モーメント(M_{x0}, M_{y0} および M_{t0})をTable 1に示す。

2.2 実験装置および実験方法

実験装置の概略をFig. 3に示す。実験装置内に組み設置された試験体の状況をPhoto. 1(a), (b)に示す。鉛直荷重の載荷はFig. 3中(A)に示す鋼函の中に所要の重量に達するまで一個2kgの鋼重錘を投入して与えた。鉛直荷重の大きさは、プルベングリング(B)で測定し載荷用鋼棒(C)、(M)、ナット(F)および載荷ビーム(E)、(G)、鋼球を用いたピン座(K)を介して柱頭部屋根板上面にまで伝達される。4本の柱に加わる軸力および各柱での軸力の偏心ができるだけ小さくなるよう、柱フランジ面に貼付されたひずみゲージの測定値を用いて、柱頭ピン位置、載荷ビームの支点位置の調整が行なわれた。鉛直荷重の載荷が円滑かつ容易に行なえるようにセンターホール油圧ジャッキ(H)が用いられている。この油圧ジャッキは試験体が水平力を受けて水平変位を生じたときに起る鉛直力加力用鋼棒の水平変位を拘束しないように下面に鋼球を用いたローラーに支えられて、反力床上に設置されている。試験体は(D)は水平に支えられた基礎定盤上で2組の山形鋼を用いた柱脚固定ブロックに高力ボルトで接合されている。水平力は約2.5mの水

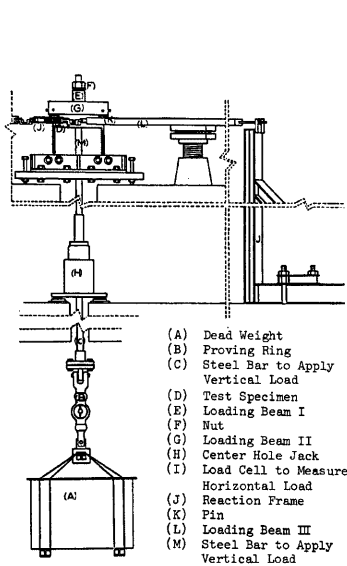


Fig. 3. Test Set-up.

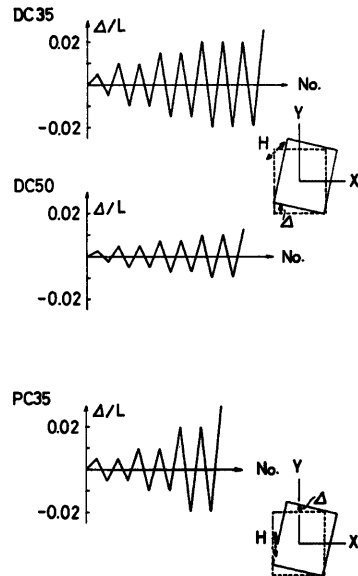


Fig. 4. Loading Program.

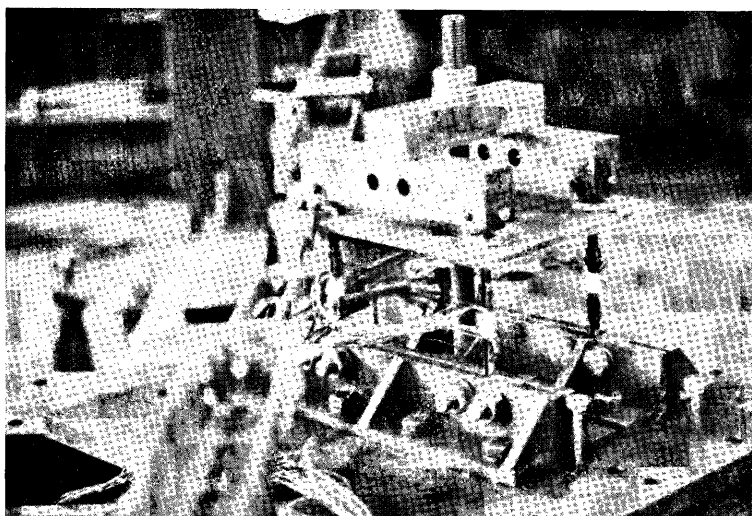


Photo. 1 (a). Test Set-up.

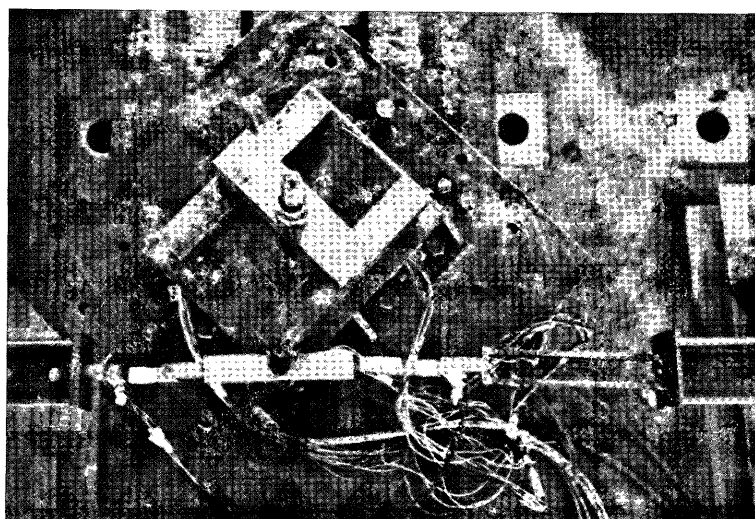


Photo. 1 (b). Test Set-up.

平力加力ビーム (L) を介して試験体から充分離れたと考えられる位置でボルトのねじを締めつけることによって与えられる。水平力の大きさは試作したロードセル (I) を用いて観測した。

繰返し荷重の載荷は、変位制御法によった。Fig. 4 中の図に示される Δ を制御変位とし Δ/L (L: 柱長)

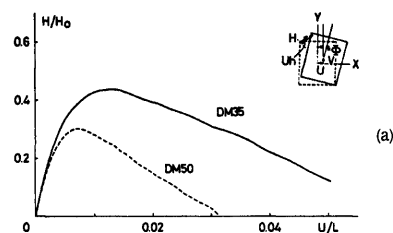
が ± 0.005 , ± 0.010 , ± 0.015 , ± 0.020 の大きさで各変位振幅で2回ずつの繰返し載荷を行なった。

試験体の変形測定は、屋根板の水平変位および水平回転角は4個のダイヤルゲージによる測定値から幾何学的関係を用いて計算により求めた。試験体柱のひずみは上下端フランジに各4枚貼付したストレーンゲージにより測定した。

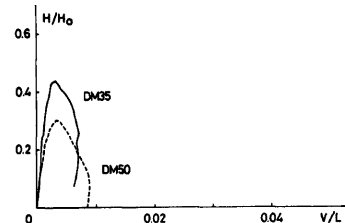
2.3 実験結果

単調水平力を構面と 45° 方向に載荷しDMシリーズの実験結果をFig. 5(a)~Fig. 5(e)に、実験終了後の試験体をPhoto. 2に示す。図中 H は加えた水平力で、軸力がない時に屋根板中央に構面と 45° 方向に水平力を加えた際の骨組の剛塑性崩壊荷重 H_0 で無次元化されて縦軸に示される。 U, V, Φ は屋根板中央点の骨組の弱い方向(x 方向), 強い方向(y 方向)への変位および水平回転角である。変位は柱長(L)で除されて無次元化されている。

