

粘性土の減衰特性，とくに減衰定数について

赤井 浩一・堀 正幸・霜上 民生

ON THE DAMPING CHARACTERISTICS OF COHESIVE SOILS, ESPECIALLY ON DAMPING FACTORS

By *Koichi AKAI, Masayuki HORI and Tamio SHIMOGAMI*

Synopsis

In this paper the authors are mainly concerned with the damping characteristics of cohesive soils from a viewpoint of dynamic rheology. The characteristics of wave attenuation are observed in the rod wave propagation test by the shock tube technique, and the stress or strain level below which the characteristics of wave attenuation can be regarded to be viscoelastic is confirmed by the peak stress attenuation with propagating distance. By using the experimental results for damping factor obtained from the free vibration test and the forced vibration test as well as the wave propagation test which have been performed below the stress or strain level as described above, the frequency dependency of the damping factor is considered in the wide frequency range.

1. 序

土木や建築の分野における構造物の巨大化，高層化とともに，耐震工学の立場からこれら構造物の動的耐震設計法が確立され，コンピューター解析の手法の進展とあいまって，この方面の研究には見るべき成果が少なくない。

一連の設計手順を通じてバランスのとれた精度で設計計算がなされ，それによって信頼性の高い耐震構造物が期待されることになるが，動的耐震設計法では特に構造物および基礎地盤の振動学的定数を確立することが必要であり，その中でも地盤の動的特性は上部構造のものに比べて不明な点が多いので，設計への適用という面で検討を要する事項が少なくない。地盤の振動学的定数としては変形係数 (shear modulus) と減衰定数 (damping factor) があり，前者は一般に地盤構成土の応力-ひずみ曲線 (ヒステリシス・ループ) の割線勾配として定義される。一方，後者は，そのヒステリシス・ループの内部の面積に比例するものとされているが，その数値的な値についてのデータは不十分といわねばならない。そこで土のもつ微小ひずみレベルでの変形係数と減衰定数を同時に知ろうという目的で，筆者らはこれまで室内での応力波伝播実験装置を拡充し，実験データをもとに上述の問題に対する一つのアプローチを提案してきた。

動的問題の対象となる地震や交通荷重などによって地盤が受けるひずみレベルは高々 10^{-3} レベルであり，これ以下のひずみレベルで土の力学的特性を粘弾性理論の立場から解析し，設計を進めるという可能性が十分期待できる。本報告で筆者らは室内での土中の波動伝播実験を通じてそのひずみレベルを $10^{-4} \sim 10^{-3}$ レベルに固定し，実験的に粘土のもつ波動特性を媒介にして動的特性 (変形係数，減衰定数) を考察している。さらに自由振動実験，強制振動実験などを併用することによって，動的レオロジーの立場から粘性土の減衰特性が周波数に依存すること，および波動減衰特性が応力レベルによって変化することを確かめ，その特性が弾性あるいは粘弾性的と考えられる応力 (ひずみ) レベルを明確にしている。実験結果は三要素線形粘弾性モデル (spring-Voigt モデル) を用いて整理し，そのモデルのレオロジー定数を求めている。

ひずみレベルが大きくなってくと土に永久変形が生じ，粘性減衰のほかに履歴減衰も卓越してくる。この

効果の波動減衰特性に与える影響を考察するために線形粘弾性履歴モデルを用い、波動問題への解析的手法を示すと同時に、計算結果による考察を行っている。

2. 振動減衰の表示

土質材料が振動の場におかれるとき、入力エネルギーのいくらかは種々の機構で消散するが、これは内部摩擦という言葉で総称される。エネルギー消散を定義する間接的な方法はいくつかあるが、それらの間の関係を明確にしておくことは、減衰特性に関するデータを処理する上で重要である。それを線形粘性減衰機構を例にとって以下にまとめてみる。

(a) 対数減衰率 δ

粘性減衰系、すなわち1サイクルあたりのエネルギー損失が変位振幅または応力振幅の平方に比例するような系では線形減衰をもつ。このような系が自由振動をする場合、振幅は **Fig. 1** のように指数的に減衰し、その振幅の減衰割合は一定で

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = e^{2\pi h}$$

$$\therefore \delta = \log a_n - \log a_{n+1} = 2\pi h \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 h は限界減衰定数 c_{crit} に対する等価粘性減衰 c の比 ($=c/c_{crit}$) であり、減衰比と呼ばれている。

(b) 共振曲線の帯幅 b

線形粘性減衰系では、共振曲線の帯幅すなわち曲線の立ち上がりの鈍さを次式で定義する (**Fig. 2** 参照)。

$$b = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \cdot \frac{a^2}{a_{max}^2 - a^2} \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 $\Delta\omega$ はその点での振幅が a であるような2つの円振動数の差、 ω_0 は共振円振動数、 a_{max} は振動数 ω_0 における振幅を表す。一般に次の規準を用いて b を定義するのが普通である。

$$a_{max} = \sqrt{2}a \text{ または } a_{max} = 2a$$

前者の規準を用いた場合、 b は次式で与えられる。

$$b = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \dots \dots \dots (3)$$

(c) 特性係数 (quality factor) Q

これは振動系における蓄積エネルギーと消散エネルギーの比として定義される。

$$Q = \frac{2\pi W}{\Delta W} \dots \dots \dots (4)$$

ここに、 W は1サイクルあたりの蓄積エネルギー、 ΔW は消散エネルギーである。この定義は定常状態または周期的条件に対してだけ有効であるから、 ΔW は1サイクルあたり系に供給されるエネルギーに等しい。減衰の表示としてはむしろ減衰関数と呼ばれる特性係数の逆数 Q^{-1} を用いることが多い。

(d) 比減衰エネルギー ψ

粘性減衰をもつ物質に1サイクルの変形にわたりひずみと応力の関係をプロットすると、**Fig. 3** に示され

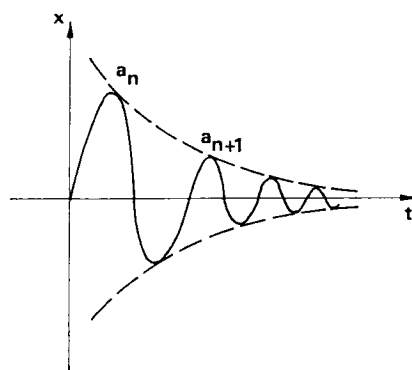


Fig. 1 Exponential damping of displacement.

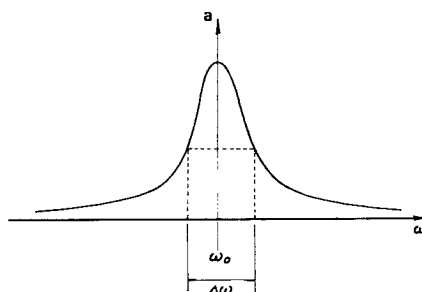


Fig. 2 Resonant curve.

