

# 構造用鋼材の塑性疲労破壊に関する確率統計的考察

後藤 尚男・亀田 弘行・小池 武・  
青山 功・脇田 和試

## PROBABILISTIC CONSIDERATIONS ON PLASTIC FATIGUE FAILURE OF STRUCTURAL STEEL

By Hisao GOTO, Hiroyuki KAMEDA, Takeshi KOIKE,  
Isao AOYAMA and Kazushi WAKITA

### Synopsis

This paper presents the results of cyclic loading tests on H-section SS41 steel bars subjected to flexural deformation in elasto-plastic range.

The results of programmed loading tests have been estimated with probabilistic method, and then compared to linear cumulative damage law.

In order to establish the prediction law of plastic fatigue failure, uncertainties in the prediction procedure have been analyzed into several different factors concerning intrinsic uncertainty in fatigue phenomena, fabrication variety, unavoidable uncertainty in measurement and so forth.

### 1. 緒 論

構造物の耐震設計において、数10回から数100回程度の弾塑性域に及ぶくり返し荷重に対する塑性疲労破壊の特性把握および寿命推定法の確立が要望されている。

1974年度の著者らの研究\*（文献(1)）において、構造用鋼材の塑性疲労破壊過程における力学的挙動の劣化特性に関する検討を加えたのに続いて、本研究では塑性疲労破壊基準としての累積損傷則の適用性を検討するために、構造用鋼材の塑性疲労破壊実験を実施し、確率統計的側面より実験結果の整理・検討を行った。

疲労破壊に関する研究は、電子顕微鏡用の微小材料素片による物性物理的研究から、実構造部材を用いた疲労実験まで広範な研究対象を有する分野である。特に最近研究の進歩が著しい疲労現象の物性物理的研究<sup>2)</sup>においては、電子顕微鏡による転位の移動・成長の直接観測が可能に達してきた。さらに疲労破断面の顕微鏡観察より疲労破壊特有の条痕（striation）の1本1本がくり返し荷重の各サイクルに対応している場合が多いという研究報告<sup>3)</sup>など疲労破壊現象そのものの実体把握に急激な進歩がみられるようになってきた。しかしながら、上述の成果から直ちに疲労破壊の寿命予測が可能とならないのは、疲労破壊現象が様々な外部要因の影響を受けやすい現象であることによる。これらの外部要因の研究には、材料から切り出された試験片を用いた多くの実験的研究がある。これらの疲労実験結果はSN曲線の形でデータの集積がなされてきた。このタイプの実験では、荷重の特性（たとえば、波形、載荷速度、平均応力の有無）、載荷形式（引張り、曲げ、振りなど）、寸法、表面状態などによって、破断回数 $N$ 、疲労限度、SN曲線の勾配に変化を生じ、しかもその結果はかなりのばらつきを伴うのが通常である。このばらつきに関して、横堀<sup>4)</sup>は疲労現象を確率過程における一種の速度過程であるという解釈を提出している。

\* 以下前報と呼ぶ。

以上の諸研究は、いずれも疲労寿命を規定する実体の探求の努力であり、未だにその物理的実体は十分に解明されていないが、一方設計上の要請から、従来多くの疲労寿命推定のための方法が提案されてきた。

Miner 則<sup>5)</sup>として有名な線形累積損傷則は疲労破壊に要するエネルギー総量は常に一定であるという仮定の下に導かれた疲労寿命推定式であり、また横堀<sup>4)</sup>により疲労現象の確率過程論としての立場から、上述のエネルギー一定の仮定なしに同様の式が誘導されている。Miner 則は、実験結果との間にかなり大きな誤差のばらつきを有するにもかかわらず、使用の簡易さのため様々の分野で使用されている。

材料から切り出された試験片に対する疲労実験が行われる背景には、試験片による疲労特性と構造物の部材の疲労特性が一致するという前提が必要である。しかしながら、構造部材として多用される広幅 H 型鋼材のように塑性変形により座屈のような塑性不安定を生じる部材の疲労寿命を推定するためには、試験片の疲労寿命を規定する要因以外に部材の幾何剛性の劣化による疲労寿命への影響をも考慮する必要がある。実構造用部材の塑性疲労実験が必要になる理由もここにある。この点に関して、棚橋・横尾・若林ら<sup>6)</sup>は、H 型鋼材の交番塑性曲げ疲労試験に関する研究において、大変位振幅のもとで局部座屈や横倒れ座屈により鋼材のエネルギー消費能力、耐荷能力が漸次劣化すると指摘している。また、高梨<sup>7)</sup>は部材の細長比と横倒れ座屈を生じる振幅との関係を H 型鋼に関する実験から予測している。これらの研究により、くり返し塑性曲げ変形が鋼材の劣化特性に与える影響が次第に明らかにされてきた。さらに、鋼材の劣化特性の疲労寿命への影響を明らかにすることを目的とした著者らの実験をまとめた前報<sup>1)</sup>において、疲労寿命の Miner 則による予測値と実験値とは、載荷順序に依存してある一定のずれを生じること、そしてこの載荷順序依存性が必ずしも累積損傷度の非線形性だけによるものではなく、載荷点近傍の塑性変形挙動とも関係があることが指摘されている。したがって、実構造部材の塑性疲労寿命の予測法を確立するには、上述の構造部材の劣化特性が疲労寿命の推定にいかなる影響を与えるのか、さらに疲労破壊に伴うばらつきに占める部材の劣化特性の影響がどの程度かを把握することが重要になってくる。

本研究においては、線形累積損傷則を用いて実験結果と予測値とを比較検討し、両者の相対的な誤差の確率統計的評価を行うことによってそのばらつきの原因の要因分析を行う。ばらつきは種々の要因の複合作用の結果と考えられるがここではそれを次の5つの要因として整理することにする。

- (i) 疲労破壊現象のもつ本質的なばらつき
- (ii) 材料の製作上のばらつき
- (iii) 部材の幾何剛性の劣化の影響
- (iv) 線形累積損傷則に基づく疲労破壊の損傷度評価誤差
- (v) 測定誤差

これらの要因によるばらつきの評価を通して累積損傷則の適用の妥当性の検討が可能であろう。

以下において、確率変数  $X$  のばらつきを定量的に評価するものとして、 $X$  の平均値  $\mu_X$ 、標準偏差  $\sigma_X$ 、および変動係数  $\delta_X = \sigma_X / \mu_X$  を用いることにする。

## 2. 実験の概要

### 2.1 実験の方法

(1) 供試体 本実験で使用した供試体は圧延されたままの SS41H 型鋼材(川崎製鉄製)で、その断面寸法は、 $100 \times 100 \times 6 \times 8 \text{mm}$  である (Fig. 1 参照)。全長 2000mm の供試体をスパン長 1400mm の単純ばりとして用い、スパン中央部でくり返し塑性曲げ集中荷重が加えられる (Fig. 2 参照)。実験に使用された供試体の総数は60本であった。今回使用した供試体は、断面性能に関する公称値<sup>8)</sup>を用いると降伏点反力  $P_y = 5.46 \times 10^3 \text{kg}$ 、降伏点変位  $\epsilon_y = 0.39 \text{cm}$ 、細長比 = 56.68 の値をそれぞれもっている。

(2) 載荷方法 載荷は京都大学工学部工学総合研究センター内に設置されている電気油圧式ランダム加振試験機(鷲宮製作所製)を用いて行った。この試験機の容量は動的荷重;  $\pm 15 \text{ton}$ 、変位;  $\pm 15 \text{mm}$  および振動数; DC~60Hz であり、本実験の実施に際して十分に余裕のあるものであった。

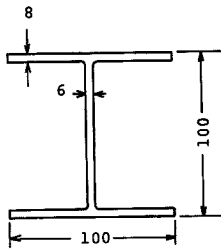


Fig. 1 Cross section of wide-flange H-section steel bar (unit=mm)

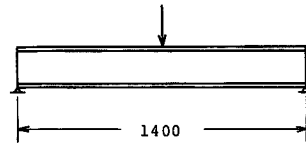


Fig. 2 Test piece and its loading mode (unit=mm)

