

# 土の応力-ヒズミ関係と降伏条件

松 岡 元

## STRESS-STRAIN RELATIONSHIPS AND YIELD CONDITION OF SOIL BASED ON SPATIAL MOBILIZED PLANE

By Hajime MATSUOKA

### Synopsis

A new stress plane in three-dimensional stress space has been proposed on the idea that soil is a material governed by the frictional law, i. e., the shear-normal stress ratio. The new stress plane is named *spatial mobilized plane* (SMP). It has been verified by data of various kinds of shear tests including true triaxial tests that stress-strain behaviors of soil under three principal stresses can be uniquely expressed on the SMP. Furthermore, a new yield condition of soil  $J_1 \cdot J_2 / J_3 = \text{const.}$  ( $J_1, J_2, J_3$ : the first, second and third effective stress invariants) has been also proposed on condition that soil yields when the shear-normal stress ratio on the SMP reaches a certain value. This proposed yield condition has the interesting relation to the yield conditions of Tresca, von Mises and Mohr-Coulomb.

### 1. 概 説

土の変形が、土粒子が最も滑動すると考えられるモービライズド面上のせん断・垂直応力比によって支配されるという考え方を、せん断時の土粒子の挙動の微視的な解析にもとづいてすでに述べている<sup>1),2)</sup>。これは、土が広い意味での摩擦則に支配される材料であるという考えにつながるものである。ここでは、このような考え方より新たに提案している「空間モービライズド面 (Spatial Mobilized Plane; 略称 SMP)<sup>3)</sup>」なる応力面にもとづけば、相異なる3主応力下の応力-ヒズミ特性から降伏条件までを統一的に規定できることを主張する。特に、この SMP に着目して新たに提案した降伏条件は、いわゆる  $\pi$ -平面表示すれば Mohr-Coulomb の条件をあらゆる六角形に外接する曲線となって実測値をよく説明できるものであること、および Tresca, von Mises, Mohr-Coulomb の諸条件と興味ある対応関係にあることを指摘する。

### 2. 空間モービライズド面 (SMP) の定義

一般に相異なる3有効主応力  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  が作用する場合には、Mohr の応力円は Fig. 1 のように3個描ける。このうち最大の応力円に原点からの直線が接する点は、せん断・垂直応力比 ( $\tau/\sigma_N$ ) が最大の応力面 (Fig. 2 の面 AC 参照) となり、従来よりモービライズド面と呼ばれ、土粒子が最も滑動する面であると考えられている。これは、土粒子の挙動が摩擦則、すなわちせん断・垂直応力比によって支配されるという考え方に基づくものである。しかし3主応力をうけている個々の土粒子が滑動する方向は必ずしも中間主応力軸に平行でなく、中間主応力  $\sigma_2$  の影響も受けるものと思われる。そこで、Fig. 1 のそれぞれ3個の応力円に原点からの直線が接する点に着目する。これら3点は、各2主応力軸間においてせん断・垂直応力比が最大の応力面に対応する。この3個の応力面を3主応力  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  を3軸として表示すると、Fig. 2 の AC, AB, BC となるが、この3個のモービライズド面を総称して複合モービライズド面<sup>3)</sup>と呼んだ。ここでは、さらにこれら3個のモービライズド面を3辺とする応力面 ABC に着目し、これを空間モービライズド面と定義する。この SMP が3主応力軸を切る点の応力値は、

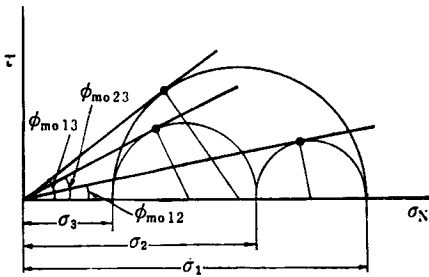


Fig. 1 Three mobilized planes under three different principal stresses

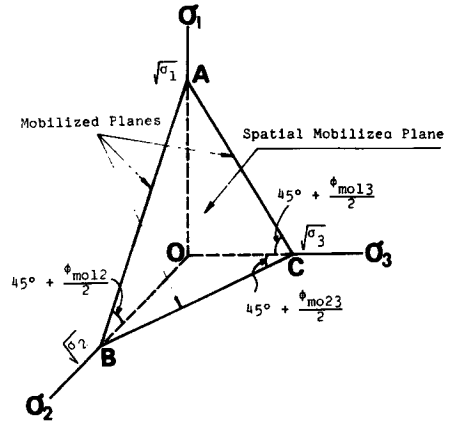


Fig. 2 Spatial mobilized plane and three mobilized planes in three principal stress space

$$\tan\left(45^\circ + \frac{\phi_{moij}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \sin \phi_{moij}}{1 - \sin \phi_{moij}}} = \sqrt{\frac{\sigma_i}{\sigma_j}} \quad (i, j = 1, 2, 3, i < j) \dots\dots\dots (1)$$