鉛直荷重が大きくなると最大水平耐力が低下し、最大耐力後の下降勾配が大きくなるのが観察される。変形状として、外力のコンポーネントは一次的には x, y 方向へ同じ大きさであるが骨組構面の水平剛性の大小によって、弱い方向(x 方向)変位がより大きくあらわれる。最大耐力を越えて崩壊に至る際には、 x 方向変位、載荷点の変位、水平回転角は、耐力低下を伴いながら徐々に増大してゆくのに対し、構面の強い方向変位(y 方向変位 V)は崩壊直前より減少を始めるのが観察された。骨組の崩壊は骨組の弱い方向変位(U)の増大と屋根板の急激な水平回転を生じて起った。



(a)



(b)

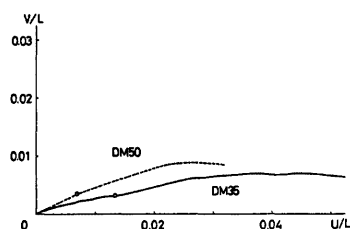
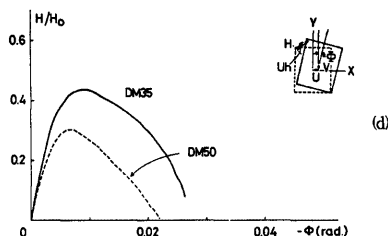
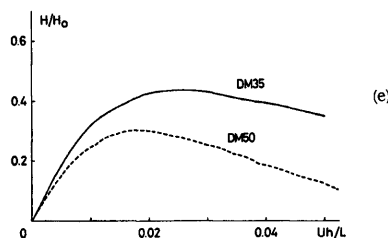


Fig. 5 (a)~(c).



(d)

(c)



(e)

Fig. 5 (d) & (e).

Fig. 5. Test Results (DM-Series).

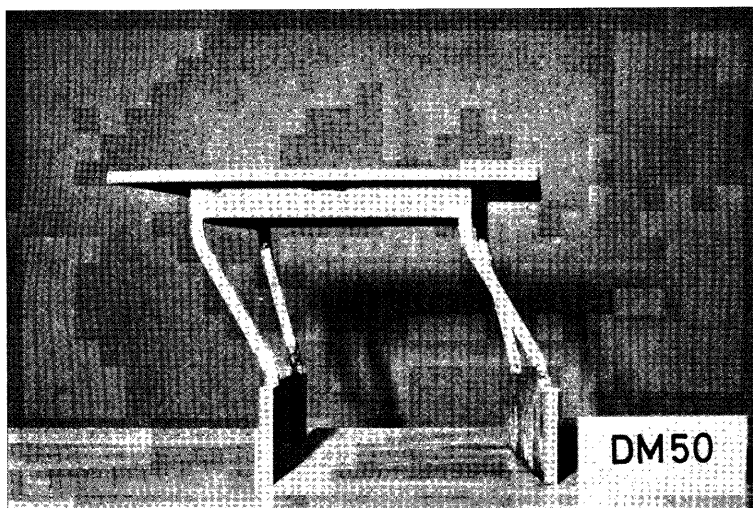


Photo. 2 (a). Specimen after Test (DM 50).

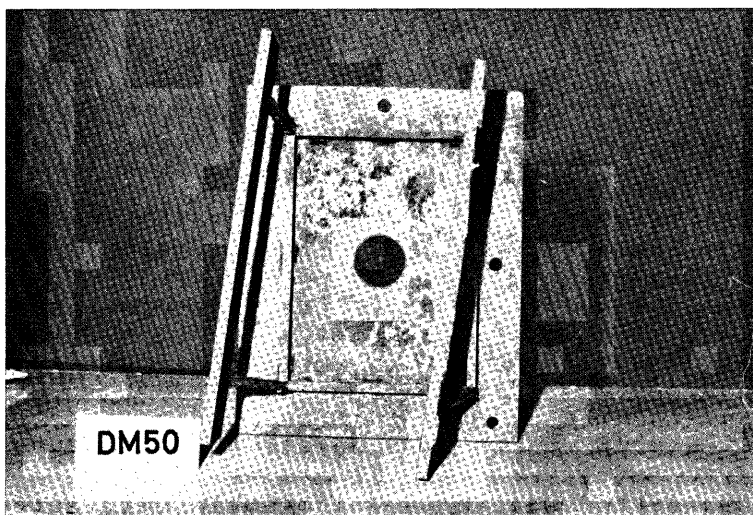
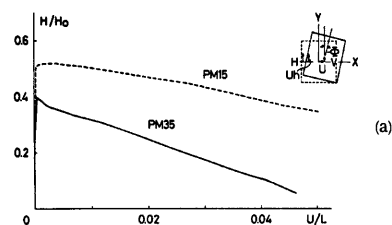
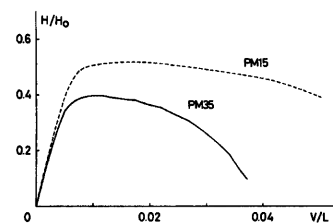


Photo. 2 (b). Specimen after Test (DM 50).

Fig. 6 (a)～(b) は一構面の強い方向と平行に水平力を単調載荷した場合 (PM シリーズ) の実験結果である。図中の両軸の表示は Fig. 5 と同様であるが、水平力 (H) の無次元化に用いた値 (H_0) は、軸力が零で、屋根板中心に y 方向の水平力を加えたときの骨組の剛塑性崩壊荷重である。平行載荷の PM シリー



(a)



(b)

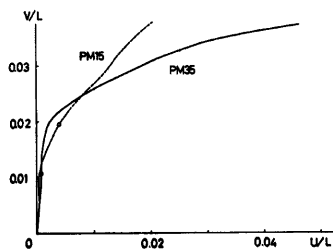
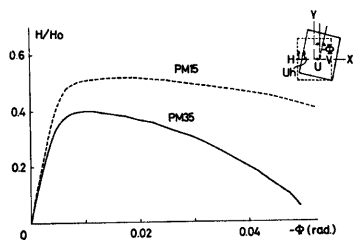
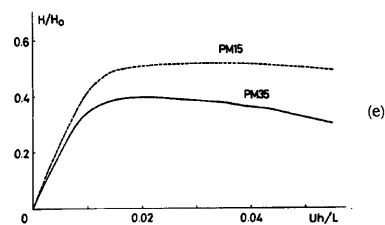


Fig. 6 (a) ~ (c).



(d)



(e)

Fig. 6 (d) & (e).

Fig. 6. Test Results (PM-Series).

ズでは最大耐力に達する以前は、ほとんど骨組の弱い方向 (x 方向) の変位 (U) は生ぜず、強い方向 (y 方向) 変位 (V) と水平回転 (ϕ) だけが生ずる。最大耐力に達すると同時に x 方向変位 (U) と回転角 (ϕ) が急激に生じ始め崩壊に到る。

Fig. 7~Fig. 9 は繰返し水平加力実験の結果である。図中の記号は対応する単調載荷のそれと同じである。図中に破線で示されるのは、対応する単調載荷実験結果である。繰返し載荷時の弾性勾配、最大耐力以後の耐力低下勾配は単調載荷時のそれとほぼ同じである。同一変位振幅下での繰返しでは履歴ループは安定して、ほぼ同一の経路をたどるが、変位振幅を増大するとループのたどる耐力が徐々に増大してゆくのが観察される。これは鋼材素材の繰返し応力ひずみ関係と鉛直力の存在によるものと考えられ、すでに平面骨組の実験および理論解析において確かめられている事実と符合するものである。正負の繰返し載荷でループの拡大に差がみられるがこの原因はいまのところ説明できない。

繰返し加力の際の変形性状で顕著なことは、ある一点の正負の変位振幅を同じ絶対値で制御してやると、繰返し加力に伴って屋根板中央点の変位が徐々に一方方向へ蓄積されていくことである。この事実は Fig. 7 (c), Fig. 8(e), Fig. 9(a), (e) で示されている。45°方向載荷の場合にはある程度逆方向載荷時に変形を回復しながら徐々に U, V 両方向変位共蓄積してゆく様子が観察され、平行載荷の場合には、最大耐力を越えて後、骨組の弱い方向変位 (U) はまったく逆方向載荷によって回復することなく、最初に変位した方向に急激に偏してゆく様子が観察される。