荷重中に荷重点付近のフランジ、およびウェブに局部座屈の生じることが予想されるため、荷重点付近に高炭素鋼の補剛材を挿入した。この補剛材は荷重点付近のウェブの局部座屈防止に有効であったが、フランジの局部座屈に対する拘束とはならなかった。

(3) 制御方法 荷重枠は試験機の作動に伴って水平方向の前後に等しい振幅で変位するが、本実験では変位をすべて供試体の降伏変位より大きく設定して変位制御による完全両振塑性曲げ荷重とした。

変位波形は正弦波であり、その周波数は、 $0.5\text{Hz}$  で変位振幅によらず一定にしたので振幅の大きさによって荷重速度は異なる。

(4) 計測方法 加振機の計測器盤のモニター端子からの変位記録、荷重記録の出力を X-Y レコーダの X 軸、Y 軸にそれぞれ接続し、履歴復元力曲線を記録した。なお変位記録は加振機ピストンの変位を示し、荷重記録はロードセルに作用した荷重を示している。また同時に、変位記録、荷重記録をペンレコーダにも接続し、変位荷重の時間曲線もそれぞれ記録した。荷重回数は試験機に装備されているカウンターで数えた。

(5) 実験の仕様 本研究では一方向荷重試験、定変位振幅試験および 3 段階変動変位振幅試験を **Table 1** にしたがって行った。

## 2.2 実験結果の解析法

くり返し塑性曲げを受ける構造用鋼材の履歴復元力特性が疲労破壊過程において一定の劣化過程を辿ることを前報<sup>1)</sup>で指摘したが、このことは塑性疲労破壊寿命予測のための解析データとして破断回数だけでなく、鋼

Table 1. Testing procedure

	Input Displacement (mm)	Input Ductility Factor	Wave Form	Hz
Static Test	0 → 150	0 → 21.4		
Constant Amplitude Test	10.5 ~ 28.0	1.5 ~ 4.0		
Three Stage Amplitude Test	A	21.0 → 17.5 → 14.0	3.0 → 2.5 → 2.0	Sinusoidal
	B	21.0 → 14.0 → 17.5	3.0 → 2.0 → 2.5	
	C	17.5 → 14.0 → 21.0	2.5 → 2.0 → 3.0	
	D	14.0 → 17.5 → 21.0	2.0 → 2.5 → 3.0	

材の挙動を考慮するためには、その特性を総合的に反映するものとして、各サイクルの消費履歴エネルギーの値およびそれらの値の和としての疲労破壊に要する全消費エネルギーの値もまた重要なパラメーターであることを示している。

消費エネルギーの求め方は、前報<sup>1)</sup>で述べた方法と同様であり、履歴面積を台形公式にしたがって求めた。また破断回数  $N$  は鋼材のフランジ表面に亀裂が発生するまでの回数とした。

### 2.3 一方方向載荷試験

供試体の降伏点反力  $P_y$  および降伏点変位  $\epsilon_y$  を求めるために7本の供試体に対して一方方向載荷試験を実施した。この結果、平均反力比例限度は 6.6ton, 平均変位比例限度は 7mm となった。これらの実測値は、2.1(1)で述べた断面係数に基づく降伏点反力および降伏点変位の計算値と比較して大きな食い違いを見せたが、実験データの解析にあたって実測値を基準値にして整理した。したがって本文中に使用される靱性率振幅は、基準変位 7mm に対する設定変位の比として与えられる。

### 2.4 定変位振幅試験

塑性疲労破壊寿命予測のための基礎資料としての SN 曲線を得るために、靱性率振幅  $a=1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 4.0$  の一定変位振幅による定変位振幅試験を合計17本の供試体に対して実施した。Table 2 に、100×100 の広幅 H 型鋼材に対する各振幅レベル  $a$  における疲労破断回数  $N$  とそれまでに要した全消費エネルギー  $E$  (t·m) が示されている。

定変位振幅試験において、靱性率振幅  $a=1.5, 2.0, 2.5$  の場合、くり返し載荷中に横倒れ座屈、局部座屈の発生は認められず、クラックはスパン中央の載荷点に発生し、その箇所破断した。一方  $a=3.0$  の場合、横倒れ座屈は生じないが載荷点のごく近傍のフランジに局部座屈が発生した。クラックも局部座屈による応力集中点に生じ、その箇所破断した。この破断点は載荷点より 1~3cm 離れた位置であった。 $a=4.0$  では横

Table 2. Plastic fatigue test data of 100×100 H-section steel bars

Input Amplitude in Ductility Factor	Cycles to Failure $N$	Total Dissipated Energy $E$ (t. m)
1.5	2780	226.7
	2185	175.5
	2060	153.7
2.0	1377	194.7
	1197	185.8
	943	134.5
	915	140.3
	1568	321.6
2.5	416	96.0
	820	178.9
	800	182.3
3.0	383	117.9
	385	125.8
	396	120.6
4.0	117	57.0
	146	81.3
	154	83.6

倒れ座屈発生の徴候が現われ、鋼材は S 字形の座屈変形を示すようになったが、クラックは載荷点近傍の局部座屈による応力集中箇所が発生して破断した。

以上より、次に述べる変動変位振幅試験では、横倒れ座屈の影響が無視できる靱性率 3.0 以内の振幅を用いて振幅の組合せパターンを想定することにした。

## 2.5 変動変位振幅試験

変動荷重下での塑性疲労破壊特性を明らかにするために、2.4 の定変位振幅試験で得られた SN 曲線を基礎にして、変動変位振幅試験を実施した。

設定した靱性率振幅レベルは 3 種類で、それぞれ  $a=2.0, 2.5, 3.0$  である。 $a=3.0$  では局部座屈の発生が避けられないことはすでに指摘したとおりである。しかし構造部材の局部座屈の発生を完全に防止するには、十分密な間隔での補剛措置をとる必要があるが、設計に対する経済的、技術的制約から十分な補剛措置の実施が不可能な場合が少なくないため、局部座屈の発生は避けたい場合もあると考えるべきである。その意味で構造部材の疲労特性に及ぼす局部座屈の影響も考慮するために靱性率振幅  $a=3.0$  をも採用することにした。

3 種類の振幅レベルの載荷順序組合せパターンとして A, B, C, D 4 つのパターンを想定し (Table 1 参照)、それぞれの第 1 段階、第 2 段階の損傷度を変化させる目的でその載荷回数も 3 種類に細分した。したがって全部で 12 の組合せを想定したことになる。

試験は、これら 12 のタイプについてそれぞれ 3 回同様の試験をくり返し、総数で 36 本の供試体を用いた。

## 3. 損傷度パラメータに関する考察

塑性くり返し変位を受けた鋼材の塑性疲労破壊過程における部材の巨視的な力学的能力の劣化傾向の存在は、材料内部の疲労破壊の進行の過程もまた同様でないことを示唆するものであろう。したがって塑性疲労破壊予測を載荷回数のみから行うならば、くり返し荷重に伴う材料の応答特性の変化の影響を反映することができないことになる。いま、くり返し荷重による各サイクルの履歴面積から、1 サイクル当りの消費エネルギーを求め、それらの和として部材の塑性疲労に要する全消費エネルギーを定義すれば、この量は塑性疲労破壊過程の力学的能力の劣化傾向を履歴面積の変化という形で反映した塑性疲労破壊寿命予測のパラメータとなるであろう。

荷重レベルが載荷途中で変化する場合は各サイクル当りの消費エネルギーの値が荷重履歴の影響を受けて一定振幅試験結果の値と差異を生じるかどうかを見るために、Figs. 3~6 を求めた。これらの図中に示す横軸には載荷回数  $n$  の破断回数  $N$  に対する比  $n/N$  で定義される損傷度ととり、縦軸には 1 サイクル当りの消費エネルギーを示した。図中の○●△印は、各タイプにおける異なる載荷回数組合せの場合の実験結果であり、一方実線は、定振幅試験結果を示している。

