

# 非線形挙動をする表層地盤の震動解析

佐 藤 忠 信

## SEISMIC RESPONSE OF A NEAR-SURFACE LAYER WITH NON-LINEAR CHARACTERISTICS

By *Tadanobu SATO*

### Synopsis

The purpose of this paper is to investigate the influence of non-linear properties of soil on the dynamical behaviour of near-surface layer. General expressions of the one-dimensional non-linear harmonic wave transfer function of horizontally multi-layered media are derived. In the analysis, the hyperbolic type stress strain relationship is employed, in which the shear modulus and damping coefficient are represented as a function of strain level.

The results of some numerical computation reveal that decision of the dynamical properties of soil has influenced upon the response of near-surface ground.

### I. ま え が き

地震時における構造物の震動特性は、周辺地盤の動特性に強く影響されることが、これまで多くの人によって指摘され、同一地域内における強震観測が行なわれるようになった結果、土木構造物の耐震性に関するような周波数領域では、地表面近傍の局所的な地盤構成が地動の支配的要因になっていることが明らかになってきた<sup>1)</sup>。このような観点から、本研究では、地盤を構成している土の動特性の設定いかんによって、表層地盤の動的挙動がどのように変化するかを整理し、表層地盤の震動特性を解析するための方法論について考察を加える。

地盤を構成している土の力学的性質を支配する要因は間げき比、拘束在、飽和度、せん断波速度など数多くあるが、特にその動特性は発生するひずみの大きさによって大きく異なる<sup>2)</sup>。ひずみが $10^{-5}$ ~ $10^{-4}$ 程度以下であれば、土はほぼ弾性的性質を示し、動的性質はセグ率とポアソン比を測定することによって決定される。ひずみがこれ以上の大きさになると土は動的な履歴特性を示すようになり<sup>3~7)</sup>、数%の大きさになると、土はもはや原形をとどめることができなくなり破壊を生ずるようになる。現在のところ、このようなひずみレベルの全領域にわたって使用できるような構成関係は提案されていないから、波動が伝播する時に発生する地盤内ひずみに対応して構成関係を選択しなければならない。いずれにしても、地盤内に発生するひずみが $10^{-3}$ 以上になると言われる強震時の震動解析を行なう場合には、土は非線形特性を有した物体と考えていかなければならないから、地盤内を伝播する波動を表現するための支配方程式は必然的に非線形となり、支配方程式を線形化することによって見逃されている2次の効果の影響をも考慮できるような解析手法の開発がなされなければならない。

一方、この十数年の間に連続体の場の方程式を統一的に記述するための努力がなされ<sup>8)</sup>、構成関係を含めた非線形場の方程式の性質がかなり明らかにされてきたので<sup>9)</sup>、このような場の波動解を求めようとする研究も行なわれるようになった。非線形弾性体中を伝播する単純波と衝撃波についての Bland の研究<sup>10)</sup>、弾性体や粘弾性体中を伝播する不連続面についての最近の成果をまとめた Chen の著書<sup>11)</sup>などが著名であるが、系を

支配する方程式は非線形偏微分方程式になるため、解の性状を明らかにするためには著しい数学的困難がともなってくる。このため、非線形波動問題においては、線形波動理論のように良くまとまった統一的な解析手法は完成されていず、場の方程式が性質の良くわかっている非線形方程式系へ変換できる場合にのみ解析が可能であり、問題によって解析手法が異なっているのが現状である。例えば、単純波の解析は **Lax**<sup>12)</sup> が与えた半線形双曲形偏微分方程式の解の性質を利用するものであり、加速度波と言われる 2 次のオーダーの不連続面の伝播問題は、場の方程式系がベルヌーイ形の非線形常微分方程式に変換できる場合にのみ解析が可能になると言った具合である。また、これらの研究はすべて無限に広がる連続体中の単調な波動を取り扱ったものであり、地盤のような各種の境界面を含んでいる物体中を反射や屈折を繰り返しながら伝播する周期性の波動の表現形式として用いることのできる解はまだ明らかにされていない。

ここでは、土を履歴特性を有する物質と考え、応力～ひずみ関係を等価な弾性係数と減衰定数に置き換えることにより<sup>13)</sup>、このような物質からなる地盤中を伝播する調和波動の解析的表現形式を、線形解の表現形式を用いて構成する手法について論じ、この手法を用い、基盤層と表層の 2 層から構成される地盤を対象として数値解析例を示す。地盤は水平な成層地盤であり、SH 波が反射や透過を繰り返しながら伝播する場合を考えている。なお上方の層より基盤層を通じて下方へ伝播する波動による逸散減衰を評価するため、基盤層は均質な線形粘弾性体からなるものと考えて解の構成を行なっている。

2. 調和波動解の構成

地盤をフ ェ ー ク ト 形 の 非 線 形 粘 弾 性 体 から な る と 考 え、せん断弾性係数  $\mu$  ならびにせん断粘性係数  $\nu$  が地盤内に発生しているせん断ひずみの大きさを表わす指標  $\gamma_0$  と深さ  $Z$  の関数で与えられるものとする。すなわち、

$$\mu = \mu(\gamma_0, Z), \quad \nu = \nu(\gamma_0, Z) \dots\dots\dots(1)$$

ここで用いる等価弾性定数ならびに等価減衰定数の決定法<sup>13)</sup>から類推して、地盤内を単一周波数の調和波が伝播するときには、 $\gamma_0$  の値として地盤内に発生するひずみの振幅を用いればよいが、地震波のようなランダムな波動が伝わる場合は、 $\gamma_0$  の値を一義的に定めることはできない。したがってこの場合には、 $\gamma_0$  の値として

地盤内に発生するひずみの r.m.s の  $\sqrt{2}$  倍を用いた場合と、r.m.s の 5 倍を用いた場合の両者について比較検討する。

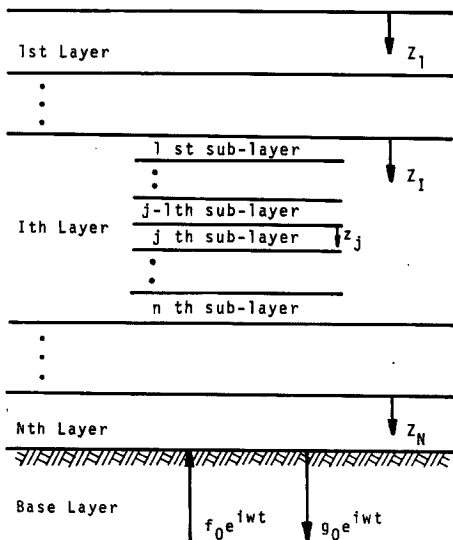


Fig. 1 Multi-layered ground

Fig. 1 に示すように表層地盤の上から I 番目の層を取り出し、これを  $n$  個の薄層に細分し、この薄層の中では  $\mu$  ならびに  $\nu$  が一定値を取るものとする。 $\mu$  と  $\nu$  は  $\gamma_0$  ならびに  $Z$  の関数であるが、1 つの層内では層の適当な位置での値を代表値として用いればこのような仮定が可能になる。以上のような薄層から構成される地盤を考え、重複反射理論を周波数領域で適用し、式(1)のような物性をもつ物体中を伝わる調和波動解を求め、その後薄層の層厚を無限小、すなわち、 $n$  を無限大にすることにより非線形調和波動解を構成する。

いま、 $j$  番目の薄層での  $\mu, \nu$  の代表を  $\mu_j, \nu_j$  とすれば、この層内の運動方程式は次式で表わされる。

$$\rho_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \mu_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} + \nu_j \frac{\partial^3 u_j}{\partial t \partial z^2} \dots\dots(2)$$

ここに、 $u_j$  は水平変位、 $\rho_j$  は密度、 $z_j$  は  $j$  番目の薄層上端から鉛直下方にとった座標軸である。時間変数を次式によって分離する。

$$u_j = U_j e^{i\omega t} \dots \dots \dots (3)$$

ここに、 $\omega$  は円振動数、 $i = \sqrt{-1}$  である。式(3)を式(2)に代入し、周波数領域での変位  $U_j$  に関する方程式を求めると次式となる。

$$(\mu_j + i\omega\nu_j) \frac{d^2 U_j}{dz_j^2} + \rho_j \omega^2 U_j = 0 \dots \dots \dots (4)$$

式(4)の一般解は次式で与えられる。

$$U_j = a_j \exp(ip_j z_j) + b_j \exp(-ip_j z_j) \dots \dots \dots (5)$$

ここに、

$$p_j^2 = \rho_j \omega^2 / (\mu_j + i\omega\nu_j) \dots \dots \dots (6)$$

である。なお  $a_j, b_j$  なる変数は  $j$  薄層上端における周波数領域での上昇波と下降波を表わしている。

いま、 $j$  番目の薄層の層厚を  $h_j$  とすれば、 $(j-1)$  番目と  $j$  番目の薄層の境界での変位ならびに応力の連続性より次式が求まる。

$$\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} [t_{j-1}] \begin{pmatrix} a_{j-1} \\ b_{j-1} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (7)$$