より、Fig. 2 に示すように各主応力値のルートの割合になる。したがって、等方応力状態では正八面体面に一致し、応力の変化とともに変化する性質をもっている。またその物理的意味は、土粒子が3次元応力空間において平均的にみて最も滑動する応力面と考えられる。なお SMP の法線方向余弦  $(a_1, a_2, a_3)$  は次のように表わされる。

$$a_1 = \sqrt{\frac{J_3}{\sigma_1 J_2}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{J_3}{\sigma_2 J_2}}, \quad a_3 = \sqrt{\frac{J_3}{\sigma_3 J_2}} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $J_1, J_2, J_3$  は有効応力の1次、2次、3次の不変量であって次式で表わされる。

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad J_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \quad J_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots\dots\dots (3)$$

なお、本文では応力は全て有効応力を表わすものとする。

### 3. SMP 上のセン断・垂直応力比—垂直・セン断ヒズミ増分比関係

(2) 式を考慮すれば、SMP 上の垂直応力  $\sigma_N$  と合セン断応力  $\tau$  は次のように表わされる。

$$\sigma_N = \sigma_1 \cdot a_1^2 + \sigma_2 \cdot a_2^2 + \sigma_3 \cdot a_3^2 = \frac{3J_3}{J_2} \dots\dots\dots (4)$$

$$\tau = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \cdot a_1^2 \cdot a_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \cdot a_2^2 \cdot a_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \cdot a_3^2 \cdot a_1^2} = \sqrt{\frac{J_1 J_2 J_3 - 9J_3^2}{J_2}} \dots\dots\dots (5)$$

したがって、SMP 上のセン断・垂直応力比  $\tau/\sigma_N$  は、

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \sqrt{\frac{J_1 J_2 - 9J_3}{9J_3}} \dots\dots\dots (6)$$

となる。一方、主応力と主ヒズミ増分方向が一致すると仮定すると、SMP 上の垂直ヒズミ増分  $d\epsilon_N$  および合セン断ヒズミ増分  $d\gamma$  は次式で与えられる。

$$d\epsilon_N = d\epsilon_1 \cdot a_1^2 + d\epsilon_2 \cdot a_2^2 + d\epsilon_3 \cdot a_3^2 = \frac{J_3}{J_2} \cdot \left( \frac{d\epsilon_1}{\sigma_1} + \frac{d\epsilon_2}{\sigma_2} + \frac{d\epsilon_3}{\sigma_3} \right) \dots\dots\dots (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{2} &= \sqrt{(d\epsilon_1 - d\epsilon_2)^2 \cdot a_1^2 \cdot a_2^2 + (d\epsilon_2 - d\epsilon_3)^2 \cdot a_2^2 \cdot a_3^2 + (d\epsilon_3 - d\epsilon_1)^2 \cdot a_3^2 \cdot a_1^2} \\ &= \frac{J_3}{J_2} \cdot \sqrt{\frac{(d\epsilon_1 - d\epsilon_2)^2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(d\epsilon_2 - d\epsilon_3)^2}{\sigma_2 \sigma_3} + \frac{(d\epsilon_3 - d\epsilon_1)^2}{\sigma_3 \sigma_1}} \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

特別な場合として、三軸圧縮および三軸伸張条件では  $\tau/\sigma_N$ ,  $d\epsilon_N$ ,  $d\gamma$  および  $d\epsilon_N/d\gamma$  はそれぞれ次式で与えられる。

三軸圧縮条件 ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ,  $d\epsilon_2 = d\epsilon_3$ ):

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \frac{\sqrt{2}}{3} (\sqrt{\sigma_1/\sigma_3} - \sqrt{\sigma_3/\sigma_1}) \dots\dots\dots (9)$$

$$d\epsilon_N = \frac{2\sigma_1 \cdot d\epsilon_3 + \sigma_3 \cdot d\epsilon_1}{2\sigma_1 + \sigma_3} \dots\dots\dots (10)$$

$$d\gamma = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sigma_1 \sigma_3} \cdot (d\epsilon_1 - d\epsilon_3)}{2\sigma_1 + \sigma_3} \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{d\epsilon_N}{d\gamma} = \frac{\sqrt{\sigma_1/\sigma_3} \cdot d\epsilon_3 + \sqrt{\sigma_3/\sigma_1} \cdot (d\epsilon_1/2)}{\sqrt{2} (d\epsilon_1 - d\epsilon_3)} \dots\dots\dots (12)$$