変動変位振幅試験で、振幅変化後それに対応した実線上に○●△点があれば、部材の力学特性に荷重履歴の影響は巨視的には無視しうるものと判断できようし、また実線と大きくずれる場合には、荷重履歴の影響があると考えねばならない。Figs. 3~6 に示すように、Fig. 6 を除いて、実線と 3 点の対応は非常によい一致を示している。この結果から、各サイクル当りの消費エネルギーに対しては、載荷レベルの変化による荷重履歴の影響が認められないとするならば、疲労寿命推定のための損傷度を消費エネルギーを基準にして定義し、各荷重レベル毎の損傷度の加算和をもって累積損傷度を求めることができる。ここで注意しなければならないのは、破断回数  $N$  を基準にした累積損傷度概念には各振幅レベルに固有の破断回数が存在するという前提があり、消費エネルギー  $E$  を基準にした累積損傷度概念には各振幅レベルに固有の限界消費エネルギーが存在するという前提があることである。前者はくり返し荷重による塑性変形の累積がある一定値に達すると破断に結びつくと考えられるものであり、後者はくり返し荷重による塑性域での履歴エネルギーの累積がある一定値に達する時、破断すると考えるものである。したがって、1 サイクル毎の消費エネルギーが常に一定の塑性変形を生成することができる時、両者の累積損傷度概念は一致する。二つの概念による疲労寿命予測の妥当性を検討することにより、塑性疲労破壊基準を支配する要因に関する手掛りが得られるものと期待される。

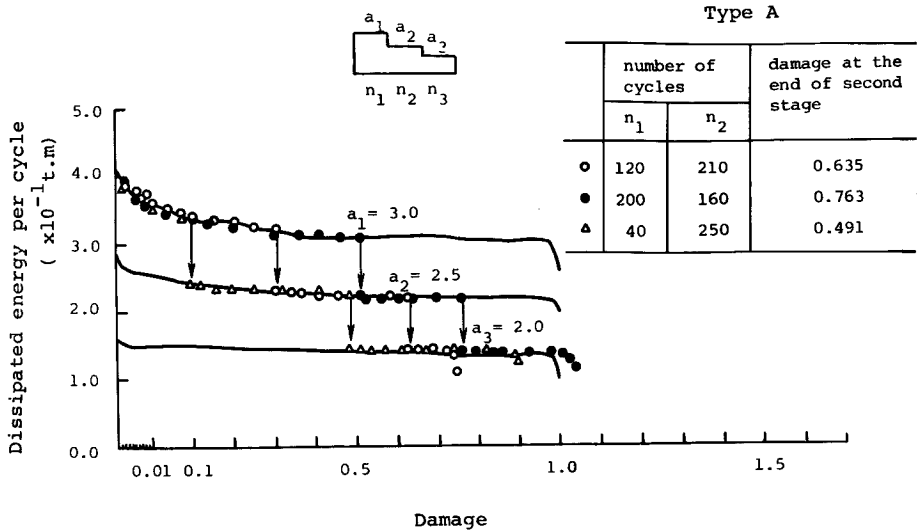


Fig. 3 Relation between damage and dissipated energy per cycle in loading pattern type A

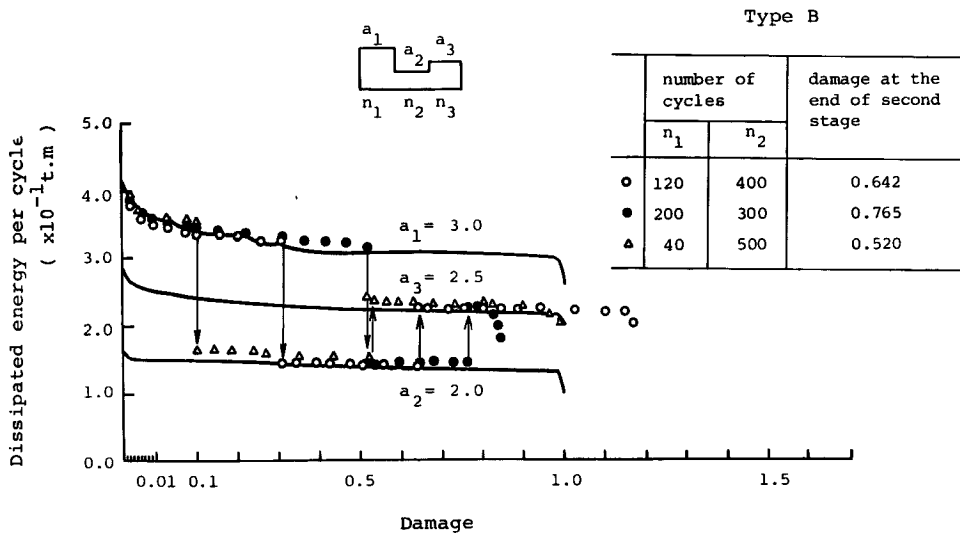


Fig. 4 Relation between damage and dissipated energy per cycle in loading pattern type B

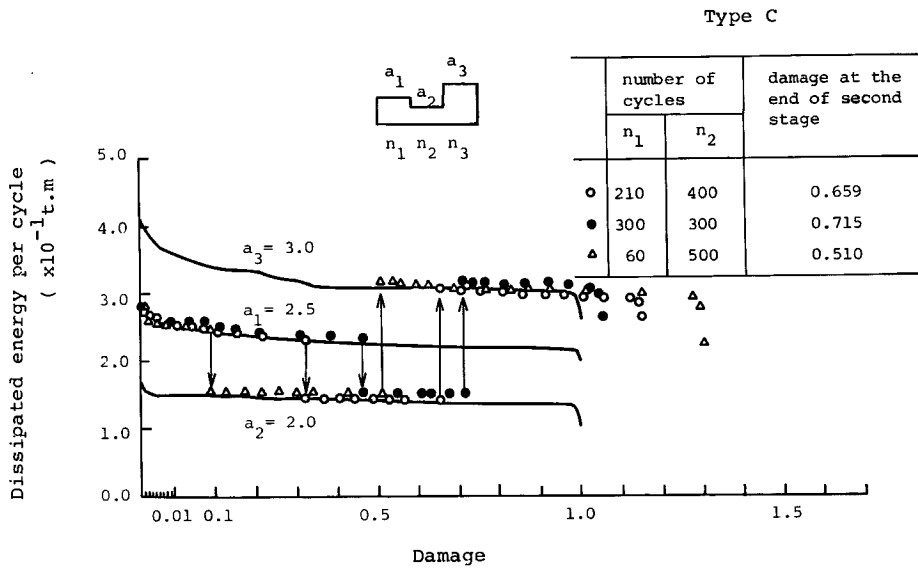


Fig. 5 Relation between damage and dissipated energy per cycle in loading pattern type C

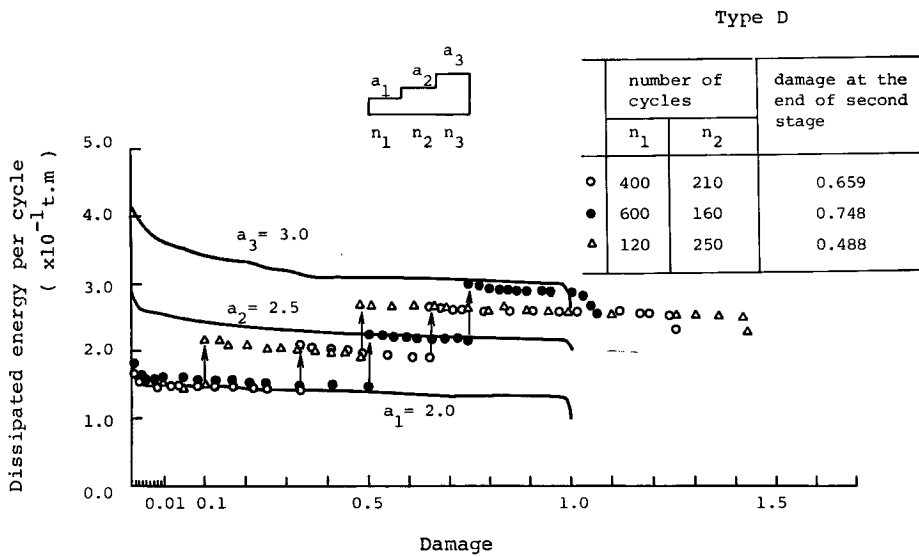


Fig. 6 Relation between damage and dissipated energy per cycle in loading pattern type D