するような楕円で表されるヒステリシス・ループが描かれる。完全弾性物質に貯えられる最大ひずみエネルギーは

$$W = \frac{1}{2} \tau_D \gamma_D \quad \dots\dots\dots (5)$$

であるから，比減衰エネルギーは

$$\psi = \frac{\Delta W}{W} \quad \dots\dots\dots (6)$$

として定義される。

(e) 応力とひずみの位相差 $\tan \theta$

いま Fig. 4 に示すように，線形粘弾性物質がある角速度 ω で振動的に変化するせん断ひずみの振幅 γ_D をうけているとき，その定常状態の応答は同じ角速度で正弦的に変化する応答振幅 τ_D をもつ振動であるが，このときひずみは応力より位相角 θ だけ遅れたものとなる。

Hooke の法則において弾性係数は応力とひずみの比として定義されたが，粘弾性体の動的挙動の場合に対してもこの定義を拡張して用いると，応力とひずみがともに複素数になるので弾性係数も複素数となる。このような弾性係数を特に複素弾性係数 G^* とよび，その実部を動的（貯留）弾性係数 G' ，虚部を動的損失 G'' とよぶ。 G' は 1 サイクルの変形の間にたくわえられかつ完全に回復するエネルギーに関係し， G'' はその間に消散するエネルギーに関係する。これらの諸係数間の関係は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} G^* &= G' + iG'', \quad G' = \frac{\tau_D \cos \theta}{\gamma_D}, \quad G'' = \frac{\tau_D \sin \theta}{\gamma_D} \\ |G^*| &= \frac{\tau_D}{\gamma_D}, \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{G''}{G'} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

1 サイクルの振動中に消散するエネルギーは

$$\Delta W = \int_0^{2\pi/\omega} \tau \cdot \frac{d\gamma}{dt} dt = \int_0^{2\pi/\omega} \omega \tau_D \gamma_D \sin \omega t \cos(\omega t - \theta) dt = \pi \gamma_D \tau_D \sin \theta = \pi \tau_D^2 |G^*| \sin \theta \quad \dots\dots\dots (8)$$

となり，線形粘弾性体では消散エネルギーが振動振幅の平方に比例して減衰してゆく。この減衰してゆく度合を減衰定数と定義する。

複素弾性係数 G^* を用いると平面波の複素速度 c^* は

$$c^* = \sqrt{\frac{G^*}{\rho}} \quad \dots\dots\dots (9)$$

で表されるが，いま x 方向に速度 c^* で伝わる平面波の波動関数を

$$F(x, t) = \exp \left\{ i\omega \left(\frac{x}{c^*} - t \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

と考える。これを変形して

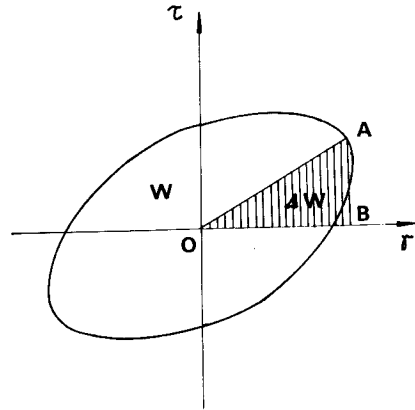


Fig. 3 Hysteresis loop.

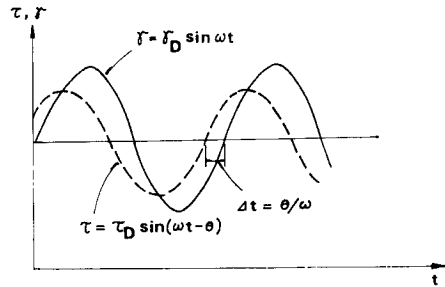


Fig. 4 Steady-state vibration.

$$F(x, t) = \exp\left[i\omega\left\{Re\left(\frac{1}{c_*}\right)x - t\right\}\right] \exp\left[-\omega Im\left(\frac{1}{c_*}\right)x\right] \dots\dots\dots(11)$$

ここで

$$a = \omega Im\left(\frac{1}{c_*}\right), \quad \frac{1}{c_*} = Re\left(\frac{1}{c_*}\right) \dots\dots\dots(12)$$

とおくと次式を得る。 a は減衰定数である。

$$F(x, t) = \exp\left[i\omega\left(\frac{x}{c_*} - t\right)\right] \exp(-ax) \dots\dots\dots(13)$$

ある点での波動の振幅を A_1 , 1 波長離れた点での波動の振幅を A_2 とすると,

$$A_1 = F(x, t), \quad A_2 = F\left(x + \frac{c_*}{f}, t\right) \dots\dots\dots(14)$$

振動のエネルギーは振幅の平方に比例するから

$$\Delta W \propto A_1^2 - A_2^2, \quad W \propto A_1^2$$

$$\begin{aligned} \therefore Q^{-1} &= \frac{\Delta W}{W} = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{2ac_*}{f}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[1 - \left\{ 1 - \frac{2ac_*}{f} + \frac{1}{2!} \left(-\frac{2ac_*}{f}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(-\frac{2ac_*}{f}\right)^3 + \dots \right\} \right] \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

故に $Q^{-1} \ll 1$ のとき

$$Q^{-1} \approx \frac{ac_*}{\pi f} \dots\dots\dots(16)$$

以上述べた各減衰係数間には近似をも含めて次の等式が成立する。

$$Q^{-1} = b = \tan \theta = \frac{G''}{G'} = \frac{\psi}{2\pi} = \frac{\delta}{\pi} = 2h \dots\dots\dots(17)$$

3. 土中の波動減衰に与える compaction の影響

3.1 概 説

土中を伝播する応力波は, そのエネルギーが土の変形によって徐々に吸収され, 距離とともに減衰する。2. で述べたように, 微小ひずみレベルでこのような波動減衰現象を数理的に説明するには粘弾性減衰機構を仮定するのが有効である。ところがさらに大きなひずみ (あるいは応力) レベルによる波動では, 土の永久変形を

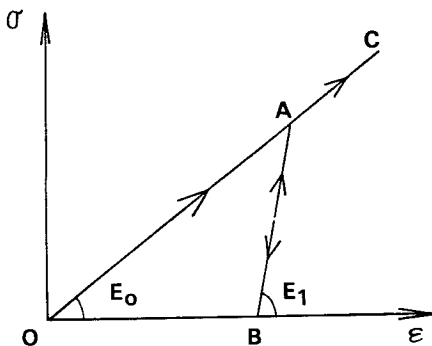


Fig. 5 Linear compacting model.

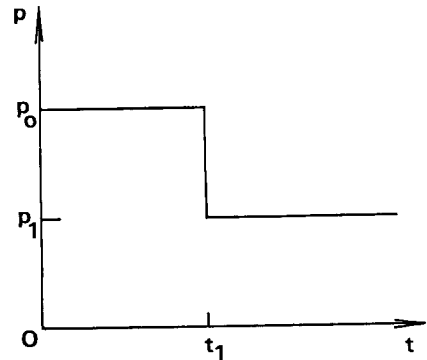


Fig. 6 Surface pressure form.

伴い，いわゆる compaction を生ずることになる。このことは土質材料に対する載荷と除荷の過程でヒステレシスが生じ，それによるエネルギーの消散が起こることを意味している。ここでは線形履歴モデルに粘弾性の性質を加味した，いわゆる線形粘弾性履歴モデルについてその解析手法を示すと同時に，応力波伝播時に生ずる波動減衰に与える compaction の効果を考察した。

3.2 解析手法

Salvadori¹⁾ らは Fig. 5 に示されるような線形履歴モデルについて一次元波動問題に対する解を与えている。Fig. 5 の応力-ひずみ曲線にみられるとおり，処女載荷に対して $0 \rightarrow A$ の径路をたどり，除荷，再載荷に対して $A \rightarrow B \rightarrow$

$A \rightarrow C$ の径路をたどる。いま半無限の線形履歴モデルからなるロッド内の一端に Fig. 6 に示されるような載荷圧力波形を入射させたとしよう。ロッドの軸方向に座標軸 x をとると，波動伝播時の x と t の関係は $x-t$ 平面上で Fig. 7 のようになる。すなわち載荷波は E_0 に対応する波速 $c_0 = \sqrt{E_0/\rho}$ (ρ : 密度) で伝播するが， $t=t_1$ において生じる除荷波が E_1 に対応する波速 $c_1 = \sqrt{E_1/\rho}$ で伝播し， $t=t_2$ で載荷波に追いついて反射波を生ずることになる。反射波は載荷面と載荷波面との間で無限に反射を繰り返すことにより，波動振幅を徐々に減衰させることになる。

Seaman²⁾ は Salvadori らによる基本解を応用し，

$$p(t) = p_0 e^{-t/t_0} \quad (\text{スパイクパルス}) \quad \dots\dots\dots (18)$$

で表現できる載荷圧力波形に対する解をもとにして重ね合わせの手法によって次式の解を得た。

$$\frac{\sigma(x, t)}{p_0} = \left[e^{-(t-\frac{x}{c_1})/t_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n \left\{ e^{-\varphi^n(t-\frac{x}{c_0})/t_0} - e^{-\varphi^n(t+\frac{x}{c_0})/t_0} \right\} \right] H\left(t - \frac{x}{c_0}\right) \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここに， φ は次式で与えられるパラメーターである。

$$\varphi = \frac{1-\beta}{1+\beta}, \quad \beta = \frac{c_0}{c_1} \quad \dots\dots\dots (20)$$