三軸伸張条件 ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ,  $d\epsilon_1 = d\epsilon_2$ ):

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \frac{\sqrt{2}}{3} (\sqrt{\sigma_1/\sigma_3} - \sqrt{\sigma_3/\sigma_1}) \dots\dots\dots (13)$$

$$d\epsilon_N = \frac{\sigma_1 \cdot d\epsilon_3 + 2\sigma_3 \cdot d\epsilon_1}{\sigma_1 + 2\sigma_3} \dots\dots\dots (14)$$

$$d\gamma = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sigma_1 \sigma_3} \cdot (d\epsilon_1 - d\epsilon_3)}{\sigma_1 + 2\sigma_3} \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{d\epsilon_N}{d\gamma} = \frac{\sqrt{\sigma_1/\sigma_3} \cdot (d\epsilon_3/2) + \sqrt{\sigma_3/\sigma_1} \cdot d\epsilon_1}{\sqrt{2} (d\epsilon_1 - d\epsilon_3)} \dots\dots\dots (16)$$

ここで比較のため正八面体面 (Octahedral Plane) について検討する。正八面体面の法線方向余弦は  $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$  であるから、この面上のせん断・垂直応力比  $(\tau/\sigma_N)_{oct}$  および垂直・せん断ヒズミ増分比  $(d\epsilon_N/d\gamma)_{oct}$  は次式で与えられる。

$$\left(\frac{\tau}{\sigma_N}\right)_{oct} = \frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3} = \frac{\tau_{oct}}{\sigma_m} \dots\dots\dots (17)$$

$$\left(\frac{d\epsilon_N}{d\gamma}\right)_{oct} = \frac{d\epsilon_1 + d\epsilon_2 + d\epsilon_3}{2\sqrt{(d\epsilon_1 - d\epsilon_2)^2 + (d\epsilon_2 - d\epsilon_3)^2 + (d\epsilon_3 - d\epsilon_1)^2}} = \frac{d\epsilon_v}{3 \cdot d\gamma_{oct}} \dots\dots\dots (18)$$

ここに、

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$d\epsilon_v = d\epsilon_1 + d\epsilon_2 + d\epsilon_3$$

$$d\gamma_{oct} = \frac{2}{3} \sqrt{(d\epsilon_1 - d\epsilon_2)^2 + (d\epsilon_2 - d\epsilon_3)^2 + (d\epsilon_3 - d\epsilon_1)^2}$$

三軸圧縮および三軸伸張条件では(17), (18)式はともに次式のようになる。

$$\left(\frac{\tau}{\sigma_N}\right)_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\sigma_m} \dots\dots\dots (19)$$

$$\left(\frac{d\epsilon_N}{d\gamma}\right)_{oct} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{d\epsilon_v}{(d\epsilon_1 - d\epsilon_3)} \dots\dots\dots (20)$$

ここで、砂の三軸圧縮、三軸伸張、平面ヒズミおよび多軸試験データを上式を用いて SMP 上の  $\tau/\sigma_N - d\epsilon_N/d\gamma$  関係で整理した結果を Figs. 3, 4, 5 に示す。Fig. 3 は豊浦砂の三軸圧縮試験 (○印:  $\sigma_m=1.0\text{kg/cm}^2$ , 初期間げき比  $e_i=0.889$ ), 三軸伸張試験 (●印:  $\sigma_m=3.0\text{kg/cm}^2$ ,  $e_i=0.641$ ) および平面ヒズミ試験 (△印:  $\sigma_3=2.0\text{kg/cm}^2$ ,  $e_i=0.663$ , 市原・松沢のデータ<sup>4)</sup>による) の結果を SMP 上の  $\tau/\sigma_N - d\epsilon_N/d\gamma$  関係で整理したものである。また Fig. 4 は豊浦砂の多軸試験および平面ヒズミ試験<sup>5)</sup> の結果を同じ整理で示したものである。この図において、 $\theta$  は正八面体面上の半径方向の応力径路の角度を表わし、 $\theta=0^\circ$  は三軸圧縮、 $\theta=60^\circ$  は三軸伸張、その間の角度は相異なる3主応力が作用していることを意味する。なお、×印は平面ヒズミ試験を表わしている。次に、Fig. 5 は Ko と Scott<sup>6)</sup>によるゆる詰めめの Ottawa 砂の多軸試験結果を同じく SMP 上の  $\tau/\sigma_N - d\epsilon_N/d\gamma$  関係で整理したものである。図中の  $\theta$  は Fig. 4 と同じことを意味している。これらの図より、プロットに少々バラツキはあるが三軸圧縮より三軸伸張までの種々の応力条件下の試験結果がほぼ