次の4. 以下において、破断回数  $N$  および消費エネルギー  $E$  を用いた累積損傷度をそれぞれ計算し、両者の対応および相違の比較検討を行う。

#### 4. 実験結果の確率統計的解析法

##### 4.1 SN 曲線の回帰分析

塑性疲労破壊に対する SN 曲線は、観測データとして破断回数  $N$  と靱性率振幅  $a$  を用い次式で与えられる定数  $b, c$  の値を決定することによって得られる。

$$Na^b = c \dots\dots\dots (1)$$

$Y = \ln N$ ,  $X = \ln a$  において Table 2 の実験結果を回帰分析すれば、 $b, c$  の平均値  $\mu_b, \mu_c$  が得られ、 $N$  のばらつきを表す変動係数  $\delta_N$  は、 $Y$  の不偏分散の平方根として求められる。 $\delta_N$  を用いて、 $b, c$  の変動係数  $\delta_b, \delta_c$  が次式より得られる<sup>9)</sup>。

$$\delta_b = \alpha \delta_N, \delta_c = \beta \delta_N \dots\dots\dots (2)$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2 / M}, \beta^2 = \frac{\sum X_i^2}{M \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、式(3)の  $M$  は供試体の標本数である。

ところで、実現された疲労破断回数  $N$  の変動係数  $\delta_N$  は、実験に伴う様々のばらつき要因が混入した結果である。すなわち、靱性率振幅を決定する基準となる降伏変位  $\epsilon_y$  は、 $m$  個の供試体を用いた一方載荷試験結果より決定された標本平均値  $\mu_{\epsilon_y}$  を用いて評価しなければならず、材料特性の不均一性の影響は避けられない。また実験装置の測定器盤の荷重振幅設定レベル  $a$  と実際の出力レベル  $\hat{a}$  との完全な対応は、測定器盤の読み取り誤差および実験装置自体のフィードバックシステムの精度とも関連してある程度の出力誤差を生じることは止むを得ないものがある。いま、この出力誤差によるばらつき要因を  $R = \hat{a}/a$  と定義すれば、真の振幅レベルは  $S = aR\epsilon_y$  で与えられる。したがって、これらの要因を考慮した SN 曲線の関係式は次式で与えられる。

$$N(aR\epsilon_y)^b = c_1 \dots\dots\dots (4)$$

ランダム変数  $R$  および  $\epsilon_y$  をある特定値に固定したときの  $N$  の条件付平均値および条件付変動係数を次式で定義する。

$$E[N | R, \epsilon_y] = \mu_{c_1} (\mu_a R \epsilon_y)^{-\mu_b} \dots\dots\dots (5)$$

$$\delta_{N|R, \epsilon_y} = \frac{\{Var[N | R, \epsilon_y]\}^{1/2}}{E[N | R, \epsilon_y]} \dots\dots\dots (6)$$

したがって、 $N$  の平均値、変動係数は次式<sup>10)</sup>となる。

$$\mu_N \cong \mu_{c_1} (\mu_a \mu_R \mu_{\epsilon_y})^{-\mu_b} \dots\dots\dots (7)$$

$$\delta_N^2 \cong [\delta_{N|R, \epsilon_y}^2]_{R=\mu_R} + \mu_b^2 (\delta_R^2 + \delta_{\epsilon_y}^2) \dots\dots\dots (8)$$

$\epsilon_y = \mu_{\epsilon_y}$

観測データ ( $N, a$ ) の回帰分析結果より得られた疲労破断回数のばらつき  $\delta_N$  は、式(8)によってそれぞれの要因毎に分離されたことになる。同式右辺第1項は、材料の不均一性および実験装置の出力誤差を除外した上での疲労現象のばらつきを示す量となる。

##### 4.2 累積損傷度の確率統計量の解析

変動荷重下での疲労破壊の寿命予測法として提案されている諸法則はいずれも載荷荷重に対応した損傷度という概念を導入して、累積損傷度がある一定値に達したときに疲労破壊が生じるものとしている。しかしながら、疲労損傷度なる量の物理的実体が不明確な現状において、確立された予測法則を求めること自体に無理があり、既存の提案された予測法則のもつ予測誤差を定量的に把握することによってその法則の妥当性を評価す



ることで満足しなければならない。

一般に Miner 則といわれる線形累積損傷則は、載荷回数比のみによって評価されており、SN 曲線が得られている材料ならば、直ちにこの法則の適用が可能となる。

本研究においても塑性疲労破壊に対する SN 曲線を基礎にして線形累積損傷則を適用し、その予測誤差を検討することにする。

振幅レベル  $S_i$  のくり返し荷重を  $n_i$  回受けたときの損傷度を  $D_i$  とすれば、疲労破壊は累積損傷度  $\sum D_i$  が限界累積損傷度  $D_{cr}$  を上回る事象として定義される。すなわち、

$$\text{Event [Fatigue failure]} = \text{Event} \left[ \sum_i D_i \geq D_{cr} \right] \dots\dots\dots (9)$$

ここで 
$$\sum_i D_i = \sum_i n_i / N_i \dots\dots\dots (10)$$

材料が完全に Miner 則に従うとき、限界累積損傷度は  $D_{cr}=1$  となることから、 $D_{cr}=1$  より大きく食い違えば塑性疲労破壊基準に Miner 則を適用することの妥当性を疑わせることになり、その意味で  $D_{cr}$  の値の動向を調べることは塑性疲労破壊予測法則の評価・検討を行ううえで重要である。

いま、限界累積損傷度  $D_{cr}$  が Miner 則に基づく推定限界累積損傷度  $D_M$  とそれに対する予測誤差  $D_P = D_{P_1} \cdot D_{P_2} \cdot \dots$  の積として定義されているものとする。

$$D_{cr} = D_M \cdot D_P = D_M \cdot D_{P_1} \cdot D_{P_2} \cdot \dots \dots\dots (11)$$

明らかに、 $D_M$  の平均値  $\mu_{D_M}$  は 1 であり、その変動係数は、式(10)の損傷度の定義に信頼性理論の第 1 次近似法<sup>10)</sup>を適用すれば、塑性疲労破壊に対する SN 曲線の  $N$  のばらつき  $\delta_N$  に一致する。ここで  $D_{P_1}, D_{P_2}, \dots$  は、Miner 則では評価することのできない損傷度の非線形累積や応力履歴依存性による影響や、構造部材の幾何剛性の劣化特性に依存する誤差要因等を考慮するためのランダムパラメータである。

以上の要因を考慮すれば、限界累積損傷度  $D_{cr}$  の平均値および変動係数は次式で与えられる。

$$\mu_{D_{cr}} \cong \mu_{D_M} \cdot \mu_{D_{P_1}} \cdot \mu_{D_{P_2}} \cdot \dots = \mu_{D_{P_1}} \cdot \mu_{D_{P_2}} \cdot \dots \dots\dots (12)$$

$$\delta^2_{D_{cr}} \cong \delta^2_{D_M} + \delta^2_{D_{P_1}} + \delta^2_{D_{P_2}} + \dots = \delta^2_N + \delta^2_{D_{P_1}} + \delta^2_{D_{P_2}} + \dots \dots\dots (13)$$