φ が大きいほど，載荷と除荷の両過程でのヒステレシスが大きいことを意味し， $\varphi=0$ は完全弾性体に相当する。

次にこの線形履歴モデルに粘弾性を加味したものとして，線形粘弾性履歴モデルを考える。このモデルの理論解は，フーリエ変換を用いた対応原理により(19)式から導くことができる³⁾。ここでは線形粘弾性モデルとして spring-Voigt モデルを用いている。Fig. 8(a), (b) はそれぞれ処女載荷と除荷および再載荷に対応するものである。(18) 式の載荷波形に対する応答は次式で表される。

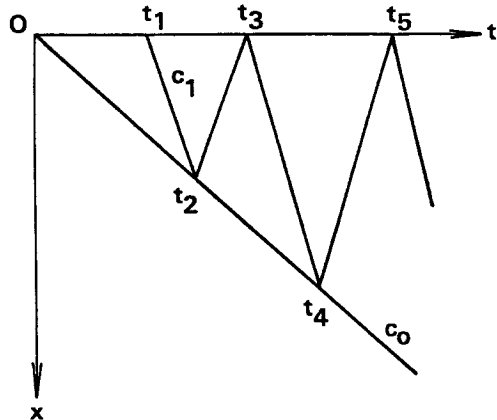


Fig. 7 $x-t$ diagram of waves in the linear compacting model.

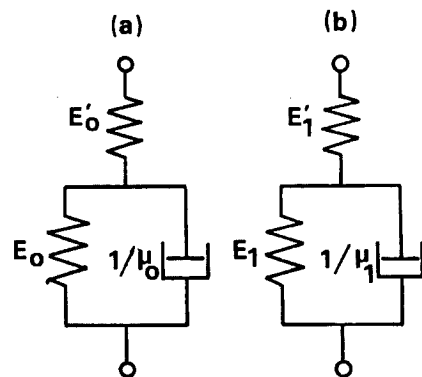


Fig. 8 Linear viscoelastic compacting model.

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma(x,t)}{\rho_0} = & \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n \int_0^{\infty} \frac{1}{\varphi^{2n} + \omega^2} \exp\{-K_2(\omega)\omega x\} \\
& \times \exp\{-K_1(\omega)\varphi^n x(1-\beta)/t_0\} \left\{ \frac{\varphi^n}{t} \cos \omega \tau_1 + \omega \sin \omega \tau_1 \right\} d\omega \\
& - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n \int_0^{\infty} \frac{1}{\varphi^{2n} + \omega^2} \exp\{-K_2(\omega)\omega x\} \\
& \times \exp\{-K_1(\omega)\varphi^n x(1+\beta)/t_0\} \left\{ \frac{\varphi^n}{t} \cos \omega \tau_2 + \omega \sin \omega \tau_2 \right\} d\omega \quad \dots\dots\dots (21)
\end{aligned}$$

ただし, $\begin{cases} \tau_1 \\ \tau_2 \end{cases} = t - xK_1(\omega) \pm \frac{K_2(\omega)}{\omega} \alpha^n x(1 \mp \beta)/t_0$

$$K_1(\omega) - iK_2(\omega) = \sqrt{\rho/(i\omega)}$$

ここに, $J(i\omega)$ は spring-Voigt モデルの複素コンプライアンスである。

3.3 計算結果

Fig. 9 は(21)式による線形粘弾性履歴モデルの解を数値計算して, 各距離における応力波形を描いたものである。この場合パラメータとして $\rho=1.8 \text{ g/cm}^3$, $c_0=160 \text{ m/sec}$, $c_1/c_0=1.5$, $t_0=1/250 \text{ sec}$, $1/E_0'\mu_0=0.3 \text{ sec}$ を用いた。またモデル内の2つのばね定数の E_0/E_0' , E_1/E_1' 比はともに0.5とした。

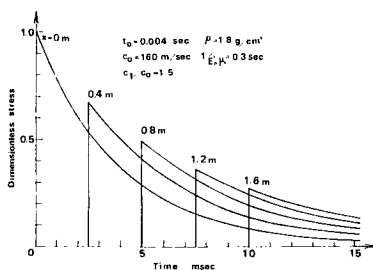


Fig. 9 Response of linear viscoelastic compacting model.

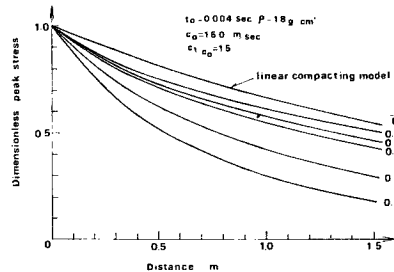


Fig. 10 Peak stress attenuation for linear viscoelastic compacting model.

Fig. 10 は伝播距離によるピーク応力の減衰を $1/E_0'\mu_0$ をパラメータにとって示したものである。初期速度 c_0 に対応して E_0' を一定としているので, Voigt 要素内の粘性定数 $1/\mu_0$ が大きくなるほど粘性による減衰を増す。ここに $1/E_0'\mu_0=0$ としているのは, compaction のみを考慮した線形履歴モデルに相当する。また c_1/c_0 が大なるほど compaction の効果が大きく, したがって履歴による波動減衰が大となる⁴⁾。

4. Shock-tube による波動伝播実験

4.1 概説

固体内の波動伝播特性は複雑であり, しかもその固体の力学的特性や置かれている境界条件にきわめて敏感に影響される。このことは仮に単純な境界条件のもとで波動伝播現象を把握すれば, われわれの知ろうとする力学的特性が明瞭な形で現れ得ることを意味するもので, ここに波動伝播実験の意義がある。

筆者らは土中の波動伝播現象を実験室内で観測するために, shock-tube technique と呼ばれるべき実験手法を確立してきた^{5),6)}。今回新たに大型三軸装置を製作し, 等方拘束圧力のもとで rod wave としての土中の波動特性を観測できるようにした。shock-tube による衝撃的空気圧がピストンを介して土試料からなるロッドの先端に作用する。この瞬間的な微小変位によって生ずる応力パルスがロッド内を伝播する様子を調べ, その波面より弾性波速度を知り, パルスの振幅の減衰から土のもつ減衰特性を知ることができる。

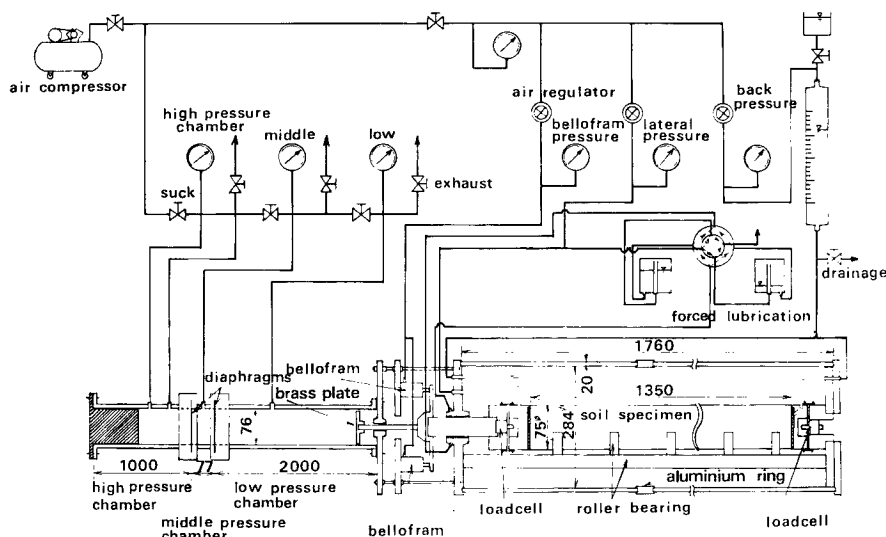


Fig. 11 Schematic diagram of the shock tube, the triaxial compression chamber, the pressure system and the water supply and drainage system.