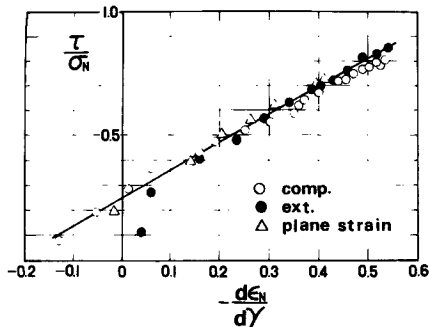


Fig. 3 Relationship between  $\tau/\sigma_N$  and  $d\epsilon_N/d\gamma$  on spatial mobilized plane in triaxial compression, triaxial extension and plane strain tests on Toyoura sand

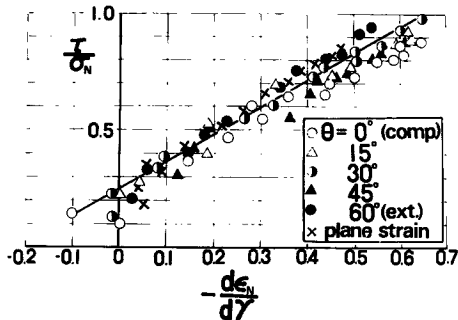


Fig. 4 Relationship between  $\tau/\sigma_N$  and  $d\epsilon_N/d\gamma$  on spatial mobilized plane in true triaxial and plane strain tests on Toyoura sand

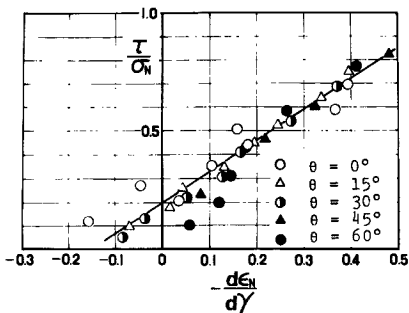


Fig. 5 Relationship between  $\tau/\sigma_N$  and  $d\epsilon_N/d\gamma$  on spatial mobilized plane in true triaxial tests on Ottawa sand (after Ko and Scott's data)

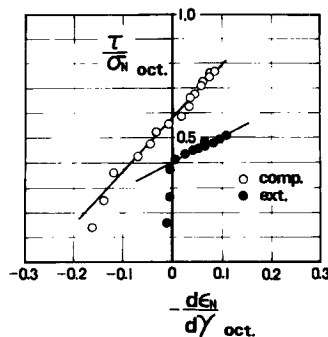


Fig. 6 Relationship between  $\tau/\sigma_N$  and  $d\epsilon_N/d\gamma$  on octahedral plane in triaxial compression and triaxial extension tests on Toyoura sand

ユニークな同一の直線上に整理されるのがみられ、モービライズド面上の基本式<sup>1)</sup>

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \lambda \cdot \left( -\frac{d\epsilon_N}{d\gamma} \right) + \mu \quad \dots\dots\dots (21)$$

は成立するようである。なお(21)式において、 $\mu$  は土粒子間の摩擦係数に相当し、 $\lambda$  は  $\mu$  の値によって決まるほぼ 1.1~1.5 の値であって、これらの係数は試料が決まれば一定値となるものである。

一方、Fig. 3 の三軸圧縮と三軸伸張試験結果を、正八面体面 (Octahedral Plane) 上の  $\tau/\sigma_N - d\epsilon_N/d\gamma$  関係で整理しなおすと、Fig. 6 のようになる。Oct 面上の整理では、このように勾配、縦軸切片とも異なって、ユニークな直線上にのらないのがみられる。この事実からも、Oct 面と SMP の特性の差がうかがえる。