## 5. 実験結果の考察

### 5.1 SN 曲線の回帰分析結果

(1) 鋼材の寸法効果 部材の寸法効果をみるために、今回の実験で使用した 100×100 の広幅 H 型鋼材の供試体と前報で使用した 100×50 の供試体の SN 曲線を比較したのが Fig. 7 である。Fig. 7 における実線は 100×100 の供試体の実験データを示す Table 2 の値を回帰分析した値であり、一点鎖線は、100×50 の供試体についてのデータを示す Table 3 の値を回帰分析したものである。Table 4 はそれらの結果をまとめたものである。表中の  $r$  は、 $\ln N$  と  $\ln \hat{a}$  の間の相関係数を示す。SN 曲線のそれぞれの相関係数は、 $r = -0.976$  (100×100),  $r = -0.987$  (100×50) と非常に高い負の相関を示している。Table 4 下段に示す消費エネルギー  $E$  を基準にした SE 曲線の相関係数は  $-0.802$  (100×100) で、それと SN 曲線の  $r$  値とを比較すれば若干低いが、それでもかなり高い相関性を示していると言える。ここで 100×50 の供試体に関する SE 曲線の回帰分析結果が脱落しているのは、回帰分析に必要なだけのデータが得られなかったことによる。

さて、疲労破壊の材料特性を示す SN 曲線の勾配  $b$  の値は、二つの供試体でその平均値  $\mu_b$  がそれぞれ 2.862 (100×100), 2.544 (100×50) と近似的な値を示している。このことは、部材寸法の差は疲労の物理的特性に極端な変化を与えないことを示唆していると言えよう。しかしながら、疲労寿命および破断に要する全消費エネルギーは 100×100 の供試体が 100×50 の供試体の 4～5 倍の寿命延長および消費エネルギーの増加を示している。この両者の値の差は、断面積の増加による全消費エネルギーの増加によるものと一義的に断定することはできないが、基本的原因の一つと考えられる。

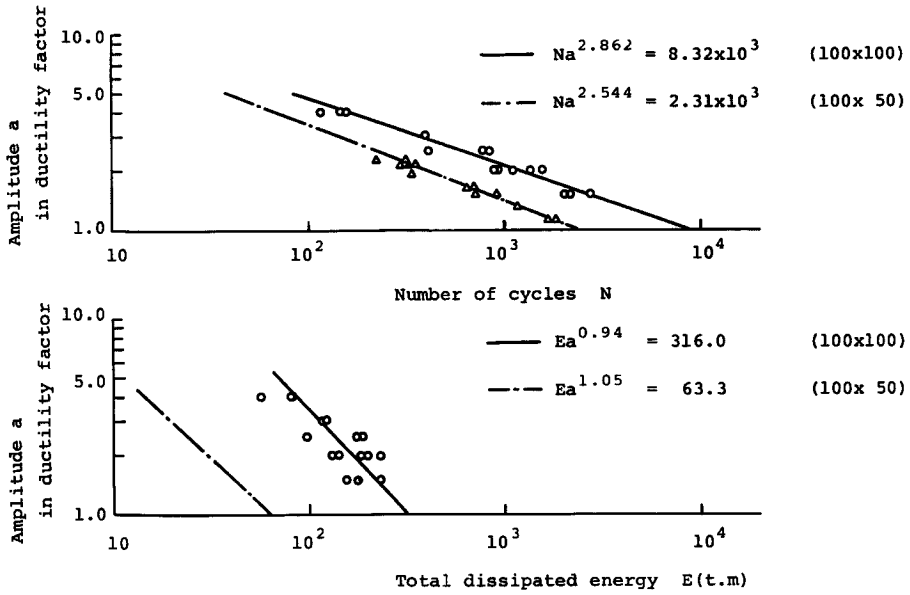


Fig. 7 SN curves and SE curves for plastic bending fatigue tests

Table 3. Plastic fatigue test data of 100×50 H-section steel bars

Input Amplitude in Ductility Factor	Cycles to Failure $N$
1.1	1672
	1850
1.3	1180
1.5	720
	915
1.6	654
	665
1.9	340
2.1	293
	326
	350
	323
2.25	225
	315

Table 4. Scatter factors of SN and SE curves

	$\delta_N$	$\mu_b$	$\mu_c$	$\delta_b$	$\delta_c$	$r$
100×100	0,096	2,862	$8,32 \times 10^3$	0,158	0,067	-0,976
100×50	0,143	2,544	$2,31 \times 10^3$	0,061	0,091	-0,987

	$\delta_E$	$\mu_b$	$\mu_c$	$\delta_b$	$\delta_c$	$r$
100×100	0,104	0,940	316,0	0,048	0,073	-0,802
100×50	-	1,050	63,3	-	-	-

(2) 塑性疲労破壊回数  $N$  のばらつき 弾性限度内の疲労試験において、すでに材料強度学の立場から指摘されているように疲労破壊の進行過程がいくつかの段階に区分され、初期クラックの生成のための潜伏期間は全疲労寿命の中で最も長く、しかもこの期間が材料内部の不均一性や様々な環境条件に最も支配されやすいと言われており、疲労寿命のばらつきに重要な影響をもつ期間と考えられる。

しかしながら、塑性疲労破壊実験においては塑性変位振幅をくり返すことにより供試体内部に永久変形が累積され、鋼材の内部構造が質的变化をするとともに、内部欠陥を急激に増大させることになる。したがって、第1サイクル目の塑性変位振幅から多数のクラック発生を伴う内部欠陥の増大を招くため、弾性限度内の疲労試験における初期クラック生成の潜伏期間に相当するものは存在しないか、もし存在しても非常に短期間となる可能性が大きい。その意味で疲労寿命に対するばらつき要因の混入する余地が塑性疲労の場合相対的に狭められる可能性がある。

今回および前報の実験結果をみると、破断回数  $N$  の変動係数  $\delta_N$  は  $100 \times 100$  の供試体で  $0.096$ ,  $100 \times 50$  の供試体で  $0.143$  であった。これらの値は、疲労試験結果としては比較的小きな値であるが、4. で示した方法にしたがって、いくつかのばらつき要因を除去した疲労破断回数のばらつきを求めればさらに小さな値となることが予想される。いま、実験装置の振幅レベルの設定誤差を含めた出力誤差が、設定メーターの読み取り精度より  $\delta_R = 0.02$ , 供試体降伏レベルの誤差  $\delta_{\sigma_y}$  が、一方向載荷試験結果より  $\delta_{\sigma_y} = 0.01$  となるから、疲労現象による疲労破断回数のばらつき  $\delta_{N|R, \sigma_y}$  は、それぞれ、 $0.07$  ( $100 \times 100$ ),  $0.13$  ( $100 \times 50$ ) の大きさとなる。

### 5.2 累積損傷度の解析結果

#### (1) 限界累積損傷度の平均値 $\mu_{D_{cr}}$ について

限界累積損傷度  $D_{cr}$  は、部材が疲労破壊した時点までの累積損傷度  $\sum_i D_i$  で与えられる。疲労実験途中の真の疲労破壊進行の度合は把握できないが、破壊に達した時の累積損傷度  $\sum_i D_i = D_{cr}$  のみ観測可能だからである。

Table 5-1, 5-2, Table 6-1, 6-2 は、変動変位振幅試験の実験結果およびその解析結果の一覧表である。

Table 5-1. Data table of plastic fatigue damage defined with number of cycles

	No.	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_{cr}$	$\mu_{D_{cr}}$	$\sigma_{D_{cr}}$	$\delta_{D_{cr}}$
A type	1	359	605	1146	160	210	65	0.446	0.347	0.057	0.850	0.907	0.113	0.125
	2						137	0.334		0.120	0.801			
	3						175	0.153		0.834				
	4				115	-	0.190	-	0.747					
	5				200	86	0.557	0.264	0.075	0.896				
	6				160	316	0.276		1.097					
	7				40	250	635	0.111	0.413	0.554	1.078			
	8						489			0.427	0.951			
	9						445			0.388	0.912			
B type	10	359	1146	605	120	400	123	0.334	0.349	0.203	0.886	1.080	0.215	0.119
	11						334			0.552	1.235			
	12						309			0.511	1.194			
	13				36	0.060	0.879							
	14				200	300	14	0.557	0.262	0.023	0.842			
	15				420	0.694	1.513							
	16				40	500	289	0.111	0.436	0.478	1.025			
	17						279			0.461	1.008			
	18						360			0.595	1.142			

Table 5-2.