4.2 実験装置と方法

4.2.1 実験装置

Fig. 11 は shock-tube, 三軸室および圧力，給排水系統を示したものである。土試料の先端に作用させるパルス応力の大きさは，試料の静的三軸圧縮試験での $(\sigma_1 - \sigma_3)_{max}$ の $1/2 \sim 1/3$ 程度とした。そのとき shock-tube の高压室に必要なとされる圧縮空気の高圧力は $2 \sim 4 \text{ kg/cm}^2$ であり，コンプレッサーから供給される。三軸セルは外径 32.4 cm，内径 28.4 cm，肉厚 2.0 cm，長さ 50 cm の透明アクリル樹脂製円筒 3 個を，中間に 2 個のアルミ製リングをはさんで組まれ，底板は外径 33.0 cm のステンレス鋼板で前後の底板を 2 本の鋼管と L 型アングルで固定している。セルは前後の底板を締めつけることによって固定される。三軸室は水平に設置され，shock-tube 末端フランジとボルトで連結されている。shock-tube で得られた空気衝撃波を低圧室末端近くに挿入されている真ちゅう製の直径 7.5 cm の受圧板で受けとめ，三軸室の前の底板中央部の軸受を通したピストンに連結されている供試体先端のキャップを通じて供試体に圧力を作用させる。shock-tube で得られた衝撃波の観測は受圧板中央部で小型圧力変換器によって行われる。底板のピストンの軸受には，それが瞬間的変位に対し摩擦なく動くためと，三軸室内で空気圧によって拘束圧を加えたための空気漏れを防ぐという 2 つの目的のために，強制注油機構が組まれている。

Fig. 12 は三軸室断面図である。V 型ローラーベアリング上にさらに幅 4 cm の半円筒のローラーベアリングを約 5 cm 間隔に配置し，その上に供試体をのせることによってセットされる。土供試体の寸法は直径 7.5 cm，長さ 135 cm のロッドである。これら 2 つのローラーベアリングにより試料の軸方向および回転方向の摩擦は十分減少されているものと考えられる。

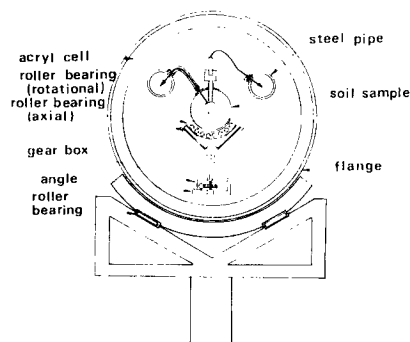


Fig. 12 Cross section of the triaxial compression chamber.

粘土供試体は波動伝播実験に先立って圧密されるが、ペーパードレーンによって側方に排水を行い、供試体両端のキャップを通して排水された。また供試体内にセットされる土圧計や間げき水圧計などの測定装置のリード線は、空気漏れのないよう Fig. 12 に示される方法で鋼管の中にリード線を通して外部に取り出された。

4.2.2 土試料

供試体に用いた土試料は、Table 1 に示す物理定数をもつシルト質ロームである。試料の作成は深草産乾燥粘土のうち 400μ のふるい通過分に対し十分な水を加えて攪拌し、直径 60 cm、高さ 1 m の大型圧密土槽で圧密した。その先行圧密荷重は約 0.7 kg/cm^2 であり、一軸圧縮強さは約 0.4 kg/cm^2 であった。大型圧密土槽で圧密完了した粘土は内径 75 mm のシンウォールサンプラーで抜き取られ、パラフィンで両端をパックして保管された。

4.2.3 実験方法

シンウォールサンプラーからひきぬかれた粘土を 27 cm の長さに切り、それらを 5 本用意して 1 つのロッドを形成した。各セグメントの端面に土圧計用の穴をくり抜き、土圧計がはめ込まれた。試料はペーパードレーン用の汚紙を巻いた後、ゴムスリーブによって包まれた。波動伝播実験に先立って圧密を行ったので、各セグメントの試料の接続ならびに土圧計周辺の乱れ、または土圧計と粘土との接着という問題はないと考えられる。

粘土試料が大きいため、1 つの荷重段階での圧密に要する時間は数日が必要である。波動特性や動的特性などの実験結果はすべて有効拘束圧の大きさによって整理された。実験のシリーズ、有効拘束圧、shock-tube による粘土試料への入力ピーク応力は Table 2 にまとめられている。

Table 2 Test series of the rod wave propagation test.

No.	confining pressure P_0 kg/cm ²	back pressure P_b kg/cm ²	effective confining pressure P_c kg/cm ²	input peak pressure kg/cm ²
11-a	3.46	1.35	2.11	0.73
11-b	3.46	1.43	2.03	1.18
12-a	2.89	1.52	1.37	0.52
12-b	2.89	1.58	1.31	0.98
13-a	2.30	1.09	1.21	0.54
13-b	2.30	1.30	1.00	1.06
14-a	1.76	0.86	0.90	0.69
14-b	1.76	0.93	0.83	1.03
15-a	1.50	0.96	0.54	0.50
16-a	1.50	1.10	0.40	0.43
17-a	1.50	1.24	0.26	0.38
18-a	1.50	1.34	0.16	0.32
19-a	2.20	1.14	1.06	0.64
19-b	2.20	1.14	1.06	1.14

Table 1 Physical properties of the silty loam used.

specific gravity	2.68
L. L.	48.6 %
P. L.	27.6 %
P. I.	21.0
uniformity coefficient	4.5
water content	31~34 %
bulk density	1.88~1.91 g/cm ³
coefficient of permeability	$7.3 \times 10^{-8} \text{ cm/sec}$

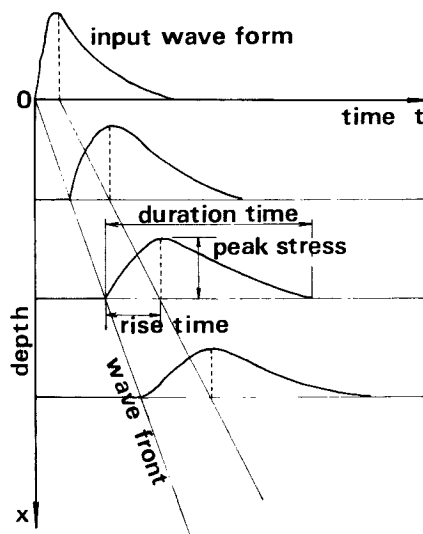


Fig. 13 Propagating stress wave forms.

4.3 実験結果と考察

土試料からなるロッドには 4 個の土圧計がそれぞれ先端から 3, 27, 54, 81 cm の深さに埋め込まれ、各点での応力パルスの波形を観測した。その伝播波形を模式的に示すと Fig. 13 のようになる。波形は単一のパルスであり、2.2~3.0 msec でピーク応力に達し、その後なだらかに減少するものである。波動の波面より rod wave の波速が求められ、また伝播距離による波形の崩れ（ピーク応力の減衰）は上の減衰特性を表示する指標とされた。

4.3.1 rod wave の波速と動的弾性係数

rod wave の波速 c_R と有効拘束圧 p_c との関係を両対数紙上にプロットすると、Fig. 14 のようにほぼ直線関係が得られ、したがって波速が p_c の約 0.4 乗に比例して増加することが理解できる。すなわち、

$$c_R(\text{m/sec}) = 280 p_c^{0.4} \quad (p_c: \text{kg/cm}^2) \dots\dots\dots(22)$$