ここに、 $[t_{j-1}]$  は次式で表わされるようなマトリックスである。

$$[t_{j-1}] = \begin{bmatrix} \xi_{j-1} \exp(ip_{j-1} h_{j-1}) & \eta_{j-1} \exp(-ip_{j-1} h_{j-1}) \\ \eta_{j-1} \exp(ip_{j-1} h_{j-1}) & \xi_{j-1} \exp(-ip_{j-1} h_{j-1}) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (8)$$

ただし、

$$\xi_{j-1} = \frac{1}{2} (1 + \beta_{j-1} / \beta_j) \dots \dots \dots (9)$$

$$\eta_{j-1} = \frac{1}{2} (1 - \beta_{j-1} / \beta_j) \dots \dots \dots (10)$$

$$\beta_j = (\mu_j + i\omega\nu_j) p_j \dots \dots \dots (11)$$

である。式(11)で与えられる  $\beta_j$  は複素インピーダンスであり、 $\beta_{j-1} / \beta_j$  は複素インピーダンス比である。

式(7)を繰り返し適用することにより次式をうる。

$$\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = [T^j] \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (12)$$

ここに、 $[T^j]$  なるマトリックスは次式で与えられる。

$$[T^j] = [t_{j-1}] [t_{j-2}] \dots \dots [t_2] [t_1] \dots \dots \dots (13)$$

式(5)と式(12)より各薄上端での  $U_j$  ならびにひずみの周波数領域での表現  $\Gamma_j$  は次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} U_j |_{z_j=0} &= (T_{11}^j + T_{21}^j) a_1 + (T_{12}^j + T_{22}^j) b_1 \\ \Gamma_j |_{z_j=0} &= i p_j (T_{11}^j - T_{21}^j) a_1 - i p_j (T_{22}^j - T_{12}^j) b_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

ここに、 $T_{lm}^j$  ( $l, m = 1, 2$ ) は  $[T^j]$  の成分を表わしている。

式(8)を式(13)に代入し  $\eta_j$  のべき乗順に整理すると次式をうる。

$$T_{11}^j = \prod_{q=1}^{j-1} \xi_q \exp \left\{ i \sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k \right\} + \sum_{r=2}^{j-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{j-1} \xi_k \exp \left\{ i \left( \sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k \} + \sum_{i=4}^{j-1} \sum_{s=3}^{i-1} \sum_{r=2}^{s-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \eta_s \eta_t \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{s-1} \xi_k \prod_{k=s+1}^{i-1} \xi_k \exp \{ i (\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k \\
& - 2 \sum_{k=1}^i p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^s p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k) \} \\
& + \sum_{w=6}^{j-1} \sum_{u=5}^{w-1} \sum_{t=4}^{u-1} \sum_{s=3}^{t-1} \sum_{r=2}^{s-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \eta_s \eta_t \eta_u \eta_w \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{s-1} \xi_k \prod_{k=s+1}^{t-1} \xi_k \prod_{k=t+1}^{u-1} \xi_k \prod_{k=u+1}^{w-1} \xi_k \\
& \cdot \exp \{ i (\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^w p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^u p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^t p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^s p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k \\
& + 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k) \} + \dots \dots \dots (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{12}^f &= \sum_{q=1}^{j-1} \eta_q \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{j-1} \xi_k \exp \{ i (\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k) \} \\
& + \sum_{s=3}^{j-1} \sum_{r=2}^{s-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \eta_s \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{s-1} \xi_k \prod_{k=s+1}^{j-1} \xi_k \exp \{ i (\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^s p_k h_k \\
& + 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k) \} \\
& + \sum_{u=5}^{j-1} \sum_{t=4}^{u-1} \sum_{s=3}^{t-1} \sum_{r=2}^{s-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \eta_s \eta_t \eta_u \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{s-1} \xi_k \prod_{k=s+1}^{t-1} \xi_k \prod_{k=t+1}^{u-1} \xi_k \exp \{ i (\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k \\
& - 2 \sum_{k=1}^u p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^t p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^s p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k) \} + \dots \dots \dots (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{21}^f &= \sum_{q=1}^{j-1} \eta_q \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{j-1} \xi_k \exp \{ -i (\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k) \} \\
& + \sum_{s=3}^{j-1} \sum_{r=2}^{s-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \eta_s \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{s-1} \xi_k \prod_{k=s+1}^{j-1} \xi_k \exp \{ -i (\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^s p_k h_k \\
& + 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k) \} \\
& + \sum_{u=5}^{j-1} \sum_{t=4}^{u-1} \sum_{s=3}^{t-1} \sum_{r=2}^{s-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \eta_s \eta_t \eta_u \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{s-1} \xi_k \prod_{k=s+1}^{t-1} \xi_k \prod_{k=t+1}^{u-1} \xi_k \exp \{ -i (\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k \\
& - 2 \sum_{k=1}^u p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^t p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^s p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k) \} + \dots \dots \dots (17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{22}^f &= \prod_{q=1}^{j-1} \xi_q \exp \{ -i \sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k \} + \sum_{r=2}^{j-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^j \xi_k \exp \{ -i (\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k \\
& + 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k) \} + \sum_{t=4}^{j-1} \sum_{s=3}^{t-1} \sum_{r=2}^{s-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \eta_s \eta_t \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{s-1} \xi_k \prod_{k=s+1}^{t-1} \xi_k \prod_{k=t+1}^j \xi_k \exp \{ -i (\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k \\
& - 2 \sum_{k=1}^t p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^s p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k) \} \\
& + \sum_{w=6}^{j-1} \sum_{u=5}^{w-1} \sum_{t=4}^{u-1} \sum_{s=3}^{t-1} \sum_{r=2}^{s-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \eta_s \eta_t \eta_u \eta_w \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{s-1} \xi_k \prod_{k=s+1}^{t-1} \xi_k \prod_{k=t+1}^{u-1} \xi_k \prod_{k=u+1}^{w-1} \xi_k \\
& \cdot \exp \{ -i (\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^w p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^u p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^t p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^s p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k \\
& + 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k) \} + \dots \dots \dots (18)
\end{aligned}$$

式(15)～(18)で薄層の分割数を無限大にする<sup>14)</sup>。この場合 $\sum p_k h_k$ の項は積分表示に変換されるから  $T_{km}^I$  は  $I$  層の座標  $Z_I$  の関数として表現できることになる。また  $\xi_a$  の相乗積は  $\lambda_I(Z_I)$  なる関数に、 $\eta_a$  は  $\kappa_I(Z_I)$   $dZ_I$  なる関数へと変換され次式で表わされるような関係式になる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_I(Z_I) &= \{\beta_I(0, \omega) / \beta_I(Z_I, \omega)\}^* \\ \kappa_I(Z_I) &= \frac{1}{2\beta_I(Z_I, \omega)} \frac{d\beta_I(Z_I, \omega)}{dZ_I} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

ここに、 $\beta_I(Z_I)$  は  $I$  層の深さ  $Z_I$  でのインピーダンスであり、式(11)より次式となる。

$$\beta_I(Z_I, \omega) = p_I(Z_I, \omega) \{ \mu_I(\gamma_0^I(Z_I), Z_I) + i\omega\nu_I(\gamma_0^I(Z_I), Z_I) \} \dots\dots\dots(20)$$

ただし、 $p_I(Z_I, \omega)$  は  $I$  層の深さ  $Z_I$  での複素波数であり式(6)より次式で与えられる。

$$p_I^2(Z_I, \omega) = \rho_I(Z_I) \omega^2 \{ \mu_I(\gamma_0^I(Z_I), Z_I) + i\omega\nu_I(\gamma_0^I(Z_I), Z_I) \} \dots\dots\dots(21)$$

ここに、 $\gamma_0^I(Z_I)$  は  $I$  層の深さ  $Z_I$  で発生しているひずみの大きさを表わす指標である。なお、式(19)の関係は4節で詳しく述べる。