	No.	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_{cr}$	$\mu_{D_{cr}}$	$\sigma_{D_{cr}}$	$\delta_{D_{cr}}$			
C type	19	605	1146	359	210	400	123	0.347	0.349	0.343	1.039	1.305	0.349	0.267			
	20						309			0.861	1.557						
	21						192			0.535	1.231						
	22							44			0.123				0.881		
	23							300	300	167	0.496				0.262	0.465	1.223
	24									130						0.362	1.120
	25									250						0.696	1.231
	26							60	500	305	0.099				0.436	0.850	1.385
	27									555						1.546	2.081
D type	28	1146	605	359	400	210	426	0.349	0.347	1.187	1.883	1.403	0.450	0.321			
	29						67			0.187	0.883						
	30						231			0.643	1.339						
	31							119			0.331				1.119		
	32							600	160	45	0.524				0.264	0.125	0.913
	33									150						0.418	1.206
	34									625						1.742	2.259
	35							120	250	367	0.105				0.413	1.022	1.540
	36									346						0.964	1.482

Table 6-1. Data table of plastic fatigue damage defined with total dissipated energy

	No.	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_{cr}$	$\mu_{D_{cr}}$	$\sigma_{D_{cr}}$	$\delta_{D_{cr}}$
A type	1	112.6	133.6	164.9	52.69	43.82	13.49	0.468	0.328	0.082	0.878	0.976	0.368	0.377
	2				42.37	47.49	18.65	0.376	0.355	0.113	0.844			
	3				41.49	47.96	28.92	0.372	0.359	0.175	0.906			
	4				66.17	27.42	-	0.588	0.205	-	0.793			
	5				69.67	48.75	18.88	0.619	0.365	0.115	1.099			
	6				65.35	35.33	47.60	0.580	0.264	0.289	1.133			
	7				14.44	58.53	91.53	0.128	0.438	0.555	1.121			
	8				13.72	58.16	71.70	0.122	0.435	0.435	0.992			
	9				14.57	59.66	72.68	0.129	0.447	0.441	1.017			
B type	10	112.6	164.9	133.6	40.50	58.34	30.14	0.360	0.354	0.226	0.940	1.169	0.495	0.424
	11				39.94	58.90	78.58	0.355	0.357	0.588	1.300			
	12				42.49	63.60	74.03	0.377	0.386	0.554	1.317			
	13				67.20	44.21	13.27	0.597	0.268	0.099	0.964			
	14				68.87	46.42	12.72	0.612	0.282	0.095	0.989			
	15				69.19	43.98	95.25	0.614	0.267	0.713	1.594			
	16				14.38	77.23	69.27	0.128	0.468	0.518	1.114			
	17				14.66	80.43	69.25	0.130	0.488	0.519	1.137			
	18				14.90	82.71	-	0.132	0.502	-	-			

Table 6-2.

	No.	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_{cr}$	$\mu_{D_{cr}}$	$\sigma_{D_{cr}}$	$\delta_{D_{cr}}$
C type	19				53.85	64.00	40.80	0.403	0.388	0.363	1.154	1.420	0.614	0.432
	20				53.98	61.97	94.12	0.404	0.376	0.836	1.616			
	21				53.00	61.23	59.89	0.397	0.371	0.582	1.350			
	22				77.77	50.02	15.13	0.582	0.303	0.138	1.023			
	23	133.6	164.9	112.6	75.69	46.89	52.74	0.567	0.285	0.469	1.321			
	24				76.94	48.24	44.09	0.576	0.293	0.392	1.261			
	25				16.01	82.11	79.15	0.120	0.498	0.703	1.321			
	26				15.60	81.49	99.55	0.117	0.494	0.884	1.495			
	27				16.35	83.83	181.52	0.123	0.509	1.612	2.243			
D type	28				70.10	50.90	136.04	0.425	0.381	1.208	2.104	1.489	0.688	0.462
	29				62.21	52.72	19.27	0.377	0.395	0.171	0.943			
	30				64.48	46.02	67.20	0.391	0.344	0.597	1.332			
	31				105.97	39.77	39.59	0.643	0.298	0.352	1.293			
	32	164.9	133.6	112.6	100.79	37.74	14.23	0.611	0.283	0.126	1.020			
	33				105.48	39.74	48.96	0.640	0.297	0.435	1.372			
	34				21.49	61.78	194.62	0.130	0.462	1.728	2.321			
	35				21.24	60.39	111.19	0.129	0.452	0.987	1.568			
	36				21.09	60.83	107.52	0.128	0.455	0.955	1.538			

Table 7. Probabilistic estimation of plastic fatigue damage defined with number of cycles

Loading Pattern	$\mu_{D_{cr}}$	$\delta_{D_{cr}}$	$\delta_{DM} = \delta_N$	$\sqrt{\sum \delta^2 D_p}$
A	0.907	0.125	0.096	0.078
B	1.080	0.199	0.096	0.174
C	1.305	0.267	0.096	0.249
D	1.403	0.321	0.096	0.306

Table 8. Probabilistic estimation of plastic fatigue damage defined with total dissipated energy

Loading Pattern	$\mu_{D_{cr}}$	$\delta_{D_{cr}}$	$\delta_{DM} = \delta_E$	$\sqrt{\sum \delta^2 D_p}$
A	0.956	0.376	0.104	0.361
B	1.169	0.424	0.104	0.411
C	1.420	0.432	0.104	0.419
D	1.489	0.462	0.104	0.450

Table 5-1, Table 5-2 は、載荷回数に基づいて整理したものであり、Table 6-1, Table 6-2 は、消費エネルギーに基づいて整理したものである。各表において、 $\mu_{D_{cr}}$  は限界累積損傷度  $D_{cr}$  の平均値を表わし、 $D_{cr}$  の不偏分散より求めた標準偏差  $\sigma_{D_{cr}}$ 、変動係数  $\delta_{D_{cr}}$  も同時に掲げられている。

Table 7, Table 8 に4つの荷重組合せパターンに対する限界累積損傷度の確率統計量を掲げる。Table 7 は破断回数  $N$  に基づくもの、Table 8 は消費エネルギーに基づくものである。両者で、 $\delta_{DM}$  は Miner 則を仮定したときのこの予測法によるばらつき的大小を示し、 $\{\sum \delta^2 D_p\}^{1/2}$  は、4.2 で述べた限界累積損傷度  $D_{cr}$  の予測誤差の原因となるいくつかの誤差要因  $D_{P_1}, D_{P_2}, \dots$  のばらつきの総量を示すものである。

Table 7 によれば、限界累積損傷度の平均値  $\mu_{D_{cr}}$  は組合せパターン A, B, C, D の順に 0.907, 1.080,

1, 305, 1, 403 と増加傾向にある。次に, A, B の組合せではその平均値が 1.0 に比較的近い値をとっているにもかかわらず, C, D の組合せでは, その平均値が30~40%程度大きな値となっていることに特徴がある。

限界累積損傷度の平均値  $\mu_{D_{cr}}$  の値の 1 よりはずれの原因を, 誤差要因  $D_{P_1}$  (損傷度の非線形累積や荷重履歴依存性に基づく評価誤差),  $D_{P_2}$  (構造部材の幾何剛性の劣化の影響) 等を中心にして以下に検討を加える。

(2) 誤差要因  $D_{P_1}$  について

疲労破壊の進行が損傷度の非線形的, 荷重履歴依存的進行を示すとすれば, 載荷回数と損傷度との Fig. 8 のような関係が想定できる。今回の実験結果と合致する  $\mu_{D_{cr}}$  の傾向を示すためには, 損傷度の進行径路は荷重レベル  $S_I > S_{II} > S_{III}$  に応じて図中の径路の対応が存在すればよい。このような対応の意味するところは, 高い荷重レベル  $S_I$  では毎回の損傷度の累積が破壊に至るまで一定速度に近く載荷初期から最終段階まで疲労損傷度進行のパターンが一定であることを意味し, 一方低い荷重レベル  $S_{II}, S_{III}$  では, 載荷初期の疲労損傷度の成長に多くの時間を要し, 次第に加速されるという考え方である。このような累積損傷度の進行パターンに従うと  $\mu_{D_{cr}}$  の値は, Fig. 9 に示すように A, B, C, D の組合せパターンの順に  $\mu_{D_{cr}} < 1, \mu_{D_{cr}} \cong 1, \mu_{D_{cr}} \cong 1, \mu_{D_{cr}} > 1$  の傾向を示すことができる。たとえば A