この結果は石黒⁷⁾が超音波パルス法で粘土中を伝わる S 波速度 c_S と圧密圧力との関係を求めた結果と全く同じ傾向であり、飽和粘性土中の c_S （あるいは c_R ）は圧密圧力を増加してゆく場合、その圧力のほぼ 0.4 乗に比例して増加すると結論づけることができよう。また Hardin ら⁸⁾の砂に関するせん断波速の研究や、Marcuson ら⁹⁾の粘性土に関するせん断波速の研究によって明らかにされたように、土中を伝播する弾性波速度は平均有効主応力 σ_m' の 0.25 乗に比例し、また間隙比の一次関数 $F(e)$ に比例することが知られている。すなわち

$$c_S(\text{m/sec}) = F(e) \sigma_m'^{0.25} \quad (\sigma_m': \text{kg/cm}^2) \dots\dots\dots(23)$$

Fig. 14 の結果は(23)式の整理法による場合 $F(e) = -550e + 602$ である。

波速 c_R と密度 ρ を用いて動的弾性係数 E_d は次式より求めることができる。

$$E_d = \rho c_R^2 \dots\dots\dots(24)$$

E_d と p_c との関係は Fig. 15 に示されるごとくほぼ直線関係が成立する。また E_s は静的三軸試験でひずみ速度 0.04%/min として得られた応力-ひずみ曲線での初期接線弾性係数をプロットしたものである。 E_d が E_s の 3~6 倍の大きな値であり、いわゆるせん断ひずみ速度効果の現れであると考えられる。ここに波

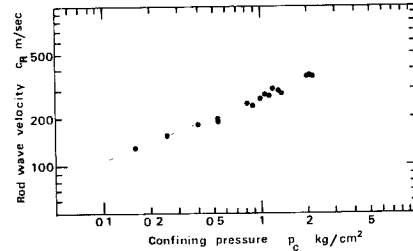


Fig. 14 Relationship between c_R and p_c .

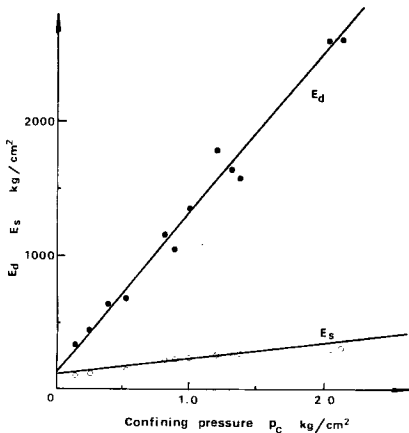


Fig. 15 Relationship between dynamic and static moduli of elasticity and confining pressure.

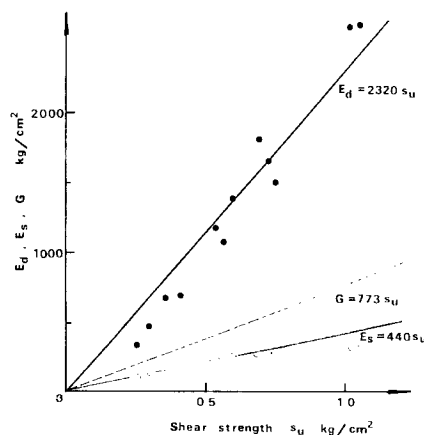


Fig. 16 Relationship between shear strength and E_d , E_s and G_d .

動伝播実験での平均ひずみ速度はほぼ $10^3\%/min$ 程度である。これらの弾性定数をせん断強度 s_u との関係でプロットすると **Fig. 16** となる。ここに動的せん断弾性係数 G_d は飽和を仮定してポアソン比を0.5とし、

$$G_d = \frac{E_d}{3}$$

の関係で描いたものである。図の結果では G_d/s_u は773となる。

4.3.2 波動減衰特性

Fig. 17 に示されるパルス応力波形のピーク応力の距離に伴う減衰を考えてみよう。(a) は入射応力レベルの低いもの、(b) は大きいものをまとめてプロットしたものである。両図の特徴は、(a) シリーズでは最初の部分で振幅の急激な減衰があるが、それ以後その度合は非常にゆるやかである。一方 (b) シリーズにおいては、かなりの深さまで振幅の減衰がひき続いて生じている。この違いは土中の応力波伝播現象における減衰特性がその応力レベルに依存していることを明瞭に示唆するものである。**Fig. 18** は応力波伝播時の土の応力-ひずみ曲線であるが、シリーズ 19-a では比較的そのヒステリシス・ループは小さいが、19-b のように応力レ

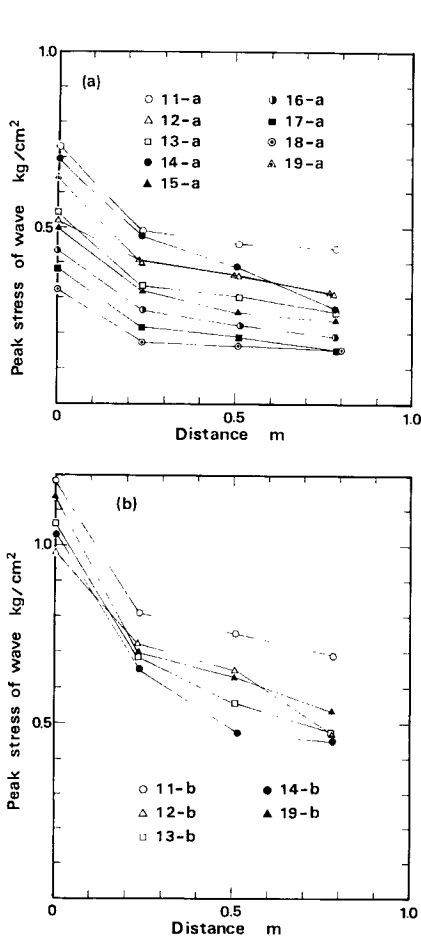


Fig. 17 Attenuation of peak stress with travelling distance.

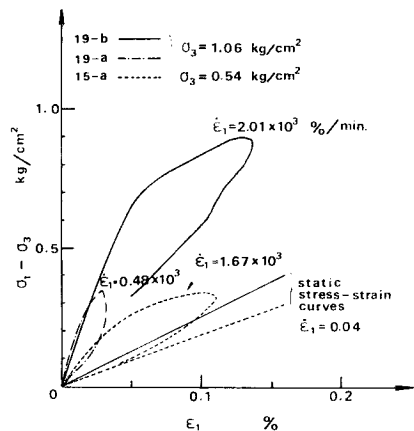


Fig. 18 Dynamic and static stress-strain curves.

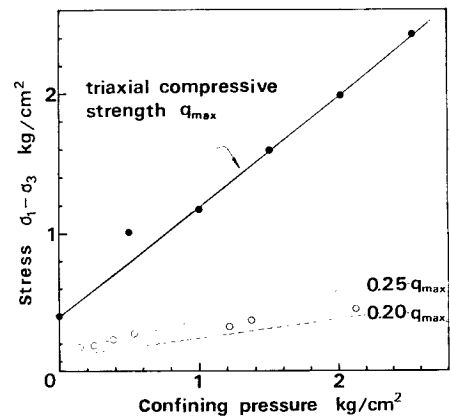


Fig. 19 Stress level below which the mechanical behaviors of the soil are considered to be elastic or viscoelastic.