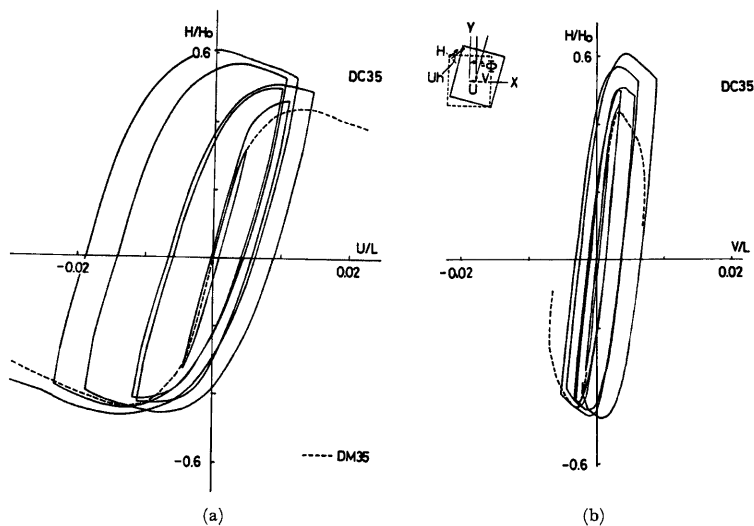


Fig. 7 (a), (b).

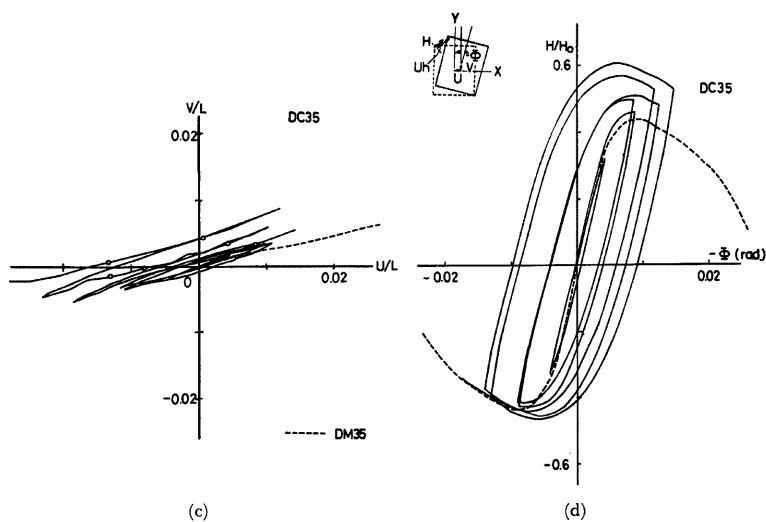


Fig. 7 (c), (d).

Fig. 7. Test Results (DC 35).

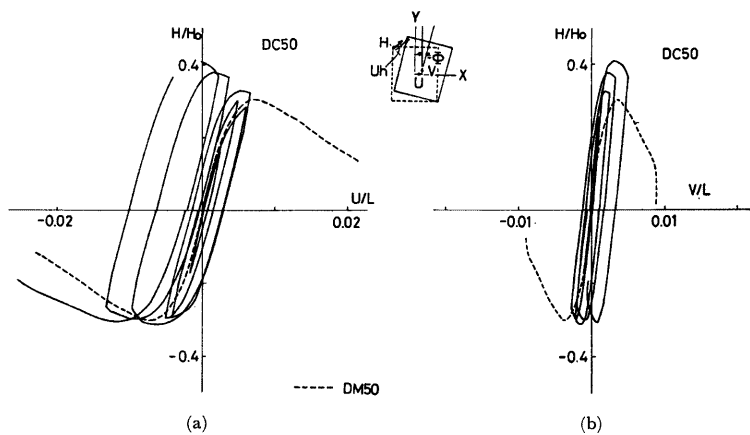


Fig. 8 (a), (b).

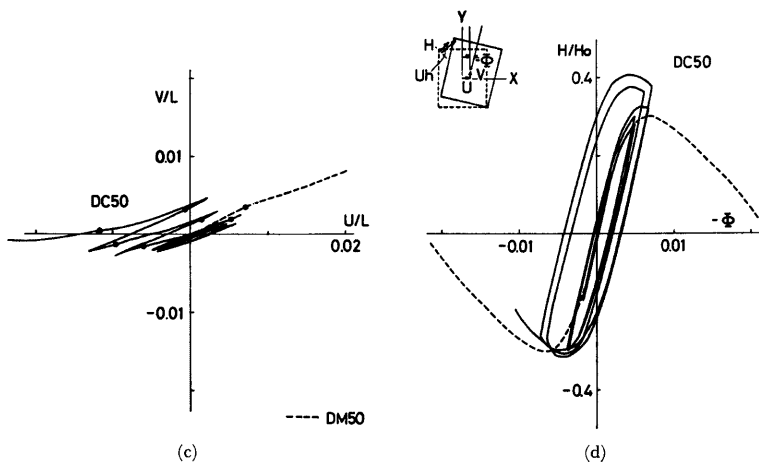


Fig. 8 (c), (d).

Fig. 8 Test Results (DC 50).

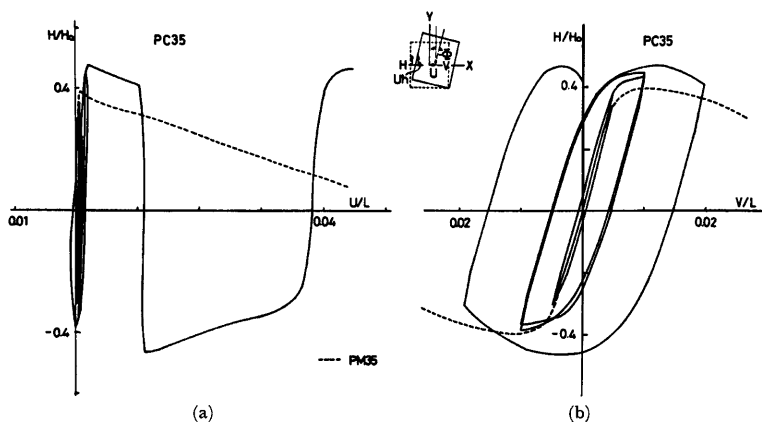


Fig. 9 (a), (b).

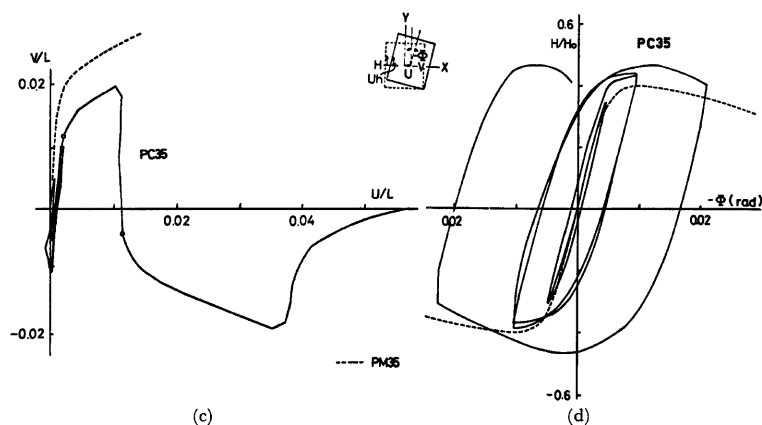


Fig. 9 (c), (d).

Fig. 9. Test Results (PC 35).