薄層の分割数を無限大にすることによって、式(15)～(18)は次式のように書きなおせる。変数に付けた添字  $I$  は  $I$  層での変数を表わしている。

$$\begin{aligned} T_{11}^I(Z_I, \omega) &= \lambda_I(Z_I) \left[ \exp\left\{i \int_0^{Z_I} p_I dw\right\} + \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \exp\left\{i \int_0^{x_2} p_I dw - 2i \int_0^{x_2} p_I dw\right\} \right. \\ &+ 2i \int_0^{x_1} p_I dw \} dx_1 dx_2 + \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_4) \int_0^{x_4} \kappa_I(x_3) \int_0^{x_3} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \exp\left\{i \int_0^{Z_I} p_I dw - 2i \int_0^{x_4} p_I dw \right. \\ &+ 2i \int_0^{x_3} p_I dw - 2i \int_0^{x_2} p_I dw + 2i \int_0^{x_1} p_I dw \} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \\ &+ \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_6) \int_0^{x_6} \kappa_I(x_5) \int_0^{x_5} \kappa_I(x_4) \int_0^{x_4} \kappa_I(x_3) \int_0^{x_3} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \exp\left\{i \int_0^{Z_I} p_I dw - 2i \int_0^{x_6} p_I dw \right. \\ &+ 2i \int_0^{x_5} p_I dw - 2i \int_0^{x_4} p_I dw + 2i \int_0^{x_3} p_I dw - 2i \int_0^{x_2} p_I dw + 2i \int_0^{x_1} p_I dw \} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 dx_6 \\ &\left. + \dots\dots\dots \right] \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{12}^I(Z_I, \omega) &= \lambda_I(Z_I) \left[ \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_1) \exp\left\{i \int_0^{Z_I} p_I dw - 2i \int_0^{x_1} p_I dw\right\} dx_1 \right. \\ &+ \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_3) \int_0^{x_3} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \exp\left\{i \int_0^{Z_I} p_I dw - 2i \int_0^{x_3} p_I dw + 2i \int_0^{x_2} p_I dw - 2i \int_0^{x_1} p_I dw\right\} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &+ \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_5) \int_0^{x_5} \kappa_I(x_4) \int_0^{x_4} \kappa_I(x_3) \int_0^{x_3} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \exp\left\{i \int_0^{Z_I} p_I dw - 2i \int_0^{x_5} p_I dw + 2i \int_0^{x_4} p_I dw \right. \\ &\left. - 2i \int_0^{x_3} p_I dw + 2i \int_0^{x_2} p_I dw - 2i \int_0^{x_1} p_I dw\right\} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 + \dots\dots\dots \right] \dots\dots\dots(23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{21}^I(Z_I, \omega) &= \lambda_I(Z_I) \left[ \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_I) \exp\left\{-i \int_0^{Z_I} p_I dw + 2i \int_0^{x_I} p_I dw\right\} dx_I \right. \\ &+ \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_3) \int_0^{x_3} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \exp\left\{-i \int_0^{Z_I} p_I dw + 2i \int_0^{x_3} p_I dw - 2i \int_0^{x_2} p_I dw + 2i \int_0^{x_1} p_I dw\right\} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &+ \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_5) \int_0^{x_5} \kappa_I(x_4) \int_0^{x_4} \kappa_I(x_3) \int_0^{x_3} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \exp\left\{-i \int_0^{Z_I} p_I dw + 2i \int_0^{x_5} p_I dw \right. \\ &\left. + 2i \int_0^{x_4} p_I dw - 2i \int_0^{x_3} p_I dw + 2i \int_0^{x_2} p_I dw - 2i \int_0^{x_1} p_I dw\right\} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 + \dots\dots\dots \right] \dots\dots\dots(24) \end{aligned}$$

$$T_{22}^I(Z_I, \omega) = \lambda_I(Z_I) \left[ \exp\left\{-i \int_0^{Z_I} p_I dw\right\} + \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \exp\left\{-i \int_0^{Z_I} p_I dw + 2i \int_0^{x_2} p_I dw\right\} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -2i \int_0^{z_1} p_I dw \} dx_1 dx_2 \\
 & + \int_0^{z_1} \kappa_I(x_4) \int_0^{z_4} \kappa_I(x_3) \int_0^{z_3} \kappa_I(x_2) \int_0^{z_2} \kappa_I(x_1) \exp\{-i \int_0^{z_1} p_I dw + 2i \int_0^{z_4} p_I dw - 2i \int_0^{z_3} p_I dw \\
 & + 2i \int_0^{z_2} p_I dw - 2i \int_0^{z_1} p_I dw \} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \\
 & + \int_0^{z_1} \kappa_I(x_6) \int_0^{z_6} \kappa_I(x_5) \int_0^{z_5} \kappa_I(x_4) \int_0^{z_4} \kappa_I(x_3) \int_0^{z_3} \kappa_I(x_2) \int_0^{z_2} \kappa_I(x_1) \exp\{-i \int_0^{z_1} p_I dw + 2i \int_0^{z_6} p_I dw \\
 & - 2i \int_0^{z_5} p_I dw + 2i \int_0^{z_4} p_I dw - 2i \int_0^{z_3} p_I dw + 2i \int_0^{z_2} p_I dw - 2i \int_0^{z_1} p_I dw \} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 dx_6 \\
 & + \dots ] \dots \dots \dots (25)
 \end{aligned}$$

以上のように、 $I$  層の深さ  $Z_I$  での  $[T^I(Z_I, \omega)]$  の表示式が求まるから、式(12)の  $a_I, b_I$  を  $A_I(\omega), B_I(\omega)$  とおき換えれば、式(14)より  $I$  層の深さ  $Z_I$  での周波数領域での変位  $U_I(Z_I, \omega)$  ならびにひずみ  $\Gamma_I(Z_I, \omega)$  は次式のように与えられる。

$$U_I(Z_I, \omega) = \{T_{11}^I(Z_I, \omega) + T_{21}^I(Z_I, \omega)\}A_I(\omega) + \{T_{12}^I(Z_I, \omega) + T_{22}^I(Z_I, \omega)\}B_I(\omega) \dots \dots \dots (26)$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_I(Z_I, \omega) = & iP_I(Z_I, \omega)\{T_{11}^I(Z_I, \omega) - T_{21}^I(Z_I, \omega)\}A_I(\omega) - iP_I(Z_I, \omega)\{T_{22}^I(Z_I, \omega) \\
 & - T_{12}^I(Z_I, \omega)\}B_I(\omega) \dots \dots \dots (27)
 \end{aligned}$$

ここに、 $A_I(\omega), B_I(\omega)$  は  $I$  層上端における周波数領域での上昇波と下降波を表わす変数で境界条件より定まる定数である。なお、式(12)より深さ  $Z_I$  での上昇波と下降波は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned}
 T_{11}^I(Z_I, \omega)A_I(\omega) + T_{12}^I(Z_I, \omega)B_I(\omega) & \quad (\text{上昇波}) \\
 T_{21}^I(Z_I, \omega)A_I(\omega) + T_{22}^I(Z_I, \omega)B_I(\omega) & \quad (\text{下降波})
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

いま、

$$\Gamma_I(Z_I, \omega) = \Gamma_0^I(Z_I, \omega) \exp\{i\theta_I(Z_I, \omega)\} \dots \dots \dots (29)$$

とすれば、 $\Gamma_0^I(Z_I, \omega)$  は  $I$  層の深さ  $Z_I$  でのせん断ひずみ振幅になり、 $\theta_I(Z_I, \omega)$  は入射波とひずみの位相差を表わすことになる。したがって地盤内を単一の周和波動が伝播する場合には、式(20), (21)に現われる  $\gamma_0^I(Z_I)$  の値として  $\Gamma_0^I(Z_I, \omega)$  を用いればよいことになる。

以上で式(1)のような物性をもつ物体中を伝播する非線形調和波動の解が表現できたわけであるが、式(22)~(25)で表わされるマトリックス  $[T^I(Z_I, \omega)]$  の成分は  $\beta_I(Z_I, \omega)$  ならびに  $p_I(Z_I, \omega)$  の複雑な関数となっている。これらの値は、式(20), (21)などから明らかなように、ひずみの大きさを表わす指標  $\gamma_0^I(Z_I)$  の関数として表わされるから、式(22)~(25)の積分を直接行なうことはできない。ここでは線形解の値から  $\gamma_0^I(Z_I)$  の値を推定し、これを第1次近似とし、 $\beta_I(Z_I, \omega)$  と  $p_I(Z_I, \omega)$  を計算し、式(22)~(25)に代入しその数値積分を行ない  $[T^I(Z_I, \omega)]$  を求める。この  $[T^I(Z_I, \omega)]$  を用い、 $\gamma_0^I(Z_I)$  を計算し、ふたたび数値積分を行なって  $[T^I(Z_I, \omega)]$  を計算する。このような計算を繰り返し、 $\gamma_0^I(Z_I)$  がある一定の精度内に入るまで繰り返し計算を行なうことにより非線形解を構成する。このような操作を行なうためには、境界条件より、式(26)に現われる未定係数  $A_I(\omega)$  ならびに  $B_I(\omega)$  の値を定めなければならない。これについては以下で詳述する。

### 3. 波動伝達特性の表現

以上のように、 $I$  層での非線形調和波動の一般解が表現できたので、以下一般解に現われる未定係数  $A_I(\omega), B_I(\omega)$  の値を入射波によって表わす。

$I$  層と  $(I+1)$  層の境界では変位と応力の連続性を満さなければならないから次式をうる。

$$\begin{pmatrix} A_{I+1}(\omega) \\ B_{I+1}(\omega) \end{pmatrix} = [R_I] [T^I(H_I)] \begin{pmatrix} A_I(\omega) \\ B_I(\omega) \end{pmatrix} \dots\dots\dots(30)$$

ただし、

$$[R_I] = \begin{bmatrix} \frac{1+\alpha_I}{2} & \frac{1-\alpha_I}{2} \\ \frac{1-\alpha_I}{2} & \frac{1+\alpha_I}{2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(31)$$