4. SMP 上のセン断・垂直応力比-セン断ヒズミ-垂直ヒズミ関係

モービライズド面上のセン断・垂直応力比  $\tau/\sigma_N$ 、セン断ヒズミ  $\gamma$  および垂直ヒズミ  $\epsilon_N$  間の関係式として次式を得ている<sup>2)</sup>。

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = (\mu' - \mu) \cdot \ln \frac{\gamma}{\gamma_0} + \mu \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\epsilon_N = \frac{\mu - \mu'}{\lambda} \cdot \gamma \cdot \left\{ \ln \frac{\gamma}{\gamma_0} - 1 \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

上式中の係数  $\lambda, \mu, \mu', \gamma_0$  のうち、 $\lambda, \mu$  の説明は(21)式のところで行なった。 $\mu'$  は初期の粒子構造と粒子間摩擦にかかわる係数であるが、通常の粒子構造のもとではあまり変化しないと思なすことができるようである。また、 $\gamma_0$  はモービライズド面上の垂直ヒズミ  $\epsilon_N$  の最大圧縮点での  $\gamma$  であるが、土の粒子構造を表現するパラメーターと考えられ、初期間ゲキ比の  $e_i$  や平均主応力  $\sigma_m$  の大きさその他によって変化する性質をもっている。したがって、初期の粒子構造が同じ試料の場合には上記の4係数がほぼ同一の値となるので、モービライズド面上の  $\tau/\sigma_N - \gamma$  関係および  $\epsilon_N - \gamma$  関係はユニークに表現されることになる。

Fig. 7 は豊浦砂の SMP 上の  $\tau/\sigma_N - \gamma$  関係、 $\epsilon_N - \gamma$  関係の整理を示している。なお、 $\gamma$  および  $\epsilon_N$  はそれぞれ  $\gamma = \sum d\gamma$ 、 $\epsilon_N = \sum d\epsilon_N$  として算定した。三軸圧縮 (○印)、三軸伸張 (●印)、平面ヒズミ (×印) 試験の試料が全て突き棒で突き固めた密詰めめの豊浦砂であるので、それらの初期の粒子構造はあまり大きくは変わらないと考えられるが、この図より3種の試験結果が大略同一のカーブ上にプロットされるのがみられる<sup>5)</sup>。次に、Fig. 8 は Ko と Scott<sup>6),7)</sup>によるゆる詰めめの Ottawa 砂の多軸試験結果のうち、 $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 60^\circ$  のデータを SMP 上の  $\tau/\sigma_N - \gamma$  関係、 $\epsilon_N - \gamma$  関係で整理したものである。(なお、 $\theta = 45^\circ$  の場合は他の4ケースと比べて少々密な構造となっていると考えられるので省略した。) この図からも SMP 上で整理すれば、初期の

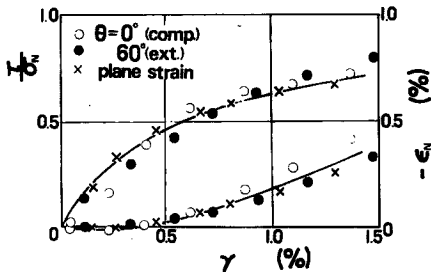


Fig. 7 Relationship among  $\tau/\sigma_N$ ,  $\gamma$  and  $\epsilon_N$  on spatial mobilized plane in triaxial compression, triaxial extension and plane strain tests on Toyoura sand

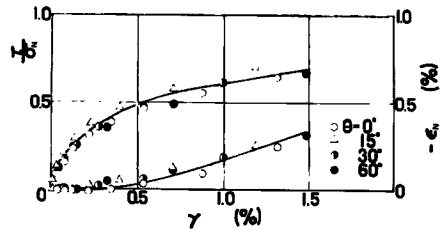


Fig. 8 Relationship among  $\tau/\sigma_N$ ,  $\gamma$  and  $\epsilon_N$  on spatial mobilized plane in true triaxial tests on loose Ottawa sand (after Ko and Scott's data)

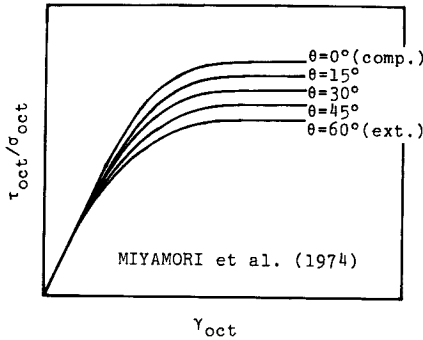


Fig. 9 Relationship between  $\tau/\sigma_N$  and  $\gamma$  on octahedral plane in true triaxial tests on a sand (after Miyamori et al.)