3. 立体骨組の弾塑性解析

従来、立体骨組の弾塑性性状に関連した解析は、鉛直力のみを受ける場合の弾性および非弾性座屈解析、水平力のみを受ける場合の骨組のメカニズム解析、および一定鉛直力と漸増水平力を受ける場合の不安定現象を考慮した弾塑性解析等が行われてきた。

ここでは、解析の対象とする立体骨組を2の実験で用いた屋根面およびはりが剛なH形断面柱材4本からなる鉄骨立体骨組とし、一定の鉛直力のもとで静的に増大あるいは減小する水平力を受ける場合の弾塑性解析を行なうものである。

解析法としては、微小変形および断面の完全弾塑性の性質を仮定していわゆる塑性ヒンジ解析法を採用し

た。解析法は文献10)の方法を基礎にして文献6), 11)に用いられた方法を適用している。本節でその解析法を簡単に述べる。文献11)で行なわれた解析より本解析が拡張された点は柱材自身の捩れ抵抗の項に両材端で反り変形が拘束されたことによる抵抗を加えて考慮している点である。

3.1 解析上の仮定

立体骨組の不安定現象を考慮した弾塑性解析を行なうに際して、次の仮定を設けた。

- (1) 微小変形理論が成立つ。
- (2) 断面は完全弾塑性の性質を有する。
- (3) 柱材は2軸対称のH形断面の等断面材である。
- (4) 捩りに関しては材端反り拘束とする。
- (5) 曲げモーメント勾配より生じるせん断力は降伏条件に影響しない。
- (6) せん断変形は無視する。
- (7) 外力は静的に漸増あるいは漸減する。

その他、通常の弾塑性解析で用いられるものと同様の仮定を採用する。

3.2 部材弾性剛性行列

部材の釣り合い微分方程式を解くことによって部材弾性剛性を得る。部材端力は通常の剛性法の表記方法に従い Fig. 10 のようにとり、対応する変位を正とする。

一定軸力と2軸曲げモーメントおよび捩りモーメントを受けて変形した部材の釣り合いは、一般に2軸曲げと捩りに関して連立微分方程式で表わされる⁶⁾。この3つの連立微分方程式を解いて部材剛性を求めるのが厳密であるが、解析解を得ることができない。

ここでは、上の3つの連立微分方程式の代用としての、2軸曲げおよび捩りに関して独立な微分方程式に、材端条件を入れて解いた、圧縮軸力によって低減された部材剛性を用いることにする。これは、いわゆる座屈たわみ角法として用いられている。

今、2軸対称断面材が軸力を受けて微小な座屈変形を生じた部材の釣り合い微分方程式は、2軸曲げ、捩りに関して次の独立な3式で表わされる⁶⁾。

$$\begin{aligned} EI_y u'''' + Pu'' &= 0 \\ EI_x v'''' + Pv'' &= 0 \quad \dots\dots\dots(1) \\ EI_w \varphi'''' - (GK_T - Pr_0^2) \varphi &= 0 \end{aligned}$$

ここで、 I_x, I_y はそれぞれ x, y 軸まわりの断面2次モーメント、 E はヤング係数、 I_w は反り定数、 G はせん断弾性係数、 K_T はねじり定数、 r_0^2 は極2次モーメントと断面積の比、 P は軸力、 u, v は、それぞれ x, y 方向変位、 φ は回転角である。

l を材長として

$$z_x = l \sqrt{\frac{P}{EI_x}}, \quad z_y = l \sqrt{\frac{P}{EI_y}}, \quad \lambda = l \sqrt{\frac{GK_T - Pr_0^2}{EI_w}}$$

を用いると

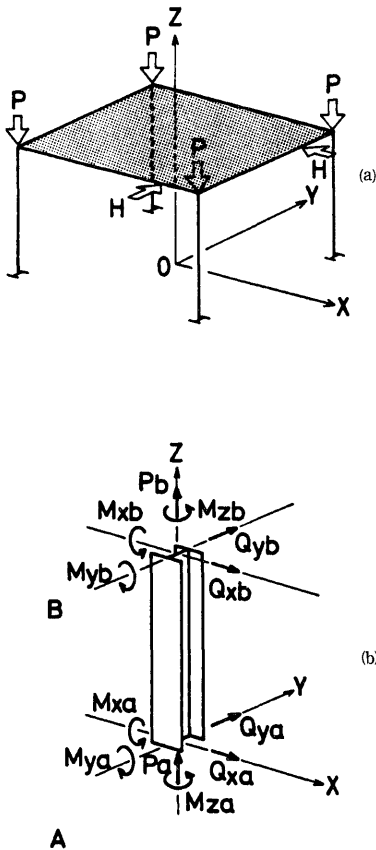


Fig. 10. Analysed Model.

$$\begin{aligned}
 u''' + z_y^2/l^2 &= 0 \\
 v''' + (z_x^2/l^2)v'' &= 0 \dots\dots\dots(2) \\
 \varphi''' - (x^2/l^2)\varphi &= 0
 \end{aligned}$$

以上の3式に材端条件を入れれば解は求まる。

振りに関しては柱断面がH形であるので材端反り拘束 ($\varphi' = 0$) とし、本解析では $\lambda > 0$ の場合を取り扱っている。

柱の材端力ベクトル $\{F_a\}$, $\{F_b\}$ と材端変位ベクトル $\{u_a\}$, $\{u_b\}$ の間には次の関係が成り立つ。

$$\begin{Bmatrix} F_a \\ F_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(3)$$

剛性行列は(2)式より次のように表わされる。

$$\begin{aligned}
 [k_{aa}] &= \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI_y \delta_y}{l^3} & 0 & 0 & \frac{EI_y \gamma_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI_x \delta_x}{l^3} & -\frac{EI_x \gamma_x}{l^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EI_x \gamma_x}{l^2} & \frac{EI_x \alpha_x}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI_y \gamma_y}{l^2} & 0 & 0 & \frac{EI_y \alpha_y}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_w \mu}{l^3} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(4) \\
 [k_{ab}] &= \begin{pmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EI_y \delta_y}{l^3} & 0 & 0 & \frac{EI_y \gamma_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EI_x \delta_x}{l^3} & -\frac{EI_x \gamma_x}{l^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EI_x \gamma_x}{l^2} & \frac{EI_x \beta_x}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EI_y \gamma_y}{l^2} & 0 & 0 & \frac{EI_y \beta_y}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EI_w \mu}{l^3} \end{pmatrix} \\
 [k_{ba}] &= \begin{pmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EI_y \delta_y}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{EI_y \gamma_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI_x \delta_x}{l^3} & \frac{EI_x \gamma_x}{l^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EI_x \gamma_x}{l^2} & \frac{EI_x \beta_x}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI_y \gamma_y}{l^2} & 0 & 0 & \frac{EI_y \beta_y}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EI_w \mu}{l^3} \end{pmatrix} \\
 [k_{bb}] &= \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI_y \delta_y}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{EI_y \gamma_y}{l^2} & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$[k_{bb}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{EI_x \delta_x}{l^3} & \frac{EI_x \gamma_x}{l^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI_x \gamma_x}{l^2} & \frac{EI_x \alpha_x}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EI_y \gamma_y}{l^2} & 0 & 0 & \frac{EI_y \alpha_y}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_w \mu}{l^3} \end{pmatrix}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{z_x \sin z_x - z_x^2 \cos z_x}{2(1 - \cos z_x) - z_x \sin z_x} \\ \beta_x &= \frac{z_x^2 - z_x \sin z_x}{2(1 - \cos z_x) - z_x \sin z_x} \\ \gamma_x &= \alpha_x + \beta_x \dots\dots\dots (5) \\ \delta_x &= 2\gamma_x - z_x^2 \\ \mu &= \frac{\lambda^3 \sinh \lambda}{2(1 - \cosh \lambda + \lambda \sinh \lambda)} \end{aligned}$$