ここに、

$$\alpha_I = \{\mu_I(H_I) + i\omega\nu_I(H_I)\} p_I(H_I, \omega) / \{\mu_{I+1}(0) + i\omega\nu_{I+1}(0)\} p_{I+1}(0, \omega) \dots\dots\dots(32)$$

式(30)を順次繰り返して用いることにより次式をうる。

$$\begin{pmatrix} A_{I+1}(\omega) \\ B_{I+1}(\omega) \end{pmatrix} = [M^I(\omega)] \begin{pmatrix} A_1(\omega) \\ B_1(\omega) \end{pmatrix} \dots\dots\dots(33)$$

ここに、

$$[M^I(\omega)] = [R_I] [T^I(H_I)] \dots\dots [R_2] [T^2(H_2)] [R_1] [T^1(H_1)] \dots\dots\dots(34)$$

なお、 $I=N$  としたときの  $A_{N+1}(\omega)$ ,  $B_{N+1}(\omega)$  は基盤層上端での周波数領域での上昇波と下降波を表わしている。

(1) 基盤層の上昇波が既知の場合

地表面でせん断応力が0になることにより

$$A_1(\omega) = B_1(\omega) \dots\dots\dots(35)$$

をうる。いま基盤層上端での上昇波として  $f_0(\omega)$  なる振幅をもつ調和波動が与えられると、式(33)で  $A_{N+1}(\omega) = f_0(\omega)$ ,  $B_{N+1}(\omega) = g_0(\omega)$  とおくことにより次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} A_1(\omega)/f_0(\omega) &= 1 / \{M_{11}^{N}(\omega) + M_{12}^{N}(\omega)\} \\ g_0(\omega)/f_0(\omega) &= \{M_{21}^{N}(\omega) + M_{22}^{N}(\omega)\} / \{M_{11}^{N}(\omega) + M_{12}^{N}(\omega)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

地表面の周波数領域での変位は式(26)より  $U_1(0) = A_1 + B_1$  と表わせるから、 $2A_1 / f_0$  は  $f_0$  なる入力に対する表層地盤の複素伝達関数になる。

(2) 地表面での変形が既知の場合

基盤層から波動が入射し、地表面での変形が  $U_s(\omega) e^{i\omega t}$  なる調和波で与えられるとすれば次式をうる。

$$A_1(\omega) + B_1(\omega) = U_s(\omega) \dots\dots\dots(37)$$

式(35)と式(37)を、式(33)において  $I=N$  とおいた式に代入すれば次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} A_1(\omega) = B_1(\omega) &= \frac{1}{2} U_s(\omega) \\ A_{N+1}(\omega) / U_s(\omega) &= \frac{1}{2} \{M_{11}^{N}(\omega) + M_{12}^{N}(\omega)\} \\ B_{N+1}(\omega) / U_s(\omega) &= \frac{1}{2} \{M_{21}^{N}(\omega) + M_{22}^{N}(\omega)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(38)$$

#### 4. $\lambda_I(z_I)$ , $\kappa_I(z_I)$ に関する考察

表層地盤の I 番目の層内のせん断弾性係数ならびにせん断粘性係数が深さ  $Z_I$  に関し任意階微分可能な関数とし、これから構成される複素波数  $p_I(Z_I, \omega)$  も同様な性質をもつものとするれば、式(20)で表わされる  $\beta_I(Z_I, \omega)$  も  $Z_I$  に関し任意階微分可能な複素数値関数となる。いま I 層を  $n$  個の薄層に等分割すれば、各薄層の厚層  $h_k$  は  $H/n$  と表わされるから、式(2)に現われる  $\mu_j$  と  $\nu_j$  の代表値として薄層上端での値を取ることすれば、式(11)で定義される  $\beta_j$  は次式で与えられる。

$$\beta_j = \beta_I(Z_I, \omega) \Big|_{Z_I = \sum_{k=1}^{j-1} h_k = H_I(j-1)/n} \dots\dots\dots(39)$$

いま、深さ  $H_I(j-1)/n$  をあらたに  $Z_I$  と表わすことすれば、 $\lambda_I(Z_I)$  は  $\xi_k$  の無限積により次式のように与えられる。

$$\lambda_I(Z_I) = \lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{j-1} \xi_k \dots\dots\dots(40)$$

$\xi_k$  は式(9)より次式のように表わされる。

$$\xi_k = \frac{\beta_k + \beta_{k+1}}{2\beta_{k+1}} = \left(\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2 \dots\dots\dots(41)$$

一方、 $\beta_k/\beta_{k+1}$  は次式のように書きなおせる。

$$\frac{\beta}{\beta_{k+1}} = \frac{\beta_1}{\beta_k + e_k} = 1 - \frac{e_k}{\beta_k} + O(e_k) \dots\dots\dots(42)$$

ここに、 $e_k$  は薄層の分割数が大きくなると 0 に近づくとような複素数値変数である。これから、式(41)の右辺第 2 項を  $\epsilon_k$  とおけば、これは次式のように表わされる。

$$\epsilon_k = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2 = \frac{1}{8} \left(\frac{e_k}{\beta_k}\right)^2 + O(e_k) \dots\dots\dots(43)$$

また、 $\beta_I(Z_I, \omega)$  の微分可能性より次式をうる。

$$e_k = \beta_k' \Delta Z_I + O(\Delta Z_I) = \beta_k' \cdot \frac{H_n}{n} + O\left(\frac{H_I}{n}\right) \dots\dots\dots(44)$$

ここに、 $\Delta Z_I = H_I/n$ 、 $\beta_k' = d\beta_I(Z_I, \omega) / dZ_I |_{Z_I = \Delta Z_I, (k-1)}$  である。したがって、式(43)は次式のようになる。

$$\epsilon_k = \frac{1}{8} \left(\frac{\beta_k'}{\beta_k}\right)^2 \left(\frac{H_I}{n}\right)^2 + O\left(\frac{H_I}{n}\right) \dots\dots\dots(45)$$

上式を式(41)に代入し次式をうる。

$$\xi_k = \left(\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} \left(\frac{\beta_k'}{\beta_k}\right)^2 \left(\frac{H_I}{n}\right)^2 + O\left(\frac{H_I}{n}\right) \dots\dots\dots(46)$$

式(46)を式(40)に代入することにより  $\lambda_I(Z_I)$  は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} \lambda_I(Z_I) = & \lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{j-1} \left\{ \left(\frac{\beta_1}{\beta_j}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} \left(\frac{\beta_1'}{\beta_1}\right)^2 \left(\frac{H_I}{n}\right)^2 \left(\frac{\beta_2}{\beta_j}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} \left(\frac{\beta_2'}{\beta_2}\right)^2 \left(\frac{H_I}{n}\right)^2 \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\beta_3}{\beta_j}\right)^{\frac{1}{2}} + \dots\dots \right. \\ & + \frac{1}{8} \left(\frac{\beta_k'}{\beta_k}\right)^2 \left(\frac{H_I}{n}\right)^2 \left(\frac{\beta_1}{\beta_k}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\beta_{k+1}}{\beta_j}\right)^{\frac{1}{2}} + \dots\dots + \frac{1}{8} \left(\frac{\beta_{j-1}'}{\beta_{j-1}}\right)^2 \left(\frac{H_I}{n}\right)^2 \left(\frac{\beta_1}{\beta_{j-1}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ & \left. + O\left(\frac{H_I}{n}\right) \right\} \dots\dots\dots(47) \end{aligned}$$

式(47)より次式をうる。

$$|\lambda_I(Z_I) - \left(\frac{\beta_1}{\beta_j}\right)^{\frac{1}{2}}| \leq |A| \frac{H_I^2}{n} \frac{j-1}{n} + |O\left(\frac{H_I}{n}\right)| \dots\dots\dots(48)$$

ただし、 $|A|$  は次式で与えられる。

$$|A| = \max_{1 \leq k \leq j-1} \left\{ \frac{1}{8} \left(\frac{\beta_k'}{\beta_k}\right)^2 \left(\frac{\beta_1}{\beta_k}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\beta_{k+1}}{\beta_j}\right)^{\frac{1}{2}} \right\} \dots\dots\dots(49)$$

式(48)で  $n \rightarrow \infty$  とすれば

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |A| \frac{H_I^2}{n} \frac{j-1}{n} \rightarrow 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} |O\left(\frac{H_I}{n}\right)| \rightarrow 0$$



であるから、 $\lambda_I(Z_I)$  は  $(\beta_1/\beta_j)^{\frac{1}{2}}$  に収束する。一方、式(39)より  $\beta_1 = \beta_I(0, \omega)$ ,  $\beta_j = \beta_I(Z_I, \omega)$  であるから  $\lambda_I(Z_I)$  は次式のように表わされる。

$$\lambda_I(Z_I) = \{\beta_I(0, \omega) / \beta_I(Z_I, \omega)\}^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(50)$$