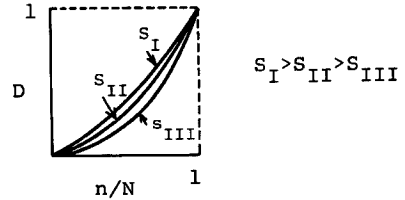


Fig. 8 Stress-dependent damage-cycle ratio relationship

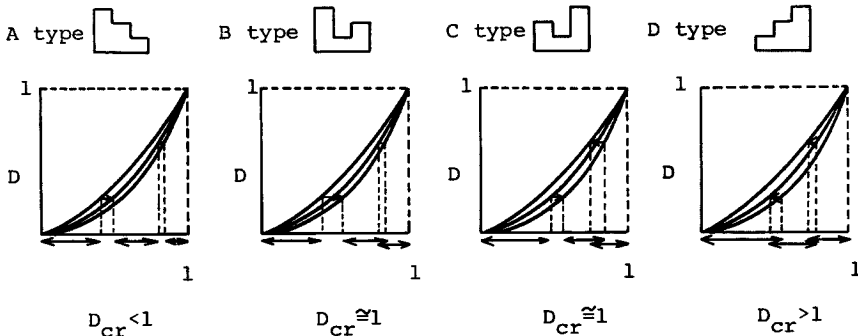


Fig. 9 Variation of critical damage  $D_{cr}$  dependent of loading histories

タイプでは, 荷重は  $a_1 > a_2 > a_3$  の順であり,  $a_1, a_2, a_3$  のレベルに応じた損傷度曲線の上で  $D_1 = n_1/N_1, D_2 = n_2/N_2, D_3 = n_3/N_3$  だけ増加したとき, 縦軸に示す損傷度  $D$  は 1 に達し疲労破壊を生じる。このとき  $D_{cr}$  は, 定義により  $\sum D_i$  で与えられるが, その大きさは図中横軸の線分  $\leftrightarrow$  の和に等しいことから  $D_{cr} < 1$  となる。他のタイプもまた同様の手続きによって求められる。しかしながら, 以上の結果からは, C, D のタイプにおける  $\mu_{D_{cr}}$  の値が特に大きく 30~40%の疲労寿命の長期化傾向を示す理由を明らかにすることはできない。

(3) 誤差要因  $D_{P_2}$  について

荷重レベルが靱性率振幅  $a = 3.0$  となると, 広幅 H 型鋼材は十分密な間隔で補剛がなされていない限り局部座屈の発生するのが観察される。その結果部材の応力分布に変化が生じ, 応力集中点は, 載荷点以外に少なくとも 4 箇所以上増加することになる。

したがって載荷レベルの変化とともに載荷途中から局部座屈が急に発達するならば, 従来からの載荷点以外に疲労破壊箇所が分散して不確定要因が入りやすい傾向を生じることになる。このような考え方を適用することにより, C, D タイプにおける疲労寿命の長期化および変動係数の増大の傾向を理解することができる。ま

た、A, B タイプで、 $\mu_{D_{cr}}$  が 1 近傍に止まったのは荷重初期の段階ですでに発生した局部座屈に応力集中点が固定され、それ以後の荷重レベル変化においても一度生じた局部座屈の消失がなく、応力集中点が固定化されたことによるものと想像される。

100×50 の供試体ではフランジの局部座屈の発生の可能性は無視でき、したがって  $D_{F_2}$  の誤差要因も無視できるが、この供試体による 2 段変動変位振幅試験において、荷重組合せパターンの減少パターン（今回の A タイプに相当）では、 $\mu_{D_{cr}}=1.178$ 、逆に増加パターン（今回の D タイプに相当）では、 $\mu_{D_{cr}}=1.002$  となり、100×100 の供試体の場合の  $\mu_{D_{cr}}$  の傾向と逆の傾向を示した。

両者の互いに異なる傾向を矛盾なく説明するには、二つの供試体の応力集中域での降伏域の挙動に関する精密な議論が必要と思われるが、結局は、100×50 の供試体の減少振幅時の降伏域の拡大傾向と、100×100 の供試体の C, D タイプの局部座屈による応力集中部の増加とが、いずれも疲労破壊のエネルギー消費域の増大という形で同一の作用を及ぼしたものと考えられる。

#### (4) 限界累積損傷度の変動係数 $\delta_{D_{cr}}$ について

$D_{cr}$  のばらつきをみるために **Fig. 10, 11** を示す。**Fig. 10** は疲労破壊回数を基準に整理したものであり、**Fig. 11** は消費エネルギーを基準に整理したものである。両者の傾向が非常によく似ていることより、荷重初期に著しい部材の劣化特性が疲労寿命に与える影響は小さく、荷重回数による評価で代替してもよいことを示唆している。したがって以下では、**Fig. 10** にしたがって考察を進める。

A, B タイプでは、 $D_{cr}$  の変動係数  $\delta_{D_{cr}}$  は比較的小さいにもかかわらず、C, D タイプでは、 $D_1+D_2$  が 50% 付近の場合特に大きなばらつきを示している。このことは、すでに (3) で指摘したように荷重途中からの局部座屈の急な成長に伴うばらつき要因の増加と考えれば理解しうるが、その大きさは、**Table 7** に示すように、 $\{\sum \delta^2_{D_F}\}^{1/2}=0.249\sim 0.306$  と前二者の値の 2～5 倍の大きさを示している。しかし、**Table 8** の消費エネルギーの場合には、 $\{\sum \delta^2_{D_F}\}^{1/2}$  はいずれのタイプでもほぼ同程度の大ききなばらつきを示している点で **Table 7** の荷重回数の場合と異なる傾向を示している。