$\alpha_y, \beta_y, \gamma_y, \delta_y$ については, (5)式の x を y に変えたものに等しい。

部材端力ベクトルと変位ベクトルの成分は,

$$\{F_a\} = \begin{Bmatrix} P_a \\ Q_{xa} \\ Q_{ya} \\ M_{xa} \\ M_{ya} \\ M_{za} \end{Bmatrix} \quad \{u_a\} = \begin{Bmatrix} w_a \\ u_a \\ v_a \\ Q_{xa} \\ Q_{ya} \\ \varphi_a \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (6)$$

ここで対象としている立体骨組は柱脚固定であるので, $\{u_a\} = 0$ よって

$$\begin{aligned} \{F_a\} &= [k_{ab}] \{u_b\} \\ \{F_b\} &= [k_{bb}] \{u_b\} \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

となる。

3.3 塑性ヒンジの発生した部材の部材剛性行列

ある載荷段階で, 部材 A B の端部の断面力ベクトルが一般化応力で表現された降伏曲面上に達すると, 部材端部に塑性ヒンジが形成される。以後の部材剛性は荷重増分の載荷に対して生じる断面力の増力 dF と部材端部における変形の増分 du との関係を考慮することによって導かれる。その際, 次の 4 つの条件が成り立つ¹⁰⁾。

- (1) 変形増分は弾性部分と塑性部分に分けられる。

$$\begin{aligned} du_a &= du_a^e + du_a^p \\ du_b &= du_b^e + du_b^p \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

- (2) 変形増分の弾性部分と断面力増分との間には, 弾性的な関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} dF_a &= k_{aa} du_a^e + k_{ab} du_b^e \\ dF_b &= k_{ba} du_a^e + k_{bb} du_b^e \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

- (3) 変形増分の塑性部分は断面が降伏曲面上に達している点における外向き法線と同じ向きを持つベクトルである。

$$\begin{aligned} du_a^p &= \varepsilon_a EN_a \\ du_b^p &= \varepsilon_b EN_b \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ここで, ε は未知のスカラー量, E は単位行列, N は外向き単位法線ベクトルである。

- (4) 断面力増分は断面力が降伏曲面に達している点における降伏曲面に対する接面上にある。

$$\begin{aligned} N_a^t dF_a &= 0 \\ N_b^t dF_b &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 N_a^t は N_a の転置行列を表す。

- (8), (9), (10), (11) より $\varepsilon_a, \varepsilon_b, du_a^e, du_b^e, du_a^p, du_b^p$ を消去すれば断面力増分と変形増分の関係式が得られ、塑性ヒンジを有する部材の部材の部材剛性行列は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} k_{aa}^M &= k_{aa} - k_{aa} N_a (e_3 N_b^t k_{ba} - e_4 N_a^t k_{aa}) \\ &\quad - k_{ab} N_b (e_1 N_b^t k_{ba} - e_2 N_a^t k_{aa}) \\ k_{ab}^M &= k_{ab} - k_{ab} N_b (e_1 N_b^t k_{ba} - e_2 N_a^t k_{aa}) \\ &\quad - k_{aa} N_a (e N_b^t k_{ba} - e N_{ab} k_{aa}^e) \\ k_{ba}^M &= k_{ba} - k_{ba} N_a (e_3 N_b^t k_{ba} - e_4 N_a^t k_{aa}) \\ &\quad - k_{bb} N_b (e_1 N_b^t k_{ba} - e_2 N_a^t k_{aa}) \\ k_{bb}^M &= k_{bb} - k_{bb} N_b (e_1 N_b^t k_{ba} - e_2 N_a^t k_{aa}) \\ &\quad - k_{ba} N_a (e_3 N_b^t k_{ba} - e N_b^t k_{ba}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= N_a^t k_{aa} N_a / c \\ e_2 &= N_b^t k_{ba} N_a / c \\ e_3 &= -N_a^t k_{ab} N_b / c \\ e_4 &= -N_b^t k_{bb} N_b / c \\ c &= (N_b^t k_{bb} N_b) \times (N_a^t k_{aa} N_a) \\ &\quad - (N_b^t k_{ba} N_a) \times (N_a^t k_{ab} N_b) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

3.4 降伏条件式

断面の降伏条件式は、塑性ヒンジの発生を規定する条件であり、塑性ヒンジを有する部材の部材剛性をも決定する。このため、降伏条件式は塑性ヒンジ法による立体骨組の弾塑性解析において、重要である。

これまで、材料の完全弾塑性の性質を仮定して、複合応力を受ける種々の断面の降伏条件式が誘導されてきた。

軸力と2軸曲げモーメントを受けるH形断面の降伏条件式については、厳密解^{3),3)}および近似値¹⁾が示されている。この場合、H形断面の降伏条件式は中立軸位置によって変化する、1つの関数では表現され得ない。軸力、2軸曲げモーメントに加えて振りモーメントを受ける場合については、研究は少なく、いずれも振りモーメントによって生じるせん断応力の取扱いに工夫が見られる^{4),5)}。

以上のように、降伏条件の設定は重要であるが、立体骨組解析への応用という点で以上の降伏条件式は煩雑である。ここでは解析を単純化するため、次の一般応力空間において球型で表わされる降伏条件式を用いた。

$$\left(\frac{M_x}{M_{x0}} \right)^2 + \left(\frac{M_y}{M_{y0}} \right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_{z0}} \right)^2 = 1.0 + d - \left(\frac{P}{P_0} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 M_x, M_y はそれぞれ x, y 軸まわりのモーメント、 M_z は振りモーメント、 P は軸力である。 $M_{x0}, M_{y0}, M_{z0}, P_0$ はそれぞれが単独で作用した時、断面を塑性化させる量である。 $(P/P_0)^2$ を右辺に移しているのは、解析で軸力変動および軸方向塑性変形を無視しているためで、柱作用軸力によって球面の大きさが縮小された形となっている。また、(14)式の右辺の d は、断面力が降伏曲面に達した後、降伏曲面から離れる事を許容していることを示す。この d は最初にヒンジが形成される時は0である。

この球型降伏条件式を有次元で表現した時の曲面上の 1 点の外向き単位法線ベクトルは次のようになる。

$$N = \frac{1}{\sqrt{\frac{M_x^2}{M_{x0}^4} + \frac{M_y^2}{M_{y0}^4} + \frac{M_z^2}{M_{z0}^4}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{M_x}{M_{x0}^3} \\ \frac{M_y}{M_{y0}^3} \\ \frac{M_z}{M_{z0}^3} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(15)$$

この球型降伏条件式において、振りモーメントが 0 の場合、軸力と 2 軸曲げモーメントを受ける H 形断面の降伏条件式との比較を実験で用いた断面を例として **Fig. 11** に示している。これより球型降伏条件式は、高軸力の作用のもとでは耐力を過大評価していることになる。

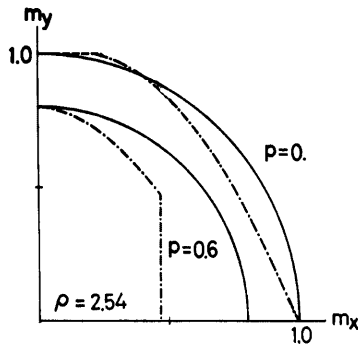


Fig. 11 Yield Condition.