また、 $\kappa_I(Z_I) dZ_I$  は  $\eta_j$  から求まり、次式で表わされる。

$$\kappa_I(Z_I) dZ_I = \lim_{j \rightarrow \infty < n \rightarrow \infty} \eta_{j-1} \dots\dots\dots(51)$$

ここに、 $\eta_{j-1}$  は  $\beta_j$  と次式の関係をもっている。

$$\eta_{j-1} = \frac{\beta_j - \beta_{j-1}}{2\beta_j} \dots\dots\dots(52)$$

一方、 $\beta_I(Z_I)$  の微分可能性より

$$\beta_{j-1} = \beta_j - \beta_j' dZ_I + O(dZ_I) \dots\dots\dots(53)$$

と表わされるから、式(51), (52), (53) より次式をうる。

$$\kappa_I(Z_I) dZ_I = \lim_{j \rightarrow \infty < n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\beta_j'}{2\beta_j} dZ_I + O(dZ_I) \right\} \dots\dots\dots(54)$$

したがって、 $\kappa_I(Z_I)$  として次式をうる。

$$\kappa_I(Z_I) = \frac{\beta_I'(Z_I, \omega)}{2\beta_I(Z_I, \omega)} \dots\dots\dots(55)$$

### 5. フーリエ変換を用いた震動解析

以上、表層地盤内を伝播する非線形調和波の解析的な表現形式を求めてきたが、これを、地震波のような無数の周波数成分を含む波動が伝播する場合に、適用するためには、式(20), (21)などに現われるひずみの大きさを表わす指標  $\gamma_0^I(Z_I)$  の推定法を明確にしなければならない。ここでは、地盤内に発生するひずみの r. m. s. 値  $\sigma_r^I(Z_I)$  の定数倍を用いることにする。すなわち、

$$\gamma_0^I(Z_I) = C_0 \sigma_r^I(Z_I) \dots\dots\dots(56)$$

ここに、 $C_0$  は任意の定数である。

なお、地盤内に発生するひずみのフーリエ変換形は式(27)で与えられるから、 $\sigma_r^I(Z_I)$  は次式のように表わされる。

$$\sigma_r^I(Z_I) = \sqrt{\frac{1}{T_I} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_I(Z_I, \omega)|^2 d\omega} \dots\dots\dots(57)$$

ここに、 $T_I$  は  $I$  層の深さ  $Z_I$  におけるひずみの継続時間である。

地震動を解析する場合には、式(56)で与えられる  $\gamma_0^I(Z_I)$  を用いて式(22)~(25)から求まる  $[T^I(Z_I, \omega)]$  を計算するわけであるが、2節の最後のところでも述べたように、 $\gamma_0^I(Z_I)$  がある一定の精度内に入るまで、繰り返し収束計算を行なわなければならない。この収束計算は周波領域で行なうから、式(36)を用いる場合には入射波の、式(38)を用いる場合には地表面で観測された地震動の、フーリエ変換形が必要になる。ここでは、継続時間  $T$  の波形を等時間間隔  $\Delta t$  で離散化した  $N$  個のデータ  $f(k)$  ( $k=0, 1, \dots, N-1$ ) の有限フーリエ変換  $F(j)$  ( $j=0, 1, \dots, N-1$ ) を FFT<sup>15)</sup> によって求め、これを計算に用いることにする。この場合  $F(j)$  は次式によって与えられる。

$$F(j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W^{-jk} \dots\dots\dots(58)$$

ここに、 $j, k$  は各々周波数ならびに時間を表わす指標であり、 $W = \exp(2\pi i / N)$  である。

なお、式(26), (27), (57)などは次式のように書き改められる。

$$U_I(Z_I, j) = \{T_{11}^I(Z_I, j) + T_{21}^I(Z_I, j)\}A_I(j) + \{T_{12}^I(Z_I, j) + T_{22}^I(Z_I, j)\}B_I(j) \dots\dots\dots(59)$$

$$\Gamma_I(Z_I, j) = ip_I(Z_I, j)\{T_{11}^I(Z_I, j) - T_{21}^I(Z_I, j)\}A_I(j) - ip_I(Z_I, j)\{T_{22}^I(Z_I, j) - T_{12}^I(Z_I, j)\}B_I(j) \dots\dots\dots(60)$$

$$\sigma_I^I(Z_I) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |\Gamma_I(Z_I, j)|^2} \dots\dots\dots(61)$$

式(59), (60)より変位ならびにひずみの逆有限フーリエ変換は次式で与えられる。

$$u_I(Z_I, k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} U_I(Z_I, j)W^{jk} \dots\dots\dots(62)$$

$$\gamma_I(Z_I, k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \Gamma_I(Z_I, j)W^{jk} \dots\dots\dots(63)$$

ここに、 $u_I, \gamma_I$  は時間領域における変位とひずみを表わす変数である。

いま、地表面での地震動が既知の場合を考えると、式(38)に現われる  $U_s(\omega)$  のかわりに、式(58)で定義される  $F(j)$  を用いればよいから  $A_I(j), B_I(j)$  が次式のように与えられる。

$$A_I(j) = B_I(j) = \frac{1}{2}F(j) \dots\dots\dots(64)$$

$A_I(j), B_I(j)$  が与えられれば、 $A_I(j), B_I(j)$  は式(33)を用いることによって求まるから、周波数領域における実際の収束計算は、式(60)と式(61)を用いて行なわれることになる。

### 6. 応力-ひずみ関係

Handin & Drnevich<sup>13)</sup> は砂の中空円筒供試体のねじり単純繰返しせん断試験による多くのデータから、せん断応力とせん断ひずみの関係は双曲線によって近似できるとし、せん断弾性係数  $\mu$  および減衰定数  $\zeta$  をひずみ振幅  $\gamma_0$  の関数として次式のように与えている。

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{1}{1 + \alpha\gamma_0} \dots\dots\dots(65)$$

$$\frac{\zeta}{\zeta_m} = \frac{\alpha\gamma_0}{1 + \alpha\gamma_0} \dots\dots\dots(66)$$

ここに、 $\mu_1$  は初期せん断弾性係数、 $\zeta_m$  は  $\gamma_0$  が非常に大きくなったときの減衰定数、 $\alpha$  は砂質土の動的非線形性の度合を表わすパラメータである。なお砂に対する  $\zeta$  のこれまでの研究結果によれば、 $\zeta$  は周波数に依存しない値であることがわかっている<sup>16)</sup>。 $\alpha$  が大きくなるにつれて非線形性が大きくなる。いま、土のせん断強度を  $\tau_f$  とすれば、これは  $\tau = \mu \gamma_0$  で  $\gamma_0 \rightarrow \infty$  としたときの  $\tau$  の値に相当するから、式(65)を参照して、 $\alpha$  の値は次式で定義できる。

$$\alpha = \frac{\mu_1}{\tau_f} \dots\dots\dots(67)$$

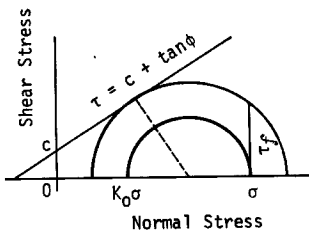


Fig. 2 Shear strength

一方、地震時の  $\tau_f$  はモルクーロンの破壊基準が動的な荷重を受けた場合にも、静的なものと同一であるとすれば、Fig. 2で参照して次式のように定めることができる。

$$\tau_f = \sqrt{\left(c' \cos \phi' + \frac{1+K_0}{2} \sigma' \sin \phi'\right)^2 - \left(\frac{1-K_0}{2} \sigma'\right)^2} \dots\dots\dots(68)$$

ここに、 $c'$  と  $\phi'$  は有効応力で表現した場合の静的強度定数、 $K_0$  は静止土圧係数、 $\sigma'$  は有効上載圧を表わしている。

また、表層地盤の初期弾性係数は、微小ひずみのもとのせん断波

速度  $V_s$  から、 $\mu_1 = \rho V_s^2$  で求める。 $V_s$  の応力依存性は次式で与えられる<sup>17)</sup>。

$$V_s = D(\sigma' + \sigma'_0)^{1/4} \dots \dots \dots (69)$$

ここに、 $D$  は地盤の特性によって決まる定数、 $\sigma'_0$  は地表面での有効上載圧である。

なお、減衰定数  $\zeta$  とせん断粘性係数  $\nu$  との関係は次式によって与えられる<sup>18)</sup>。

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{\omega \nu}{\mu} \dots \dots \dots (70)$$

## 7. 数値計算例

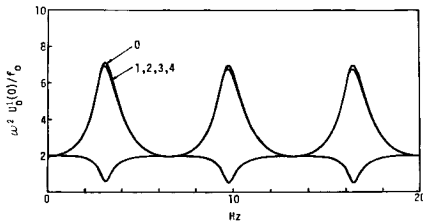
### 7.1 数値解の精度についての検討

以上に述べてきた解析方法を用いて具体的な数値計算を行なう。地盤層は表層と基盤層の2層から構成されるものとした。なお、問題を簡単にするため、基盤層は均質な線形弾性体からなるものと仮定した。計算に用いた地盤特性を **Table 1** に示した。式(15)~(18)に現われる  $\eta_j$  は薄層の層厚が無小になると0へ近づく性質のものであるから、 $\eta_j$  に関する展開項はあまり高次まで取らなくても良いことが推察される。