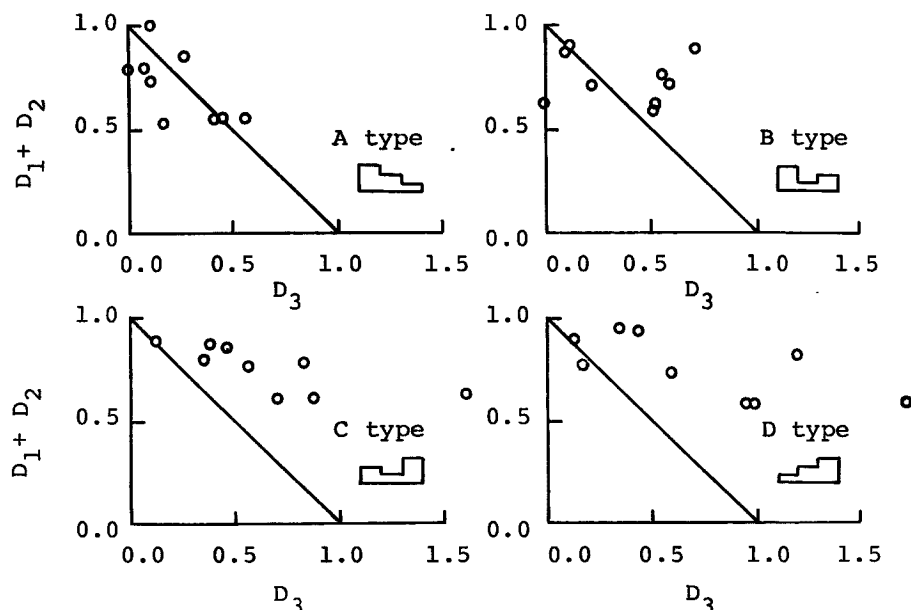


Fig. 10 Cumulative damage defined with number of cycles and its dispersion

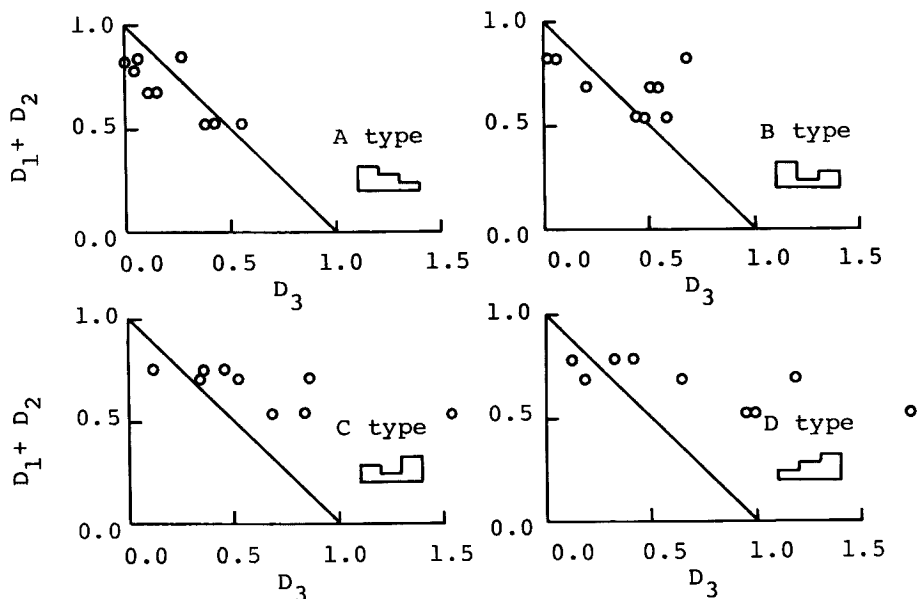


Fig. 11 Cumulative damage defined with total dissipated energy and its dispersion

以上の考察の結論として、局部座屈の発生は、疲労寿命の平均値の増加傾向を与えるにもかかわらず、変動係数が大きくなるため、疲労寿命予測の信頼性を減じることになると言えよう。

## 6. 結 論

本研究では、塑性疲労破壊基準としての累積損傷則の適用性を検討するために、3段階の振幅レベル組合せによる変動変位振幅試験を実施してその結果を Miner の線形累積損傷則に基づいて評価した。

得られた結果を要約すれば以下のとおりである。

(1) 定変位振幅試験結果を回帰分析して得られた SN 曲線の相関係数は、 $-0.976$  ( $100 \times 100$  広幅 H 型供試体)、 $-0.987$  ( $100 \times 50$ ) と非常に高い負の相関を示した。同様に破断に要する全消費エネルギー  $E$  を基準にした SE 曲線の相関係数は、 $-0.802$  ( $100 \times 100$ ) であった。

(2) 断面寸法の異なる 2 つの H 型鋼材の SN 曲線の勾配の平均値  $\mu_b$  は、 $2.862$  ( $100 \times 100$ )、および  $2.544$  ( $100 \times 50$ ) と近似的な値を示した。しかし、疲労寿命および破断に要する全消費エネルギーは  $100 \times 100$  の供試体が  $100 \times 50$  の供試体の 4~5 倍の寿命延長および消費エネルギーの増加を示した。

(3) 破断回数  $N$  のばらつきを示す変動係数  $\sigma_N$  の値は、 $0.096$  ( $100 \times 100$ )、 $0.143$  ( $100 \times 50$ ) であった。試験機の出力誤差、材料の不均一性による誤差を除去した疲労現象による回数のばらつきは、 $0.07$  ( $100 \times 100$ )、 $0.13$  ( $100 \times 50$ ) と考えられる。

(4) 疲労破壊時の累積損傷度を示す限界累積損傷度  $D_{cr}$  は、载荷回数を基準にした場合も、破断までの消費エネルギーを基準にした場合も同様の傾向を示した。その平均値  $\mu_{D_{cr}}$  は、4 つの荷重組合せパターンに対し、 $0.907 \sim 1.403$  (载荷回数基準)、 $0.956 \sim 1.489$  (消費エネルギー基準) であった。疲労寿命の平均値が 40% 近く増加した原因として部材の塑性変形による局部座屈の影響が考えられる。

(5) 限界累積損傷度の変動係数  $\sigma_{D_{cr}}$  の値は、 $0.125 \sim 0.321$  (载荷回数基準)、 $0.370 \sim 0.462$  (消費エネルギー基準) となり、大きくなばらつきを示した。この値の中で、Miner 則では評価しきれない原因によるばらつきの割合がそれぞれ、 $0.078 \sim 0.306$  (载荷回数基準)、 $0.361 \sim 0.450$  (消費エネルギー基準) と非常に大き



いのが特徴的である。この原因の一つとして、局部座屈の影響が考えられる。

(6) 消費エネルギーによる損傷度の定義は、塑性疲労破壊過程での劣化傾向をも考慮でき、載荷回数による損傷度の定義より有意義なパラメータと考えられるが、上述の(4)、(5)の結果は、両者の傷損度の傾向が類似しているだけでなく数値的にも近似的な値をもち、その意味で載荷回数による評価で十分有効な議論の可能なことを示唆しているものと言える。

本研究は、地震による構造物の破壊機構に関する研究の一環として実施中のものであり、今回の報告は前年度の実験結果をも合わせて特に確率統計的な面から考察を加えたものである。今後、地震入力のようなランダム入力に対する塑性疲労破壊の寿命予測方法を確立してゆくためには、同一鋼材に対するランダム疲労試験を実施し、その実験結果を、今回得られた SN 曲線、限界累積損傷度の平均値および変動係数などの基礎データを用いた予測値とを比較検討する必要がある。終りに、本研究の一部は文部省科学研究費（一般研究 B）によったこと、実験実施に際して京都大学研究生杉原 豊氏の協力のあったことを記し、感謝の意を表する次第である。

### 参 考 文 献

- 1) 後藤尚男・亀田弘行・小池 武・泉並隆二・脇田和試・杉原 豊：くり返し曲げ荷重下における構造用鋼材の破壊過程に関する一考察，京都大学防災研究所年報，第17号 B，1974，pp.157-169.
- 2) 藤田広志：転位構造と強度と破壊——主として超高電圧電顕による研究，第19回材料強度と破壊国内総合シンポジウム，1974，pp.1-13.
- 3) 北川 茂：実働荷重下の金属の疲労破面，材料強度と信頼性設計，講習会テキスト，1972，pp.33-43.
- 4) 横堀武夫：材料強度学，岩波全書，1970，pp.204-211，pp.231-244.
- 5) Miner, M. A.: Cumulative Damage in Fatigue, J. Appl. Mech., Vol. 12, 1945, pp. A 159-A 164.
- 6) Tanabashi, R., Y. Yokoo, M. Wakabayashi, T. Nakamura, H. Kunieda, H. Matsunaga and T. Kubota: Load Deflection Behaviors and Plastic Fatigue of Wide-Flange Beams Subjected to Alternating Plastic Bending, Part I, Part II, Part III, Trans. of A. I. J., 1970, No. 175, pp. 17-26, No. 176, pp. 25-33, No. 177, pp. 35-44.
- 7) Takanashi, K.: Inelastic Lateral Buckling of Steel Beams Subjected to Repeated and Reversed Loadings, Proc. of V WCEE, Vol. 1, Rome 1974, pp. 795-798.
- 8) 成瀬勝武・本間 仁・谷藤正三：土木設計データブック，森北出版，1963，p. 44，p. 46.
- 9) 吉川和広：土木計画と OR，丸善株式会社，1969，p. 108.
- 10) Ang, A. H.-S. and C. A. Cornell: Reliability Bases of Structural Safety and Design, Journal of the Structural Division, Proc. ASCE, Vol. 100, No. ST9, Sept., 1974, pp. 1755-1769.