3.5 適合条件式

立体骨組が水平力を受けて変形する時、屋根面は水平移動と回転をともないながら剛体移動する。

Fig. 12 のように屋根面が水平移動と回転を生じた場合、屋根面回転角 ϕ が $\cos \phi \approx 1$, $\sin \phi \approx \phi$ となるような小回転とする。この場合、各柱の変位 u_i, v_i および回転角 φ_i は屋根面中央点の変位 U, V および回転角 ϕ を用いて次のように表わされる。

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_y \\ 0 & 1 & a_x \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -a_y \\ 0 & 1 & -a_x \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a_y \\ 0 & 1 & a_x \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a_y \\ 0 & 1 & a_x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ \phi \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(16)$$

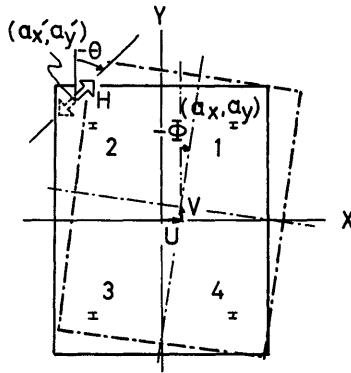


Fig. 12

3.6 釣り合い式

骨組についての釣り合いは、変形前の状態で屋根面のフリーボディを取り出して求める2方向の力と振りの釣り合いは次のように表わされる。

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ M_T \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_y & a_x & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{x1} \\ Q_{y1} \\ M_{z1} \end{Bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_y & -a_x & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{x2} \\ Q_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (17) \\
 &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_y & -a_x & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{x3} \\ Q_{y3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_y & a_x & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{x4} \\ Q_{y4} \\ M_{z4} \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ M_T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H \cos \theta \\ H \sin \theta \\ -H_x a_y' + H_y a_x' \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (18)$$

(a_x', a_y') は水平力作用位置の座標であり、 θ は水平力と x 軸とのなす角度である。

3.7 骨組の弾塑性解析法

骨組の釣り合い式 (17) に部材端力-部材変位関係式 (3) を代入し、さらに適合条件式 (16) を用いると骨組としての外力-骨組変位関係が得られる。

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ \phi \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

ここで

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{4EI_y \delta_y}{l^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_x \delta_x}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & a_y^2 \cdot \frac{4EI_y \delta_y}{l^3} + a_x^2 \cdot \frac{4EI_x \delta_x}{l^3} + \frac{4EI_w t}{l^3} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(20)$$

この骨組剛性行列 $[K]$ は軸力の関数であり、水平力の載荷によって生じる柱の軸力変動によって刻々 $[K]$ は変化するものである。しかし、ここで対象としている 1 層 1 スパンの立体骨組では、柱の変動軸力は柱降伏軸力に比して十分小さいものと考えられる。したがって、ここでは 3.4 でも述べたように柱軸力変動を無視することによって解析を単純化している。

この場合、部材が弾性であれば骨組剛性行列 $[K]$ は一定であり、外力 $\{H\}$ と変位 $\{U\}$ は線形な関係にある。同じく、外力増分と変位増分の関係についても線形な関係が成立する。

$$\begin{Bmatrix} dH_x \\ dH_y \\ dH_z \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} dU \\ dV \\ d\phi \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(21)$$

今、 $\{dH\}$ を単位水平力とすると、最初に塑性ヒンジが形成されるまで任意の大きさの水平力 $\{H\}$ は荷重係数 λ を用いて $\{H\} = \lambda \{dH\}$ と表わされる。

$\{dH\}$ に対する骨組変位 $\{dU\}$ は、(19) 式の 3 元連立一次方程式を解いて得られる。 $\{du\}$ を用いて (16) 式より柱頭変位増分 $\{du_i\}$ が得られ、さらに (3) より断面力増分 $\{dF_i\}$ が求まる。

任意の大きさの水平力 $\{H\}$ に対する骨組変位 $\{U\}$ 、柱変位 $\{u_i\}$ 、断面力 $\{F_i\}$ はと表わされる。

$$\{U\} = \lambda \{dU\}, \{u_i\} = \lambda \{du_i\}, \{F_i\} = \lambda \{dF_i\} \dots\dots\dots(22)$$

塑性ヒンジが最初に形成される荷重 $\{H^1\}$ は $\{F_i\}$ を用いて降伏条件を満足する λ を各部材について求め、その λ のうちの最小値を荷重係数として選ぶことによって得られる。この λ を λ_1 とすれば、最初にヒンジが形成される時の各諸量は

$$\begin{aligned} \{H^1\} &= \lambda_1 \{dH\}, \{U^1\} = \lambda_1 \{dU\} \\ \{u_i^1\} &= \lambda_1 \{du_i\}, \{F_i^1\} = \lambda_1 \{dF_i\} \end{aligned} \dots\dots\dots(23)$$

塑性ヒンジが形成された後はヒンジを有する部材については、3.3 で示されたように修正部材剛性行列 $[k^M]$ を用いて、新たに骨組剛性行列 $[K^M]$ を導く。ヒンジ形成部材については、断面力が降伏曲面の接面上を動くとしているので、荷重増分の載荷に対して $[k^M]$, $[K^M]$ は一定である。

$$\{dH\} = [K^M] \{dU\}$$

ヒンジ形成後の水平力 $\{H\}$ 、骨組変位 $\{U\}$ 、柱変位 $\{U_i\}$ 、断面力 $\{F_i\}$ は新しい荷重係数 λ_2 を用いて

$$\begin{Bmatrix} \{H\} = \{H^1\} + \lambda_2 \{dH\} \\ \{U\} = \{U^1\} + \lambda_2 \{dU\} \\ \{u_i\} = \{u_i^1\} + \lambda_2 \{du_i\} \\ \{F_i\} = \{F_i^1\} + \lambda_2 \{dF_i\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(24)$$

と表わされる。

ヒンジ形成部材については、 $\{dF_i\}$ を用いて $f(F + \lambda dF) = 1.0 + d$ を満足する λ が λ_2 となる。ここに $d = 0.01 \cdot \alpha$ であり、 α はヒンジ形成柱の部材剛性の修正回数を表している。

ヒンジ未形成部材については、 $d = 0$ である。

各柱の λ のうち最小値が第 2 段階の荷重係数である。

以後、同様の手順で崩壊メカニズムの形成まで追跡する。

柱に塑性ヒンジが形成されると、骨組剛性は順次低下し 0 に近づく。しかし柱には圧縮軸力が存在しているため、軸力の 2 次効果、いわゆる $P-d$ 効果によって骨組剛性はある時点から負となる。

この解析法では、軸力によって低減された部材剛性を用いているので、上記の性状をとらえ得る。この場合、正の単位水平力 $\{dH\}$ を与えると骨組変位 $\{du\}$ から得られる水平力作用点の作用方向変位が負となる。これは骨組剛性が負となり、以後の载荷で水平力が低下することを意味しているので、新たに負の単位水平力 $\{dH\}$ を与え、骨組変位 $\{du\}$ を求める。以後の手順は、剛性が正の場合と同様である。

このようにして、単調载荷の場合、水平力 $\{H\}$ が低下して0になるまで、その挙動を追跡する。

繰り返し载荷の場合、水平力作用点の作用方向変位 U_h で制御を行った。この U_h が制御変位に達すると除荷を行って逆方向に载荷を始める。除荷に際して、ヒンジを形成している柱では、ヒンジを消失させ各部材は弾性にもどるとして最初に用いた弾性剛性行列を再び使用する。以後、同様の手順で所定の载荷プログラムを完了するまで継続する。

4. 実験結果と解析結果の比較

単調加力実験結果および理論解析結果を比較したものを Fig. 13 (a)~(e) および Fig. 14 (a)~(e) に示す。図中、実線および破線は実験結果を、1点鎖線および2点鎖線は解析結果である。理論解析に用いた柱断面の軸力、2曲曲げおよび捩れの複合応力に対する降伏条件が近似式とくに高軸力の際に精度の良くない近似式であるため、軸力比が柱断面降伏軸力の50%の大ききで与えられたものでは実験と解析における最大