ベルが高いときわめてヒステリシス・ループの面積は大きくなり、しかも重線形的な応力-ひずみ曲線の様相を呈することが理解できる。土の弾性限を越える超過エネルギーは土の塑性変形のために吸収されてしまい、そのときの距離に対するピーク応力の減衰の割合は急激であり、応力レベルが減少して弾性限に近づいてくるにつれてその減衰傾向が粘弾性的なものへと移行するものと考えられる。筆者らはこの減衰の割合に変化が見られるような点での応力レベル以下での応力に対し、土の力学的挙動に弾性ないし粘弾性の特性が卓越しているものと理解した。この応力レベルを拘束圧に対してプロットすると **Fig. 19** のようになり、三軸圧縮強度の20～25%にあることがわかる。この応力レベルは静的応力-ひずみ曲線から検討すると、ほぼ 1×10^{-3} のひずみに対応している。5.での粘弾性学的考察では上述の応力レベル（あるいはひずみレベル）以下でのデータ、すなわち **Fig. 17** の (a) シリーズの実験結果を用いている。

5. 減衰特性に関する粘弾性学的考察

5.1 概説

微小ひずみレベルでの土のもつ力学的特性のうちひずみ速度依存性（時間効果）と内部摩擦（減衰特性）を数理的に表現する場合、粘弾性モデルを用いて現象を説明するのが第一次近似であろう。前節で述べた波動伝播実験での結果のうち、動的弾性係数が静的弾性係数の3～6倍であること、三軸圧縮強度の20～25%以下の応力レベルでは粘弾性減衰の様相を呈するという結果を用いて、三要素線形粘弾性モデル（spring-Voigt モデル）による解析を行った。また自由振動実験や強制振動実験による結果も併用して、このモデルのレオロジー定数および土の減衰定数の考察を試みた。

5.2 spring-Voigt モデル

Fig. 20 に示す spring-Voigt モデルの構成方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\tau_{SV}}{E'} \dot{\sigma} + \frac{k+1}{kE'} \sigma = \tau_{SV} \dot{\epsilon} + \epsilon \dots \dots \dots (25)$$

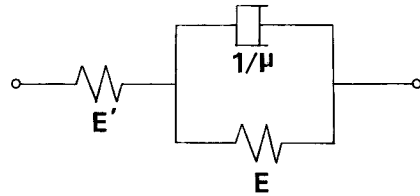


Fig. 20 spring-Voigt model.

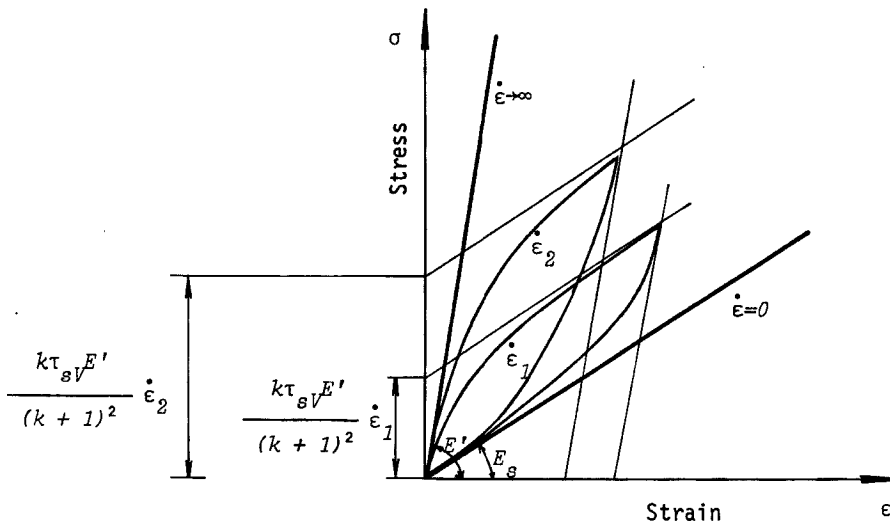


Fig. 21 Stress-strain relations of spring-Voigt model at a constant strain rate.

ここに, τ_{sV} , k はモデルのパラメーターであり, レオロジー定数を用いて与えられる。

$$\tau_{sV} = \frac{1}{E\mu}, \quad k = \frac{E}{E'} \quad \dots\dots\dots(26)$$

τ_{sV} は外力に対するモデルの時間応答を表現する時定数であり, Voigt 部分の遅延時間に相当する。また k は2つのばね定数の比である。ともにこのモデルの力学的特性を端的に表現するための重要なパラメーターである。**Fig. 21** はモデルの等ひずみ速度での応力-ひずみ曲線である。瞬間弾性係数は E' であり, また静的弾性係数 E_s は $\dot{\epsilon}=0$ の試験で得られるもので, この場合次式で与えられる。

$$E_s = \frac{EE'}{E+E'} \quad \dots\dots\dots(27)$$

この中間のひずみ速度ではヒステシスのループを描き, ひずみ速度が大きいほど全体に応力-ひずみ曲線の勾配が立ち上がってくる。

spring-Voigt モデルからなる半無限のロッド内を無限調和波が rod wave として伝播する場合の位相速度 c_p および対数減衰率 δ_T はそれぞれ次式で与えられる。

$$\frac{c_p}{c_0} = \left(\frac{2}{\sqrt{A+A'}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\delta_T}{\pi} = 2 \left(\frac{\sqrt{A-A'}}{\sqrt{A+A'}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots(28)$$

ここに, $c_0 = \sqrt{E_s/\rho}$ であり, A, A' は次式で与えられる。

$$A = \frac{1 + (\theta_{sV} \omega \tau_{sV})^2}{1 + (\omega \tau_{sV})^2}, \quad A' = \frac{1 + \theta_{sV} (\omega \tau_{sV})^2}{1 + (\omega \tau_{sV})^2} \quad \dots\dots\dots(29)$$

また

$$\theta_{sV} = \frac{k}{1+k}$$

Fig. 22 は $\omega \tau_{sV}$ について c_p/c_0 および δ_T/π を $\theta_{sV} = 0.1 \sim 0.9$ をパラメーターにとって(28)式を計算したものである。位相速度は低振動数では $\sqrt{E_s/\rho}$ の値をとり, 振動数が大きくなるにつれて $\sqrt{E'/\rho}$ に近づいてくる。一方対数減衰率は振動数によって変化し, その分布形は $\omega \tau_{sV} \approx 1$ のあたりでピークをもつベル型となる。またこれらの傾向はもう一つのパラメーター θ_{sV} によっても変化し, θ_{sV} がゼロに近いほど粘性の影響が大きく, 1に近いほど完全弾性体の挙動に近づく。

5.3 実験結果による考察

5.3.1 レオロジー定数および時定数 τ_{sV} の決定

spring-Voigt モデルの力学的特性および波動特性は τ_{sV} , θ_{sV} (あるいは k) の2つのパラメーターによってユニークに決定されることになる。これらの値を3.の実験結果をもとにして求めてみよう。各シリーズごとの実験結果は **Table 3** にまとめられている。この表で c_p は wave front の波速, c_0 は静的弾性定数 E_s を用いて $\sqrt{E_s/\rho}$ によって求められたものである。ところでここでの解析では, 無限調和波に対する波動特性を求めており, 実験での応力パルスとは若干その特性を異にすると考えられる。広部¹⁰⁾は実験で得られた各点での応力波形をフーリエスペクトルに分解して, パルスとしての振幅減衰定数 α がどの程度の振動数をもつ調和波の減衰定数に相当しているかを調べ, それが 120 cps 前後の振動数であると結論している。**Table 3** では $\omega = 2\pi \times 120$ としてパルスの減衰定数 α より δ_T/π を次式により計算している。

$$\frac{\delta_T}{\pi} = \frac{2\alpha c_p}{\omega} \quad \dots\dots\dots(30)$$

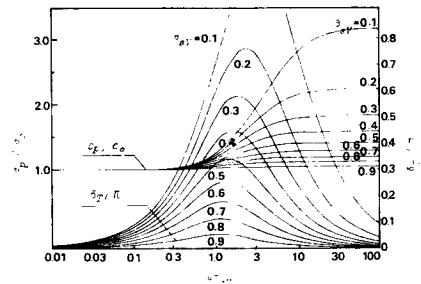


Fig. 22 Wave characteristics of the model.

Table 3 Experimental results obtained by the rod wave propagation test.

No.	p_c kg/cm^2	c_p m/sec	c_o m/sec	c_p/c_o	α m^{-1}	δ_T/π
11-a	2.11	365	130	2.80	0.21	0.203
12-a	1.37	290	123	2.36	0.46	0.354
13-a	1.21	300	127	2.36	0.39	0.311
14-a	0.90	240	115	2.08	1.06	0.675
15-a	0.54	200	108	1.86	0.45	0.239
16-a	0.40	180	91	1.98	0.57	0.272
17-a	0.26	155	75	2.08	0.63	0.259
18-a	0.16	130	76	1.70	0.23	0.079
19-a	1.06	280	114	2.46	0.44	0.327

Table 4 Calculated viscoelastic constants.