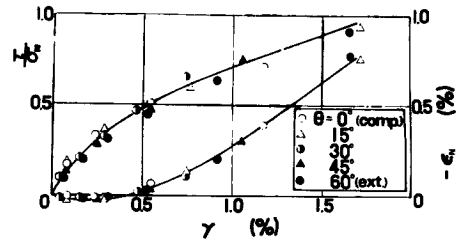


Fig. 10 Relationship among  $\tau/\sigma_N$ ,  $\gamma$  and  $\epsilon_N$  on spatial mobilized plane in true triaxial tests on a sand (from Fig. 9)

粒子構造が同じ場合には相異なる3主応力下の応力-ヒズミ特性がユニークに表現できることが推察される。それでは、Oct面上の整理ではどうであろうか。Fig. 9は、宮森ら<sup>9)</sup>がある川砂の多軸試験結果を、Oct面上の $\tau/\sigma_N-\gamma$ 関係で整理した図である。実線で描かれているが、これは実測値を表わしている。この図より、Oct面上で整理すれば、応力比-ヒズミ関係が $\theta=0^\circ$  (三軸圧縮) から  $\theta=60^\circ$  (三軸伸張) まで一定の傾向をもって変化するのがみられる。次に、Fig. 10はFig. 9と同じデータをSMP上の $\tau/\sigma_N-\gamma$ 関係、 $\epsilon_N-\gamma$ 関係で再整理したものである。これより、Oct面上では傾向をもって変化した応力比-ヒズミ関係が、SMP上ではほぼユニークなカーブ上に整理されるのがみられる。このことも、Oct面とSMPの特性の差を顕著に示していて興味深い。

5. SMPに着目した降伏条件

SMP上のせん断・垂直応力比 $\tau/\sigma_N$ は(6)式より次のように変形される。

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \sqrt{\frac{J_1 J_2 - 9J_3}{9J_3}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{4\sigma_1\sigma_2} + \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}{4\sigma_2\sigma_3} + \frac{(\sigma_3 - \sigma_1)^2}{4\sigma_3\sigma_1}} = \frac{2}{3} \sqrt{\tan^2\phi_{12} + \tan^2\phi_{23} + \tan^2\phi_{31}} = K \dots (24)$$

このSMP上の $\tau/\sigma_N$ がある一定値に達したとき土が降伏するものとする、次のような極めて単純な形の降伏条件が得られる。

$$\tan^2\phi_{12} + \tan^2\phi_{23} + \tan^2\phi_{31} = \left(\frac{3}{2}K\right)^2 = \text{const.} \dots (25)$$

あるいは、

$$J_1 \cdot J_2 / J_3 = 9(K^2 + 1) = \text{const.} \dots (26)$$

この条件を正八面体面上で表示すると、Fig. 11にみられるように破線で示されたMohr-Coulombの条件を表わす六角形に外接する曲線となり、実測値の傾向をよく説明できるものである。

Lade<sup>9)</sup>は $J_1^3/J_3 = \text{const.}$ なる降伏条件を用いて弾塑性応力-ヒズミ関係式を導いているが、この条件はその形からもわかるように(26)式と類似した特性を有している。

小川ら<sup>10)</sup>は、ある砂の多軸試験を行ない、ヒズミ速度が急激に増大するときの応力(降伏応力と呼んでいる)を調べた結果、その応力状態は次の直線式で表現されると述べている。

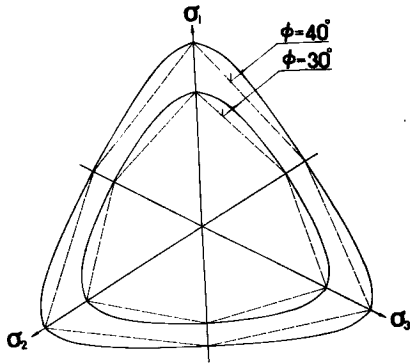


Fig. 11 Proposed yield condition and Mohr-Coulomb's yield condition represented on octahedral plane