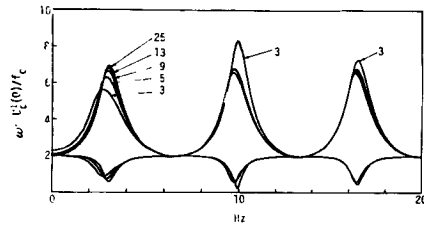
**Table 1. Site Characteristics**

|     |  |
|-----|--|
| 表層  | $V_s = 160 \text{ m/sec}$<br>$\rho g = 2.24 \text{ t/m}^3$<br>$H = 12 \text{ m}$ |
| 基盤層 | $V_s = 720 \text{ m/sec}$<br>$\rho g = 2.30 \text{ t/m}^3$                       |

$\eta_j$  に関する展開項はあまり高次まで取らなくても良いことが推察される。**Fig. 3** は基盤層から単一の調和波動が入射する場合を対象として、 $\eta_j$  の展開次数を何次まで取れば、解の精度が満たされるかについて吟味したものである。数値計算は式(22)~(25)に基づいて行なった。 $\alpha = 500, \zeta_m = 0.33$  とし、基盤層上端での上昇波の加速度振幅  $f_0$  を  $20 \text{ cm/sec}^2$  とした場合の地表面における加速度応答倍率  $|2A_1/f_0|$  を  $\eta_j$  の展開次数をパラメータとして示してある。これから展開次数は2次程度まで取れば十分な精度の数値解を得られることが明らかになる。



**Fig. 3 Order of  $\eta_j$  influenced upon the amplitude characteristics**



**Fig. 4 Number of integral points for an accuracy of numerical solutions**

なお、式(22)~(25)に現われる積分は数値積分によっているから、積分点の数も問題になる。**Fig. 4** は積分点の数が数値解の精度におよぼす影響について示したものである。計算条件は **Fig. 3** の場合と同じものを用いている。これから、積分点の数が25程度になれば十分な精度の数値解を与えることが明らかになる。したがって、以下の数値計算では  $\eta_j$  の展開は2次までとし、積分点は25としている。

### 7.2 非線形度パラメーターが周波数伝達特性におよぼす影響

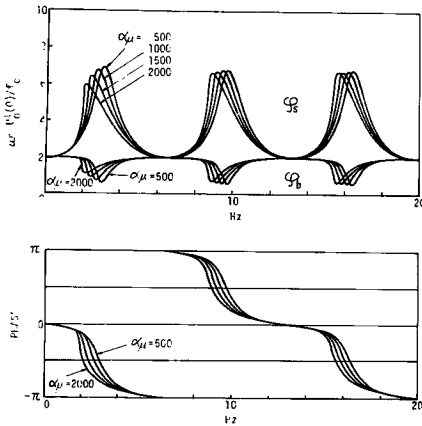
ここでは、基盤層内を単一の調和波が上昇し、基盤層上端での上昇波の加速度振幅が  $f_0$  で与えられる場合の地表面の加速度応答倍率、その位相特性ならびに基盤層と表層との境界面での加速度応答倍率におよぼす、非線形度パラメータ  $\alpha$  の影響について考察を加える。式(36)を適当に変形することにより次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \text{地表面での加速度応答倍率: } \varphi_s &= |2A_1/f_0| \\ \text{地表面の応答の入力に対する位相特性: } \tan^{-1}\{I_m(2A_1/f_0)/\text{Re}(2A_1/f_0)\} \\ \text{表層と基盤層との境界面での加速度応答倍率: } \varphi_b &= |(g_0 + f_0)/f_0| \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (71)$$

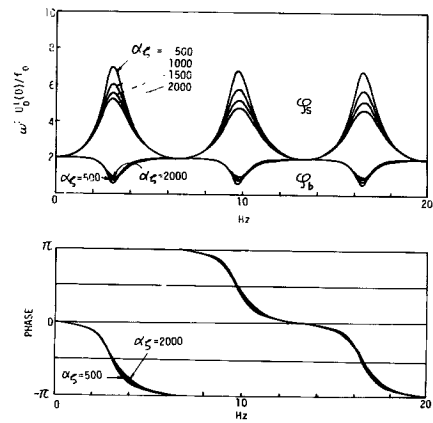
なお、地盤特性は **Table 1** のものと同じものを用いる。

いま、式(65)と式(66)に現われる  $\alpha$  の効果が  $\mu$  と  $\zeta$  で異っているものと考え、前者を  $\alpha_\mu$  と後者を  $\alpha_\zeta$  とおき換えることにする。この場合、 $\alpha_\mu$  は弾性係数に対する、 $\alpha_\zeta$  は減衰定数に対する非線形度パラメータとなる。以下で、 $\alpha_\mu$  と  $\alpha_\zeta$  を変化させた場合、式(71)の特性がどのように変わるかについて調べる。

**Fig. 5** は  $\alpha_\zeta=500$  とし、 $\alpha_\mu$  を 500, 1000, 1500, 2000 と変化させた場合の地表層の振動特性を示したものである。(a) の  $\varphi_s$  は地表面での加速度応答倍率を、 $\varphi_b$  は表層と基盤層との境界面での加速応答倍率を、(b) は地表面の応答の入力に対する位相特性を表わしている。(a) より、 $\alpha_\mu$  が大きくなるにしたがい、共振点は低周波側へ移行することが明らかになる。また、1次モードが卓越する周波数領域では、 $\alpha_\mu$  が増加するにつれて応答倍率が減少する。減衰の非線形性を表わすパラメータ  $\alpha_\zeta$  が一定値を保つにもかかわらず、 $\alpha_\mu$  が大きくなると応答倍率が減少するのは、地盤内に発生するひずみの分布が減衰特性に大きな影響を与えているか



**Fig. 5** The amplitude and phase characteristics



**Fig. 6** The amplitude and phase characteristics

らである。(b) より、 $\alpha_\mu$  が大きくなるにしたがい位相がおくれていくことも明らかとなる。**Fig. 6** は非線形減衰を表わすパラメータ  $\alpha_\zeta$  が表層の応答特性におよぼす影響を示したものである。 $\alpha_\mu=500$  として、 $\alpha_\zeta$  を 500, 1000, 1500, 2000 と変化させている。 $\alpha_\zeta$  が大きくなるにつれて応答倍率は減少するが共振の変動はほとんど起らないことがわかる。このため位相特性も大きな変化をしない。

### 7.3 表層地盤の不均質性が周波数伝達特性におよぼす影響

これまで、表層地盤内の初期弾性係数や非線形度パラメータなどが、深さに関係しない、一定値として解析を行ってきたが、式(67)、(68)、(69)などから明らかなように、これらの値は深さとともに変化するはずである。式(67)、(68)、(69)で  $c'=0.05\text{kg/cm}^2$ ,  $\phi'=40^\circ$ ,  $\sigma_0'=0.112\text{kg/cm}^2$  とした場合の  $\alpha$  ならびに  $V_s$  の深さ方向の変化を示したものが **Fig. 7** である。 $V_s$  の深さ方向の平均値は  $160\text{m/sec}$  になるように式(69)の係数  $D$  を決めた。また  $\alpha$  値の深さ方向の平均値は  $1490$  となった。

**Fig. 7** で与えられる分布形を用いて数値計算を行なうが比較のために地盤が均質と考えた場合のものも同時に示す。**Table 2** に数値計算を行なった入力強度と地盤条件を示した。なお、以下の図中に記入した、 $C-L$ ,  $C-20$ ,  $V-L$ ,  $V-20$ ,  $V-50$  の記号の意味も同時に示してある。**Fig. 8** は単一の調和波動が入射したときの表層の応答特性を示したものである。実線は地盤を不均質と考えた場合のものであり、破線は均質と考えた場合のものである。(a) の  $\varphi_s$  の形状より、不均質性を考慮したときの地表面の応答は均質な場合のものより常に大きくなること、いずれの場合も入力の強度が増加すると応答倍率は減少し、共振点も低周波側へ移行す

Table 2. Classifications of numerical analysis

| 記号   | せん断波速度 $V_s$<br>m/sec | $\alpha$ 値           | 解析法 | 入力強度 $f_0$<br>cm/sec <sup>2</sup> |
|------|-----------------------|----------------------|-----|-----------------------------------|
| C-L  | 160<br>(深さ方向に一定)      | —                    | 線形  | —                                 |
| C-20 |                       | 1490<br>(深さ方向に一定)    | 非線形 | 20                                |
| V-L  | 深さ方向に変化<br>Fig. 7 参照  | —                    | 線形  | —                                 |
| V-20 |                       | 深さ方向に変化<br>Fig. 7 参照 | 非線形 | 20                                |
| V-50 |                       | 深さ方向に変化<br>Fig. 7 参照 | 非線形 | 50                                |