No.	θ_{SV}	τ_{SV}	E_a	E_s	E'	E	$1/\mu$	
		<i>sec</i>	<i>kg/cm²</i>	<i>kg/cm²</i>	<i>kg/cm²</i>	<i>kg/cm²</i>	<i>kg-sec/cm²</i>	
11-a	0.126	0.144	0.0449	2620	316	2620	377	16.93
12-a	0.169	0.203	0.0172	1570	274	1622	329	5.66
13-a	0.171	0.206	0.0196	1360	264	1544	318	6.23
14-a	0.174	0.211	0.0068	1060	237	1363	288	1.96
15-a	0.278	0.385	0.0137	695	184	695	193	2.64
16-a	0.244	0.323	0.0143	643	157	644	157	2.25
17-a	0.222	0.285	0.0171	465	126	567	126	2.15
18-a	0.288	0.404	0.0045	327	102	354	102	0.46
19-a	0.157	0.186	0.0206	1730	252	1730	272	5.60

Table 3 の c_p/c_o と δ_T/π を (28) 式に代入し，その連立方程式を解くことにより線形粘弾性モデルとしての spring-Voigt モデルのレオロジー定数およびパラメーターを求めたものが一括して Table 4 に示されている。この表によれば，実験シリーズ 11-a~14-a と 19-a は θ_{SV} が 0.1~0.2 にあり，15-a~18-a では 0.2~0.3 にあることが分かる。ところで用いた粘土試料の先行圧密圧力は約 0.7 kg/cm^2 である。したがって 11-a~14-a と 19-a の実験シリーズの試料は正規圧密粘土 (N. C. Clay) に相当し，一方シリーズ 15-a~18-a の試料は過圧密粘土 (O. C. Clay) に相当することになる。すなわち N. C. Clay では θ_{SV} が小さく，O. C. Clay では大きな値をとる。言い換えれば N. C. Clay の k より O. C. Clay の k の値の方が大きい。さらに δ_T/π が O. C. Clay では小さな値をとるということを考慮すれば，O. C. Clay の弾性的性質が N. C. Clay のそれよりも卓越しているということになる。時定数 τ_{SV} については，11-a の値以外は N. C. Clay, O. C. Clay の区別なくほぼ一定値であることがわかる。

Fig. 23~Fig. 25 はモデルのレオロジー定数を p_c についてプロットしたものである。ここに， p_i は先行圧密荷重を示す。これらの図より自由スプリング E' は p_c とほぼ線形関係にあるが， E および $1/\mu$ について

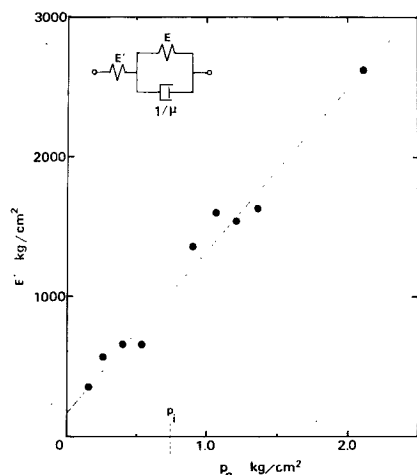


Fig. 23 Variation of E' with the confining pressure.

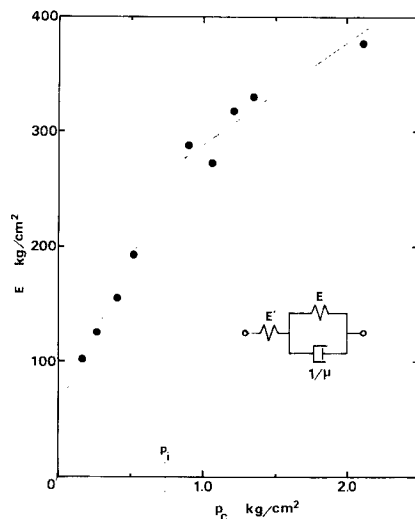


Fig. 24 Variation of E with the confining pressure.

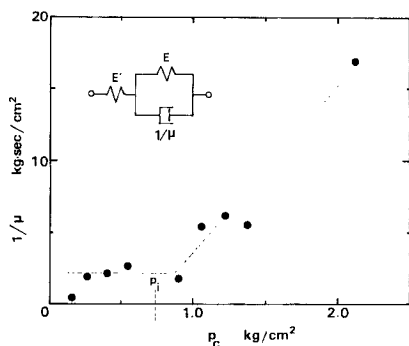


Fig. 25 Variation of $1/\mu$ with the confining pressure.

は p_t を境にその様子が異なった傾向を示している。この結果の説明にはさらに多くの実験データの集積が望まれるが、前述したように O.C. Clay が N.C. Clay に比べ、より弾性的性質に富んでいることの現れであると考えられるだろう。いずれにしてもそれらを包含した形での $1/E\mu$ で表わされる τ_{SV} 値はほぼ一定の値をとるという結論となる。**Fig. 26** は波動伝播実験で求めた τ_{SV} の値のほかに強制振動実験や自由振動実験で決定された τ_{SV} および他の研究者による結果をあわせて、その振動数について整理したものである。この図で明瞭な傾向は振動数 1 cps を境に2つの領域に分れることである。1 cps 以下では振動数の増加とともに τ_{SV} が減少するが、1 cps 以上ではほぼ一定の値 (0.03 sec) をとる。前者は

擬似静的領域と動的領域の間の過渡領域、後者はクリープやリラクゼーション現象をとまなわない動的領域である。

5.3.2 減衰定数の振動数依存性

波動伝播実験、強制振動実験、自由振動実験で得られた対数減衰率を $\omega\tau_{SV}$ で整理し、同一平面上にプロットしたものが **Fig. 27** に示されている。図中に示されている点線は spring-Voigt モデルの $\theta_{SV}=0.35$ に対する理論曲線である。ここに示されているデータはすべて実験でのひずみレベルをほぼ同一の $10^{-4}\sim 10^{-3}$ の範囲に統一している。したがって同一のひずみレベルでも土の減衰特性がその振動数の大きさにわずかながら依存していることを示唆するものであり、図のデータに関していえば $\omega\tau_{SV}\approx 1$ のあたりで減衰定数が最大となるようなベル型となる。 $\omega\tau_{SV}\approx 1$ の関係において τ_{SV} を 0.03 とした場合その振動数は $f\approx 5\text{cps}$ となる。

一般に非線形の応力-ひずみ特性をもつ物質においては、変形係数および減衰定数が応力レベルまたはひずみレベルによって変化する。土のような物質ではこの特性がことに顕著であり、応力またはひずみの増加と

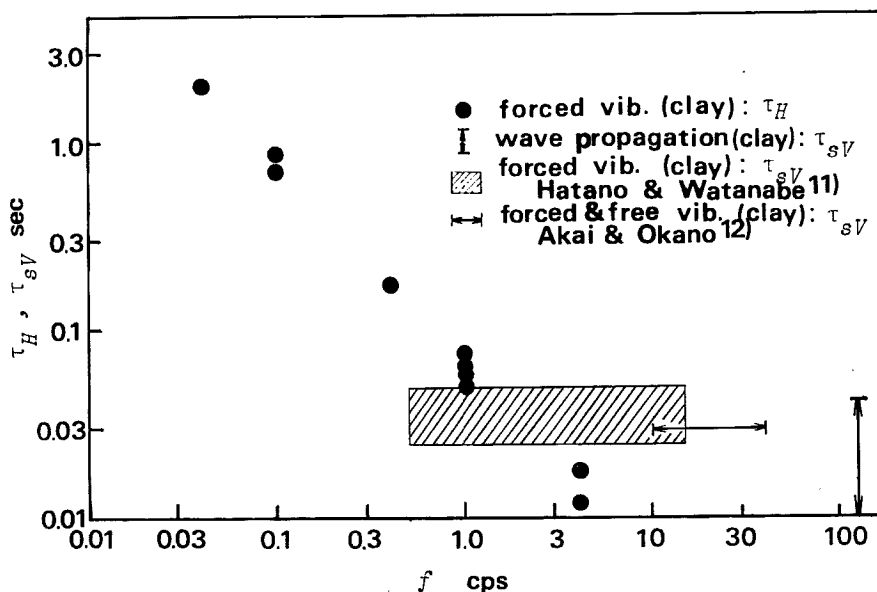


Fig. 26 Variation of the time constant with frequency.