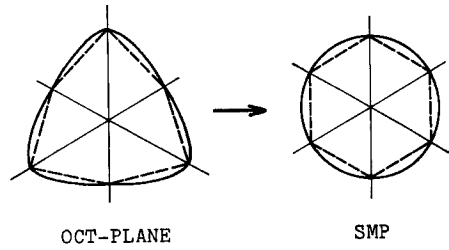


Fig. 12 Proposed yield condition and Mohr-Coulomb's yield condition represented on spatial mobilized plane, and relationship among four yield conditions

$$-\frac{J_2'}{p^2} = m + n \cdot \frac{J_3'}{p^3} \dots\dots\dots (27)$$

ここに、 $J_2'$ 、 $J_3'$  は偏差応力の 2 次および 3 次の不変量であり、 $p$  は平均主応力、 $m$ 、 $n$  は実験係数である。  
一方、

$$J_2' = 3p^2 - J_2 \dots\dots\dots (28)$$

$$J_3' = J_3 - J_2 \cdot p + 2p^3 \dots\dots\dots (29)$$

を考慮すれば、著者の提案式(26)式より次式を導くことができる。

$$-\frac{J_2'}{p^2} = -\frac{3K^2}{3K^2+2} - \frac{3(K^2+1)}{3K^2+2} \cdot \frac{J_3'}{p^3} \dots\dots\dots (30)$$

明らかなように(27)式と(30)式は同じ形をしており、かつ小川ら<sup>10)</sup>のデータによって得られた(27)式の直線の切片  $m$  および勾配  $n$  が(30)式によって説明できるので、小川らの実験式(27)式は結局著者の提案式(26)式に一致すると考えられる。

また Goldscheider と Gudehus<sup>11)</sup>は、乾燥砂やガラス・ビーズの多軸試験を行なって次のような形の降伏関数を提案している。

$$f = c_1 \cdot \frac{J_2'}{p^2} + c_2 \cdot \frac{J_3'}{(J_2')^{3/2}} \dots\dots\dots (31)$$

ここに、 $c_1$ 、 $c_2$  は実験係数である。(30)式と(31)式において、 $(J_2')^{3/2}$  と  $p^3$  の応力の次数が一致することを思えば、この両式も似た形であることがわかる。

以上より、いく人かの研究者によって独立に提案された降伏条件がかなり類似した形であることがみられたが、これは土の降伏現象が結局はこのような形の応力不変量の関数として表現できることを示唆しているものと思われる。この意味において、著者の提案式(26)式はその誘導根拠が明解なだけ有意な条件式ではないかと考えている。

次に、SMP 上で Mohr-Coulomb の条件および本提案条件(26)式を考えてみる。まず Mohr-Coulomb の条件は、粘着成分  $c=0$  の場合には  $\sigma_1/\sigma_3 = \text{const.}$  と表現できる。また三軸圧縮 ( $\theta=0^\circ$ ) および三軸伸張

( $\theta=60^\circ$ ) 状態においては, SMP 上の  $\tau/\sigma_N$  は(9), (13)式より  $\sigma_1/\sigma_3=\text{const.}$  のときには等しくなる。したがって  $\sigma_N=\text{const.}$  にとれば,  $\theta=0^\circ$  と  $60^\circ$  での  $\tau$  の値は等しくなる。すなわち, SMP 上で Mohr-Coulomb の条件を表示すれば正六角形となる (Fig. 12 参照)。次に本提案条件は, SMP 上の  $\tau/\sigma_N=\text{const.}$  であるから,  $\sigma_N=\text{const.}$  にとれば  $\tau$  は全ての  $\theta$  に対して等しくなる。すなわち, SMP 上で本提案条件(26)式を表示すれば円となる (Fig. 12 参照)。一方, 周知のように, Tresca と von Mises の条件は, 正八面体面表示でそれぞれ正六角形と円になることがわかっているので, Fig. 12 の中に示すような4降伏条件の対応関係が直感的に理解される。なお, 佐武<sup>12)</sup>は統計論的な考察から, 本提案条件が von Mises の条件の土のような粒状体の場合への拡張と考えられ, Mohr-Coulomb の条件にある種の統計的修正を与えた形になっていると指摘している。

以上本節では, 著者の提案条件式(26)式の誘導根拠, 形の単純さ, 実測値との適合性および他の提案条件式との相関性, Tresca, von Mises, Mohr-Coulomb の条件の間での位置付けについて言及した。