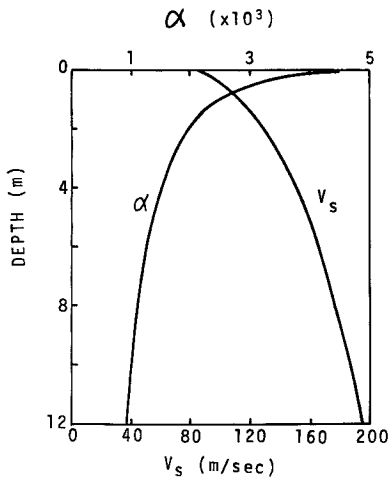


Fig. 7. Distributions of  $\alpha$  value and shear wave velocity

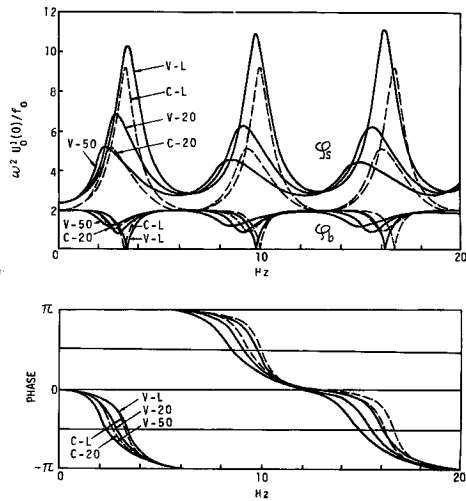


Fig. 8 The amplitude and phase characteristics

ることがわかる。なお、1次モードが卓越する領域での V-50 曲線のピークと C-20 曲線のピークにおける加速度応答倍率の値はほぼ一致している。入力の大きさが異なるにもかかわらず、このような一致が得られるのは表層の加速度応答特性におよぼす不均質性の影響がかなり大きいことを示している。(b)は地表面の加速度応答の位相特性を示したものである。

Fig. 9 は表層地盤内の震動分布を示したものである。これらは、地表面の加速度応答倍率が最初に極大値を示すときの周波数にほぼ等しい点のものを示してある。(a)は加速度応答倍率を、(b)はひずみ振幅の入力に対する倍率を、(c)は応力振幅の入力に対する倍率を示してある。(a)より、入力が大きくなるにつれて、加速度応答倍率は深いところでは大きくなり、浅いところでは小さくなる傾向をもつこと、不均質地盤では地表面近くでの増幅率が大きいことなどが明らかになる。(b)より、不均質性を考慮した場合のひずみの分布形は均質な場合のものとはかなり異っ

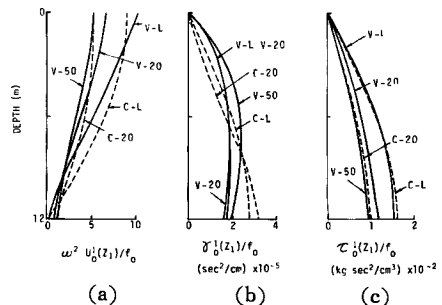


Fig. 9 Distributions of acceleration, shear strain and shear stress

た形状になる。均質地盤内でのひずみは、表層と基盤層の境界面で最大値を取り、入力が大きくなるにつれて、深いところでは大きくなり浅いところでは逆に小さくなる傾向があるが、不均質地盤内ではこのような傾向は見られない。(c)より、せん断応力振幅の分布形は、地盤の物理的な特性がかなり変化しても影響を受けないことが明らかになる。

7.4 表層地盤内の地震時応力

以上、表層地盤内を単一の調和波動が伝播するときの表層地盤の動特性について調べてきたが、ここでは、地表面で観測された地震動を用いて地盤内に発生するひずみや応力の特性を明らかにする。用いた強震記録は Taft(1952)の波形で、0.02秒間隔で離散化されたデータ<sup>19)</sup>の主要部分20秒間を用いた。地盤特性の測定結果<sup>20)</sup>によれば、表層ならびに基盤層の平均的な物性は Table 1 に示したものと同じである。数値計算は5節で述べた方法によって行なう。この場合、式(56)に現われる  $C_0$  の値を  $\sqrt{2}$  とした場合と、5 とした場合の両者について、地盤内に発生するひずみと応力を求める。 $C_0$  としてこのような値を用いるのは、地盤内に発生する最大ひずみは、調和波動が伝播する場合にはひずみの r.m.s の  $\sqrt{2}$  倍になり、Taft の地震波形を用いた場合には、ひずみの r.m.s の約5倍程度になっているからである。以下で、このようにして求めた応力やひずみが、地盤内の非線形度パラメータや初期せん断弾性係数の推定法によって、どの程度影響を受けるかについて考察する。計算の対象とする表層地盤は Table 2 に示したように、均質と仮定した場合と不均質と考えた場合の2種類である。

なお、以下の図中で V-L や C-5 などの記号が用いられるが、V は不均質地盤における計算結果であり、実線によって示してある。また、C は均質地盤における計算結果を表わしおり破線で示してある。なお、L は線形解を表わし、 $\sqrt{2}$  と 5 は各々、式(56)の  $C_0$  の値を  $\sqrt{2}$  ならびに 5 にとったことを意味している。

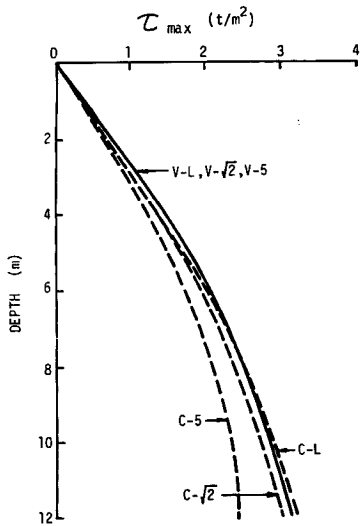


Fig. 10 Distributions of maximum shear stress

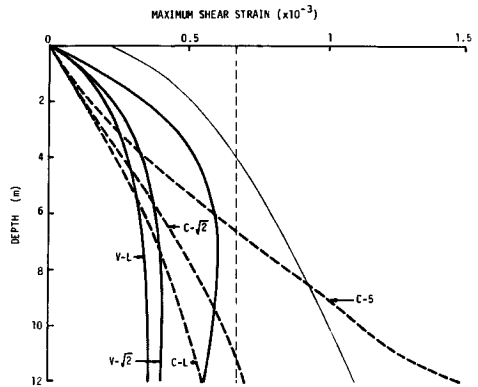


Fig. 11 Distributions of maximum shear strain

Fig. 10 は地盤内に発生する最大せん断応力  $\tau_{max}$  の深さ方向分布を示したものである。地盤を不均質と考えた場合の  $\tau_{max}$  の分布形は、 $C_0$  の値にほとんど関係せずほぼ1本の曲線で表わされることがわかる。なお、地盤を均質と考えた場合は  $C_0$  の値を大きくすると、 $\tau_{max}$  の値は小さくなるが、その減少量はあまり大きくない、 $C_0$  が 5 の場合でも線形解からの減少量は13%弱である。また、地盤が不均質であっても均質であっても、

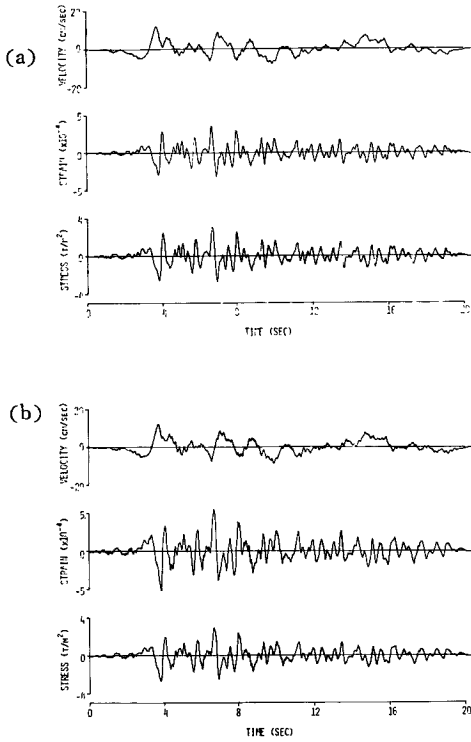


Fig. 12 Time history of strain and stress in a heterogeneous layer (a) linear case, (b) non-linear case

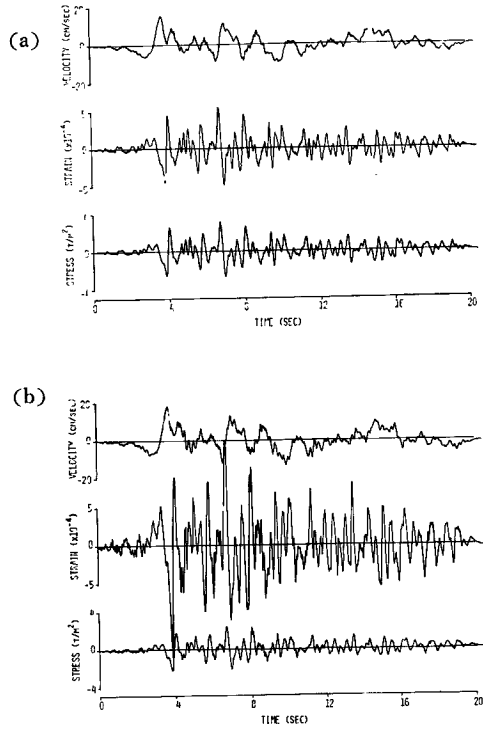


Fig. 13 Time history of strain and stress in a homogeneous layer (a) linear case, (b) non-linear case