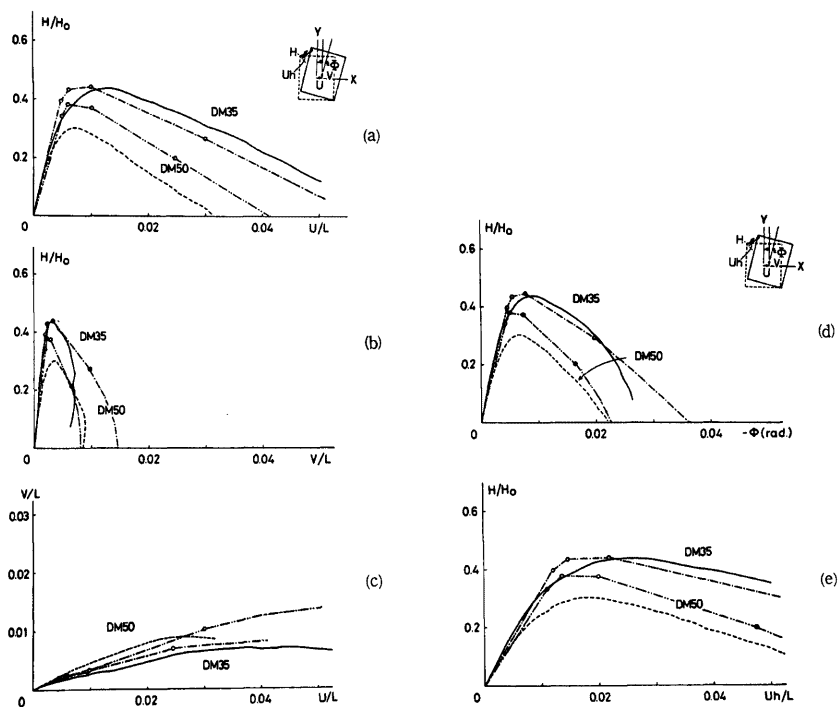


Fig. 13 (a)~(c).

Fig. 13 (d), (e).

Fig. 13. Comparison between Experimental and Theoretical Results (DM-Series).

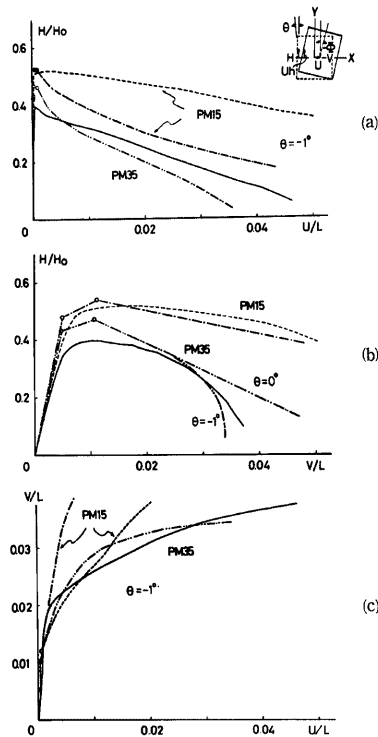


Fig. 14 (a)~(c).

Fig. 14. Comparison between Experimental and Theoretical Results (PM-Series).

耐力の差は大きい。しかし骨組の弾性剛性、骨組の剛性・耐力の方向性による骨組の変形挙動の方向性は適格に追跡できている。

本解析は荷重成分と変形成分間の関係が線型の解析で、釣合は常に変形前の状態に対して満足するようたてられるので、平行 P シリーズのように、最初の荷重方向と直角な方向には荷重成分が存在しないことが原因で、 U 方向変位が最大耐力時まではほとんど生ぜず、最大耐力に到達して以後に急増するような現象は捕えられない。しかし Fig. 14(a) に鎖線で示されるように、最初から荷重が一構面と平行な方向からわずかに偏した方向（この例では -1° ）に作用するような、現実的な不完全性を導入することによって説明できることがわかる。

Fig. 15 (a), (b) および Fig. 16 (a)~(d) は繰返し実験の結果とこれに対する解析の結果を比較したものである。図中実線は実験結果、破線は解析結果である。解析は弾性勾配、最大耐力、最大耐力以後の挙動は比較的良く捕えているが、材の応力-ひずみ関係として完全弾塑性を仮定しているため、繰返し荷重に伴う履歴ループの拡大は追跡し得ない。しかし、試験体のある点での変位制御荷重に伴う、変形の偏り、一方向への蓄積、試験体の方向性による変形の方向性はよく追跡できている。とくに Fig. 16 (c), (d) においては、PM シリーズで行なったと同様の荷重方向の偏角（この場合は -2° ）を導入することによって、荷

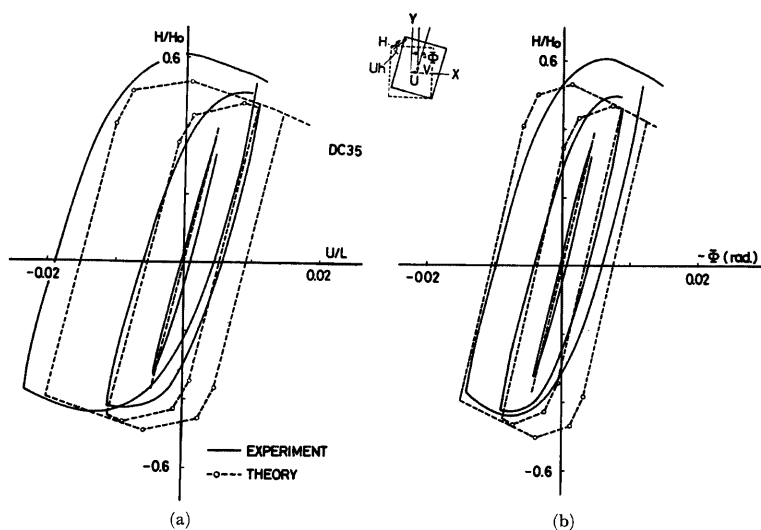


Fig. 15 (a), (b).

Fig. 15 Comparison between Experimental and Theoretical Results (DC 35).

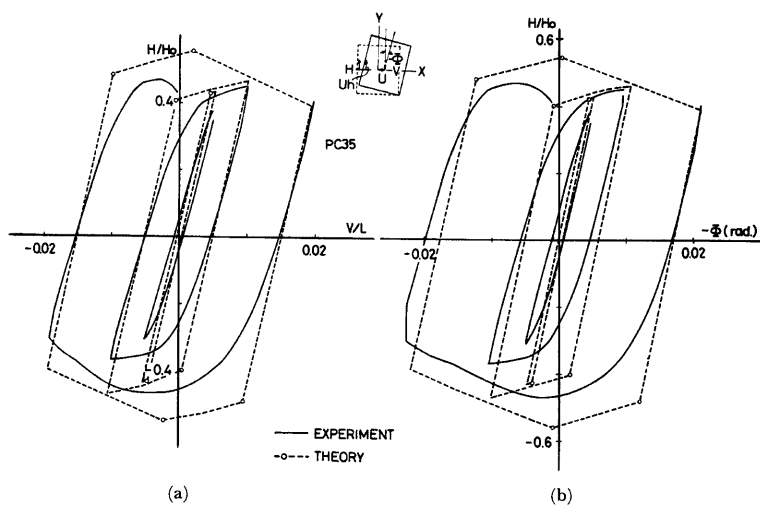


Fig. 16 (a), (b).

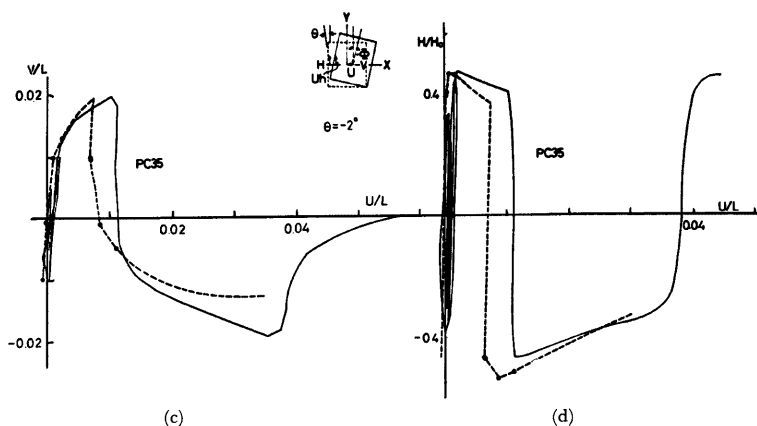


Fig. 16 (c), (d).