## 6. SMP とスベリ面の関係

観察される供試体のスベリ面は中間主応力  $\sigma_2$  軸に平行にはいることが多いので, SMP が  $\sigma_2$  軸に平行でないのはおかしいのではないかという意見をよく耳にする。しかし, もし SMP が  $\sigma_2$  軸に平行であるとする,  $\sigma_2$  方向の滑動成分が全くないわけであるから, 中間主ヒズミ  $\epsilon_2$  は常にゼロということになって都合の悪いことになる。土粒子はミクロにみれば, 各粒子接点の接平面上の合せん断応力と垂直応力の比がある一定値に達したとき, その合せん断応力の方向に滑動すると考えられる。したがって, 必ずしも  $\sigma_2$  に平行な方向にだけすべる必要はないものと思われる。ピーク強度までの小さな変形を対象とする場合には, この SMP が平均的にみて土粒子が最も滑動する面であると考えている。ただし, ヒズミが大きくなって残留状態まで変形が進み, マクロなスベリ面が表われるころには, 土粒子は主応力比の値にしたがってせん断方向に配向されるので,  $\sigma_2$  軸に平行な滑動成分が多くなり, それがスベリ面として観察されることも考えられる。なお, SMP が平均的にみて土粒子が最も滑動する面であることを正攻法で証明するには, 3次元の粒子接点角の分布, 粒子間力の分布を求めて, 各粒子接点においてスベリ条件式を適用し, その結果得られた粒子の滑動方向の平均値として SMP が出てくればよいと考えられる。

## 7. 結 語

本論文では, 土が摩擦則すなわちせん断・垂直応力比に支配される材料であるとの考えから, 3次元応力空間に空間モービライズド面 (Spatial Mobilized Plane; 略称 SMP) なる応力面を提案し, この面にもとづけば相異なる3主応力下の応力-ヒズミ特性から降伏条件までを統一的に規定できることを明らかにした。このような土の変形・強度問題にとって興味ある特性は, 現在よく用いられている正八面体面 (Octahedral Plane) にはいくつかの例を示したように期待できないようである。今後は, この SMP 上のユニークな応力-ヒズミ関係や SMP に着目した降伏条件にもとづいて, 土の応力-ヒズミ関係を一般表示するとともに, 微視的な考察よりその物理的意味をも明確にすることを目指したい。

最後に, 御指導を賜った京都大学村山朔郎名誉教授に謝意を表す。また有益な御助言をいただいた東北大学佐武正雄教授, 多軸試験に協力された京都大学大学院生北村良介氏にも感謝の意を表する次第である。

## 参 考 文 献

- 1) Matsuoka, H.: A Microscopic Study on Shear Mechanism of Granular Materials, Soils and Foundations, Vol. 14, No. 1, 1974, pp. 29-43.
- 2) Matsuoka, H.: Stress-Strain Relationships of Sands based on the Mobilized Plane, Soils and Foundations, Vol. 14, No. 2, 1974, pp. 47-61.



- 3) Matsuoka, H. and T. Nakai: Stress-Deformation and Strength Characteristics of Soil under Three Different Principal Stresses, Proc. JSCE, No. 232, 1974, pp. 59-70.
- 4) 市原松平・松沢 宏：平面ひずみ状態と軸対称ひずみ状態における乾燥砂のせん断特性，土木学会論文報告集，No. 173, 1970, pp. 47-59.
- 5) 松岡 元・北村良介：多軸試験機による土の応力-ひずみ特性について，土木学会第29回年次学術講演会講演概要集，第3部，1974，pp. 53-54.
- 6) Ko, H. Y. and R. F. Scott: Deformation of Sand in Shear, Proc. ASCE, Vol. 93, No. SM5, 1967, pp. 283-310.
- 7) Ko, H. Y. and R. F. Scott: Deformation of Sand at Failure, Proc. ASCE, Vol. 94, No. SM4, 1968, pp. 883-898.
- 8) 宮森建樹・下辺 悟：乾燥砂の多軸圧縮試験（第2報），土木学会第29回年次学術講演会講演概要集，第3部，1974，pp. 33-34.
- 9) Lade, P. V.: The Stress-Strain and Strength Characteristics of Cohesionless Soils, Thesis Presented to U. C. Berkeley for Ph. D., 1972.
- 10) 小川正二・三井澄夫・竹牟礼 修：砂の力学的性質への中間主応力の影響に関する実験的研究，土木学会第29回年次学術講演会講演概要集，第3部，1974，pp. 49-50.
- 11) Goldscheider, M. and G. Gudehus: Rectilinear Extension of Dry Sand—Testing Apparatus and Experimental Results, Proc. 8th Int. Conf. SMFE, Vol. 1, Part 1, 1973, pp. 143-149.
- 12) 佐武正雄：降伏条件の統計論的考察，土木学会第29回年次学術講演会講演概要集，第1部，1974，pp. 1-3.