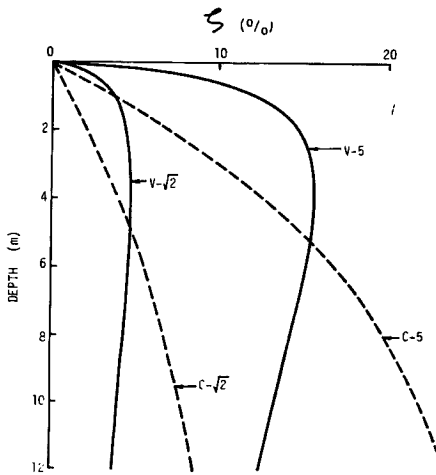


Fig. 14 Distributions of damping coefficient

せん断応力の分布形はあまり変化しないことも明らかになる。**Fig. 11** は地盤内に発生する最大せん断ひずみ  $\gamma_{max}$  の深さ方向分布を示したものである。図中の太実線ならびに太破線が計算結果である。細実線は地盤を不均質と考えた場合の弾性限ひずみであり、細破線は地盤を均質と考えた場合のものであり、いずれも  $\gamma_y = 1/\alpha$  で与えられる。図から明らかのように、せん断ひずみの分布形は地盤の特性によってかなり異った形状を示す。また  $C_0$  の値によっても地盤に発生するひずみの大きさはかなり変化する。

結局、地盤の特性がかなり変化しても、応力の分布形はあまり大きな変化を受けないが、ひずみの分布形はかなり異ったものになることがわかる。**Fig. 12, 13** に  $C_0$  を 5 とした場合の、深さ 12m での速度、せん断ひずみならびに応力の時間応答を示した。**Fig. 12** は地盤を不均質と考えた場合のものであり、**Fig. 13** は

地盤を均質に考えた場合のものである。非線形解析におけるせん断ひずみの方が線形解のものより常に大きくなり、せん断応力はその逆であることが明らかである。また非線形解析による応答では、線形解析による結果に比べ、高周波成分の卓越することが判明する。なお、Fig. 14に地盤内の減衰定数の分布形を示した。図から明らかのように均質地盤内では深さ方向に一定の減衰定数を仮定することは困難であるが、不均質地盤では、深さ方向に一定の減衰定数を仮定して解析を行なってもよいものと考えられる。

## 8. む す び

本研究では、土の動的非線形性が表層地盤の震動特性にどのような影響を与えるかを調べるために、水平な成層地盤を対象とし、基盤層からSH波が鉛直上方へ入射したときの表層地盤の動特性について考察を加えたものである。用いた応力～ひずみ関係は弾性係数ならびに減衰定数が地盤内に発生するひずみの大きさに関係するようなものである。こうした物性をもつ地盤内の非線形調和波動の解析的表現形式を求めた後、若干の数値計算を行なって以下のような結果を得た。

- (1) 数値計算を行なうときの積分点の数は1つの層内で25点ほどあれば十分な精度の解が求まる。
- (2) 減衰定数の非線形度パラメータを増加させた場合、地表面の加速度応答倍率から求まる共振点はあまり変動せず、応答倍率が減少する。
- (3) 弾性係数の非線形度パラメータを増加させた場合、地表面の加速度応答倍率から求まる共振点は低周波側へ移行する。また、1次モードの卓越する周波数領域以外では応答倍率の減少は顕著でない。
- (4) 入力強度が増加すると地表面の加速度応答倍率は減少し共振点は低周波側へ移行する。
- (5) 不均質性を考慮した場合の加速度応答倍率ならびにせん断ひずみ振幅の入力に対する倍率の深さ方向分布は、均質な場合のものに比べて、かなり異なったものになるが、せん断応力振幅の倍率の分布形は両者の間であまり顕著な差を見出すことはできない。
- (6) 地表面で観測された実際の地震波形を基にして、地盤内のせん断応力やせん断ひずみの最大値の分布形状について調べた。最大せん断ひずみの分布は土の動的な応力～ひずみ関係の設定結果に大きく左右されるが、最大せん断応力の分布は地盤を構成している土の物性にはあまり影響されない。
- (7) 地盤内に発生する速度やひずみの時間履歴を求めると、非線形解析では、線形解析による結果に比べ、高周波成分が卓越する。

以上が本研究における結果であるが、表層地盤の震動特性は、地盤を構成する土の動的応力～ひずみ関係をどのように設定するかによって大きく変化する。特に減衰特性の評価について詳しい考察がなされなければならない。また、本研究は土の動的応力～ひずみ関係を等価線形化することにより、地盤内のせん断波動解を求めたものであるから、さらに進んで履歴特性を有する物体中の波動問題の解析を行なわなければならないが、現段階では解決されるべき問題点が多く残されている。

最後に本研究を行なうに当たり、非線形度パラメータの推定に関し有益な助言をいただいた京都大学柴田 徹教授、また、本研究の内容について種々ご討議いただいた京都大学土岐憲三助教授に感謝します。

## 参 考 文 献

- 1) Seed, H. B. and I. M. Idriss: Influence of Soil Conditions on Ground Motions during Earthquakes, Proc. ASCE, Vol. 95, SM1, 1969, pp. 99-137.
- 2) 石原研而: 土の動的強度, 土と基礎, Vol. 20, No. 7, 1972, pp. 73-79.
- 3) Kovacs, W. D. and H. B. Seed: Dynamic Moduli and Damping Ratio for a Soft Clay, Proc. ASCE, Vol. 97, SM1, 1971, pp. 59-75.
- 4) Hardin, B. O. and V. P. Drnerich: Shear Modulus and Damping in Soils: Measurement and Parameter Effects, Proc. ASCE, Vol. 98, SM6, 1972, pp. 603-624.
- 5) 柴田 徹, D. S. Soelarno: 繰返し載荷を受ける土の挙動, 第9回土質工学研究発表講演集, 1974, pp.



- 351-354.
- 6) 柴田 徹, D. S. Soelarno : 砂の動的応力・ひずみ特性, 土木学会第29回年次学術講演概要集第3部, 1974, pp. 148-149.
  - 7) 栗林栄一, 岩崎敏男, 龍岡文夫, 堀内俊一 : 土の動的変形特性—共振法土質試験機による測定, 土木研究所資料, 第912号, 1974.
  - 8) Truesdell, C. and R. Toupin : Principles of Classical Mechanics and Field Theory, Handbuch der Physik, III / 1, Springer-Verlag, 1960, pp. 226-790.
  - 9) Truesdell, C. and W. Noll : The Non-Linear Field Theory of Mechanics, Handbuch der Physik, III / 3, Springer-Verlag, 1965.
  - 10) Bland, D. R. : Nonlinear Dynamic Elasticity, Blaisdell, 1969.
  - 11) Chen, P. J. : Growth and Decay of Waves in Solids, Handbuch der Physik, Springer-Verlag, VIa / 3, 1973, pp. 303-401.
  - 12) Lax, P. : Hyperbolic System of Conservation Laws II, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 10, 1957, pp. 537-566.
  - 13) Hardin, B. O. and V. P. Drnevich : Shear Modulus and Damping in Soils : Design Equation and Curves, Proc. ASCE, Vol. 98, SM7, 1972, pp. 667-692.
  - 14) 堀 正幸 : 不均質弾性地盤の震動特性に関する近似解法について, 第8回土質工学研究発表会講演集, 1973, pp. 629-632.
  - 15) Brigham, E. O. : The Fast Fourier Transform, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N. J., 1974.
  - 16) Hardin, B. O. : The Nature of Damping in Sands, Proc. ASCE, Vol. 90, SM1, 1965, pp. 63-67.
  - 17) 柴田 徹, 佐藤忠信, 酒井和広 : 砂質土中を伝播する S 波速度の応力依存性, 第9回土質工学研究発表会講演集, 1974, pp. 407-410.
  - 18) 後藤廉平, 平井西夫, 花井哲夫 : レオロジーとその応用, 共立出版, 1962.
  - 19) Hudson, D. E. et al. : Strong Motion Earthquake Accelerograms, Digitized and Plotted Data, Vol. II—Corrected Accelerograms, Part A, Report of Earthquake Eng. Res. Lab., Calif. Inst. of Technology, 1971.
  - 20) Duke, C. M. and J. Leeds : Site Characteristics of Southern California Strong-Motion Earthquake Stations, Report of Dep. Eng., Calif. Univ. Los Angels, 1962.