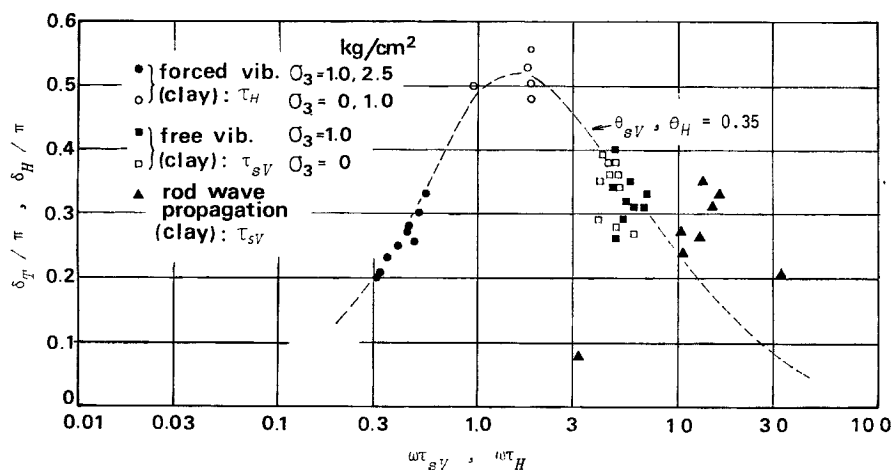


Fig. 27 Logarithmic decrements obtained from various tests.

もに変形係数は減少し，減衰定数は増加する。ひずみレベルによる減衰定数の変化の程度については Seed と Idriss¹³⁾ が Fig. 28 のようにまとめている。ここに，実線はデータの平均値であり，破線はそのバラツキの範囲を示している。このようにバラツキが大きいことの原因の1つとして，前述のような同一のひずみレベルでも減衰定数の周波数依存性が効いているものと考えられる。Fig. 27 に示されるデータでは δ_T/π はほぼ0.1～0.5にある。(17)式で示されるように減衰比 h は δ_T/π の半分であるから，結局 h は5～25%の範囲にあることになる。

6. 結 論

この研究では、粘性土の減衰特性が動的レオロジーの立場から考察された。波動伝播実験による粘性土中の波動減衰特性に関する実験結果を中心に、その他強制振動実験、自由振動実験による結果も併用して減衰特性の周波数依存性が確かめられた。

得られた結果の主たるものを列記すればつぎのとおりである。

- (1) 飽和粘性土中を伝播する rod wave の波速は拘束圧力の 0.4 乗に比例して増加する。また波速から求められた動的弾性係数 E_d は三軸試験から求められた静的弾性係数 E_s の 3～6 倍であり、弾性定数のひずみ速度依存性が顕著である。
- (2) 波動減衰の距離に対する割合はある応力レベル以上ではきわめて大きく、それ以下ではゆるやかである。この応力レベルは三軸圧縮強度 $(\sigma_1 - \sigma_3)_{max}$ の 20～25% に相当しており、また 1×10^{-3} 程度のひずみに対応している。これ以下の応力レベルでは、土の力学的挙動を粘弾性理論の立場から説明するのが有効である。
- (3) 過圧密粘土は正規圧密粘土に比べ弾性係数のひずみ速度効果が少なく、また対数減衰率も小さいという点を考慮すれば、より多くの弾性的性質を有しているといえる。
- (4) 同一ひずみレベルでも減衰定数の振動数依存性があり、その特性は弾性定数のひずみ速度効果をも含めた上で spring-Voigt モデルの特性を示す。減衰は $f \approx 5$ cps 付近で最大となり、実験で用いた粘土試料について振動数 0.04～120 cps の範囲で減衰比 k は 5～25% の範囲で変動する。
- (5) spring-Voigt モデルの時定数 τ_{sv} の振動数による変化の傾向は約 1 cps を境にして変化する。1 cps 以下では τ_{sv} は振動数の増加とともに減少し、1 cps 以上では 0.03 sec のほぼ一定の値となる。すなわち粘性土の時間応答特性が 1 cps の前後で変化し、1 cps 以上でクリープやリラクゼーション現象を伴わない、いわゆる動的領域に入る。

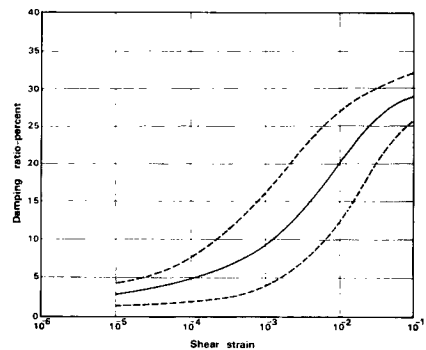


Fig. 28 Variation of damping ratio with the amplitude of shear strain for clays (after Seed and Idriss¹³⁾).

参 考 文 献

- 1) Salvadori, M. G., R. Skalak and P. Weidlinger: Waves and Shocks in Locking and Dissipative Media, Trans. of ASCE, Vol. 126, Part 1, 1961, pp. 305-333.
- 2) Seaman, L.: One-Dimensional Stress Wave Propagation in Soil, Stanford Research Inst., AD-632106, DASA 1757, 1966, pp. 1-163.
- 3) 霜上民生: 衝撃三軸装置による粘性土中の応力波伝播に関する研究, 京都大学修士論文(土木工学), 昭48, pp. 39-54.
- 4) 赤井浩一・霜上民生: Compacting Model による地盤内応力波伝播問題のアプローチ, 昭和47年度土木学会関西支部年次学術講演会講演概要, 昭47, III-12.
- 5) Akai, K., M. Hori, N. Ando and T. Shimogami: Shock Tube Study on Stress Wave Propagation in Confined Soils, Proc. of JSCE, No. 200, April, 1972, pp. 127-141.
- 6) Akai, K., M. Hori, T. Shimogami: Study on Stress Wave Propagation through Saturated Cohesive Soils by Means of Triaxial Shock Tube, Proc. of JSCE, No. 228, Aug., 1974, pp. 99-108.
- 7) 石黒良夫: 土中を伝播する横波速度の異方向性, 京都大学防災研究所年報, 第14号B, 昭46.4, pp. 631-641.
- 8) Hardin, B. O. and F. E. Richart, Jr.: Elastic Wave Velocities in Granular Soils, Proc. of ASCE, Vol.

- 89, No. SM1, 1963, pp. 33-65.
- 9) Marcuson, W. F. and H. E. Wahls: Time Effects on Dynamic Shear Modulus of Clays, Proc. of ASCE, Vol. 98, No. SM12, 1972, pp. 1359-1373.
 - 10) 広部康治：フーリエ解析による土中の波動減衰特性に関する基礎的研究，京都大学卒業論文(土木工学)，昭49.
 - 11) 畑野正・渡辺啓行：粘土，砂，碎石の動的，静的粘弾性定数ならびにポアソン比について，土木学会論文報告集，No. 164，昭44，pp. 33-49.
 - 12) 赤井浩一・岡野真久：線形粘弾性論による粘性土の減衰特性に関する考察，土木学会第26回年次学術講演会講演概要集，昭46，pp. 143-146.
 - 13) Seed, H. B. and I. M. Idriss: Soil Moduli and Damping Factors for Dynamic Response Analysis, Report No. EERC70-10, Univ. of Calif., Berkeley, Calif., Dec., 1970, pp. 10-14.