Fig. 16. Comparison between Experimental and Theoretical Results (PC 35).

重と直角方向の変位 (V) が最大耐力に達するまでは極めて小さく、その挙動は荷重の逆転によってほぼ可逆的であるのに対して、最大耐力に達して以後は荷重方向の逆転によって回復することなく、最初に変位した方向へ急激に増加してゆく様子がよく捕えられている。

Fig. 17 に示されるのは、単調荷重の PM35 に対する理論解析で得られた応力点の応力空間上での移動

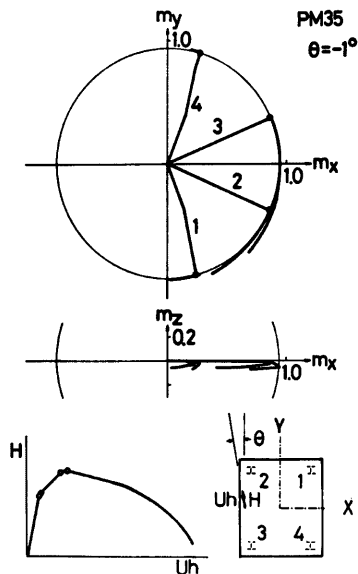


Fig. 17. Stress Trajectory in PM 35.

を示したものである。同図 (a) に示されるように降伏曲面上に達して以後の応力点の移動は大きい、降伏曲面上における応力点の移動に伴う降伏条件を侵す量は比較的小さい範囲におさまっているのがわかる。また同図 (b) に示されるように骨組が崩壊に到るまでの間に柱断面に生ずる振りモーメント (m_z) は柱の全塑性振りモーメントに比して極めて小さいことがわかる。この結果、柱自身の振れによる影響を弾性的であるとして扱い、降伏条件より振れの項をはずしてやっても、解析の精度に大きな影響を与えないことがわかった。また骨組全体の振れの剛性、振れ抵抗の大部分は立体的に配された架構のラーメンの効果による部分が大部分で柱材自身の振れ剛性が架構全体の振れ剛性に寄与している割合は全体の約1%程度の大きさであることがわかった。この結果柱自身の振れ剛性、振れ耐力を解析中で省略して行なっても大きな誤差は生じないことが判明した。

5. ま と め

本実験的研究より得られた知見をまとめると次の通りである。

(1) 実験により、H 形断面柱よりなる 水平剛性、耐力に強い方向性をもった一層一スパン立体骨組の方向性のある3次元の弾塑性挙動に対する精度よい荷重-変形曲線を、単調および繰返し水平加力時において得た。

(2) 塑性ヒンジ解析法によって、立体骨組の弾塑性挙動の追跡を行ない、柱断面に対する軸力、2軸曲げ、振れの複合応力に関する降伏条件として、H 形断面に対するものとしてはかなり大胆な球型式を用いたが、立体骨組の強い方向性をもった挙動、繰返し載荷に伴う変形のかたより等の基本的弾塑性性状を追跡し得た。

(3) 弾塑性ヒンジ解析の結果、外力による骨組全体の振れに対して、主として抵抗するのは架構の水平抵抗による分であって、柱断面自身の振れ抵抗分は極めて小さいことがわかった。骨組が大塑性変形域に到るまでに柱断面内に生ずる振れモーメントは断面の全塑性振れモーメントに比してきわめて小さい値であり柱断面の降伏条件式の中より振れに関する項を弾性的に扱うことによって、はずしてやり、軸力と2軸曲げを受ける降伏条件を用いて解析を行なっても解の精度にはほとんど影響を与えないことがわかった。従って軸力と2軸曲げに関する降伏条件として、更に H 形断面に対して精度よい条件式を用いることが可能であることが確認された。

(4) さらに骨組全体の振れ剛性に対する柱自身の振れ剛性の寄与分もまた極めて小さく（全体の振れ剛性の1%程度）最初から柱自身の振れ剛性を無視しても大きな影響はないことがわかった。影響が現われるのは、最大耐力を越えて、大きな塑性変形が進み、水平耐力が極めて小さいところで、塑性化しない柱が1本だけ残り、その柱自身の振れのみで外力増分に抗する最終段階だけである。

(5) 解析において、降伏曲面上での応力点の移動は、架構の水平耐力が最大耐力を越えて、耐力低下域に入っても、耐力低下と変位の関係がほぼ直線的である間はあまり大きくなく、この間では降伏曲面上で応力点が移動しないと仮定したより簡単な解析を行なっても、大きな誤差を伴わないことがわかった。しかし耐力低下が進行し、耐力低下と変位の関係が非直線的な領域では、降伏曲面上での応力点の移動は急に著しくなり、この領域では、降伏曲面上で応力点が移動しないと仮定した理論解析では挙動を正確に追跡できないことが確認された。

参 考 文 献

- 1) 牧野 稔：軸力と2方向の主軸に曲げを受ける H 形鋼の全塑性モーメント、日本建築学会論文報告集第124号、1966、pp. 8-10.
- 2) S. Santathadaporn and W. F. Chen, Analysis of biaxially loaded sections. Fritz Engineering Laboratory Report No. 311. 12, Lehigh University, 1966.
- 3) W. F. Chen and T. Atsuta: Interaction equations for biaxially loaded sections. Proc. ASCE, (STS), 1972, pp. 1035-1052.

- 4) G. A. Morris and S. J. Fenves: Approximate yield surface equations. Proc. ASCE, (EM4), 1969, pp. 937-954.
- 5) 若林 実・野中泰二郎・岡本晴仁・浦 等: 軸力, 2 軸曲げおよび捩りを受ける断面の降伏条件について. 日本建築学会学会近畿支部研究報告集, 構造 II, 1972, pp. 181-184.
- 6) 若林 実・野中泰二郎: 薄肉開断面材よりなる骨組の立体座屈撓角法—その 1, 基礎式. 日本建築学会近畿支部研究報告集 構造, 1966, pp. 129-132.
- 7) 若林 実・岡本晴仁: 立体モーメンの弾塑性挙動—その 1—. 日本建築学会大会術講演梗概集 構造, 1970, pp. 855-856.
- 8) 藤本盛久・松本芳紀: H 形断面部材よりなる立体骨組の弾塑性解析に関する研究—その 1—, 日本建築学会論文報告集 第186号, 1971, pp. 27-33.
- 9) 藤本盛久・松本芳紀: H 形断面部材よりなる立体骨組の弾塑性解析に関する研究—その 2—, 日本建築学会論文報告集 第187号, 1971, pp. 51-58.
- 10) 森野捷輔: 立体骨組の弾塑性解析. 京都大学防災研究所年報, 第15号 B, 1972.
- 11) 西村富美子: 一定鉛直力と繰り返し水平力を受ける立体骨組の弾塑性性状に関する実験的研究. 京都大学工学研究科建築学修士論文, 1973.
- 12) 若林 実・岡本晴仁・浦 等: 立体骨組の弾塑性安定に関する研究—その 1 実験—日本建築学会近畿支部研究報告集 構造, 1972, pp. 185-188.
- 13) 藤本盛久・岡田久志: H 形鋼部材から成る 2 層 1 張間立体ラーメンの弾塑性挙動に関する模型実験, 日本建築学会秋季大会術講演梗概集 構造, 1974, pp. 855-856.